ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICE PHILIPPON

Sur des hauteurs alternatives. II

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 4 (1994), p. 1043-1065

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_4_1043_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 1043-1065

SUR DES HAUTEURS ALTERNATIVES. II

par Patrice PHILIPPON(*)

Introduction.

Ce texte est la continuation de [P2], nous y poursuivons notre étude des hauteurs de variétés projectives via leurs formes de Chow.

Dans un premier temps (§1) nous complétons substantiellement l'interprétation géométrique des hauteurs locales établie pour les variétés complexes dans [P2], §2, et la prolongeons pour les variétés définies sur $\mathbb{C}_p$. Ce dernier développement, formel, nous permet de présenter de façon plus uniforme les cas archimédiens et non-archimédiens dans le paragraphe suivant.

Soit K un corps de nombres, on pose $\mathcal{P}_K$ l'ensemble des classes de valeurs absolues équivalentes sur K. Si $v \in \mathcal{P}_K$ on note K_v le complété de K pour une valeur absolue associée à v et $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v. Le paragraphe 2 introduit diverses tailles pour la restriction d'une forme à une sous-variété projective V de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$.

Au paragraphe 2.A nous montrons quelques propriétés élémentaires des quantités introduites. Une question intéressante est de montrer que ces différentes notions sont équivalentes (au sens de [P2]), étendant ainsi le classique lemme de Gel'fond (*cf.* [W], p. 109) aux anneaux de coordonnées des variétés projectives. Nous reviendrons sur cette question dans un

(*) Ce travail a été réalisé à l'Université Friedrich Alexander (Erlangen) dans le cadre d'une bourse de la Fondation Alexander von Humboldt.
Mots-clés : Hauteur – Taille – Maison – Distance projective – Géométrie analytique – Variété projective – Mesure d'approximation – Intégration p-adique.
Classification A.M.S. : 11G35 – 11J17 –14G40 – 32A22.

travail ultérieur, mais notons dès à présent que, dans le cas d'une place archimédienne, une réponse qualitative positive est connue (voir [BGS], § 6.2.1, Rmq. 2). On fait aussi le lien avec la notion d'anneau taillé de [P3].

Au paragraphe 2.B nous introduisons des notions de *maison* et *taille* sur les extensions finies de $\mathbb{Q}$ généralisant simultanément les notions classiques correspondantes pour les nombres algébriques et les polynômes. Cette notion est utile dans l'étude des questions d'approximation par les nombres algébriques sur un corps de degré de transcendance > 0 fixé. Les notions habituellement utilisées dans ce cadre ne sont vraiment satisfaisantes que pour les éléments du corps fixé.

Et au paragraphe 2.C nous montrons comment, pour les places archimédiennes et lorsque V est une variété abélienne, la 2-norme $\|\cdot\|_{2,V}$ (*cf.* §2) peut s'interpréter en termes de produits hermitiens sur les fonctions thêta.

1. Interprétation géométrique des hauteurs locales.

Soit $v \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, V une sous-variété projective de dimension d et de degré $d(V)$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal de définition de V de rang $n-d$ dans $\mathbb{C}_v[X_0,\dots,X_n]$. On note $U_i = u_0^{(i)} \cdot X_0 + \cdots + u_n^{(i)} \cdot X_n$ $(i = 1,\dots,d)$ des formes linéaires en $X_0,\dots,X_n$ et de nouvelles indéterminées $u_j^{(i)}$ et $U_{d+1} = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{M}_\delta} u_{\mathfrak{m}}^{(d+1)} \cdot \mathfrak{m}$ une forme de degré δ en $X_0,\dots,X_n$ et linéaire en des indéterminées $u_{\mathfrak{m}}^{(d+1)}$ où $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_\delta$ parcourt l'ensemble des monômes en $X_0,\dots,X_n$ de degré δ. On note $\mathbb{C}_v[u]$ l'anneau des polynômes en les indéterminées $u_*^{(i)}$ $(i = 1,\dots,d+1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}_v$, $\mathfrak{M} = (X_0,\dots,X_n)$ et on définit

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{p}) =: (f \in \mathbb{C}_v[u];\ \exists k \geq 0,\ f \cdot \mathfrak{M}^k \subset (\mathfrak{p}, U_1,\dots,U_{d+1})),$$

l'*idéal éliminant* de $\mathfrak{p}$. Cet idéal $\mathfrak{E}(\mathfrak{p})$ est premier, principal (*cf.* [P1], prop. 1.5) et nous appelons *forme éliminante d'indice* $(1,\dots,1,\delta) \in \mathbb{N}^{d+1}$ de $\mathfrak{p}$ tout générateur de $\mathfrak{E}(\mathfrak{p})$.

Soit f une forme éliminante de $\mathfrak{p}$ (d'indice $(1,\dots,1,\delta)$), c'est un polynôme multihomogène en $u^{(1)},\dots,u^{(d+1)}$ de même degré égal à $\delta \cdot d(V)$ en $u^{(i)}$ $(i = 1,\dots d)$ et degré $d(V)$ en $u^{(d+1)}$. Soit $P \in \mathbb{C}_v[X_0,\dots,X_n]$ homogène de degré δ et $\rho : \mathbb{C}_v[u^{(d+1)}] \to \mathbb{C}_v$ la spécialisation définie par $\rho(U_{d+1}) = P$. Nous supposons $P \notin \mathfrak{p}$ de sorte que $\rho(f) \not\equiv 0$ est une *forme résultante* de $V \cap \{P = 0\}$.

La quantité $M_v(\rho(f)/f)$ ne dépend que de V et de P et pas de la forme éliminante f choisie, nous l'appellerons *hauteur locale* en v de P sur V. A l'instar du théorème de Wirtinger, nous interprétons cette quantité comme une intégrale sur V. Le cas complexe a été essentiellement traité dans [P2], §2, nous formalisons la démarche adoptée dans cette référence qui se généralisera ainsi au cas p-adique. Nous donnons également une interprétation similaire pour les fonctions "distance" $\mathrm{Dist}_v(V,x)$, où $x \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$, introduites dans [P1], déf. 1.15.

A) Le cas complexe.

On a donc $V \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de dimension d, et la (1,1)-forme de Fubini-Study Ω dont la puissance $\Omega^{\wedge d}$ donne une forme volume sur V. Précisément, dans le fibré tautologique $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ on écrit

$$\Omega(x) = \frac{1}{-i\pi} \cdot \partial\overline{\partial} \log \|x\| \quad \text{où} \quad \partial = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \cdot d\overline{x}_i,$$

et la normalisation de $\Omega^{\wedge d}$ sur V est donnée par le théorème de Wirtinger : $\int_V \Omega^{\wedge d} = d(V)$. On note encore μ_∞ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$ et $B_s(1)$ la boule unité de $\mathbb{C}^s$, on a $\int_{B_s(1)} \mu_\infty^{\otimes s} = \dfrac{\pi^s}{s!}$.

LEMME 1. — *Soit $g : V \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure associée à $\Omega^{\wedge d}$, on a :*

$$\int_V g(x) \cdot \Omega^{\wedge d}(x) = \left(\frac{(n+1)!}{\pi^{n+1}}\right)^d \cdot \int_{B_{n+1}(1)^d} \Big(\sum_{x \in \mathcal{X}_u} g(x) \Big) \cdot \mu_\infty^{\otimes (n+1)d}(u),$$

où $\mathcal{X}_u = \{x \in V(\mathbb{C});\, U_1(x) = \cdots = U_d(x) = 0\}$ lorsque cet ensemble est fini et $\mathcal{X}_u = \emptyset$ sinon. En particulier,

$$\left| \log M(\rho(f)/f) - \int_V \log\left(\frac{|P(x)|}{\|x\|^\delta}\right) \cdot \Omega^{\wedge d}(x) \right| \leq 4(d+2)\log(n+1) \cdot d(V) \cdot \delta.$$

Démonstration. — L'évaluation du membre de droite fait l'objet de la proposition 5 de [P2] lorsque $g(x) = \log(\|x\|/|x_0|)$. Et la démonstration de cette même proposition conduit à l'égalité du lemme ci-dessus, l'ensemble des u où $\mathcal{X}_u$ n'est pas fini étant μ_∞-négligeable. Appliquant cette égalité à la fonction $g(x) = \log(|P(x)|/\|x\|^\delta)$ on obtient la seconde partie du lemme. En effet, posons $\|\delta(x)\|^2 = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_\delta} |\mathfrak{m}(x)|^2$ et $N+1 = \binom{n+\delta}{\delta}$ alors, avec le théorème 1 et les propositions 1 et 4 de [P2],

$$\Big|\log M(\rho(f)/f) - \Big(\frac{(n+1)!}{\pi^{n+1}}\Big)^d \cdot \int_{B_{n+1}(1)^d} \Big(\sum_{x\in\mathcal{X}_u} \log\Big(\frac{|P(x)|}{\|\delta(x)\|}\Big)\Big) \cdot \mu_\infty^{\otimes(n+1)d}(u) - \sum_{\alpha=1}^{N+1}\frac{1}{2\alpha}\Big|$$

est majoré par $4(d+1)\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta$. D'où le résultat, car

$$\Big|\int_V \log\Big(\frac{\|x\|^\delta}{\|\delta(x)\|}\Big)\cdot\Omega^{\wedge d}(x) - \sum_{\alpha=1}^{N+1}\frac{1}{2\alpha}\Big| \le 1+\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta.$$

Rappelons encore que pour $x_0\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ on a défini dans [P1] une "distance" $\mathrm{Dist}(V,x_0)$. Plus précisément, on a un homomorphisme

$$\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0} : \mathbb{C}[u]\to\mathbb{C}[s]$$

défini par $M(U_i(x_0))\cdot\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}(u_j^{(i)}) = \sum_{k=0}^n x_k\cdot s_{j,k}^{(i)}$, et on pose

$$\mathrm{Dist}(V,x_0) = M(\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}(f)/f),$$

où f est une forme éliminante de $\mathfrak{p}$ (ici, d'indice $(1,\dots,1)$). En particulier, si V est réduite à un point x on obtient une fonction $\mathrm{Dist}(x,x_0)=\mathrm{Dist}(x_0,x)$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})\times\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ qui mesure la proximité de x à x_0. Notons encore Ω_{x_0} la $(1,1)$-forme qui s'écrit dans une carte affine centrée en x_0

$$\Omega_{x_0}(x) = \frac{1}{-i\pi}\cdot\partial\overline{\partial}\log\|z\|,$$

où $\|z\| = (|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)^{\frac12}$ est la distance de x à x_0 dans la carte affine choisie. Par exemple, la multiplicité $m_{x_0}(V)$ de V en x_0 est égale au nombre de Lelong $\lim\limits_{\rho\to0}\int_{V\cap B_n(\rho)}\Big(\frac{\partial\overline{\partial}\log\|z\|}{-i\pi}\Big)^{\wedge d}$. On notera encore

$$\int_{V\setminus\{x_0\}} g(x)\cdot\Omega_{x_0}^{\wedge d}(x) = \lim_{\substack{\rho\to0\\ r\to\infty}}\int_{V\cap(B_n(r)\setminus B_n(\rho))} g(z)\cdot\Big(\frac{\partial\overline{\partial}\log\|z\|}{-i\pi}\Big)^{\wedge d}.$$

Parallèlement au lemme 1, on peut énoncer

LEMME 1'. — *Soit $g : V\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure associée à $\Omega_{x_0}^{\wedge d}$, alors*

$$\Big(\frac{(n(n-1)/2)!}{\pi^{n(n-1)/2}}\Big)^d\cdot\int_{B_{n(n-1)/2}(1)^d}\Big(\sum_{x\in\mathcal{X}_{s,x_0}} g(x)\Big)\cdot\mu_\infty^{\otimes dn(n-1)/2}(s),$$

où $\mathcal{X}_{s,x_0} = \{x \in V ; \mathfrak{d}_{x_0}(U_1)(x) = \cdots = \mathfrak{d}_{x_0}(U_d)(x) = 0\}$ *lorsque cet ensemble est fini et* $\mathcal{X}_{s,x_0} = \emptyset$ *sinon, est égal à*

$$\int_{V\setminus\{x_0\}} g(x)\cdot\Omega_{x_0}^{\wedge d}(x) + m_{x_0}(V)\cdot g(x_0).$$

En particulier $d(V) - m_{x_0}(V) = \displaystyle\int_{V\setminus\{x_0\}} \Omega_{x_0}^{\wedge d}(x)$ *et, si* $x_0 \notin V$,

$$\Big|\log \mathrm{Dist}(V,x_0) - \int_V \log \mathrm{Dist}(x,x_0)\cdot\Omega_{x_0}^{\wedge d}(x)\Big| \le 12(d+1)\log(n+1)\cdot d(V).$$

Démonstration. — On ramène, par transformation unitaire, x_0 à $(1,0,\dots,0)$, et on remarque que x_0 apparaît $m_{x_0}(V)$ fois dans $\mathcal{X}_{s,x_0}$ pour s en dehors d'un ensemble μ_∞-négligeable. On reprend alors l'idée de la démonstration de la proposition 5 de [P2], en un point x tel que $z_1 \neq 0$ on paramètre l'intégrale du second membre par $s_{0,1}^{(\alpha)} = -\sum_{j=2}^{n} s_{0,j}^{(\alpha)}\cdot z_j/z_1$ $(\alpha = 1,\dots,d)$. On vérifie ainsi que ce second membre est égal à

$$\int_{V\cap\{z_1\neq 0\}} g(x)\cdot\Phi(z)^{\wedge d} + m_{x_0}(V)\cdot g(x_0)$$

où

$$\Phi(z) = \frac{n!}{\pi^n}\sum_{2\le i,j\le n}\Big(\int_{\mathcal{E}_x} s_{0,i}\cdot\overline{s_{0,j}}\cdot\mu_\infty^{\otimes(n-1)}(s)\Big)\cdot\frac{d(z_i/z_1)\wedge d(\overline{z_j/z_1})}{-2i}$$

avec $\mathcal{E}_x = \Big\{(s_{0,2},\dots,s_{0,n});\ \sum_{j=2}^{n}|s_{0,j}|^2 + \Big|\sum_{j=2}^{n} s_{0,j}\cdot z_j/z_1\Big|^2 \le 1\Big\}$. L'évaluation de l'intégrale sur $\mathcal{E}_x$ faite dans [P2], jointe à un calcul de développement montre que $\Phi(z) = \dfrac{1}{-i\pi}\cdot\partial\overline{\partial}\log\|z\| = \Omega_{x_0}(x)$.

Appliquons la première égalité du lemme à $g \equiv 1$. Le cardinal de $\mathcal{X}_{s,x_0}$ est égal à $d(V)$ pour s en dehors d'un ensemble μ_∞-négligeable, d'où l'évaluation de $\displaystyle\int_{V\setminus\{x_0\}} \Omega_{x_0}^{\wedge d}(x)$.

Appliquons encore la première égalité du lemme à

$$g(x) = \log M(\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}(U_{d+1})(x)/U_{d+1}(x)) = \log \mathrm{Dist}(x,x_0),$$

où U_{d+1} est ici une forme linéaire (*i.e.* $\delta = 1$ dans les notations du début du paragraphe). Si $x_0 \notin V$ on obtient, avec la proposition 4 et le théorème 1 de [P2] et en notant $\tilde{\mathfrak{d}}'_{x_0}$ l'homomorphisme déduit de $\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}$ en ne retenant que l'action sur $u_*^{(i)}$ $(i = 1,\dots,d)$,

$$\Big|\log M(\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}(f)/\tilde{\mathfrak{d}}'_{x_0}(f)) - \int_V \log \mathrm{Dist}(x,x_0)\cdot\Omega_{x_0}^{\wedge d}(x)\Big| \le 8(d+1)\log(n+1)\cdot d(V).$$

Mais d'après la remarque, p. 33 de [P1], on a

$$|\log M(\tilde{\mathfrak{d}}'_{x_0}(f)/f)| \leq 4(d+1)\log(n+1)\cdot d(V),$$

d'où le résultat.

Appliquant le lemme 1' à $g(x) = \log(|P(x)|/\|x\|^\delta)$ on obtient une formule approchée ayant la structure d'une *formule de Bochner-Martinelli* sur V si $x_0 \in V$.

COROLLAIRE. — *Pour tout $x_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X_0,\dots,X_n] \setminus \mathfrak{p}$ homogène de degré δ satisfaisant $x_0 \notin V \cap Z$, où Z est la variété des zéros de P dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, la quantité*

$$\Big| m_{x_0}(V)\cdot\log\Big(\frac{|P(x_0)|}{\|x_0\|^\delta}\Big) - \int_{V\setminus\{x_0\}} \log\Big(\frac{|P(x)|}{\|x\|^\delta}\Big)\cdot(\Omega^{\wedge d} - \Omega^{\wedge d}_{x_0})(x) - \log \mathrm{Dist}(V\cap Z, x_0)\Big|$$

est majorée par $16(d+2)\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta$.

Démonstration. — En réalité c'est à $g'(x) = \log(|P(x)|/M(U_{d+1}(x)))$ qu'on applique le lemme 1', ce qui, avec le théorème 1 de [P2], majore

$$\Big| \int_{V\setminus\{x_0\}} g'(x)\cdot\Omega^{\wedge d}_{x_0}(x) + m_{x_0}(V)\cdot g'(x_0) - \log M\big(\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}\circ\rho(f)/\tilde{\mathfrak{d}}'_{x_0}(f)\big)\Big|$$

par $8(d+1)\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta$. De plus, on a, par la remarque, p. 33 de [P1]

$$\big|\log M\big(\tilde{\mathfrak{d}}'_{x_0}(f)/\rho(f)\big) + \log M(\rho(f)/f)\big| \leq 4(d+1)\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta,$$

et enfin, par définition, $M\big(\tilde{\mathfrak{d}}_{x_0}\circ\rho(f)/\rho(f)\big) = \mathrm{Dist}(V\cap Z, x_0)$. Regroupant on obtient que

$$\Big| \int_{V\setminus\{x_0\}} g'(x)\cdot\Omega^{\wedge d}_{x_0}(x) + m_{x_0}(V)\cdot g'(x_0) - \log \mathrm{Dist}(V\cap Z, x_0) - \log M(\rho(f)/f)\Big|$$

est majoré par $12(d+1)\log(n+1)\cdot d(V)\cdot\delta$. On conclut avec le lemme 1 et en remarquant $|g(x) - g'(x)| \leq \log(n+1)\cdot\delta$.

On notera que si $x_0 \notin V$ le terme $m_{x_0}(V)\cdot g'(x_0)$ disparaît dans les inégalités ci-dessus et dans l'énoncé du corollaire on n'a pas de terme $m_{x_0}(V)\cdot\log(|P(x_0)|/\|x_0\|^\delta)$.

B) Le cas p-adique.

Soit maintenant $V \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C}_p)$, nous voulons trouver une mesure Ω_V^* sur V telle que

$$\int_V \Omega_V^* = d(V) \quad \text{et} \quad \int_V \log\Big(\frac{|P(x)|_p}{\|x\|_p^\delta}\Big) \cdot \Omega_V^* = \log M_p(\rho(f)/f).$$

Nous allons commencer par interpréter M_p par intégration dans $\mathbb{C}_p$, mais, $\mathbb{C}_p$ n'étant pas localement compact, il n'y a a priori pas de mesure de Haar sur le groupe $(\mathbb{C}_p, +)$ et nous devons définir notre intégration différemment.

Intégration sur $\mathbb{C}_p$: $\mathbb{Q}_p$ est canoniquement plongé dans $\mathbb{C}_p$ qui est le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Considérons une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$. Nous notons $\mathcal{O}_L$ l'anneau des $\mathbb{Z}_p$-entiers de L et $\mathfrak{p}_L$ son idéal maximal, nous posons $\ell = [L : \mathbb{Q}_p]$ et $q = p^f$ le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L$. Le corps L est localement compact et muni d'une mesure de Haar μ_L bien définie lorsque normalisée par $\mu_L(\mathcal{O}_L) = 1$. Ainsi, pour g fonction de L à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou plus généralement, un corps complet pour une valeur absolue), l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{O}_L} g(x) \cdot \mu_L(x)$ est définie par la formule $\displaystyle\lim_{k\to\infty} q^{-k} \cdot \sum_{\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L^k} g(\overline{x}) \in \mathbb{R}$, lorsque cette limite existe et ne dépend pas des choix des représentants $\overline{x} \in \mathcal{O}_L$ des classes de $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L^k$. Soit s un entier ≥ 1, $\overline{D} = \{x \in \mathbb{C}_p; |x|_p \leq 1\}$ et $B_s(1) = \overline{D}^s$ la boule unité dans $\mathbb{C}_p^s$.

DÉFINITION. — *Soit* $g : B_s(1) \to \mathbb{R}$, *nous dirons que* g *est* $B_s(1)$-*intégrable d'intégrale* $I = \displaystyle\int_{B_s(1)} g \cdot \mu_p^{\otimes s} \in \mathbb{R}$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une extension finie* L *de* $\mathbb{Q}_p$ *telle que pour toute extension* L' *finie, contenant* L *on ait :* $\Big|\displaystyle\int_{(\mathcal{O}_{L'})^s} g \cdot \mu_{L'}^{\otimes s} - I\Big| < \varepsilon$.

On vérifie $\displaystyle\int_{B_s(1)} g \cdot \mu_p^{\otimes s} \leq \sup\{g(x);\, x \in B_s(1)\}$ et $\displaystyle\int_{B_s(1)} \mu_p^{\otimes s} = \int_{\overline{D}} \mu_p = 1$.

PROPRIÉTÉS. — i) *L'ensemble des fonctions* $B_s(1)$-*intégrables (à valeurs dans* $\mathbb{R}$*) est un* $\mathbb{R}$-*espace vectoriel sur lequel* $\mu_p^{\otimes s}$ *est une mesure positive.*

ii) *Si* $P \in \mathbb{C}_p[T_1, \ldots, T_s]$ *alors* $\log|P|_p$ *est* $B_s(1)$-*intégrable d'intégrale égale à* $\log M_p(P) = \log\max\{t \in B_s(1);\, |P(t)|_p\}$.

Démonstration. — i) est clair. Pour ii) il suffit de traiter le cas $s = 1$ et on est alors ramené à démontrer le résultat pour un facteur linéaire de la forme $T - t_0$. On a dans ce cas, avec $\kappa = \max\Big\{-1;\ \Big[\dfrac{-\log|t_0|_p}{\log q}\cdot\ell\Big]\Big\}$,

$$\int_{\mathcal{O}_L} \log|t-t_0|_p\cdot\mu_L(t)$$

$$= \begin{cases} q^{-\kappa-1}\cdot\log|t_0|_p + \dfrac{\log q}{(q-1)\ell}\cdot\Big[\kappa\cdot q^{-\kappa-1} + \dfrac{q^{-\kappa}-1}{q-1}\Big] & \text{si } t_0\notin\mathcal{O}_L \\ \dfrac{-\log q}{(q-1)\ell} & \text{si } t_0\in\mathcal{O}_L. \end{cases}$$

Et donc $\displaystyle\int_{\overline{D}} \log|t-t_0|_p\cdot\mu_p(t) = \log\max\{1;|t_0|_p\}$ en tout cas.

Si $P = a\cdot\prod_{i=1}^{\delta}(T-t_i)$ on a par la multiplicativité de la norme de Gauss

$$\log M_p(P) = \log|a|_p + \sum_{i=1}^{\delta}\log\max\{1;|t_i|_p\} \geq \log\max\{t\in\overline{D};\ |P(t)|_p\},$$

et, avec le calcul précédent,

$$\log M_p(P) = \int_{\overline{D}}\log|P(t)|_p\cdot\mu_p(t) \leq \log\max\{t\in\overline{D};\ |P(t)|_p\}.$$

Remarque. — On vérifie $\displaystyle\int_{\overline{D}} g\cdot\mu_p = 0$ si $g = 0$ sur $\{x\in\mathbb{C}_p;\ |x|_p = 1\}$, l'intégrale sur $\mathbb{C}_p$ ci-dessus est à rapprocher de celle de Schnirelman.

Intégration sur $V\subset\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_p)$: supposons $V\not\subset\{X_0 = 0\}$, et notons V_0 l'affinoïde $V\cap\{|X_i|_p\leq|X_0|_p;\ i = 1,\dots,n\}$ (*cf.* [FP], § 3.4.7). Soit $\widetilde{B} := \mathbb{C}_p\langle X_1,\dots,X_n\rangle/\tilde{\mathfrak{p}}$ l'algèbre affinoïde associée à V_0, si $\tau\in M_{d,n}(B(1))$ est telle que $\widetilde{B}$ soit finie sur $\mathbb{C}_p\langle\tau(Y_1),\dots,\tau(Y_d)\rangle$, où $\tau(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} u_j^{(i)}X_j$ $(i = 1,\dots,d)$, et si $(u_0^{(1)},\dots,u_0^{(d)})\in B_d(1)$ on a

$$\mathcal{X}_u = \tau^{-1}(u_0^{(1)},\dots,u_0^{(d)})\cap V_0.$$

L'ensemble $\mathcal{X}_u$ est fini pour μ_p-presque tout $u\in B_{(n+1)d}(1)$.

DÉFINITION. — *Soit $g : V\to\mathbb{R}$, nous dirons que g est Ω_V^*-intégrable d'intégrale $I = \displaystyle\int_V g\cdot\Omega_V^*\in\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction $G(u) = \sum_{x\in\mathcal{X}_u} g(x)$ si $\mathcal{X}_u$ est fini et $= 0$ sinon, est $B_{(n+1)d}(1)$-intégrable, d'intégrale I. Autrement dit,*

$$\int_V g\cdot\Omega_V^* =: \int_{B_{(n+1)d}(1)}\Big(\sum_{x\in\mathcal{X}_u} g(x)\Big)\cdot\mu_p^{\otimes(n+1)d}(u).$$

Remarque. — Le mesure Ω_V^* est globale et ne s'obtient pas comme limite sur L, extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, de mesures sur $V(L)$. Ces dernières relèvent de la géométrie analytique p-adique souple tandis que notre définition s'interprète en géométrie rigide.

LEMME 2. — *Avec la définition ci-dessus, on a*

$$d(V) = \int_V \Omega_V^* \quad \text{et} \quad \log M_p(\rho(f)/f) = \int_V \log\Big(\frac{|P(x)|_p}{\|x\|_p^\delta}\Big) \cdot \Omega_V^*.$$

Démonstration. — Soit $\lambda \in \mathbb{C}_p$, avec la notation $\mathcal{X}_u$ du lemme 1 considérons l'intégrale

$$I_\lambda = \int_{B_{(n+1)d}(1)} \Big(\sum_{x \in \mathcal{X}_u} \log\Big(\frac{|P(\lambda x)|_p}{\|x\|_p^\delta}\Big)\Big) \cdot \mu_p^{\otimes(n+1)d}(u).$$

Par définition, on a

$$I_\lambda = \log|\lambda|_p \cdot \delta \cdot \int_V \Omega_V^* + \int_V \log\Big(\frac{|P(x)|_p}{\|x\|_p^\delta}\Big) \cdot \Omega_V^*.$$

Fixons $u \in B_{(n+1)d}(1)$ tel que $\mathcal{X}_u \neq \emptyset$ et notons ρ_u la spécialisation correspondante, on a

$$\rho_u(\rho(f)/f) = \prod_{x \in \mathcal{X}_u} \frac{P(x)}{U_{d+1}(x)}.$$

Intégrons sur les indéterminées $u_*^{(d+1)}$, on obtient avec $N+1 = \binom{n+\delta}{\delta}$

$$\int_{B_{N+1}(1)} \log|\rho_u(\rho(f)/f)|_p \cdot \mu_p^{\otimes(N+1)} = \sum_{x \in \mathcal{X}_u} \log(|P(x)|_p/\|x\|_p^\delta),$$

car $\displaystyle\int_{B_{N+1}(1)} \log|U_{d+1}(x)|_p \cdot \mu_p^{\otimes(N+1)} = \log\max\{|\mathfrak{m}(x)|_p;\ \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_\delta\} = \|x\|_p^\delta$ d'après la propriété ii). Par ailleurs, f étant de degré $d(V)$ par rapport aux indéterminées $u_*^{(d+1)}$ l'ensemble $\mathcal{X}_u$ est de cardinal $d(V)$ pour u en dehors d'un ensemble μ_p-négligeable. Reportant dans l'intégrale I_λ on a

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \log|\lambda|_p \cdot \delta \cdot d(V) \\ &\quad + \int_{B_{(n+1)d}(1) \times B_{N+1}(1)} \log|\rho(f)/f|_p \cdot \mu_p^{\otimes(n+1)d} \otimes \mu_p^{\otimes(N+1)} \\ &= \log|\lambda|_p \cdot \delta \cdot d(V) + \log M_p(\rho(f)/f) \end{aligned}$$

encore d'après la propriété ii). Comparant les deux évaluations de I_λ on vérifie la première égalité du lemme lorsque $|\lambda|_p$ tend vers l'infini et la seconde avec $\lambda = 1$.

On peut également définir, par analogie avec le lemme 1', des mesures $\Omega^*_{x_0,V}$ pour $x_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}_p)$. Et on démontre un lemme 2' pendant du cas complexe. Plus précisément, on pose

$$\int_{V\setminus\{x_0\}} g(x)\cdot\Omega^*_{x_0,V}(x) =: \int_{B_{n(n-1)/2}(1)^d} \Big(\sum_{x\in\mathcal{X}'_{s,x_0}} g(x)\Big)\cdot \mu_p^{\otimes dn(n-1)/2}(s),$$

où $\mathcal{X}'_{s,x_0} = \big\{x \in V,\ x \neq x_0;\ \mathfrak{d}_{x_0}(U_1)(x) = \cdots = \mathfrak{d}_{x_0}(U_d)(x) = 0\big\}$ lorsque cet ensemble est fini et $\mathcal{X}'_{s,x_0} = \emptyset$ sinon.

Soit V une sous-variété projective de $\mathbb{P}_n$ définie sur un corps de nombres K, de dimension d. Pour toute place $v \in \mathcal{P}_K$ on définit les mesures $\Omega^*_{V,v}$ et $\Omega^*_{x_0,V,v}$ sur $V(\mathbb{C}_v)$ par

$$\begin{array}{llll} \Omega^*_{V,v} = \Omega^{\wedge d} & \text{et} & \Omega^*_{x_0,V,v} = \Omega^{\wedge d}_{x_0} & \text{si } v|\infty, \\ \Omega^*_{V,v} = \Omega^*_{V(\mathbb{C}_p)} & \text{et} & \Omega^*_{x_0,V,v} = \Omega^*_{x_0,V(\mathbb{C}_p)} & \text{si } v|p. \end{array}$$

On notera aussi $\Omega_{V,v} = \dfrac{1}{d(V)}\cdot\Omega^*_{V,v}$, et si $g \geq 0$ sur $V(\mathbb{C}_v)$ alors $\displaystyle\int_{V(\mathbb{C}_v)} g\cdot\Omega_{V,v} \geq 0$.

Soit $P \in \mathbb{C}_v[X_0,\ldots,X_n]$ homogène de degré δ, on considère comme dans l'introduction une forme éliminante f d'indice $(1,\ldots,1,\delta) \in \mathbb{N}^{d+1}$ de V et ρ la spécialisation de U_{d+1} en P. On note aussi $\varepsilon_v = 1$ si $v = \infty$ et $\varepsilon_v = 0$ si $v = p$, rappelons qu'on a défini dans [P1] des fonctions "distance" $\mathrm{Dist}_v(V,x)$ pour tout $v \in \mathcal{P}_K$. Récapitulant les énoncés complexes (lemmes 1 et 1') et p-adique (lemme 2) précédents on peut énoncer

PROPOSITION 1. — *On reprend les notations ci-dessus, soit* $x_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$.

i) $\displaystyle\int_{V(\mathbb{C}_v)} \Omega^*_{V,v} = d(V)$ *et* $\displaystyle\int_{V(\mathbb{C}_v)} \Omega_{V,v} = 1$

ii) $\displaystyle\int_{V(\mathbb{C}_v)\setminus\{x_0\}} \Omega^*_{x_0,V,v} = d(V) - m_{x_0}(V)$

iii) *si* $\rho(f) \not\equiv 0$ *(i.e.* $P \notin \mathfrak{p}$*) on a*

$$\Big|\log M_v(\rho(f)/f) - \int_{V(\mathbb{C}_v)} \log\Big(\frac{|P(x)|_v}{\|x\|_v^\delta}\Big)\cdot\Omega^*_{V,v}\Big| \leq 4\varepsilon_v(d+2)\log(n+1)\cdot\delta\cdot d(V)$$

iv) *si* $x_0 \notin V(\mathbb{C}_v)$ *on a*

$$\Big|\log \mathrm{Dist}_v(V,x_0) - \int_{V(\mathbb{C}_v)} \log \mathrm{Dist}_v(x,x_0)\cdot\Omega^*_{x_0,V,v}\Big| \leq 12\varepsilon_v(d+1)\log(n+1)\cdot d(V)$$

v) *soit* $g(x) = \log(|P(x)|_v/\|x\|_v^\delta)$ *et* Z *la variété des zéros de* P *dans* $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$, *alors, si* $x_0 \notin V \cap Z$,

$$\left| m_{x_0}(V) \cdot g(x_0) - \int_{V(\mathbb{C}_v)\setminus\{x_0\}} g(x) \cdot (\Omega^*_{V,v} - \Omega^*_{x_0,V,v}) - \log \mathrm{Dist}_v(V \cap Z, x_0) \right|$$

est majoré par $16\varepsilon_v(d+2)\log(n+1) \cdot d(V) \cdot \delta$.

Démonstration. — Le cas $v = \infty$ se déduit directement des lemmes 1 et 1' et de leur corollaire. De même, lorsque $v = p$ les assertions i) et iii) découlent du lemme 2. Pour montrer ii) et iv) on reprend textuellement la fin de la preuve du lemme 1' tandis que pour v) c'est la preuve du corollaire des lemmes 1 et 1' qu'on reproduit mot pour mot. On notera que l'analogue de la première assertion du lemme 1' dans le cas $v = p$ est une conséquence immédiate de la définition de $\Omega^*_{x_0,V}$.

2. Tailles locales de sections globales sur les variétés projectives.

Soit $v \in \mathcal{P}_\mathbb{Q}$ et V une variété algébrique définie sur $\mathbb{C}_v$ plongée dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$, de dimension d. On note $\mathfrak{p}$ l'idéal homogène, premier de définition de V dans $A = \mathbb{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$ et $B = A/\mathfrak{p}$ l'anneau quotient.

Soit $P \in \mathbb{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène de degré δ, on pose :

$$H_{\mathfrak{p},v}(P) = \inf\{H_v(Q);\ Q \in A,\ Q \equiv P(\mathfrak{p})\},$$

$$\|P\|_{V,v} = \sup\left\{\frac{|P(x)|_v}{\|x\|_v^\delta};\ x \in V\right\},$$

$$\|P\|_{s,V,v} = \left(\int_V \frac{|P(x)|^s}{\|x\|^{s\delta}} \cdot \Omega_{V,v}(x)\right)^{1/s},$$

$$M_{V,v}(P) = \exp\left(\int_V \log(|P(x)|_v/\|x\|_v^\delta) \cdot \Omega_{V,v}(x)\right)$$

où $\Omega_{V,v}$ désigne la mesure définie à la fin du paragraphe précédent. Si $P \in \mathfrak{p}$ on a, par convention, $M_{V,v}(P) = H_{\mathfrak{p},v}(P) = \|P\|_{V,v} = 0$.

Ces trois quantités ne dépendent que de la classe de P modulo $\mathfrak{p}$ et définissent donc bien des applications de B à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels ≥ 0. Dans la suite de ce paragraphe, nous fixons la place v et, pour alléger les notations, nous omettrons parfois les indices v. Rappelons que nous associons également à v un nombre $\varepsilon_v \in \{0, 1\}$ de la façon suivante : $\varepsilon_v = 1$ si $v = \infty$ et $\varepsilon_v = 0$ sinon.

A) Premières propriétés.

On a clairement $H_{\mathfrak{p}}(P) = \|P\|_V = 0$ si et seulement si $P \in \mathfrak{p}$, et d'après la proposition 1)iii) $M_V(P) = 0$ si et seulement si $\rho(f) \equiv 0$, c'est-à-dire encore si et seulement si $P \in \mathfrak{p}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}_v^*$ on a $H_{\mathfrak{p}}(\lambda P) = |\lambda|_v \cdot H_{\mathfrak{p}}(P)$, $\|\lambda P\|_V = |\lambda|_v \cdot \|P\|_V$ et $M_V(\lambda P) = |\lambda|_v \cdot M_V(P)$ car $\displaystyle\int_V \Omega_{V,v} = 1$. On remarquera encore que, si $P, Q \in A$ et e est un entier ≥ 0, on a $M_V(PQ) = M_V(P) \cdot M_V(Q)$ et $\|P^e\|_V = \|P\|_V^e$.

La proposition suivante éclaircit les positions relatives des différentes notions introduites.

PROPOSITION 2. — *Pour $v \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ et $P \in A$ fixés, la fonction $s \to \|P\|_{s,V,v}$ est croissante, bornée par $\|P\|_{V,v}$ et satisfait*

$$\lim_{s\to 0} \|P\|_{s,V,v} = M_{V,v}(P) \quad \textit{et, si } v = \infty, \ \lim_{s\to\infty} \|P\|_{s,V,v} = \|P\|_{V,v}.$$

En particulier on a, pour tout $s > 0$,

$$M_{V,v}(P) \leq \|P\|_{s,V,v} \leq \|P\|_{V,v} \leq H_{\mathfrak{p},v}(P) \cdot (n+1)^{\delta\varepsilon_v}.$$

Démonstration. — On suit de près [HLP], §6.7-10, en utilisant le fait que Ω_V est une mesure positive de masse totale 1 sur V.

Notons $g(x) = \dfrac{|P(x)|}{\|x\|^\delta} \geq 0$, et soit $0 < s' \leq s$, on a, avec $\alpha = s'/s$,

$$\|P\|_{s',V}^{s'} = \int_V g^{s\alpha} \cdot \Omega_V = \|P\|_{s,V}^{s\alpha} \cdot \int_V \Big(\frac{g^s}{\|P\|_{s,V}^s}\Big)^\alpha \cdot 1^{1-\alpha} \cdot \Omega_V$$

$$\leq \|P\|_{s,V}^{s\alpha} = \|P\|_{s,V}^{s'},$$

car $\Big(\dfrac{g(x)^s}{\|P\|_{s,V}^s}\Big)^\alpha \cdot 1^{1-\alpha} \leq \alpha \cdot \dfrac{g(x)^s}{\|P\|_{s,V}^s} + (1-\alpha)$ (*cf.* [HLP], thm. 9, p. 17).

De même $\log(g^s/\|P\|_{s,V}^s) \leq g^s/\|P\|_{s,V}^s - 1$ et, après intégration contre Ω_V, on a $s \cdot \log(M_V(P)/\|P\|_{s,V}) \leq 0$ d'où $M_V(P) \leq \|P\|_{s,V}$. Maintenant posons $g'(x) = g(x)/\|P\|_V \leq 1$, on a

$$\log\Big(\frac{\|P\|_{s,V}}{\|P\|_V}\Big) \leq \frac{1}{s} \cdot \Big(\Big(\frac{\|P\|_{s,V}}{\|P\|_V}\Big)^s - 1\Big) = \frac{1}{s} \cdot \int_V (g'^s - 1) \cdot \Omega_V,$$

et $\dfrac{1}{s} \cdot (g'^s - 1) - \log g' \leq \dfrac{s(\log g')^2}{1 - s\log g'}$.

D'où résulte

$$\log(\|P\|_{s,V}/M_V(P)) = \log\Big(\frac{\|P\|_{s,V}}{\|P\|_V}\Big) - \int_V \log g' \cdot \Omega_V$$
$$\leq s \cdot \int_V \frac{(\log g')^2}{1 - s\log g'} \cdot \Omega_V \leq s \cdot \int_V (\log g')^2 \cdot \Omega_V.$$

La fonction $(\log g')^2$ étant Ω_V-intégrable ceci entraîne

$$\lim_{s\to 0} \|P\|_{s,V}/M_V(P) = 1.$$

On a clairement $\|P\|_{s,V} \leq \|P\|_V$ pour tout $s > 0$ et la fonction $s \to \|P\|_{s,V}$ croissante, bornée, a une limite $\leq \|P\|_V$ quand s tend vers ∞. De plus, si $v = \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $g(x) \geq \|P\|_V - \varepsilon$ dans un ensemble de mesure $\mu > 0$. Ainsi,

$$\|P\|_{s,V} \geq (\|P\|_V - \varepsilon) \cdot \mu^{1/s} \quad \text{et} \quad \lim_{s\to\infty} \|P\|_{s,V} \geq \|P\|_V - \varepsilon,$$

ce qui entraîne $\lim_{s\to\infty} \|P\|_{s,V} = \|P\|_V$. Enfin, on vérifie aisément $\|P\|_V \leq H_{\mathfrak{p}}(P) \cdot (n+1)^{\delta\varepsilon_v}$.

Remarques. — 1) Soit $x_0 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$ et Z la variété des zéros de P dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$, on déduit du lemme 2.2 de [P1]

$$\Big(\frac{M_{V,v}(P)}{M_v(P)}\Big)^{d(V)} \cdot \mathrm{Dist}_v(V \cap Z, x_0) \leq (n+1)^{15\varepsilon_v(d+1)d(V)\delta}$$
$$\cdot [\mathrm{Dist}_v(V, x_0) + \mathrm{Dist}_v(Z, x_0)].$$

Si $H \geq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ et $\mathrm{Dist}_v(Z, x_0) \leq \min_{x\in V}\{1; H.\mathrm{Dist}_v(x, x_0)^\eta\}$, on déduit de la preuve de la proposition 2.5 de [P1]

$$\Big(\frac{M_{V,v}(P)}{M_v(P)}\Big)^{d(V)} \cdot \mathrm{Dist}_v(V \cap Z, x_0) \leq H^{d+1} \cdot (n+1)^{45\varepsilon_v(d+1)^3 d(V)\delta}$$
$$\cdot \mathrm{Dist}_v(V, x_0)^\eta,$$

où $d(V)$ est le degré de V.

2) Si $K \subset \mathbb{C}_v$ est un corps de nombres, $P \in K[X_0, \ldots, X_n]$ et V est définie sur K, on déduit des propositions 1.12 et 1.17 de [P1]

$$(n+1)^{-27\varepsilon_v(d+1)[K:\mathbb{Q}]\delta} \cdot \exp\Big(-13[K:\mathbb{Q}]\Big(\frac{h(V)}{d(V)} \cdot \delta + h(Z)\Big)\Big)$$
$$\leq \frac{M_{V,v}(P)}{M_v(P)} \leq (n+1)^{8\varepsilon_v(d+1)\delta},$$

où les définitions de $h(V)$, $h(Z) = h(P)$ sont celles de [P1]. Dans la même situation la proposition 1)iii) sommée sur $v \in \mathcal{P}_K$ s'écrit

$$|h(V \cap Z) - \delta \cdot h(V) - h_V(Z) \cdot d(V)| \leq 4(d+3)\log(n+1) \cdot \delta \cdot d(V),$$

où $h_V(Z) = h_V(P) = \sum_{v \in \mathcal{P}_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log M_{V,v}(P)$.

Lorsque $V = \mathbb{P}_n$ on sait que

$$H_{(0)}(P) \cdot (n+1)^{-5\delta} \leq M_{\mathbb{P}_n}(P) \leq \|P\|_{\mathbb{P}_n} \leq H_{(0)}(P) \cdot (n+1)^{\delta},$$

il est intéressant de voir dans quelle mesure les inégalités ci-dessus peuvent s'étendre pour une variété projective V quelconque. Dans ce cas général, on a facilement les inégalités suivantes

$$M_V(P) \leq \|P\|_V \leq H_{\mathfrak{p}}(P) \cdot (n+1)^{\delta\varepsilon_v}$$

à partir des définitions et avec $\varepsilon_v = 1$ si $v = \infty$ et $\varepsilon_v = 0$ sinon.

Problème de comparaison. — Existe-t-il des réels $a = a_v(V)$, $b = b_v(V)$, $c = c_v(V) \geq 1$ tels qu'on ait

$$a^{-1} \cdot b^{-\delta} \cdot H_{\mathfrak{p}}(P) \leq \|P\|_V \leq H_{\mathfrak{p}}(P) \cdot (n+1)^{\delta\varepsilon_v}$$

et

$$c^{-\delta} \cdot \|P\|_V \leq M_V(P) \leq \|P\|_V$$

pour tout $P \in A$?

Pour clarifier la situation, disons que nous voulons montrer l'existence d'un réel $c_v(V)$ tel que $\|P\|_{V,v} \leq c_v(V)^{\delta} \cdot M_{V,v}(P)$ pour tout $P \in A$, homogène de degré δ. En quelque sorte

$$c_v(V) = \sup_{\delta} \left\{ \sup\{(\|P\|_{V,v}/M_{V,v}(P))^{1/\delta}\} \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

où le second supremum est pris sur A_δ (les formes de degré δ de A). On a $c_v(V) \geq 1$ et, bien sûr, rien ne nous assure qu'avec cette définition $c_v(V) < +\infty$, mais si tel est le cas alors $c_v(V)$ est le meilleur réel qui convienne dans le problème de comparaison ci-dessus. Lorsque $v = +\infty$ il est indiqué dans [BGS], §6.2.1, Rmq. 2, que $c_v(V) < +\infty$ pour toute sous-variété V de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}_v)$. On souhaiterait encore estimer $c_v(V)$, par exemple quand V est définie sur un corps de nombres.

Si $c_v(V) < +\infty$ la fonction $M_{V,v}$ définit une *taille locale* sur $A/\mathfrak{p}$ au sens de [P3]. Plus précisément, on considère la famille d'écarts $(|P(x)|_v/\|x\|_v^{d^0P})_{x \in V(\mathbb{C}_v)}$ et la valeur absolue ultramétrique $(c_v(V)^{d^0P})$ pour $P \in A/\mathfrak{p}$. On munit la première famille de la mesure $\Omega_{V,v}$ et on a $T_v(P) = M_{V,v}(P)$ et

$$T_v(P_1, \ldots, P_k) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{\|P_i\|_{V,v}\} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{T_v(P_i)\} \cdot \max_{1 \leq i \leq k} \left\{c_v(V)^{d^0P_i}\right\}.$$

Si V est définie sur un corps de nombres K et si

$$c(V) := \sum_{v\in\mathcal{P}_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot c_v(V) < +\infty,$$

alors on peut définir une *taille globale* (*cf.* [P3]) par

$$T(P) = h_V(P) := \sum_{v\in\mathcal{P}_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot \log M_{V,v}(P)$$

pour $P \in K[X_0,\dots,X_n]/\mathfrak{p}$. Si $\lambda \in K^*$ on vérifie $h_V(\lambda) = 0$ et pour $P_1,\dots,P_k \in K[X_0,\dots,X_n]/\mathfrak{p}$ on a $T_v(P_1,\dots,P_k) \neq 1$ pour au plus un nombre fini de places $v \in \mathcal{P}_K$. On peut trouver $u \in K^*$ tel que $\max\limits_{1\le i\le k}\{T_v(uP_i)\} \ge 1$ et ainsi

$$\begin{aligned}\log\big(\overline{T}(uP_1,\dots,uP_k)\big) &\le \sum_{v\in\mathcal{P}_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \cdot \log\max\{\overline{T}(uP_1);\dots;\overline{T}(uP_k)\}\\ &\le \log(T(P_1,\dots,P_k)) + c(V)\cdot \max_{1\le i\le k}\{d^0P_i\}.\end{aligned}$$

Sans préjuger du fait $c_v(V) < +\infty$ ou non, nous mentionnons ici deux corollaires de nos définitions. Le premier est un analogue du classique lemme de Gel'Fond (*cf.* [W], lemme 4.2.14, p. 109) pour $A/\mathfrak{p}$.

COROLLAIRE. — *Avec les notations ci-dessus on a, pour* $P, Q \in A$,

$$c_v(V)^{-(d^0P+d^0Q)} \cdot \|P\|_{V,v}\cdot\|Q\|_{V,v} \le \|PQ\|_{V,v} \le \|P\|_{V,v}\cdot\|Q\|_{V,v},$$

$$M_{V,v}(P+Q) \le M_{V,v}(P)\cdot c_v(V)^{d^0P} + M_{V,v}(Q)\cdot c_v(V)^{d^0Q}.$$

Démonstration. — On utilise la comparaison entre $\|P\|_V$ et $M_V(P)$ donnée par $c_v(V)$, et les relations évidentes $M_V(PQ) = M_V(P)\cdot M_V(Q)$, $\|PQ\|_V \le \|P\|_V\cdot\|Q\|_V$ et $\|P+Q\|_V \le \|P\|_V + \|Q\|_V$.

COROLLAIRE. — *Si* f *est une forme éliminante d'indice* $(1,\dots,1,\delta)\in \mathbb{N}^{d+1}$ *de* V *et* $P \in A$ *est homogène de degré* δ, *on note* ρ *la spécialisation de* U_{d+1} *en* P. *Alors*

$$\|P\|_{V,v} \ge M(\rho(f)/f)\cdot(n+1)^{-4\varepsilon_v(d+2)\delta d(V)},$$

et

$$\|P\|_{V,v} \le M(\rho(f)/f)\cdot\big(c_v(V)\cdot(n+1)^{4\varepsilon_v(d+2)d(V)}\big)^{\delta}.$$

Démonstration. — On compare $M(\rho(f)/f)$ à $M_V(P)$ par la proposition 1)iii) et ensuite on utilise la définition de $c_v(V)$.

B) Maisons et tailles sur les extensions pures de type fini de $\mathbb{Q}$.

Nous voulons montrer dans cette section comment adapter les idées de ce paragraphe pour étendre la notion de taille d'un nombre algébrique (sur $\mathbb{Z}$) aux éléments algébriques sur un anneau de polynômes. Plus précisément, donnons-nous $z_1, \dots, z_d$ des éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ dans un corps K (de caractéristique 0). Soit ζ un élément de K entier sur $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]$, lui est associé un unique polynôme E irréductible dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d, Y]$ tel que :

$$E(z_1, \dots, z_d, \zeta) = \zeta^w + \sum_{i=0}^{w-1} a_i(z_1, \dots, z_d) \cdot \zeta^i = 0$$

où $a_i \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_d]$ et $w \in \mathbb{N}^*$ est le degré de ζ sur $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]$.

Le cas extrême $d = 0$ correspond aux entiers algébriques sur $\mathbb{Z}$ pour lequel on peut prendre $K = \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ et on a la classique notion de maison de ζ, notée $\overline{|\zeta|}$, qui est le maximum des valeurs absolues complexes des conjugués de ζ. Cette maison coïncide dans ce cas avec la taille de ζ et est la quantité de base intervenant dans les mesures d'approximation par exemple. Lorsque $d > 0$ on peut définir la taille de ζ comme la taille du polynôme E, mais cette quantité ne se comporte pas assez bien pour l'addition ou la multiplication de deux éléments ζ et ζ'. Une notion moins satisfaisante consiste à choisir une base d'une extension finie de $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]$ contenant ζ et à définir la taille de ζ comme le maximum des tailles des coefficients de l'écriture de ζ sur cette base (*cf.* [W], chap. 1, §1). La réduction au cas $d = 0$ montre la faiblesse de cette notion trop peu canonique.

Soit $v \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, on remplace maintenant $\mathbb{Z}$ par un anneau intègre $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_v$. Notons V l'hypersurface définie par E dans $\mathbb{C}_v^{d+1}$, au-dessus de tout $\tilde{x} \in \mathbb{C}_v^d$ la variété V a w points $(\tilde{x}, y_1), \dots, (\tilde{x}, y_w)$ où $y_1, \dots, y_w$ sont les solutions de $E(\tilde{x}, Y) = 0$ (comptées avec multiplicités). Nous associons $x = (1, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}_v^{d+1}$ à tout $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}_v^d$ et nous notons $\overline{|\zeta(x)|}_v = \max\{|y_1|_v, \dots, |y_w|_v\}$ (rappelons que $E = Y^w + \sum_{i=0}^{w-1} a_i \cdot Y^i$ avec $a_i \in \mathcal{O}[X_1, \dots, X_d]$).

DÉFINITION. — *Nous appellerons poids de* ζ,

$$p(\zeta) = \max_{0 \le i \le w-1} \{d^0 a_i / (w - i)\},$$

et (v)*-maison de* ζ,

$$\overline{|\zeta|}_v = \sup\{\overline{|\zeta(x)|}_v \, ; \, \tilde{x} \in B_d(1)\}.$$

Si $\zeta = a \in \mathcal{O}[z_1, \ldots, z_d]$ alors $E = Y - a$, $w = 1$ et dans ce cas $p(a)$ est simplement le degré de a en $z_1, \ldots, z_d$ tandis que

$$\overline{|a|}_v = \sup\{|a(\tilde{x})|_v \,;\, \|\tilde{x}\| = 1\}.$$

On a alors pour tout ζ' entier sur $\mathcal{O}[z_1, \ldots, z_d]$, $p(a\zeta') = p(a) + p(\zeta')$.

LEMME 3. — *Soit $v \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, $x = (1, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}_v^{d+1}$, $w, w' \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{0, \ldots, w-1\}$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ et ζ, ζ' des entiers sur $\mathcal{O}[z_1, \ldots, z_d]$ de degrés w et w' respectivement.*

i) $|a_i(\tilde{x})|_v \leq \binom{w}{i}^{\varepsilon_v} \cdot \overline{|\zeta(x)|}_v^{w-i}$, *avec* $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}_v^d$,

ii) $\dfrac{\overline{|\zeta(x)|}_v}{\|x\|_v^s} \leq 2^{\varepsilon_v} \cdot \max\left\{1; \max\left\{\dfrac{|a_i(\tilde{x})|_v}{\|x\|_v^{(w-i)s}}; i = 0, \ldots, w-1\right\}\right\}$,

iii) $\overline{|(\zeta+\zeta')(x)|}_v \leq \overline{|\zeta(x)|}_v + \overline{|\zeta'(x)|}_v$ *si* $v = \infty$
$\leq \max\{\overline{|\zeta(x)|}_v, \overline{|\zeta'(x)|}_v\}$ *si* $v = p$,

iv) $\overline{|(\zeta\zeta')(x)|}_v \leq \overline{|\zeta(x)|}_v \cdot \overline{|\zeta'(x)|}_v$ et $\overline{|\zeta^m(x)|}_v = \overline{|\zeta(x)|}_v^m$.

Démonstration. — i) On écrit $E(\tilde{x}, Y) = \prod_{i=1}^{w} (Y - y_i)$ d'où

$$a_i(\tilde{x}) = (-1)^{w-i} \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_{w-i} \leq w} y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_{w-i}},$$

et on majore simplement.

ii) Soit $y = y_i$ ($i \in \{1, \ldots, w\}$), si $v = \infty$ et $|y| \geq 2\|x\|^s$ on écrit, en divisant $E(\tilde{x}, Y)$ par $\|x\|^{sw}$,

$$\left(\frac{|y|}{\|x\|^s}\right)^w \leq \max_{0 \leq i \leq w-1} \left\{\frac{|a_i(\tilde{x})|}{\|x\|^{(w-i)s}}\right\} \cdot \left(1 + \frac{|y|}{\|x\|^s} + \cdots + \left(\frac{|y|}{\|x\|^s}\right)^{w-1}\right)$$
$$\leq \max_{0 \leq i \leq w-1} \left\{\frac{|a_i(\tilde{x})|}{\|x\|^{(w-i)s}}\right\} \cdot 2 \cdot \left(\frac{|y|}{\|x\|^s}\right)^{w-1}.$$

Si $v = p$ l'inégalité ultramétrique conduit à la même majoration sans facteur 2 dès que $|y|_p \geq \|x\|_p^s$. On en déduit en tout cas le résultat annoncé.

iii) On écrit simplement $\overline{|(\zeta+\zeta')(x)|}_v \leq \max_{\substack{1 \leq i \leq w \\ 1 \leq j \leq w'}} \{|y_i + y_j'|_v\}$, car les sommes $y_i + y_j'$ ($1 \leq i \leq w$, $1 \leq j \leq w'$) sont les racines de $R(\tilde{x}, Y'')$ où R est un polynôme unitaire en Y'' (résultant de $E(\tilde{x}, Y)$ et $E'(\tilde{x}, Y'' - Y)$ par rapport à Y), multiple du polynôme minimal de $\zeta'' = \zeta + \zeta'$ sur $\mathcal{O}[z_1, \ldots, z_d]$.

iv) On a $\overline{|(\zeta\zeta')(x)|}_v \leq \max_{\substack{1\leq i\leq w\\ 1\leq j\leq w'}} \{|y_i y'_j|_v\}$, tandis que

$$\overline{|\zeta^m(x)|}_v = \max_{1\leq i\leq w} \{|y_i^m|_v\} = \big(\max_{1\leq i\leq w} \{|y_i|_v\}\big)^m = \overline{|\zeta(x)|}_v^m.$$

COROLLAIRE. — $p(\zeta) = \min\big\{s \in \mathbb{R};\ \sup_{\tilde{x}\in\mathbb{C}_v^d} \{\overline{|\zeta(x)|}_v / \|x\|_v^s\} < +\infty\big\}$.

Démonstration. — Pour $s < p(\zeta)$ il existe $i \in \{0,\dots,w-1\}$ tel que $d^0 a_i > (w-i)s$ et donc $\dfrac{|a_i(\tilde{x})|}{\|x\|^{(w-i)s}}$ n'est pas borné sur $\mathbb{C}_v^d$, le lemme 3.i) entraîne que $\dfrac{\overline{|\zeta(x)|}_v}{\|x\|_v^s}$ n'est pas non plus borné sur $\mathbb{C}_v^d$. En revanche pour $s \geq p(\zeta)$ on a $\dfrac{|a_i(\tilde{x})|}{\|x\|^{(w-i)s}}$ borné sur $\mathbb{C}_v^d$ pour $i = 0,\dots,w-1$, le lemme 3.ii) entraîne que $\dfrac{\overline{|\zeta(x)|}_v}{\|x\|_v^s}$ est aussi borné sur $\mathbb{C}_v^d$.

Dans le corollaire suivant, nous noterons $d_X^0 E$ et $d_Y^0 E$ $(= w)$ les degrés de E par rapport à $X = (X_1,\dots,X_d)$ et Y respectivement.

COROLLAIRE. — *Soit ζ un élément entier sur $\mathcal{O}[z_1,\dots,z_d]$ alors, avec les notations introduites,*

$$H_v(E) \leq \big(2^{\varepsilon_v} \cdot \max\{1; \overline{|\zeta|}_v\}\big)^{d_Y^0 E} \cdot (d+1)^{5\varepsilon_v d_X^0 E}$$

et

$$\overline{|\zeta|}_v \leq H_v(E) \cdot \Big(2\binom{d+d_X^0 E}{d}\Big)^{\varepsilon_v}.$$

Démonstration. — On applique le lemme 3.i) et ii) (avec $s = 0$) en remarquant

$$\binom{w}{i} \leq 2^{d_Y^0 E},$$

$$(d+1)^{-5\varepsilon_v d^0 a_i} \cdot H_v(a_i) \leq \sup_{\tilde{x}\in B_d(1)} \big\{|a_i(\tilde{x})|_v\big\} \leq H_v(a_i) \cdot \binom{d+d^0 a_i}{d}^{\varepsilon_v},$$

et

$$H_v(E) = \max\big\{1; \max_{0\leq i\leq w-1}\{H_v(a_i)\}\big\},\ d_X^0 E = \max_{0\leq i\leq w-1}\{d^0 a_i\}.$$

PROPRIÉTÉS. — *Soit ζ, ζ' deux éléments entiers sur $\mathcal{O}[z_1,\dots,z_d]$ et $m \in \mathbb{N}$.*

i) $p(\zeta+\zeta') \leq \max\{p(\zeta);p(\zeta')\}, p(\zeta\zeta') \leq p(\zeta)+p(\zeta')$ *et* $p(\zeta^m) = m\cdot p(\zeta)$,

ii) $\overline{|\zeta+\zeta'|}_v \leq \overline{|\zeta|}_v + \overline{|\zeta'|}_v$ *si* $v=\infty$ *et* $\max\{\overline{|\zeta|}_v;\overline{|\zeta'|}_v\}$ *si* $v=p$,
$\overline{|\zeta\zeta'|}_v \leq \overline{|\zeta|}_v \cdot \overline{|\zeta'|}_v$ *et* $\overline{|\zeta^m|}_v = \overline{|\zeta|}_v^m$.

Démonstration. — i) Soit $s = \max\{p(\zeta);p(\zeta')\}$ alors il suit du lemme 3.iii)

$$\sup_{\tilde{x}\in\mathbb{C}_v^d}\left\{\frac{\overline{|(\zeta+\zeta')(x)|}_v}{\|x\|_v^s}\right\} \leq 2\cdot\max\left\{\sup_{\tilde{x}\in\mathbb{C}_v^d}\left\{\frac{\overline{|\zeta(x)|}_v}{\|x\|_v^s}\right\};\sup_{\tilde{x}\in\mathbb{C}_v^d}\left\{\frac{\overline{|\zeta'(x)|}_v}{\|x\|_v^s}\right\}\right\}.$$

Le premier corollaire montre d'abord que cette dernière quantité est $< +\infty$, et ce même corollaire entraîne en retour $s \geq p(\zeta+\zeta')$. On procède pareillement avec le lemme 3.iv) pour les autres relations.

ii) Les relations indiquées se déduisent directement du lemme 3.iii) et iv) en prenant le supremum sur $\tilde{x} \in B_d(1)$.

Pour faire le lien avec la section précédente, considérons une transformation unitaire $\tau \in Gl_{n+1}(\mathbb{C}_v)$ telle que $B = A/\mathfrak{p}$ soit finie sur $A_0 := \mathbb{C}_v[\tau^{-1}(X_0),\ldots,\tau^{-1}(X_d)]$, elle induit un morphisme $\tau : V \to \mathbb{P}_d(\mathbb{C}_v)$. Si $P \in A = \mathbb{C}_v[X_0,\ldots,X_n]$ est une forme de degré δ nous appliquons les définitions ci-dessus à $\zeta = \overline{P} \in B$ (la classe de P dans $B = A/\mathfrak{p}$). L'anneau B étant une extension finie de A_0, l'élément ζ est entier sur A_0 et $p(\zeta)$ n'est rien d'autre que le degré δ de P. Pour la maison de ζ on a, en notant $\widetilde{V}$ le cône de $\mathbb{C}_v^{n+1}$ engendré par V et $\tilde{\tau} : \mathbb{C}_v^{n+1} \to \mathbb{C}_v^{d+1}$ la projection induite par τ,

$$\overline{|\zeta|}_v = \sup\{|P(y)|_v\,;\, y\in\widetilde{V}\,,\tilde{\tau}(y)\in B_d(1)\} = \sup\left\{\frac{|P(y)|_v}{\|\tilde{\tau}(y)\|_v^\delta}\,;\, y\in\widetilde{V}\right\}$$

car P est homogène de degré δ. On en déduit l'encadrement

$$\|P\|_{V,v} \leq \overline{|\zeta|}_v \leq \|P\|_{V,v}\cdot N_{\tau,v}(V)^\delta,$$

où $N_{\tau,v}(V) \geq \sup\{\|y\|_v/\|\tilde{\tau}(y)\|_v\,;\, y\in\widetilde{V}\}$.

Dans le même ordre d'idées $M_{V,v}(P)$ se compare à

$$M_{\mathbb{P}_d}(\mathrm{Norme}_{B/A_0}(P)).$$

Revenons pour finir cette section à $\mathcal{O} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ et $z_1,\ldots,z_d \in \mathbb{C}$, on applique ce qui précède avec $v=\infty$. Si ζ est entier sur $\mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_d]$ on a, avec les notations du début de la section et en utilisant le théorème 1 de [P2] et le lemme 1.13 de [P1],

$$\overline{|\zeta|}^w \geq \overline{|a_0|} = \sup\{|a_0(\tilde{x})|\,;\,\|\tilde{x}\|=1\} \geq (d+1)^{-4wp(\zeta)}$$

d'où $\overline{|\zeta|} \geq (d+1)^{-4p(\zeta)}$. On définit la *taille* de ζ par

$$t(\zeta) = \max\{\log \overline{|\zeta|}; p(\zeta)\},$$

avec cette définition on a toujours $t(\zeta) \geq p(\zeta) \geq 0$. Si $a \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ alors $t(a)$ coïncide avec la taille (logarithmique) usuelle de a tandis que si $d = 0$ on retrouve la taille usuelle d'un entier algébrique α (on a $p(\alpha) = 0$ et $\overline{|\alpha|}$ est la maison usuelle de α) (voir [W], chap. 1, §1). En vérité, lorsque $a \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_d]$, la taille de a est plus habituellement définie avec $H(a)$ (ou même $M(a)$) à la place de $\overline{|a|}$, mais les logarithmes de ces quantités ne diffèrent que d'un multiple de $d^0 a$ et les notions de tailles correspondantes sont donc équivalentes.

Soit maintenant $\zeta \in \mathbb{C}$ un élément algébrique sur $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ (non nécessairement entier). L'anneau $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ étant factoriel l'idéal $\mathfrak{a}$ des éléments $D \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ tels que $D \cdot \zeta$ soit entier sur $\mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ est principal (voir [B], chap. VII, §3). Il existe donc un unique (au signe près) $D(\zeta) \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]$ engendrant $\mathfrak{a}$, on définit alors naturellement la *taille* de ζ par $t(\zeta) = \max\{t(D(\zeta)); t(D(\zeta) \cdot \zeta)\}$. Là encore cette taille généralise les notions usuelles des cas polynomiaux et entiers algébriques (sur $\mathbb{Z}$) (voir [W], chap. 1, §1).

Remarque. — Dans ces conditions une généralisation de la notion de mesure d'un nombre algébrique serait, par exemple,

$$M(\zeta) = \exp\Big(\int_{V \cap (\mathbb{C} \times S_d(1))} \max\{0; \log|y|\} \cdot \sigma_d(\tilde{x}) \Big)$$

où $S_d(1)$ désigne la sphère unité de $\mathbb{C}^d$ et σ_d la mesure canonique sur $S_d(1)$ de masse totale 1. Ainsi, $\log M(\zeta)$ coïncide avec la mesure $m_{S_1(1) \times S_d(1)}(E)$ dans les notations de [P2], §1.

C) Produits hermitiens et fonctions thêta.

Reprenons les notations du début du paragraphe, lorsque $s = 2$ et $v = \infty$, on peut écrire $\|P\|_{2,V}^2 = \langle P, P \rangle_V$ avec

$$\langle P, Q \rangle_V = \frac{1}{d(V)} \cdot \int_V \frac{P(x) \cdot \overline{Q(x)}}{\|x\|^{2\delta}} \cdot \Omega(x)^{\wedge d},$$

pour tout $P, Q \in A$. Pour chaque $\delta \geq 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ définit un produit hermitien sur l'espace vectoriel des éléments homogènes de B de degré δ. Nous montrons ici que, lorsque V est une variété abélienne, ce produit hermitien est équivalent à celui induit par les fonctions thêta. Ce résultat semble avoir été déjà remarqué par G. Kempf.

Soit donc maintenant X une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$, X est un tore complexe $\mathbb{C}^g/\Lambda$ muni d'une forme H de Riemann sur $\mathbb{C}^g$. La forme H définit un fibré en droite sur X grâce auquel on peut plonger X dans un espace projectif $\mathbb{P}_n$, via une base $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_n)$ des fonctions thêta de facteur d'automorphie canoniquement associé à H (voir [BL], § 3.2). Nous notons encore $\mathfrak{p}$ l'idéal homogène, premier de définition de X dans $A = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ et B l'anneau quotient. Si $P, Q \in A$ sont de degré δ on peut définir le produit hermitien (aussi dit de Petersson) suivant (voir [BL], §3.4 et 8.5)

$$\langle P, Q\rangle_{X,H} = \int_{\mathbb{C}^g/\Lambda} P(\theta(z))\overline{Q(\theta(z))} \cdot e^{-\pi\delta H(z,z)} \cdot \mu^{\otimes g}(z),$$

où $\mu^{\otimes g}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^g$. Cette quantité ne dépend que des classes de P et Q modulo $\mathfrak{p}$ et définit donc encore une application de $B \times B$ dans $\mathbb{R}$, on note $\|P\|^2_{X,H} = \langle P, P\rangle_{X,H} \in \mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 3. — *Il existe des réels $\lambda(X), \lambda'(X) \geq 0$ ne dépendant que de X et H tels que*

$$|\log \|P\|_{X,H} - \log \|P\|_{2,X}| \leq \lambda(X) \cdot \delta + \lambda'(X),$$

lorsque P est une forme de A de degré δ.

Démonstration. — Soient P et Q deux formes de A de même degré δ, on écrit

$$\langle P, Q\rangle_{X,H} = \int_{\mathbb{C}^g/\Lambda} \frac{P(\theta(z))\overline{Q(\theta(z))}}{\|\theta(z)\|^{2\delta}} \cdot \Phi(z)^{\delta} \cdot \mu^{\otimes g}(z)$$

où $\Phi(z) = \|\theta(z)\|^2 \cdot e^{-\pi H(z,z)}$. Par ailleurs, on a

$$(-2i\pi) \cdot \Omega(\theta(z)) = \sum_{0 \leq i,j \leq n} \left(\delta_{i,j} - \frac{\overline{\theta_i(z)} \cdot \theta_j(z)}{\|\theta(z)\|^2}\right) \cdot \frac{d\theta_i(z) \wedge d\overline{\theta_j(z)}}{\|\theta(z)\|^2},$$

où $\delta_{\cdot,\cdot}$ désigne le symbole de Kronecker. Mais on vérifie encore

$$d\theta_i(z) \wedge d\overline{\theta_j(z)} = \sum_{1 \leq k,\ell \leq g} \frac{\partial \theta_i}{\partial z_k}(z) \cdot \overline{\frac{\partial \theta_j}{\partial z_\ell}(z)} \cdot dz_k \wedge d\overline{z}_\ell,$$

d'où

$$(-2i\pi) \cdot \Omega(\theta(z)) = \sum_{1 \leq k,\ell \leq g} J_{k,\ell}(z) \cdot dz_k \wedge d\overline{z}_\ell,$$

avec $J_{k,\ell}(z) = \sum_{0 \leq i,j \leq n} \left(\frac{\delta_{i,j}}{\|\theta(z)\|^2} - \frac{\overline{\theta_i(z)} \cdot \theta_j(z)}{\|\theta(z)\|^4}\right) \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial z_k}(z) \cdot \overline{\frac{\partial \theta_j}{\partial z_\ell}(z)}$. Posons $J(z)$ la matrice dont les entrées sont les fonctions $J_{k,\ell}(z)$, il suit de

l'expression de Ω ci-dessus $\pi^g \cdot \Omega(\theta(z))^{\wedge g} = g! \cdot \det J(z) \cdot \mu^{\otimes g}(z)$. On a donc

$$\langle P, Q\rangle_{X,H} = \frac{\pi^g}{g!} \int_{\mathbb{C}^g/\Lambda} \frac{P(\theta(z))\overline{Q(\theta(z))}}{\|\theta(z)\|^{2\delta}} \cdot \Phi(z)^\delta \cdot \det J(z)^{-1} \cdot \Omega(\theta(z))^{\wedge g},$$

et par ailleurs

$$\langle P, Q\rangle_X = \frac{1}{d(X)} \cdot \int_{\mathbb{C}^g/\Lambda} \frac{P(\theta(z))\overline{Q(\theta(z))}}{\|\theta(z)\|^{2\delta}} \cdot \Omega(\theta(z))^{\wedge g}.$$

Maintenant $\overline{J}_{k,\ell} = J_{\ell,k}$ et Φ, $\det J$ sont des fonctions à valeurs réelles ≥ 0, continues, sans zéros dans $\mathbb{C}^g$, on fixe un domaine fondamental $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^g$ de $\mathbb{C}^g/\Lambda$ et, $\mathcal{D}$ étant compact, il existe des réels $a(X)$, $j(X) \geq 1$ tels que pour tout $z \in \mathcal{D}$ on ait

$$a(X)^{-1} \leq \Phi(z) \leq a(X) \quad \text{et} \quad j(X)^{-1} \leq \frac{\pi^g}{g!} \cdot \det J(z)^{-1} \leq j(X).$$

On a donc, en appliquant ce qui précède à $P = Q$,

$$d(X) \cdot a(X)^{-\delta} \cdot j(X)^{-1} \cdot \|P\|_{2,X}^2 \leq \|P\|_{X,H}^2 \leq d(X) \cdot a(X)^\delta \cdot j(X) \cdot \|P\|_{2,X}^2.$$

Le résultat s'en déduit avec $2\lambda(X) = \log a(X)$ et $2\lambda'(X) = \log j(X) + \log d(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Hermann Paris, 1969.

[BGS] J.-B. BOST, H. GILLET and C. SOULÉ, Heights of projective varieties and positive Green forms, J. Amer. Math. Soc., à paraître.

[BL] C. BIRKENHAKE and H. LANGE, Complex abelian varieties, Grundlehren Math. Wiss. 302, Springer, 1992.

[FP] J. FRESNEL et M. VAN DER PUT, Géométrie analytique rigide et applications, Progr. Math. 18, Birkhäuser, 1981.

[HLP] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1952.

[P1] P. PHILIPPON, Critères pour l'indépendance algébrique, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. n° 64 (1986), 5–52.

[P2] P. PHILIPPON, Sur des hauteurs alternatives I, Math. Ann., 289 (1991), 255-283.

[P3] P. PHILIPPON, Transcendance sur les anneaux diophantiens, dans "Séminaire de Théorie des Nombres de Caen, 1992-93", Publ. Univ. Caen (1994), exposé n° 5.

[S] C. SOULÉ, Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants, dans "Journées Arithmétiques, Luminy 1989", Astérisque 198-199-200, Soc. Math. France, 1991, 355–371.

[W] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants, Lecture Notes in Math. 402, Springer, 1974.

Manuscrit reçu le 8 septembre 1992,
révisé le 3 janvier 1994.

Patrice PHILIPPON,
Université Pierre et Marie Curie
URA 763 du CNRS
Problèmes Diophantiens
Tour 45-46, 5e étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).