ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDERAOUF MOURTADA

Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan. Algorithme de finitude

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 3 (1991), p. 719-753

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_3_719_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 3 (1991), 719-753

CYCLICITÉ FINIE DES POLYCYCLES HYPERBOLIQUES DE CHAMPS DE VECTEURS DU PLAN. ALGORITHME DE FINITUDE

par Abderaouf MOURTADA

Introduction.

Le 16ème problème de Hilbert peut s'énoncer ainsi :

(H) "Existe-t-il une borne $N(n)$ pour le nombre de cycles limites de tout champ polynomial du plan de degré $\leq n$?".

Un cycle d'un champ de vecteurs est une orbite périodique de ce champ. Un cycle limite est un cycle isolé dans l'ensemble des cycles.

Un premier pas dans la résolution de ce problème a été fait grâce à Ecalle-Martinet-Moussu-Ramis [EMMR] et Il'yashenko [I]. Ils ont résolu la conjecture de finitude suivante connue sous le nom de "Problème de Dulac" : "tout champ polynomial du plan a un nombre fini de cycles limites". Leurs preuves étant d'ailleurs valables pour des champs analytiques sur S^2.

Dans [R], Roussarie a montré qu'une réponse positive à la conjecture suivante résoudrait le 16ème problème de Hilbert :

CONJECTURE [R]. — *Tout ensemble limite périodique sur la sphère S^2 a une cyclicité finie dans les déformations analytiques.*

La notion d'ensemble limite périodique est due à Françoise et Pugh [FP] :

Mots-Clés : Champ de vecteurs – Point de selle – Rapport d'hyperbolicité – Polycycle hyperbolique – Déformation générique – Application déplacement – Cyclicité.
Classification A.M.S. : 53

DÉFINITION. — *Soit Γ une partie compacte de la sphère S^2, tangente à un champ analytique X_0 sur S^2. On dit que Γ est un ensemble limite périodique s'il existe une déformation analytique (X_λ) du champ X_0 ($\lambda \in \mathcal{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^\Lambda$) et une suite (λ_i) dans $\mathcal{V}$ tendant vers 0 telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, le champ X_{λ_i} admet un cycle c_i qui vérifie $d_H(c_i, \Gamma) \to 0$ quand $i \to +\infty$.*

La notation d_H désigne la distance de Hausdorff entre parties compactes de S^2.

La notion de cyclicité est due à Bautin [B] :

DÉFINITION. — *Soit Γ une partie compacte de S^2, tangente à un champ analytique X_0 sur S^2. Soit (X_λ) une déformation analytique de X_0 ($\lambda \in \mathcal{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^\Lambda$).*

i) *On dit que Γ est de cyclicité finie dans la famille (X_λ) s'il existe un entier N, $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{W}$ voisinage de 0 dans $\mathcal{V}$ tels que pour tout $\lambda \in \mathcal{W}$, le nombre $n(\varepsilon, \lambda)$ de cycles limites c du champ X_λ qui vérifient $d_H(c, \Gamma) \leq \varepsilon$ est inférieur ou égal à N.*

ii) *Si Γ est de cyclicité finie dans la famille (X_λ), désignons par*

$$n(\varepsilon, \mathcal{W}) = \mathrm{Sup}\{n(\varepsilon, \lambda);\ \lambda \in \mathcal{W}\}$$

la cyclicité de Γ dans la famille (X_λ) est alors le minimum de $n(\varepsilon, \mathcal{W})$ quand ε et le diamètre de $\mathcal{W}$ tendent vers 0.

Soit Γ comme dans la définition ci-dessus. Si Γ n'est pas un ensemble limite périodique, alors Γ est de cyclicité finie et égale à 0 dans toute déformation (X_λ).

D'après la théorie de Poincaré-Bendixon, un ensemble limite périodique à singularités isolées est soit un cycle, soit un point singulier isolé, soit un *graphique.*

Un graphique est une image continue du cercle constituée d'une réunion d'un nombre fini et non vide de points singuliers isolés (appelés sommets du graphique) et d'une réunion d'orbites régulières qui relient ces points et dont l'ensemble ω−limite (resp. α−limite) est l'un des sommets du graphique.

Un graphique Γ d'un champ X_0 sur S^2 est dit *monodromique* si :

i) il existe une transversale τ au champ définie par une application analytique

$$f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbf{R}^2$$

qui est un difféomorphisme sur son image et telle que le point $f(0)$ soit sur l'une des orbites régulières du graphique;

ii) il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon]$ tel qu'une application premier retour p relativement à τ soit définie pour tout $u \in]0, \varepsilon_1[$;

iii) si on désigne par c_u le morceau compact de l'orbite du point $f(u)$ dont les extrémités sont les points $f(u)$ et $f(p(u))$, alors $d_H(c_u, \Gamma) \to 0$ quand $u \to 0$.

Un *polycycle* est un graphique contenant un nombre fini d'orbites régulières. Un polycycle dont les sommets sont des points de selle hyperboliques est dit *polycycle hyperbolique.*

Sur la figure 0, le polycycle $P_1\gamma_1P_2\gamma_2P_1\gamma_3$ est monodromique alors que le polycycle $P_1\gamma_1P_2\gamma_2$ ne l'est pas.

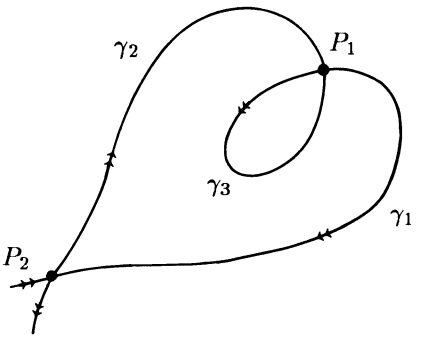

Figure 0

On note (Γ_k) un polycycle hyperbolique à k sommets, P_i les sommets du polycycle et r_i le *rapport d'hyperbolicité* du sommet P_i qu'on définit par :

$$r_i = |\mu_1/\mu_2|$$

$\mu_1 < 0 < \mu_2$ étant les valeurs propres de la partie linéaire du champ en P_i.

Reprenons les notations de [M1]. Soit (X_λ) une famille de champs de vecteurs de $\mathbf{R}^2$, C^∞en (m, λ), $m = (x, y)$ et λ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^\Lambda$; on suppose que X_0 présente un polycycle hyperbolique et monodromique (Γ_k). L'objet de l'article est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 0. — *Pour tout n, il existe un ouvert dense $O_n \subset \mathcal{P}_n$ espace des champs de vecteurs polynomiaux du plan de degré $\leq n$ tel que le problème* (H) *soit localement vrai sur O_n.*

"localement vrai" signifie que pour tout $X \in O_n$, il existe un voisinage V_X de X dans O_n et un entier N_X tels que le nombre de cycles limites de tout champ $Y \in V_X$ est $\leq N_X$.

Dans [FP], Françoise et Pugh montrent que les cycles et les points elliptiques sont de cyclicité finie dans les familles analytiques. Le Théorème 0 est alors une conséquence du Théorème 3 ci-dessous. Avant d'énoncer ce théorème, convenons d'appeler "condition de type C.H." [**C**ondition **H**yperbolique] toute condition de la forme :

$$\prod_{j \in I} r_j \neq 1$$

où I est une partie de $\{1, ..., k\}$.

THÉORÈME 3. — *Il existe $G(k)$ ensemble fini de conditions algébriques (dites conditions génériques) portant uniquement sur les rapports d'hyperbolicité (r_i) des sommets (P_i) et contenant toutes les conditions de type C.H., et un entier $e(k)$ ne dépendant que de k tels que tout polycycle (Γ_k) vérifiant $G(k)$ est de cyclicité $\leq e(k)$ dans toute famille C^∞ (X_λ).*

Si à chaque polycycle (Γ_k) on associe le point $m_k \in \mathbf{R}^k_{+*}$ de coordonnées $m_k = (r_i(0))_{i=1,...,k}$, [certaines conventions sur le premier point et le sens devant être prises] le mot "générique" du théorème signifie que m_k est dans un ouvert dense de $\mathbf{R}^k_{+*}$. L'ouvert O_n est constitué des champs polynomiaux du plan à singularités non dégénérées et dont les polycycles hyperboliques et monodromiques (y compris ceux à sommets sur l'infini) vérifient les conditions $G(\ell)$ correspondantes.

On montre dans le §2 que les conditions génériques du théorème ci-dessus croissent avec le nombre de sommets k et qu'elles sont toutes de la forme :

$$g_{j,k}(r_1(0), r_2(0), ..., r_k(0)) \neq 0$$

$g_{j,k}$ étant une fonction polynomiale à k variables et à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Si on désigne par (Γ^i_{k-1}) le sous-polycycle (virtuel) du polycycle (Γ_k) obtenu par élimination du sommet P_i, alors l'ensemble des conditions $g_{j,k}$ ci-dessus contient toutes les conditions $g_{j,k-1}$ appliquées aux polycycles

(Γ^i_{k-1}). Dans [M2], on montre que pour $k \leq 3$, les conditions $g_{j,k}$ sont toutes de type C.H.. Dans [M4], on montre que pour tout $k \geq 4$, il existe des conditions $g_{j,k}$ qui ne sont pas de type C.H..

Ces conditions génériques ainsi que la cyclicité maximale $e(k)$ annoncée dans le théorème ci-dessus satisfont à des relations de récurrence (portant sur le nombre de sommets k) dont la complexité ne permet pas d'en donner des expressions explicites. On donnera cependant, à la fin de cet article, une majoration explicite (mais grossière!) en fonction de l'entier k de la cyclicité maximale des polycycles (Γ_k).

Si $\sigma_1(\lambda)$ est une transversale au champ (X_λ) comme dans la fig.1 (page 725) et si x est un paramètre sur $\sigma_1(\lambda)$, l'application déplacement $\Delta(.,\lambda)$ associée à l'application de retour $p(.,\lambda)$ relative au polycycle perturbé est définie par :

$$\Delta(x,\lambda) = p(x,\lambda) - x.$$

Dans [M1], on a établi le résultat suivant :

THÉORÈME 1 [M1]. — *Soit $K \in \mathbf{N}$, alors il existe $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^\Lambda$, deux fonctions continues et positives sur $\mathcal{V}$: $\rho(\lambda)$ et $\eta(\lambda)$ et des transversales au champ X_λ : $\sigma_i(\lambda), \tau_i(\lambda)$ (cf. fig.1) de classe C^K tels que si on pose :*

$$(1.1) \qquad \mathcal{U}_\lambda =]\rho(\lambda), \varepsilon[, \quad \mathcal{U} = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{V}} \mathcal{U}_\lambda \times \{\lambda\} \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{V}}]\eta(\lambda), \varepsilon[\times\{\lambda\},$$

l'application déplacement associée à l'application de retour du polycycle perturbé soit définie sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$ et soit donnée par : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

(1.2)

$$\Delta(x,\lambda) = \Big[\ldots\Big[x^{r_1(\lambda)} + b_1(\lambda)\Big]^{r_2(\lambda)} + \ldots + b_{k-1}(\lambda)\Big]^{r_k(\lambda)} + b_k(\lambda) - \varphi(x,\lambda)$$

avec

$$\varphi(x,\lambda) = x\,[\bar{\alpha}_1(\lambda) + f(x,\lambda)]$$

x est un paramètre de classe C^K sur $\sigma_1(\lambda)$ et Δ (mesurée sur la transversale $\tau_k(\lambda)$) est de classe C^K en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ et toutes ses dérivées sont continues en $(x,\lambda) \in \mathcal{U}$. $b_i(\lambda)$ mesure sur la transversale d'entrée du sommet P_{i+1} (avec la convention $k+1 \equiv 1$) la déformation de la connexion entre les sommets P_i et P_{i+1}. La fonction $\bar{\alpha}_1$ vérifie

$$(1.3) \qquad \forall \lambda \in \mathcal{V} \quad \bar{\alpha}_1(\lambda) > 0.$$

La fonction f est continue sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times\mathcal{V}$ *,de classe* C^K *en x sur* $]\eta(\lambda),\varepsilon[$ *pour tout* $\lambda\in\mathcal{V}$ *et vérifie :*

$$(1.4)\qquad \forall n\in\{0,...,K\}\qquad \lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\(x,\lambda)\in V}}(x-\eta(\lambda))^n.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\lambda)=0.$$

Les cycles limites convergeant vers (Γ_k) sont les racines isolées de l'équation

$$(2)\qquad \Delta(x,\lambda)=0;$$

dans cet article, on propose un algorithme général (basé essentiellement sur le lemme de Rolle) pour la résolution de l'équation (2). Dans cet algorithme et d'un point de vue formel, la fonction f (cf. (1.2)) se comportera (dans le cas générique du théorème 3) comme un reste devant la partie principale de Δ si on fait $\eta=0$ (cf. (1.4)). Ceci est réalisable [grâce à des propriétés géométriques du polycycle perturbé qu'on donne dans le §1] sur un certain cône $O\subset\mathcal{V}$ (de tels cônes sont en nombre fini et recouvrent le voisinage $\mathcal{V}$ si on remplace P_1 par P_i et X_λ par $-X_\lambda$) et on démontre le théorème suivant :

THEOREME 2 [cf. §2]. — *Si certaines conditions génériques sur les* r_i *sont satisfaites, alors il existe* $e(k)\in\mathbf{N}$ *ne dépendant que de l'entier k, tel que pour* ε *et O petit, l'équation* (2) *ci-dessus a au plus* $e(k)$ *racines isolées en x sur* $\mathcal{U}_\lambda$ *pour tout* $\lambda\in O$.

L'algorithme général cité ci-dessus nous donne : $e(3)=5$, mais on montre dans [M2] (en détournant légèrement cet algorithme) que les polycycles (Γ_3) sont de cyclicité ≤ 3. On établit aussi dans [M4] l'existence de polycycles (Γ_k) de cyclicité $\geq k$ dans les familles génériques et on prouve dans [M3] l'existence d'un polycycle (Γ_4) de cyclicité=5 dans les familles génériques à quatre paramètres. Le diagramme de bifurcation de telles familles est établi dans [M5].

Le cas $k=1$ a été étudié par Andronov et al. dans [A] ; ils ont montré qu'en classe C^1 et sous la condition $r_1\neq 1$, il apparaît au plus un cycle. Le cas $k=2$ a été traité par L.A. Cherkas dans [L] pour des familles analytiques. Il a montré que sous les conditions $r_1.r_2\neq 1$, $r_1\neq 1$ et $r_2\neq 1$, (Γ_2) est de cyclicité ≤ 2. Le résultat énoncé ci-dessus résoud partiellement un problème proposé par J. Sotomayor et repris par R. Roussarie dans [R] concernant la cyclicité des polycycles hyperboliques génériques.

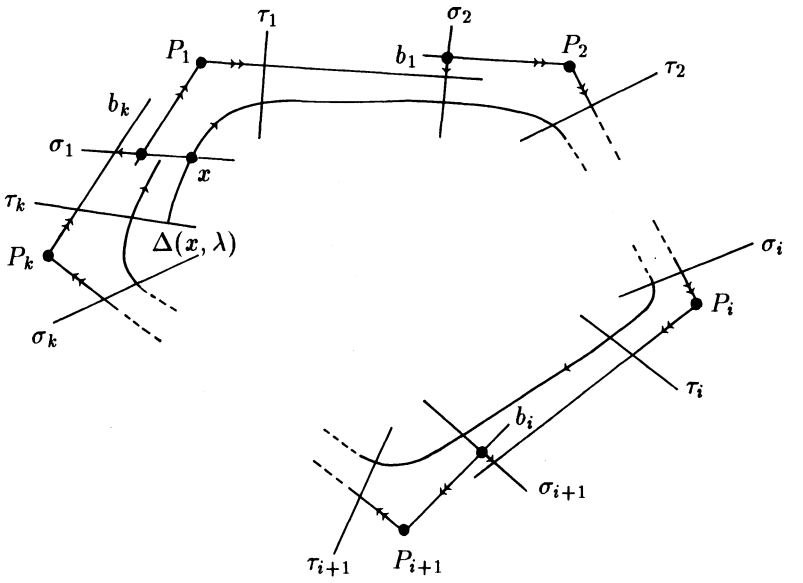

Figure 1

Je remercie C. Bonatti pour la démonstration du Lemme 1 qu'il m'a suggérée.

1. Cônes d'étude.

Dans ce paragraphe, on construit certains cônes du voisinage $\mathcal{V}$ (cf. Théorème 1-Introduction) dans lesquels la fonction f (cf. (1.2),(1.4)) a le "bon comportement" qu'on précisera dans le §2. Ces cônes sont construits grâce aux conventions géométriques introduites dans [M1]-§II.2 et qu'on rappelle ci-dessous :

DÉFINITION 1. — *Reprenons les données du Théorème 1; soit* $\lambda \in \mathcal{V}$, *on appelle chemin partant du sommet* P_1 *dans le sens positif la ligne géométrique obtenue comme réunion de ses* k *branchements. Pour tout* $i = 1, \ldots, k$ *le branchement* n°i *a son origine* M_i *sur la transversale* σ_i *et son extrémité* M_{i+1} *sur* σ_{i+1} *(avec la convention* $k+1 \equiv 1$*). Ces* k *branchements sont définis par récurrence comme suit (cf. fig. 2) : pour*

$i = 1$, $M_1 = A_1$ et le branchement n°1 *est la ligne $A_1P_1B_1M_2$; pour $i \geq 2$ deux cas se présentent : si M_i est d'abscisse > 0 sur σ_i, le branchement* n°*i est le segment d'orbite M_iM_{i+1} ; si M_i est d'abscisse ≤ 0 sur σ_i, le branchement* n°*i est la ligne $M_iA_iP_iB_iM_{i+1}$.*

— Le chemin partant de P_1 dans le sens positif sera aussi appelé "chemin partant de σ_1" sans spécifier le sens. On définit de la même façon "*le chemin partant de P_1 dans le sens négatif*" (qu'on appellera aussi "chemin partant de τ_1") en commençant par le point B_1 (cf. fig. 2) et en allant dans le sens contraire du champ X_λ. On généralise ensuite cette notion de chemin dans les deux sens (ainsi que les conventions de langage qui vont suivre) à n'importe quel sommet P_i du polycycle.

On dira que le i^e branchement du chemin partant de σ_1 est > 0 (resp. ≤ 0) si son extremité M_{i+1} est d'abscisse > 0 sur σ_i (resp. ≤ 0). Le dernier branchement sera appelé "*aboutissement du chemin*".

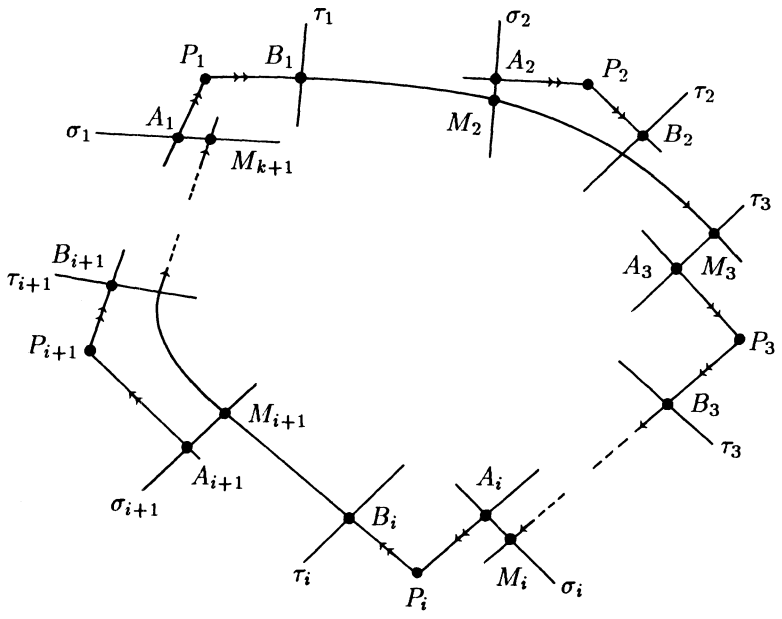

Figure 2

Posons $E = \{+, -\}$; désignons par $v_i \in E$ le signe du i^e branchement du chemin partant de P_j dans le sens $v \in E$ pour un certain $\lambda \in \mathcal{V}$; le

$k-$ *uplet* $\bar{v}=(v_i)_{i=1,\ldots,k}\in E^k$ sera appelé "*signe*" du chemin. On définit alors le *cône* $C(P_j,v,\bar{v})$ par :

$$(3.1)\quad C(P_j,v,\bar{v})=\{\lambda\in\mathcal{V};\ \text{le chemin partant de } P_j \text{ dans le sens } v \text{ a pour signe } \bar{v}\}$$

il est clair que :

$$(3.2)\qquad \forall j=1,\ldots,k\ \forall v\in E\ \bigcup_{\bar{v}\in E^k} C(P_j,v,\bar{v})=\mathcal{V}$$

et que si $C(P_j,v,\bar{v})$ est non vide, 0 est un point adhérent à $C(P_j,v,\bar{v})$.

Désignons par :

$$(3.3)\qquad C^-(P_j,v)=\bigcup_{\bar{v}\in E^k,v_k=-} C(P_j,v,\bar{v}),$$

on va montrer le résultat suivant très utile pour la suite :

LEMME 1. — $\bigcup_{j\in\{1,\ldots,k\},v\in E} C^-(P_j,v)=\mathcal{V}$; *autrement dit pour tout* $\lambda\in\mathcal{V}$, *il existe un point de départ* P_j *et un sens* $v\in E$ *tels que le chemin partant de* P_j *dans le sens* v *a un aboutissement* ≤ 0.

Preuve (Ch. Bonatti). — Tout d'abord convenons d'appeler "*branchement nul*" un branchement dont l'extrémité est d'abscisse nulle; on a trivialement l'équivalence : le chemin partant d'un point P_j dans le sens v a un aboutissement ≤ 0 si et seulement si le chemin partant de P_j dans le sens $-v$ a tous ses branchements >0 ou nuls. On montrera donc que : $\forall\lambda\in\mathcal{V}$, $\exists P_j$ et v tels que le chemin partant de P_j dans le sens v a tous ses branchements >0 ou nuls. Si pour $\lambda\in\mathcal{V}$, il y a une infinité de cycles du côté positif des transversales τ_i, désignons par x_i la borne inférieure des abscisses de ces cycles sur une transversale τ_i; par le point d'abscisse $x_i\geq 0$ passe une orbite fermée (le champ X_λ étant seulement C^∞) ou un chemin (cf. fig. 3) dont tous les branchements sont >0 ou nuls; si par x_i il passe une orbite fermée ou s'il n'y a qu'un nombre fini de cycles, alors on peut trouver une transversale fermée T (cf. fig. 4) qui coupe chaque transversale τ_i en un point T_i d'abscisse $y_i>0$ et telle que tous les cycles du champ X_λ soient situés à l'intérieur du domaine D limité par T.

Supposons que le champ X_λ soit rentrant sur T et posons $v=-$ (sinon prendre σ_i à la place de τ_i et poser $v=-$). Il est clair que sur

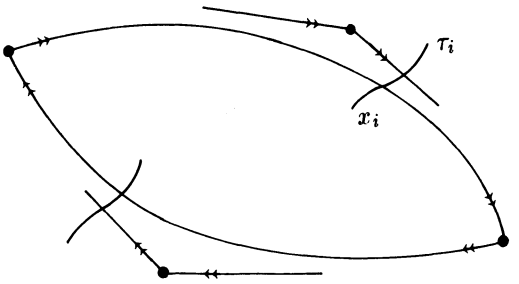

Figure 3

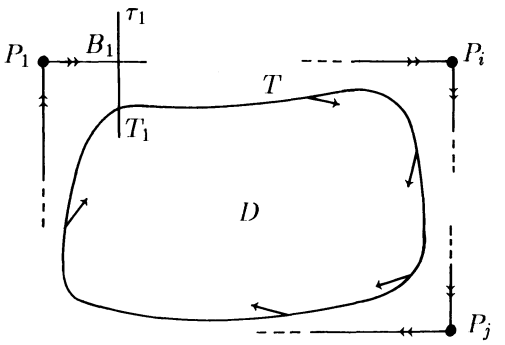

Figure 4

chaque transversale τ_i, l'ensemble des points d'abscisse $\leq y_i$ desquels part une trajectoire dans le sens v qui coupe T est de la forme $]L_i, T_i]$, L_i étant le 1er point dont la trajectoire dans le sens v ne coupe pas T; désignons par $\bar{y}_i$ l'abscisse de L_i. Partant du sommet P_1 : si $\bar{y}_1 < 0$, il est facile de voir que le chemin partant de P_1 dans le sens v a tous ses branchements > 0; si $\bar{y}_1 \in [0, y_1[$ par le théorème de Poincaré-Bendixon (cf. [P]) la trajectoire par L_1 dans le sens v aboutit à un des sommets du polycycle, notons P_{i_1} ce sommet; tous les cycles étant dans D et vu la définition de L_1, la trajectoire par L_1 dans le sens v ne peut recouper τ_1 que si $\bar{y}_1 = 0$ auquel cas $P_{i_1} = P_1$ et le chemin partant de P_1 dans le sens v a tous ses branchements > 0 ou nuls; supposons donc $P_{i_1} \neq P_1$, il est alors clair que $\bar{y}_{i_1} \leq 0$ et que en remplaçant P_1 par P_{i_1} dans le raisonnement précédent, on peut prendre $\bar{y}_1 = 0$ et si $P_{i_1} \neq P_1$ prendre $\bar{y}_{i_1} = 0$ et si $P_{i_2} \neq P_1$ prendre $\bar{y}_{i_2} = 0$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait $P_{i_j} = P_1$; le chemin partant de P_1 dans le sens v a alors tous ses branchements >0 ou nuls.

En général (i.e pour des déformations quelconques (X_λ) de X_0 au voisinage du polycycle (Γ_λ) (cf. Introduction)), certains des cônes $C(P_j, v, \bar{v})$ (cf. (3.1)) peuvent être vides. Pour des déformations "*génériques*" au sens introduit dans [M1]-§II.3, aucun des cônes $C(P_j, v, \bar{v})$ n'est vide et ceci a l'importante conséquence qui suit :

LEMME 2. — $\forall j_0 \in \{1, ..., k\}$, $\forall v_0 \in E$, *le cône* $C^-(P_{j_0}, v_0)$ (cf. (3.3)) *est non vide et l'ensemble* $C^-(P_{j_0}, v_0) \setminus \bigcup_{j \in \{1,...,k\}, v \in E, (j,v) \neq (j_0, v_0)} C^-(P_j, v)$ *est non vide et contient* 0 *dans son adhérence; autrement dit étant donné un point de départ* P_j, $j \in \{1, ..., k\}$ *et un sens* $v \in E$, *il existe des valeurs de* $\lambda \in \mathcal{V}$ (*desquelles on peut extraire une suite tendant vers* 0) *pour lesquelles le seul chemin ayant un aboutissement* ≤ 0 *est celui partant de* P_j *dans le sens* v.

Preuve. — Posons $\bar{v} = (v_i)_{i=1,...,k}$ avec $v_i = +$ pour $i = 1, ..., k-1$ et $v_k = -$; d'après la condition de généricité ci-dessus $C(P_{j_0}, v_0, \bar{v}) \neq \emptyset$ et plus précisément l'ensemble $\tilde{C}(P_{j_0}, v_0, \bar{v}) = C(P_{j_0}, v_0, \bar{v}) \setminus \{\lambda \in C(P_{j_0}, v_0, \bar{v}); \text{ l'aboutissement est nul}\}$ est non vide. Le reste du lemme est alors trivial si on remarque que :

$$C^-(P_{j_0}, v_0) \setminus \bigcup_{j \in \{1,...,k\}, v \in E, (j,v) \neq (j_0, v_0)} C^-(P_j, v) \supset \tilde{C}(P_{j_0}, v_0, \bar{v}).$$

2. Algorithme de finitude.

Avant d'entamer ce paragraphe, reprenons ici la Définition 3-§II.1 de [M1] :

DÉFINITION 2. — *Soient* L *une fonction de la variable* (x, λ), O *une partie de* $\mathbf{R}^\Lambda$ *telle que* $0 \in \bar{O}$ *et* α *une fonction de classe* C^K *en* λ *sur* O, *de signe constant et telle que* $\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in O}} \alpha(\lambda) = 0$ *et* $|\alpha(\lambda)| \leq \varepsilon/3$ *pour tout* $\lambda \in O$. *Posons* $W = \bigcup_{\lambda \in O}]\alpha(\lambda), \varepsilon[\times \{\lambda\}$; *et soit* ρ *une fonction positive, de classe* C^K *en* (x, λ) *sur* W *et telle que* $\lim_{\substack{(x,\lambda) \to (0,0) \\ (x,\lambda) \in W}} \rho(x, \lambda) = 0$; *alors on dit que* "$L$ **vérifie les propriétés** $(I^K_{\lambda,0})$ **par multiplication par** ρ **sur** W " *si*

L est de classe C^K en (x,λ) sur W et si $\forall n \leq K$ L vérifie la propriété :

$$(3.4) \qquad (I^K_{\lambda,0})_n : \qquad \lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\(x,\lambda)\in W}} \rho^n . \frac{\partial^n L}{\partial x^n}(x,\lambda) = 0.$$

Des propriétés (I^K_0), (I^K_1), $(I^K_{\lambda,1})$ sont définies dans [M1]; elles ne nous serviront pas ici.

— Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de cycles limites du champ X_λ qui apparaissent au voisinage du polycycle (Γ_k) (cf. Introduction). L'abscisse x sur la transversale σ_1 (par exemple) d'un tel cycle limite est solution de l'équation (2) :

$$(2) \qquad \Delta(x,\lambda) = 0$$

qu'on appellera équation aux orbites fermées. $\Delta(.,\lambda)$ est l'application déplacement décrite dans le Théorème 1. Introduction).

Dans l'algorithme qu'on propose ci-dessous pour la résolution de l'équation (2), on ne veut pas tenir compte de la structure de la fonction "reste" f (cf. (1.4)). Il suffit pour cela, comme on va le voir dans les étapes de l'algorithme, que la fonction f vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ (cf. Déf. 2 ci-dessus) par multiplication par x sur un ensemble contenant (au sens large) le domaine de définition $\mathcal{U}$ (cf. Théorème 1-(1.1)) de l'équation (2) ci-dessus. On déterminera, en conséquence, les conditions "génériques" sur le germe de X_0 le long de (Γ_k), sous lesquelles l'équation (2) a la propriété de finitude (une borne supérieure du nombre de racines en x finie et uniforme en λ). L'expression (1.2) de l'application déplacement relative à la transversale σ_1 pour $\lambda = 0$ montre que si $\prod_{i=1}^{k} r_i(0) \neq 1$ ou $\bar{\alpha}_1(0) \neq 1$, le polycycle (Γ_k) est isolé parmi les cycles. On traitera dans cet article uniquement des polycycles hyperboliques non-triviaux et on imposera la condition :

$$(4.1) \qquad \prod_{i=1}^{k} r_i(0) \neq 1.$$

En fait, le type de forme normale donnée à l'application Δ (cf. (1.2)) et l'algorithme ci-dessous ne conduisent qu'à des conditions génériques sur le germe de X_0 au voisinage des coins P_i du polycycle. D'ailleurs si la condition (4.1) est réalisée et si on fait sur la transversale σ_1 le changement de variable :

$$(4.2) \qquad X = a(\lambda).x \quad \text{avec} \quad a(\lambda) = [\bar{\alpha}_1(\lambda)]^{\left[\prod_{i=1}^{k} r_i(\lambda)-1\right]^{-1}} \qquad \forall \lambda \in \mathcal{V}$$

on voit que l'on peut prendre :

$$\forall \lambda \in \mathcal{V} : \bar{\alpha}_1(\lambda) = 1 \tag{4.3}$$

dans l'équation (2) ; les fonctions $(b_i)_{i=1,\ldots,k}$, η et ρ (cf. Théorème 1) étant remplacées par des fonctions qui leurs sont proportionnelles et la fonction f gardant les mêmes propriétés.

— Maintenant, désignons par :

$$O = C^-(P_1, +) \tag{4.4}$$

où $C^-(P_1, +)$ est le cône de l'espace des paramètres dans lequel le chemin partant de σ_1 a un aboutissement ≤ 0 (cf. (3.3)). Si le cône O n'est pas vide, désignons aussi par $\mathcal{U}$ et V les restrictions de (1.1) à O (cf. Théorème 1). On a alors $\forall \lambda \in O \quad \eta(\lambda) = 0$ et par suite :

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in O}]\rho(\lambda), \varepsilon[\times \{\lambda\} \quad \text{et} \quad V =]0, \varepsilon[\times O, \tag{4.5}$$

posons aussi :

$$\forall \lambda \in O \quad \mathcal{U}_\lambda =]\rho(\lambda), \varepsilon[; \tag{4.6}$$

ainsi la fonction f (cf. (1.4)) vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $V \supset \mathcal{U}$ (cf. Déf. 2) et on a le résultat de finitude suivant le long du cône O :

THÉORÈME 2. — *Si certaines conditions génériques (portant uniquement sur les rapports d'hyperbolicité $(r_i(0))_{i=1,\ldots,k}$ des sommets $(P_i)_{i=1,\ldots,k}$ du polycycle (Γ_k) (cf. Introduction) sont vérifiées, alors il existe un entier $e(k)$ ne dépendant que de k : nombre de sommets du polycycle (Γ_k), tel que quitte à restreindre ε et O et pour tout $\lambda \in O$, l'équation (2) admet au plus $e(k)$ racines isolées en x sur son domaine de définition $\mathcal{U}_\lambda$ (cf. (4.6)).*

Remarque 1.

1) le mot "générique" doit être entendu au sens donné dans l'Introduction de [1]. En fait, on ne donnera pas toutes ces conditions sous forme explicite mais on montrera qu'elles sont en nombre fini et que chacune d'elles est la forme $g(r_1(0), r_2(0), \ldots, r_k(0)) \neq 0$ où g est une fonction polynomiale à k variables et à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

2) Ce Théorème 2 et le Lemme 1-§1 entraînent le Théorème 3 de l'Introduction ; ceci sera détaillé à la fin de la preuve qui suit :

Preuve. — Reprenons l'équation aux orbites fermées (2) par restriction au cône O (cf. (4.4)) en supposant la condition d'hyperbolicité (4.1) remplie et en tenant compte de (4.3) :

(E)
$$\Big[\ldots\Big[[x]^{r_1(\lambda)}+b_1(\lambda)\Big]^{r_2(\lambda)}+\ldots+b_{k-1}(\lambda)\Big]^{r_k(\lambda)}+b_k(\lambda)-x[1+f(x,\lambda)]=0.$$

La résolution de l'équation (E) utilise le Lemme de Rolle et quelques résultats qu'on démontre plus loin à l'intérieur de cette preuve. Entre deux opérations de dérivation successives peuvent intervenir des opérations de division par des unités ou des fonctions ayant un nombre fini de racines en x. Les deux derniers termes de translation $b_k(\lambda)$ et $b_{k-1}(\lambda)$ sont éliminés dans la première opération de dérivation pour le premier et dans la deuxième opération de dérivation pour le deuxième. Ceci confirmera les résultats de [4] et [5]. Ensuite une 3ème opération ne servira qu'à réarranger l'équation pour lui donner une certaine forme "récursive" (dans un sens qu'on précisera) qui sera stable sous les opérations de l'algorithme. Sous cette forme, l'équation est polynomiale de degré 2 en le terme de translation $b_{k-2}(\lambda)$ et chaque élimination d'un coefficient du développement en $b_{k-3}(\lambda)$ correspond à une multiplication par 2 du degré du futur développement en $b_{k-3}(\lambda)$ obtenu après élimination complète du terme $b_{k-2}(\lambda)$; le degré du développement polynomial en $b_{k-3}(\lambda)$ sera 8... etc.

Définissons par récurrence les fonctions :

$$(4.7)\quad \forall (x,\lambda)\in\mathcal{U}\quad \begin{cases} h_o(x,\lambda)=x \\ \forall j\in\{1,\ldots,k\} \quad h_j(x,\lambda)=[h_{j-1}(x,\lambda)]^{r_j(\lambda)}+b_j(\lambda)\end{cases}$$

pour tout $j\in\{0,\ldots,k\}$ la fonction h_j est ≥ 0 sur le domaine $\mathcal{U}$ de définition de l'équation (E) et qu'elle est nulle si et seulement si l'orbite positive (pour le champ X_λ) par le point d'abscisse x sur la transversale σ_1 aboutit au sommet P_{j+1} (avec la convention $k+1\equiv 1$).

Pour la clarté de ce qui suit, introduisons quelques notations :

— Soit $j\in\mathbf{N}^{**}$ et $t_1,t_2,\ldots,t_j\in\mathbf{R}$, on désignera par $(t)_j$ le $j-uplet$:

$$(4.8)\quad (t)_j=(t_j,t_{j-1},\ldots,t_1) \text{ et on convient que } (t)_o=0.$$

— Soit $n\in\mathbf{N}^{**}$ et $t\in\mathbf{R}$, on désignera par t^n le réel :

$$(4.9)\qquad t^n=t-n$$

les indices seront mis vers le bas : t_n, et les puissances seront signalées par des crochets : $[t]^n$.

— Soient $(t)_j$ et $(t')_j$ deux $j-$ *uplets* et $u, v \in \mathbf{R}$, on posera :

$$(u.t + v.t')_j = u.(t)_j + v.(t')_j. \tag{4.10}$$

— Soient $j, n \in \mathbf{N}^{**}$ et $t_1, t_2, ..., t_j \in \mathbf{R}$, on désignera par $(t^n)_j$ le $j-$ *uplet* :

$$(t^n)_j = (t_j^n, t_{j-1}^n, ..., t_1^n) \text{ (cf. (4.9))}. \tag{4.11}$$

Soient maintenant $t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbf{R}$, on définit par récurrence et à l'aide des fonctions $(h_j)_{j=0,...,k-1}$ (cf. (4.7)) les fonctions :

(4.12)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad \begin{cases} S_0^{(t)_0}(x,\lambda) = 1 \\ \forall j \in \{1,...,k\} \quad S_j^{(t)_j}(x,\lambda) = [h_{j-1}(x,\lambda)]^{t_j} . S_{j-1}^{(t)_{j-1}}(x,\lambda). \end{cases}$$

Dans la suite, il arrivera que le $j-$*uplet* $(t)_j$ soit fonction du paramètre λ. Définissons ensuite et pour $j \geq 1$ les fonctions :

(4.13) $\forall j \in \{1,...,k\} \quad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \hat{S}_j^{(t)_j}(x,\lambda) &= S_j^{(t)_j}(x,\lambda).[h_o(x,\lambda)]^{-t_1} \\ \Sigma_j^{(t)_j}(x,\lambda) &= \frac{\partial}{\partial x} S_j^{(t)_j}(x,\lambda).\left[S_j^{(t)_j}(x,\lambda)\right]^{-1} \\ \bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) &= S_j^{(1)_j}(x,\lambda).\Sigma_j^{(t)_j}(x,\lambda) \end{aligned}$$

où $(1)_j$ désigne le $j-$ *uplet* : $(1)_j = (1,1,...,1)$. On posera aussi :

$$\forall \lambda \in O \quad \begin{cases} R_0(\lambda) = 1 \\ \forall j \in \{1,...,k\} \quad R_j(\lambda) = R_{j-1}.r_j(\lambda) \end{cases} \tag{4.14}$$

(cf. (4.4)) où $r_j(\lambda)$ désigne le rapport d'hyperbolicité du sommet P_j (cf. (E)). Signalons que les fonctions R_j ci-dessus sont définies et continues sur le voisinage $\mathcal{V}$ (cf. Théorème 1).

— Donnons d'abord quelques résultats élémentaires utiles pour la suite :

$$\forall j \in \{0,1,...,k\} \quad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \frac{\partial h_j}{\partial x}(x,\lambda) = R_j(\lambda).S_j^{(r^1)_j}(x,\lambda) \tag{4.15}$$

le $j-$ *uplet* $(r^1)_j$ est fonction de λ et désigne d'après (4.11) et (4.9) : $(r^1)_j = (r_j^1, ..., r_1^1)$ avec $r_j^1 = r_j(\lambda) - 1, ..., \ r_1^1 = r_1(\lambda) - 1$.

(4.16)

$$\forall t_1, ..., t_k \in \mathbf{R} \ \ \forall j \in \{1,...,k\} \qquad \lim_{(x,\lambda) \to (0,0), (x,\lambda) \in \mathcal{U}} \bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) = 0.$$

(4.17) $\forall j \in \{1,...,k\}$ $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$ la fonction :

$$(t)_j \in \mathbf{R}^2 \mapsto \bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda)$$

est linéaire en $(t)_j$; si $u, v \in \mathbf{R}$,

$$\bar{\Sigma}_j^{(u.t+v.t')_j}(x,\lambda) = u.\bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) + v.\bar{\Sigma}_j^{(t')_j}(x,\lambda)$$

(4.18) $\forall t_1,...,t_k \in \mathbf{R}$ $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$ (les variables x, λ seront parfois omises) :

$$\bar{\Sigma}_1^{(t)_1}(x,\lambda) = t_1 \text{ et } \forall j \in \{2,...,k\} :$$
$$\bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) = h_{j-1}(x,\lambda).\bar{\Sigma}_{j-1}^{(t)_{j-1}}(x,\lambda) + t_j.R_{j-1}(\lambda).S_{j-1}^{(r)_{j-1}}(x,\lambda)$$

et

$$S_j^{(1)_j}.\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\Sigma}_j^{(t)_j}\right) = S_{j-1}^{(1)_{j-1}}.\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\Sigma}_{j-1}^{(t)_{j-1}}\right).[h_{j-1}]^2$$
$$+R_{j-1}.\bar{\Sigma}_{j-1}^{(t_j.r+t)_{j-1}}.\left(h_{j-1}S_{j-1}^{(r)_{j-1}}\right).$$

— Revenons maintenant à l'équation (E). Avec les notations précédentes, cette équation s'écrit (cf. (4.7)) :

$$\text{(E)} \qquad h_k(x,\lambda) - x[1 + f(x,\lambda)] = 0$$

désignons par $\psi_{k,0}$ le 1^{er} membre de cette égalité (le 1^{er} indice k désigne le nombre de sommets du polycycle et le $2^{ème}$ indice 0 désigne le nombre d'opérations de dérivations). Le nombre de racines en x de l'équation (E) sur son domaine de définition $\mathcal{U}_\lambda$ pour $\lambda \in O$ (cf. (4.4) et (4.6)) est, d'après le Lemme de Rolle, inférieur ou égal au nombre de racines en x de l'équation $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,0}(x,\lambda) = 0$ sur $\mathcal{U}_\lambda$ augmenté de un. D'après (4.15) on a :

$$\text{(5.1)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,0}(x,\lambda) = R_k(\lambda).S_k^{(r^1)_k}(x,\lambda) - [1 + f_{10}(x,\lambda)]$$

où $f_{10}(x,\lambda) = f(x,\lambda) + x.\frac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda)$; la fonction f vérifiant les propriétés $(I_{\lambda,0}^K)$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$, la fonction f_{10} vérifie les propriétés $(I_{\lambda,0}^{K-1})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ (cf. Déf. 2).

Maintenant, si $k = 1$, (5.1) montre que le Théorème 2 est vrai sous la condition $r_1(0) \neq 1$ avec $e(1) = 1$. Si $k > 1$, le produit $S_k^{(r^1)_k}$ contient

au moins deux facteurs (cf. (4.12)) et comme on a

$$\forall j \in \{0, ..., k\} \qquad \lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\(x,\lambda)\in\mathcal{U}}} h_j(x,\lambda) = 0$$

(cf. (4.7)), on déduit que si : $(\forall j \in \{1, ..., k\} \quad r_j^1(0) > 0)$ ou $(\forall j \in \{1, ..., k\} \quad r_j^1(0) < 0)$ l'équation (E) aurait au plus une racine en x; ces deux premiers résultats sont annoncés dans [A]. Pour pouvoir continuer, supposons donc $k \geq 2$ (et les $r_j^1(0)$ pour $j = 1, ..., k$ ne vérifiant aucune des deux conditions ci-dessus) et cherchons une fonction qui aurait les mêmes racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ que la fonction (5.1) et qui serait linéaire en le terme de translation $b_{k-1}(\lambda)$; quitte à restreindre ε et O et utilisant la relation (4.12) pour $j = k$, on voit que l'équation $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,0}(x,\lambda) = 0$ est équivalente à l'équation :

$$R_k(\lambda).[1 + f_{10}(x,\lambda)]^{-1}.S_{k-1}^{(r^1)_{k-1}}(x,\lambda) = [h_{k-1}(x,\lambda)]^{-r_k^1(\lambda)} \tag{5.2}$$

et si la condition :

$$r_k^1(0) \neq 0 \tag{5.3}$$

est réalisée, l'équation (5.2) est équivalente à l'équation :

$$A(\lambda).[1 + f_{11}(x,\lambda)].S_{k-1}^{(z)_{k-1}}(x,\lambda) - h_{k-1}(x,\lambda) = 0 \tag{5.4}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \forall \lambda \in O & : \quad A(\lambda) = [R_k(\lambda)]^{-[r_k^1(\lambda)]^{-1}} \\ \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} & : \quad f_{11}(x,\lambda) = [1 + f_{10}(x,\lambda)]^{[r_k^1(\lambda)]^{-1}} - 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

et le $(k-1)-$*uplet* $(z)_{k-1}$ est donné par (cf. (4.8)) :

$$\forall j \in \{1, ..., k-1\} \ \forall \lambda \in O \quad z_j(\lambda) = r_j^1(\lambda).\,[r_k^1(\lambda)]^{-1}\,. \tag{5.6}$$

Désignons par $\psi_{k,1}(x,\lambda)$ le 1^{er} membre de (5.4). Il est clair que la fonction f_{11} ci-dessus (cf. (5.15)) vérifie comme f_{10} les propriétés $(I_{\lambda,0}^{K-1})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$. D'après le Lemme de Rolle et ce qui précède, le nombre de racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ de l'équation (E) est inférieur ou égal au nombre de racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ de l'équation $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,1}(x,\lambda) = 0$ augmenté de deux.

Remarque 2. — Quitte à remplacer la classe de différentiabilité K par $K' > K$ bien choisi, on supposera désormais que toutes les fonctions intervenant dans l'algorithme sont au moins de classe C^K en x.

Avant d'entamer le calcul de la fonction $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,1}$, introduisons de nouvelles fonctions : si f est une fonction qui vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$, si $t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbf{R}$ et si $j \in \{1, ..., k\}$, on désigne par $\hat{\Sigma}_j^{(t)_j}(f)$ la fonction :

$$(5.8) \quad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \qquad \hat{\Sigma}_j^{(t)_j}(f)(x,\lambda) = \bar{\Sigma}_j^{(t)_j}(x,\lambda) + \hat{S}_j^{(1)_j}(x,\lambda).f(x,\lambda)$$

cf. (4.13) et (4.18)). Ceci étant et grâce aux relations (4.13) et (4.15), la dérivée de la formule (5.4) s'écrit :

$$(5.9) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,1} = A.[1 + f_{20}].S_{k-1}^{(z^1)_{k-1}}.\hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{21}) - R_{k-1}.S_{k-1}^{(r^1)_{k-1}}$$

les fonctions f_{20} et f_{21} vérifient les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ (cf. Remarque 2 ci-dessus). Plus précisément on a posé :

(5.10)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad \begin{cases} f_{20}(x,\lambda) = f_{11}(x,\lambda) & \text{(cf. (5.5))} \\ f_{21}(x,\lambda) = h_o(x,\lambda).\dfrac{\partial f_{11}}{\partial x}(x,\lambda).[1 + f_{11}(x,\lambda)]^{-1} & \text{(cf. (4.7))} \end{cases}$$

D'après ce qui a été dit au sujet des fonctions h_j (cf. (4.7)) et les formules (4.12), les fonctions $S_j^{(t)_j}$ sont ≥ 0 sur $\mathcal{U}$ et n'ont pas de racines en x sur l'ouvert $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in O$; on en déduit que l'équation $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,1}(x,\lambda) = 0$ est équivalente sur $\mathcal{U}_\lambda$ à l'équation :

$$(5.11) \quad A(\lambda).[1 + f_{20}(x,\lambda)].S_{k-1}^{(y)_{k-1}}(x,\lambda).\hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{21})(x,\lambda) - R_{k-1}(\lambda) = 0$$

où $(y)_{k-1}$ désigne le $(k-1)-$*uplet* : $(y)_{k-1} = (y_{k-1}, ..., y_1)$ avec :

$$(5.12) \quad \forall j \in \{1, ..., k-1\} \quad \forall \lambda \in O : y_j(\lambda) = -(r_j(\lambda).r_k(\lambda))^1.\left[r_k^1(\lambda)\right]^{-1}$$

(cf. (4.9) et (5.6)). Désignons par $\psi_{k,2}(x,\lambda)$ le 1^{er} membre de (5.11).

Maintenant, si $k = 2$ on calcule aisément grâce à (5.11), (4.12), (5.8) et (4.18) : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

$$\psi_{2,2}(x,\lambda) = A(\lambda).[1 + f_{20}(x,\lambda)].[h_o(x,\lambda)]^{y_1(\lambda)}.(z_1(\lambda) + f_{21}(x,\lambda)) - R_1(\lambda)$$

et on déduit de (4.7), (5.3), (5.6) et (5.12) que sous les conditions :

$$(5.13) \qquad r_1^1(0) \neq 0,\ r_2^1(0) \neq 0 \text{ et } (r_1(0).r_2(0))^1 \neq 0$$

le Théorème 2 est vrai avec $e(2) = 2$; un tel résultat a été obtenu par L.A. Cherkas dans [L]. Si $k > 2$, le produit $S_{k-1}^{(y)_{k-1}}$ contient au moins deux facteurs (cf. (4.12)) et comme on a : $\lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\(x,\lambda)\in\mathcal{U}}} \hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{21})(x,\lambda) = 0$ (cf. (4.16) et (5.8)), on peut déduire que si :

$$\forall j \in \{1,...,k-1\} : y_j(0) > 0 \tag{5.14}$$

(cf. (5.12)) l'équation (E) admettrait au plus deux racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in O$; on ne détaillera pas plus ce cas particulier et on revient au cas général en gardant $k \geq 2$ pour une raison qu'on expliquera plus loin.

Signalons que l'apparition dans l'expression de la fonction $\psi_{k,2}$ (cf. (5.11)) du terme $\hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{21})$ qui est, contrairement aux fonctions $S_j^{(t)_j}$ (cf. (4.12)), de structure additive (cf. (5.8) et (4.18)) empêche pour les cas $k > 2$ l'élimination d'une puissance ou d'une translation en une seule opération de dérivation. Comme cela a été dit en début de la Preuve, on procède maintenant à une $3^{ème}$ dérivation pour éliminer le terme $S_j^{(t)_j}$ et homogénéiser l'équation : d'après le Lemme de Rolle et ce qui précède, pour tout $\lambda \in O$, le nombre de racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ de l'équation (E) est inférieur ou égal au nombre de racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ de l'équation : $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,2}(x,\lambda) = 0$ augmenté de trois. Comme pour la relation (5.9), un simple calcul nous donne : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,2} = A(\lambda).[1 + f_{30}(x,\lambda)].S_{k-1}^{(y^1)_{k-1}}(x,\lambda).\psi_{k,3}(x,\lambda) \tag{5.15}$$

où $\psi_{k,3}$ désigne la fonction :

$$\begin{aligned}\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad : \psi_{k,3}(x,\lambda) &= \hat{\Sigma}_{k-1}^{(y)_{k-1}}(f_{31})(x,\lambda).\hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{32})(x,\lambda) \\ &+ S_{k-1}^{(1)_{k-1}}(x,\lambda).\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}(f_{32})(x,\lambda)\end{aligned} \tag{5.16}$$

les fonctions f_{30}, f_{31} et f_{32} vérifient les propriétés $(I_{\lambda,0}^K)$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ et sont données par : (cf. (5.10) et Remarque 2)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad \begin{cases} f_{30}(x,\lambda) &= f_{20}(x,\lambda) \\ f_{31}(x,\lambda) &= x.\dfrac{\partial f_{20}}{\partial x}(x,\lambda).[1 + f_{20}(x,\lambda)]^{-1} \\ f_{32}(x,\lambda) &= f_{21}(x,\lambda) \end{cases} . \tag{5.17}$$

Grâce à (5.5) $1^{ère}$ ligne et à la remarque ci-dessus concernant le signe des fonctions $S_j^{(t)_j}$ on peut affirmer que, quitte à réduire ε et O

(cf. (4.4), (4.5) et (4.6)), l'équation $\frac{\partial}{\partial x}\psi_{k,2}(x,\lambda) = 0$ est équivalente sur $\mathcal{U}$ à l'équation : (cf. (5.15) et (5.16))

$$\psi_{k,3}(x,\lambda) = 0 \tag{5.18}$$

la résolution de cette équation sera une application des résultats de l'étude élargie qu'on présente ci-dessous et où on donne les propriétés de certains espaces de fonctions notées : $Q^{m,j}$ et $P_n^{m,j}$; on montrera ensuite que la fonction $\psi_{k,3}$ ci-dessus (cf. (5.16)) est équivalente (au sens qu'on précisera) à une fonction de type $Q^{2,k-2}$ pour $k \geq 2$:

Les espaces des fonctions $Q^{m,j}$ et $P_n^{m,j}$.

a) Définitions :

On définit les fonctions $Q^{m,j}$ par récurrence sur $m, j \in \mathbf{N}$ et à l'aide des fonctions $(h_i)_{i=1,\ldots,k}$ (cf. (4.7)) et des fonctions $(S_i^{(r)_i})_{i=1,\ldots,k}$(cf. (4.12)) où $(r)_i$ désigne le $i-$ *uplet* des rapports d'hyperbolicité $(r_l)_{l=1,\ldots,i}$ des sommets $(P_l)_{l=1,\ldots,i}$ du polycycle (Γ_k) (cf. Introduction) :

* *pour $m = 0$ ou $j = 0$, les fonctions $Q^{0,j}$ (ou $Q^{m,0}$) sont de la forme :*

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \qquad Q^{0,j}(x,\lambda)(\text{ou } Q^{m,0}(x,\lambda)) = C + f(x,\lambda) \tag{6.1}$$

où f est une fonction qui vérifie les propriétés $(I_{\lambda,0}^K)$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$ (cf. Déf. 2, (4.5) et Remarque 2) et C est une constante;

* *pour $m \geq 1$ et $j \in \{1,\ldots,k\}$, la fonction $Q^{m,j}$ est un polynôme homogène de degré m en les deux variables $\left(h_j, S_j^{(r)_j}\right)$ dont les coefficients sont des fonctions $Q^{l,j-1}$ avec $l \in \{0,\ldots,m\}$; plus précisément, supposons définies sur $\mathcal{U}$ les fonctions $Q^{l,j-1}$ pour tout $l \in \mathbf{N}$, alors :*

(6.2)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \; Q^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{m}[h_j(x,\lambda)]^{m-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l \cdot Q^{m-l,j-1}(x,\lambda).$$

On définit les fonctions $P_n^{m,j}$ à l'aide des fonctions $Q^{l,j-1}$ et des fonctions $h_j, S_j^{(r)_j}$ comme suit :

* *pour $j = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall m \in \mathbf{N}$ $m \geq n$; $P_n^{m,0}$ est du type d'une fonction $Q^{m,0}$* (ou $Q^{0,j}$) :

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \qquad P_n^{m,0}(x,\lambda) = C + f(x,\lambda) \tag{6.3}$$

où les fonctions f et C ont les mêmes propriétés que dans la relation (6.1) ci-dessus.

* *pour $j \in \{1,...,k\}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall m \in \mathbf{N}$ $m \geq n$; la fonction $P_n^{m,j}$ est un polynôme homogène de degré n en les deux variables $(h_j, S_j^{(r)_j})$ dont les coefficients sont des fonctions $Q^{l,j-1}$ (cf. (6.2)) avec $l \in \{m-n,...,m\}$, soit :*

(6.4)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad P_n^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{n} [h_j(x,\lambda)]^{n-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^{l} \cdot Q^{m-l,j-1}(x,\lambda).$$

Remarquons que :

$$\forall j \in \{1,...,k\} \quad \forall n \geq 1 : \quad P_n^{n,j} = Q^{n,j} \tag{6.5}$$

(i.e $P_n^{n,j}$ est une fonction de type $Q^{n,j}$)

$$\forall j \in \{1,...,k\} \quad \forall m \geq 1 : \quad P_0^{m,j} = Q^{m,j-1} \text{ (cf. (6.4))}. \tag{6.6}$$

Désignons par $\mathcal{B}^{m,j}$ (resp. $\mathcal{A}_n^{m,j}$) l'ensemble des fonctions ayant une écriture de type $Q^{m,j}$ (resp. $P_n^{m,j}$) et notons pour $j \geq 1$: $\mathcal{A}_j = \bigcup_{m \geq n \geq 1} \mathcal{A}_n^{m,j}$ et $\mathcal{B}_j = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{B}^{m,j}$, désignons aussi par $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{B}^{0,j} = \mathcal{B}^{m,0} = \mathcal{A}_n^{m,0}$ (cf. (6.1) et (6.3)). On montrera plus loin que les ensembles $\mathcal{B}^{m,j}$ (resp. $\mathcal{A}_n^{m,j}$) sont des $\mathbf{R}$ – espaces vectoriels et que $\mathcal{C}$ est une $\mathbf{R}$ – algèbre. Notons enfin :

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{k \geq j \geq 1} \mathcal{A}_j \right). \tag{6.6'}$$

b) Les relations d'équivalence modulo $(I_{\lambda,0}^K)$ et la suite des coefficients :

Les relations d'équivalence et la notion de "suite des coefficients" qu'on définit ci-dessous nous permettront essentiellement de montrer que les conditions génériques de la Proposition 4 dépendent uniquement des rapport d'hyperbolicité $(r_i(0))_{i=1,...,k}$.

Comme pour les fonctions $Q^{m,j}$ et $P_n^{m,j}$ décrites ci-dessus, les relations d'équivalence modulo $(I_{\lambda,0}^K)$ seront définies par récurrence comme suit :

* *deux éléments F_1, F_2 de $\mathcal{C}$ (cf. (6.1) et (6.3)) seront dits équivalents dans $\mathcal{C}$ mod. $(I^K_{\lambda,0})$ si et seulement si la fonction : $(x,\lambda) \in \mathcal{U} \mapsto F_1(x,\lambda) - F_2(x,\lambda)$ vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$.*

* *pour $j \in \{1,...,k\}$, deux éléments $Q^{m,j}$ et $\hat{Q}^{m',j}$ de l'ensemble $\mathcal{B}_j$ seront dits équivalents dans $\mathcal{B}_j$ mod. $(I^K_{\lambda,0})$ si et seulement si :*

i) *les fonctions $Q^{m,j}$ et $\hat{Q}^{m,j}$ ont le même degré : $m = m' \geq 1$, et :*

ii) *il existe des écritures des fonctions $Q^{m,j}$ et $\hat{Q}^{m,j}$ dans $\mathcal{B}^{m,j}$ (cf. (6.2)) : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$*

$$Q^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{m} [h_j(x,\lambda)]^{m-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l \cdot Q^{m-l,j-1}$$

$$\hat{Q}^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{m} [h_j(x,\lambda)]^{m-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l \cdot \hat{Q}^{m-l,j-1}$$

telles que pour tout $l \in \{0,...,m\}$, les fonctions $Q^{m-l,j-1}$ et $\hat{Q}^{m-l,j-1}$ soient équivalentes dans $\mathcal{B}_{j-1}$ mod. $(I^K_{\lambda,0})$.

**Pour $j \in \{1,...,k\}$, deux éléments $P_n^{m,j}$, $\hat{P}_{n'}^{m',j}$ de l'ensemble $\mathcal{A}_j$ seront dits équivalents dans $\mathcal{A}_j$ mod.$(I^K_{\lambda,0})$ si et seulement si :*

i) *ces fonctions ont le même degré $n = n' \geq 1$ et le même indice $m = m'$ et*

ii) *il existe des écritures de ces fonctions dans $\mathcal{A}_n^{m,j}$ (cf. (6.4)) : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$*

$$P_n^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{n} [h_j(x,\lambda)]^{n-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l \cdot Q^{m-l,j-1}(x,\lambda)$$

$$\hat{P}_n^{m,j}(x,\lambda) = \Sigma_{l=0}^{n} [h_j(x,\lambda)]^{n-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l \cdot \hat{Q}^{m-l,j-1}$$

telles que pour tout $l \in \{0,...,n\}$, les fonctions $Q^{m-l,j-1}$ et $\hat{Q}^{m-l,j-1}$ soient équivalentes dans $\mathcal{B}_{j-1}$ mod.$(I^K_{\lambda,0})$.

La notion de "suite des coefficients" qu'on introduit ci-dessous nous permettra de caractériser les classes d'équivalence mod. $(I^K_{\lambda,0})$:

* *Si F est un élément de l'algèbre $\mathcal{C}$ qui s'écrit : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$ $F(x,\lambda) = C + f(x,\lambda)$ (cf. (6.1)), alors la suite des coefficients dans $\mathcal{C}$ de la fonction F est le $1-$uplet (C);*

* *Si $Q^{m,j}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{B}_j$ qui est donné par la relation (6.2), alors la suite des coefficients dans $\mathcal{B}_j$ de la fonction $Q^{m,j}$ est le uplet construit à l'aide des suites des coefficients des fonctions coefficients $Q^{m-l,j-1}$ en les ordonnant suivant les degrés $m-l$ décroissants.*

* *La suite des coefficients dans $\mathcal{A}_j$ d'un élément $P_n^{m,j}$ de l'ensemble $\mathcal{A}_j$ se définie de la même façon en utilisant la relation (6.4) et ce qui est dit ci-dessus.*

Une récurrence simple permet de montrer que :

LEMME 3. — *Deux fonctions F_1, F_2 de l'algèbre $\mathcal{C}$ (resp. deux fonctions $P_n^{m,j}, \hat{P}_n^{m,j}$ de l'ensemble $\mathcal{A}_j$) sont équivalentes dans $\mathcal{C}$ (resp. dans $\mathcal{A}_j$) mod. $(I_{\lambda,0}^K)$ si et seulement si elles admettent des écritures dans lesquelles elles ont la même suite des coefficients dans $\mathcal{C}$ (resp. dans $\mathcal{A}_j$).*

On montre facilement que la suite des coefficients d'un élément de $\mathcal{A}_n^{m,j}$ est indépendante de l'écriture de cette fonction dans l'espace $\mathcal{A}_n^{m,j}$. On dira donc dans la suite "équivalence mod. $(I_{\lambda,0}^K)$" ou "suite des coefficients" sans préciser dans l'ensemble de référence ou l'écriture dans cet ensemble.

c) l'opérateur $\mathcal{L}$ et le lemme de Finitude :

Avant de définir "l'opération récurrente" de notre algorithme (cf. Déf. 3 ci-dessous), signalons que :

Remarque 3. — Si G et g sont deux fonctions réelles de la variable $x \in]a,b[\subset \mathbf{R}$ de classe C^{K+1} sur $]a,b[$ et si la fonction g n'est pas identiquement nulle sur $]a,b[$, alors la fonction ψ définie sur $]a,b[\setminus\{x \in]a,b[\ ;\ g(x)=0\}$ par :

$$\psi(x) = [g(x)]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left([g(x)]^{-1}.G(x)\right)$$

admet un prolongement naturel à $]a,b[$ qui est de classe C^K sur $]a,b[$.

DÉFINITION 3. — *On définit sur les ensembles $\mathcal{A}_j$ un opérateur de division-dérivation noté $\mathcal{L}$ comme suit : Si $P_n^{m,j}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}_j$ ($j \in \{1,...,k\}$ et $m \geq n \geq 1$ (cf. a)) donné par la relation (6.4) et si son premier coefficient $Q^{m,j-1}$ n'est pas identiquement nul pour tout $\lambda \in O$ (quitte à restreindre O (cf. (4.4)), alors l'action de $\mathcal{L}$ sur $P_n^{m,j}$ est la fonction : (cf. Remarque 3)*

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \ : \ \mathcal{L}(P_n^{m,j})(x,\lambda) = \tag{6.7}$$
$$S_j^{(-r^1)_j}(x,\lambda)\left[Q^{m,j-1}(x,\lambda)\right]^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[Q^{m,j-1}(x,\lambda)\right]^{-1} P_n^{m,j}(x,\lambda)\right).$$

Remarque 4. — Grâce à la relation (6.4), on constate que la fonction $P_n^{m,j}$ est polynomiale de degré n en le terme de translation $b_j(\lambda)$ (cf. (4.7) et (E)); l'opération $\mathcal{L}$ ci-dessus consiste en fait à diviser la fonction $P_n^{m,j}$ par le coefficient du monôme $[h_j]^n$, à dériver ensuite la fonction obtenue par rapport à x et enfin à multiplier le résultat par l'inverse du terme $S_j^{(r^1)_j}(x,\lambda).\left[Q^{m,j}(x,\lambda)\right]^{-2}$ qui se met naturellement en facteur comme on le verra dans la suite.

Des calculs et des récurrences simples permettent d'énoncer :

LEMME 4.

i) $\forall j \in \{0,...,k\}$, $\forall m \in \mathbf{N}$, *si* $Q^{m,j}$ *et* $\hat{Q}^{m,j}$ *sont deux éléments de* $\mathcal{B}^{m,j}$ *et si* $u, v \in \mathbf{R}$, *alors la fonction* :

$$(x,\lambda) \in \mathcal{U} \mapsto u.Q^{m,j}(x,\lambda) + v.\hat{Q}^{m,j}(x,\lambda)$$

est un élément de $\mathcal{B}^{m,j}$ *et tout élément de la suite des coefficients de cette fonction (cf. b)) est de la forme* $u.c_i + v.\hat{c}_i$, c_i *et* $\hat{c}_i$ *désignent des éléments de même rang des suites des coefficients des fonctions* $Q^{m,j}$ *et* $\hat{Q}^{m,j}$.

ii) $\forall j \in \{0,...,k\}$, $\forall m_1, m_2 \in \mathbf{N}$, *si* $Q^{m_1,j} \in \mathcal{B}^{m_1,j}$ *et* $\hat{Q}^{m_2,j} \in \mathcal{B}^{m_2,j}$ *alors la fonction* :

$$(x,\lambda) \in \mathcal{U} \mapsto Q^{m_1,j}(x,\lambda).\hat{Q}^{m_2,j}(x,\lambda)$$

est un élément de $\mathcal{B}^{m_1+m_2,j}$ *dont les éléments de la suite des coefficients sont de la forme* $\Sigma_{i1,i2} c_{i1}.\hat{c}_{i2}$ *où la somme est finie et* $c_{i1}, \hat{c}_{i2}$ *sont des éléments des suites des coefficients des fonctions* $Q^{m_1,j}$ *et* $\hat{Q}^{m_2,j}$.

iii) *Pour tout* $j \in \{1,...,k\}$ *et pour toute fonction* f *vérifiant les propriétés* $(I^K_{\lambda,0})$ *par multiplication par* x *sur* $\mathcal{U}$, *les fonctions* $\hat{\Sigma}_j^{(r)_j}(f)$ *(cf. (5.8)) et* $\bar{\Sigma}_j^{(r)_j}$ *(cf. (4.13) et (4.18)) sont des éléments de* $\mathcal{B}^{1,j-1}$ *et sont équivalentes mod.* $(I^K_{\lambda,0})$. *De plus, la suite des coefficients de la fonction* $\hat{\Sigma}_j^{(r)_j}(f)$ *est le* $j-$*uplet* $(R_1(0),...,R_j(0))$ *(cf. (4.14)).*

iv) $\forall j \in \{0,...,k\}$, $\forall m \in \mathbf{N}$, *si* $Q^{m,j} \in \mathcal{B}^{m,j}$ *alors la fonction : (cf. (4.12))*

$$(x,\lambda) \mapsto S_{j+1}^{(1)_{j+1}}(x,\lambda).\frac{\partial}{\partial x}\, Q^{m,j}(x,\lambda)$$

est un élément de $\mathcal{B}^{m+1,j}$ *dont les éléments de la suite des coefficients sont tous nuls si* $Q^{m,j} \in \mathcal{C}$ *(i.e.* $m = 0$ *ou* $j = 0$*) et sont de la forme* $\Sigma_{i_1,i_2} * .R_{i_1}(0).c_{i_2}$ *si* $j \geq 1$ *et* $m \geq 1$ *avec* $i_1 \in \{1,...,j\}$*, la somme étant finie, les* R_{i_1} *sont donnés par (4.4), les* c_{i_2} *sont des éléments de la suite des coefficients de la fonction* $Q^{m,j}$ *et* $*$ *désigne des éléments de* $\mathbf{Z}$*.*

v) *Soit* $P_n^{m,j}$ *un élément de l'ensemble* $\mathcal{A}_j$ *qui vérifie les conditions de la Définition 3 ci-dessus et qui est donné par la relation (6.4); alors la fonction* $\mathcal{L}(P_n^{m,j})$ *(cf. (6.7)) est un élément de* $\mathcal{A}_{n-1}^{2m,j}$ *qu'on note* $P_{n-1}^{2m,j}$ *et qui s'écrit :*

(6.8)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \; P_{n-1}^{2m,j}(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} [h_j(x,\lambda)]^{n-1-l} \cdot \left[S_j^{(r)_j}\right]^l .Q^{2m-l,j-1}(x,\lambda)$$

avec pour tout $l \in \{0,...,n-1\}$, $Q^{2m-l,j-1} \in \mathcal{B}^{2m-l,j-1}$ *et est donnée en fonction des coefficients de la fonction* $P_n^{m,j}$ *par :* $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} Q^{2m-l,j-1}(x,\lambda) &= (n-l).R_j(\lambda).Q^{m,j-1}(x,\lambda).Q^{m-l,j-1}(x,\lambda) \\ (6.9) \quad &+ (l+1).\bar{\Sigma}_j^{(r)_j}(x,\lambda).Q^{m,j-1}(x,\lambda).Q^{m-1-l,j-1}(x,\lambda) \\ &+ Q^{m,j-1}(x,\lambda).S_j^{(1)_j}(x,\lambda).\frac{\partial}{\partial x}Q^{m-1-l,j-1} \\ &- Q^{m-1-l,j-1}(x,\lambda).S_j^{(1)_j}(x,\lambda).\frac{\partial}{\partial x}Q^{m,j-1}(x,\lambda). \end{aligned}$$

Les éléments de la suite des coefficients de la fonction $\mathcal{L}(P_n^{m,j})$ *sont des sommes finies* $\Sigma_{i_0,i_1,i_2} * .R_{i_0}(0).c_{i_1}.c_{i_2}$ *avec* $i_0 \in \{1,...,j\}$*, les* $*$ *désignent des éléments de* $\mathbf{Z}$ *qui ne dépendent pas de la classe d'équivalence mod.* $(I_{\lambda,0}^K)$ *de la fonction* $P_n^{m,j}$*, mais dépendent seulement des entiers* n *et* m*, les* $R_{i_0}(0)$ *sont donnés par (4.14) et les* c_{i_1}, c_{i_2} *sont des éléments de la suite des coefficients de la fonction* $P_n^{m,j}$*.*

vi) *Soient* $P_n^{m,j}, \hat{P}_n^{m,j} \in \mathcal{A}_j$ *deux fonctions qui vérifient les conditions de la Définition 3; alors si elles sont équivalentes mod.* $(I_{\lambda,0}^K)$ *(cf. b)), les deux fonctions* $\mathcal{L}(P_n^{m,j})$ *et* $\mathcal{L}(\hat{P}_n^{m,j})$ *sont équivalentes mod.* $(I_{\lambda,0}^K)$*.*

Remarque 5.

1) Dans l'énoncé vi) ci-dessus, il est essentiel d'imposer que les deux fonctions $P_n^{m,j}$ et $\hat{P}_n^{m,j}$ vérifient les conditions de la Définition 3 comme le montre l'exemple :

$$P_1^{1,1}(x,\lambda) = h_1(x,\lambda).Q^{1,0}(x,\lambda) + S_1^{(r)_1}(x,\lambda).Q^{0,0}(x,\lambda)$$
$$\hat{P}_1^{1,1}(x,\lambda) = h_1(x,\lambda).\hat{Q}^{1,0}(x,\lambda) + S_1^{(r)_1}(x,\lambda).\hat{Q}^{0,0}(x,\lambda)$$

avec $\forall(x,\lambda) \in \mathcal{U} : Q^{0,0}(x,\lambda) = \hat{Q}^{0,0}(x,\lambda) = 1$, $Q^{1,0}(x,\lambda) = x$ et $\hat{Q}^{1,0}(x,\lambda) = 0$; les fonctions $P_1^{1,1}$ et $\hat{P}_1^{1,1}$ sont équivalentes mod. $(I_{\lambda,0}^K)$, le coefficient $Q^{1,0}$ n'est pas identiquement nul pour tout $\lambda \in O$ sur $\mathcal{U}_\lambda$ (cf. (4.6)), cependant l'action de l'opérateur $\mathcal{L}$ sur la fonction $\hat{P}_1^{1,1}$ n'est pas définie.

2) Les opérations i), ii) et iv) du Lemme 4 sont compatibles avec les relations d'équivalence mod. $(I_{\lambda,0}^K)$.

Donnons maintenant un lemme qui généralise le Lemme de Rolle et qui nous permettra d'établir le Lemme de Finitude :

LEMME 5. — *Soit $]a,b[$ un intervalle borné non vide de $\mathbf{R}$ et h, f, g des fonctions réelles de la variable $x \in]a,b[$ qui sont de classe C^{K+1} sur $]a,b[$; on suppose que la fonction f a un nombre fini n de racines sur $]a,b[$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Désignons par F la fonction :*

$$\forall x \in]a,b[: F(x) = h(x).f(x) + g(x), \tag{6.10}$$

alors si la fonction $\hat{L}(F)$ définie par :

(6.11)

$$\forall x \in]a,b[\quad \hat{L}(F)(x) = [f(x)]^2.\frac{\partial}{\partial x}\left([f(x)]^{-1}.F(x)\right) \quad \textit{(cf. Remarque 3)}$$

admet un nombre fini m de racines sur $]a,b[$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité); la fonction F admet au plus $(m+n+1)$ racines sur $]a,b[$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité); l'entier K est supposé très grand devant $m+n+1$.

Preuve. — Désignons par J l'ensemble : $J = \{x \in]a,b[\ ; f(x) = 0\}$ et par ψ la fonction définie sur $]a,b[\setminus J$ par : $\forall x \in]a,b[\setminus J \ \psi(x) = [f(x)]^{-1}.F(x)$.Convenons d'appeler zéro de multiplicité nulle d'une fonction, une valeur où la fonction est non nulle et désignons par J_1 l'ensemble des valeurs $x \in J$ dont la multiplicité en tant que zéro de la fonction g

(cf. (6.10)) est inférieure strictement à sa multiplicité pour la fonction f et posons $J_2 = J \setminus J_1$.

Notons : $n_1 = \#(J_1)$, $n_2 = \#(J_2)$ et posons $J_1 = \{x_1, ..., x_{n_1}\}$ si $n_1 \geq 1$. Il est clair que la fonction ψ définie ci-dessus admet un prolongement à $]a, b[\setminus J_1$ qui est de classe C^K (quitte à remplacer K par $2K$ dans l'énoncé) et qu'on notera toujours ψ. Maintenant on déduit de (6.11) que si J_1 est non vide et si x_i est un élément de J_1 de multiplicité $l_{i,1} \geq 1$ pour la fonction f et de multiplicité $\hat{l}_{i,1}$ pour la fonction g, alors x_i est un zéro de la fonction $\hat{L}(F)$ de multiplicité $l_{i,1} + \hat{l}_{i,1} - 1$, ceci montre que le nombre de zéros de la fonction $\frac{\partial}{\partial x}\psi$ sur $]a, b[\setminus J_1$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité) est $\leq m_1 = m - \sum_{i=1}^{n_1}(l_{i,1} + \hat{l}_{i,1} - 1) - 2\sum_{i=1}^{n_2} l_{i,2}$, $l_{i,2}$ désignant la multiplicité dans la fonction f d'un élément de J_2 (la somme $\sum_{i=1}^{n_1}$ (resp. $\sum_{i=1}^{n_1}$) est nulle si $n_1 = 0$ (resp. $n_2 = 0$)). Le Lemme de Rolle appliqué à la fonction ψ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ (avec $i \in \{0, ..., n_1\}$ et $x_0 = a, x_{n_1+1} = b$) montre que cette fonction admet au plus $(m_1 + n_1 + 1)$ racines sur $]a, b[\setminus J_1$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité), on en déduit, d'après la relation (6.10) et les définitions des ensembles J_1 et J_2 que le nombre de racines de F sur $]a, b[$ est $\leq m_2 = (m_1 + n_1 + 1) + \sum_{i=1}^{n_1} \hat{l}_{i,1} + \sum_{i=1}^{n_2} l_{i,2}$ avec la même convention pour les sommes Σ que ci-dessus. Un calcul simple montre que :

$$m_2 = m - n + 2n_1 + 1 \leq m + n + 1.$$

Venons-en maintenant au résultat de finitude :

LEMME 6 (LEMME DE FINITUDE).

i) *Soit $P_n^{m,j}$ un élément de l'ensemble $\mathcal{A}$ (cf. (6.6')); alors il existe un entier $N(j, n, m)$ ne dépendant que des entiers $j \in \{0, ..., k\}$, $n \in \mathbf{N}$ et $m \geq n$ et un ensemble fini de "conditions" $G(j, n, m)$ qui portent uniquement sur les éléments de la suite des coefficients de $P_n^{m,j}$ et qui dépendent des $(R_i(0))_{i=1,...,j}$ (cf. (4.14)) (ces conditions ne dépendent que de la classe d'équivalence mod. $(I_{\lambda,0}^K)$ de $P_n^{m,j}$) tels que sous les conditions $G(j, n, m)$ et quitte à réduire ε et O (cf. (4.4) et (4.5)) la fonction $P_n^{m,j}$*

admet, pour tout $\lambda \in O$, au plus $N(j,n,m)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (cf. (4.6)) (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

ii) *L'entier $N(j,n,m)$ satisfait aux relations de récurrence :*

(6.12)
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \geq n & : N(0,n,m) = 0 \\ \forall j \in \{1,\ldots,k\}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \geq n & : N(j,n,m) = \sum_{l=0}^{n} N(j-1, 2^l.m, 2^l.m) + n \end{cases}$$

iii) *Si on désigne par : $l_1 = \#G(j,n,m)$ et l_2 le nombre d'éléments de la suite des coefficients de la fonction $P_n^{m,j}$ (cf. i)), alors les conditions de l'ensemble $G(j,n,m)$ sont de la forme : $g_i(R_1(0),\ldots,R_j(0),c_1,c_2,\ldots,c_{l_2}) \neq 0$ avec $i \in \{1,\ldots,l_1\}$ et g_i est une fonction polynomiale de $(j+l_2)$ variables dont les coefficients ne dépendent que des entiers n, m et j et les ensembles $G(j,n,m)$ satisfont les relations de récurrence :*

(6.13)
$$\begin{cases} \text{. pour } j = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \geq n : \text{ si la fonction } P_n^{m,0} \text{ s'écrit (cf. (6.3))} \\ \quad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : P_n^{m,0}(x,\lambda) = c(\lambda) + f(x,\lambda) \\ \quad \text{alors } : G(0,n,m) = \{c(0) \neq 0\} \\ \text{. pour } j \in \{1,\ldots,k\} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \geq n : G(j,n,m) = \bigcup_{l=0}^{n} G(j-1, 2^l.m, 2^l.m). \end{cases}$$

Preuve. — Par induction sur j et n :

i) Soit $P_n^{m,0} \in \mathcal{A}$ de la forme (6.13) ci-dessus; il est clair que sous la condition $c(0) \neq 0$ et du fait que $\lim_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0) \\ (x,\lambda)\in\mathcal{U}}} f(x,\lambda) = 0$ la fonction $P_n^{m,0}$ n'admet pas de racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in O$ (quitte à restreindre ε et O); ceci prouve i), ii) et iii) pour $j = 0$.

Soit $j \in \{1,\ldots,k\}$ et supposons l'assertion i) vraie pour tout $l \in \{0,\ldots,j-1\}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ et $\forall m \geq n$. D'après la relation (6.6), elle est aussi vraie pour toute fonction de type $P_0^{m,j}$ $\forall m \geq 0$. Soit maintenant $n \geq 1$ et supposons de plus que l'assertion i) soit vraie pour toute fonction de type $P_l^{m,j}$ avec $l \in \{0,\ldots,n-1\}$ et $m \geq l$, écrivons pour tout $m \geq n$:

(6.14)
$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \quad P_n^{m,j}(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n} [h_j(x,\lambda)]^{n-l} . \left[S_j^{(r)_j}(x,\lambda)\right]^l . Q^{m-l,j-1}(x,\lambda)$$

où les fonctions $Q^{m-l,j-1} \in \mathcal{B}^{m-l,j-1}$ pour tout $l \in \{0,\ldots,n\}$. Par l'hypothèse de récurrence et si les conditions $G(j-1,m,m)$ appliquées

à la fonction $Q^{m,j-1}$ sont vérifiées, $Q^{m,j-1}$ admet, pour tout $\lambda \in O$, au plus $N(j-1,m,m)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité); la fonction $\mathrm{P}_n^{m,j}$ (cf. (6.14)) vérifie ainsi les conditions de la Définition 3 et on peut poser d'après le lemme 4. v) :

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \quad \mathcal{L}(P_n^{m,j})(x,\lambda) = P_{n-1}^{2m,j}(x,\lambda) \tag{6.15}$$

où la fonction $P_{n-1}^{2m,j} \in \mathcal{A}_{n-1}^{2m,j}$ et est donnée par (6.8) et (6.9). Toujours par l'hypothèse de récurrence et si les conditions $G(j,n-1,2m)$ appliquées à la fonction $P_{n-1}^{2m,j}$ sont vérifiées, $P_{n-1}^{2m,j}$ admet, pour tout $\lambda \in O$, au plus $N(j,n-1,2m)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Maintenant, d'après le Lemme 5 et la relation (6.7) (cf. Déf. 3) (les fonctions $S_j^{(-r^1)j}$ sont > 0 sur $\mathcal{U}$ (cf. (4.12))) la fonction $\mathrm{P}_n^{m,j}$ admet, sous les conditions $G(j-1,m,m) \quad G(j,n-1,2m)$ ci-dessous et pour tout $\lambda \in O$, au plus $(N(j,n-1,2m)+N(j-1,m,m)+1)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité); on posera donc :

$$N(j,n,m) = N(j,n-1,2m) + N(j-1,m,m) + 1 \tag{6.16}$$

$$G(j,n,m) = G(j,n-1,2m) \quad G(j-1,m,m). \tag{6.17}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les définitions des relations d'équivalence mod. $(I_{\lambda,0}^K)$ et des suites de coefficients (cf. b)) et le Lemme 4. vi) les conditions $G(j,n,m)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence mod. $(I_{\lambda,0}^K)$ de la fonction $\mathrm{P}_n^{m,j}$ et plus précisément (cf. Lemme 4. v)), elles dépendent uniquement des éléments de la suite des coefficients de la fonction $P_n^{m,j}$ et des $(R_i(0))$ pour $i \in \{1,\ldots,j\}$.

ii) On obtient la $2^{ème}$ ligne de (6.12) en utilisant les relations (6.6) et (6.16).

iii) L'affirmation concernant la forme explicite des conditions de l'ensemble $G(j,n,m)$ est triviale d'après les résultats de la preuve de l'assertion i). La dernière ligne de (6.13) s'obtient grâce aux relations (6.17) et (6.6).

Remarque 6.

0) Dans le cas général, il n'y a pas unicité de l'écriture d'une fonction dans les espaces $\mathcal{B}^{m,j}$, $\mathcal{A}_n^{m,j}$. Le résultat de ce lemme incite donc à se poser les deux questions suivantes : a) les conditions de finitude $G(j,n,m)$ permettent-elles d'assurer l'unicité de l'écriture de la fonction dans l'espace

$\mathcal{A}_n^{m,j}$?; b) existe-t-il une écriture "minimale" vérifiant les conditions de finitude G correspondantes et pour laquelle la borne N correspondante est minimale?

1) Il existe des fonctions $P_n^{m,j}$ admettant exactement $N(j,n,m)$ racines simples en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in O$; de plus toutes ces racines tendent vers 0 quand λ tend vers 0 : en effet, considérons le cas $j = 1$ et $n = m \in \mathbf{N}$ (avec $n < K =$ la classe de différentiabilité) et posons :
(7.1)

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \quad P_n^{n,1}(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n} [h_1(x,\lambda)]^{n-l} . \left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^l . Q^{n-l,0}(x,\lambda)$$

avec

$$(7.2) \qquad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \ \ \forall l \in \{0,...,n\} : \quad Q^{n-l,0}(x,\lambda) = c_{l,n} + f_{l,n}(x,\lambda)$$

$c_{l,n}$ est une constante et $f_{l,n}$ est une fonction qui vérifie les propriétés $(I_{\lambda,0}^K)$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$. Les résultats des Lemmes 6 et 4 (cf. (6.9) et (6.13)) appliquées à la fonction $P_n^{n,1}$ ci-dessus montrent que l'ensemble $G(1,n,n)$ est de la forme :

$$(7.3) \qquad G(1,n,n) = \bigcup_{i=0}^{n} \{c_{0,i} \neq 0\}$$

où les constantes $c_{0,i}$ sont, dans le cas $n \geq 1$, données par :

$$\forall i \in \{0,...,n-1\} \qquad \forall l \in \{0,...,i\}$$

$$(7.4) \qquad c_{l,i} = R_1(0).c_{0,i+1}((i+1-l).c_{l,i+1} + (l+1).c_{l+1,i+1}).$$

La relation (6.12) nous donne :

$$(7.5) \qquad N(1,n,n) = n.$$

Ceci étant, supposons que : $\forall \lambda \in O \ \ b_1(\lambda) > 0$ et introduisons la nouvelle variable :

$$(7.6) \qquad t = h_1(x,\lambda).S_1^{(-r)_1}(x,\lambda)$$

on a : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \ \ t \in]1,+\infty[$. Pour simplifier les calculs, le Lemme 6 nous permet de remplacer la fonction $P_n^{n,1}$ (cf. (7.1)) par la fonction $\hat{P}_n^{n,1}$ ci-dessous qui lui est équivalente mod. $(I_{\lambda,0}^K)$: (cf. (7.2))

$$(7.7) \quad \forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} : \qquad \hat{P}_n^{n,1}(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n} c_{l,n}.[h_1(x,\lambda)])^{n-l} . \left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^l .$$

Ecrivons cette fonction dans la variable t ci-dessus et posons :

$$g_n(t) = \hat{P}_n^{n,1}(x,\lambda) = \left[S_1^{(r)_1}(x,\lambda)\right]^n . \sum_{l=0}^{n} c_{l,n}[t]^{n-l}; \tag{7.8}$$

choisissons maintenant $(n+1)$ réels $(c_{l,n})_{l=0,\ldots,n}$ tels que le polynôme $t \to \sum_{l=0}^{n} c_{l,n}[t]^{n-l}$ ait n racines distinctes $\in]1,+\infty[$ et que les conditions (7.3) soient vérifiées. La fonction $\hat{P}_n^{n,1}$ (cf. (7.8)) admettrait alors n racines distinctes en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ pour tout $\lambda \in O$ et toutes ces racines tendent vers 0 avec λ d' après (7.6). La même propriété reste vraie pour la fonction $P_n^{n,1}$ (cf. (7.1)) du fait que les fonctions $f_{l,n}$ vérifient :

$$\forall l \in \{0,\ldots,n\} \qquad \operatorname*{Lim}_{\substack{(x,\lambda)\to(0,0)\\(x,\lambda)\in\mathcal{U}}} f_{n,l}(x,\lambda) = 0.$$

2) Pour pouvoir utiliser le Lemme 5 dans la preuve du Lemme 6, on a écrit la fonction $P_n^{m,j}$ sous la forme : $P_n^{m,j}(.,\lambda) = h_\lambda . f_\lambda + g_\lambda$ avec : $\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U}$

$$h_\lambda(x) = [h_j(x,\lambda)]^n, \quad f_\lambda(x) = Q^{m,j-1}(x,\lambda)$$
$$\text{et } g_\lambda(x) = S_j^{(r)_j}(x,\lambda).P_{n-1}^{m-1,j}(x,\lambda) \tag{7.9}$$

la fonction $P_{n-1}^{m-1,j}$ étant un élément de $\mathcal{A}_{n-1}^{m-1,j}$. Or on montre facilement (en reprenant la preuve du Lemme 5) que pour que la fonction $P_n^{m,j}$ admette un nombre maximal de racines en $x (= N(j,n,m)$ (cf. Lemme 6)), il est nécessaire que la fonction f_λ (cf. (7.9)) ait un nombre maximal de racines $(= N(j-1,m,m))$ toutes simples et dont aucune n'est une racine de la fonction g_λ et que de plus (la fonction h_λ étant > 0 (cf. (7.9)) g_λ admette au moins $N(j-1,m,m)$ racines. On déduit donc que si la fonction $P_{n-1}^{m-1,j}$ (cf. (7.9)) satisfait aux conditions $G(j,n-1,m-1)$ (cf. Lemme 6) et si les entiers j,n et m sont tels que $N(j,n-1,m-1) < N(j-1,m,m)$ (sans prendre en considération les relations (6.16)) la borne maximale $N(j,n,m)$ ne peut être atteinte. Il est probable que c'est le cas dans notre application à l'équation (5.18) (cf. ci-dessous) mais dans le cas général, on montre facilement l'existence de fonctions $P_n^{m,j}$ qui satisfont aux conditions $G(j,n,m)$ et dont la fonction $P_{n-1}^{m-1,j}$ correspondante (cf. (7.9)) ne satisfait pas aux conditions $G(j,n-1,m-1)$: on choisit $j=2$ et $n=1$ et on pose :

$$\forall (x,\lambda) \in \mathcal{U} \quad P_1^{1,2}(x,\lambda) = h_2(x,\lambda).Q^{1,1}(x,\lambda) + S_2^{(r)_2}(x,\lambda).Q^{0,1}(x,\lambda)$$

avec : $Q^{0,1}(x,\lambda) = f(x,\lambda)$, f étant une fonction qui vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$. $Q^{0,1}$ ne vérifie pas les conditions $G(1,0,0) = G(0,0,0)$ (cf. (6.13)) et un calcul simple permet de montrer que si la fonction $Q^{1,1}$ s'écrit $Q^{1,1} = h_1 + c.S_1^{(r)_1}$ avec $c \neq -1$ et $c \neq 0$ alors la fonction $P_1^{1,2}$ satisfait aux conditions de l'ensemble $G(2,1,1)$.

Retour a l'équation (5.18).

Considérons l'expression (5.16) de la fonction $\psi_{k,3}$ avec $k \geq 2$. On montre d'abord comme dans le Lemme 4. iii) que si f est une fonction qui vérifie les propriétés $(I^K_{\lambda,0})$ par multiplication par x sur $\mathcal{U}$, si $t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbf{R}$ et si $j \in \{1, ..., k\}$ alors les fonctions $\hat{\Sigma}_j^{(t)_j}(f)$ (cf. (5.8)) et $\bar{\Sigma}_j^{(t)_j}$ (cf. (4.18) et (4.13)) sont des éléments de $\mathcal{B}^{1,j-1}$ et sont équivalentes mod. $(I^K_{\lambda,0})$; de plus la suite des coefficients de la fonction $\hat{\Sigma}_j^{(t)_j}(f)$ est le $j-uplet$ $(t_1, R_1(0).t_2, R_2(0).t_3, ..., R_{j-1}(0).t_j)$. On déduit donc, grâce au Lemme 4. ii) et iv) que la fonction $\psi_{k,3}$ est un élément de $\mathcal{B}^{2,k-2}$ dont les éléments de la suite des coefficients (cf. (5.12), (5.6) et (5.3)) sont des fonctions polynomiales des variables $\left(r_1(0), r_2(0), ..., r_k(0), [r_k^1(0)]^{-1}\right)$; la Remarque 5. 2°) permet d'affirmer en plus que la fonction $\psi_{k,3}$ est équivalente mod. $(I^K_{\lambda,0})$ à la fonction $\hat{\psi}_{k,3}$ ci-dessous :

$$\hat{\psi}_{k,3} = \bar{\Sigma}_{k-1}^{(y)_{k-1}}.\bar{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}} + S_{k-1}^{(1)_{k-1}}.\frac{\partial}{\partial x}\bar{\Sigma}_{k-1}^{(z)_{k-1}}. \tag{8.1}$$

Maintenant, notons (Γ_{k-1}) le polycycle à $(k-1)$ sommets obtenu à partir du polycycle (Γ_k) en éliminant le sommet P_{k-1} (pour $k \geq 3$) et désignons par $\psi_{k-1,3}$ l'analogue de l'expression (5.16) mais calculée pour le polycycle (Γ_{k-1}) soumis à la perturbation induite par celle de (Γ_k); notons aussi $\hat{\psi}_{k-1,3}$ le représentant de $\psi_{k-1,3}$ mod.$(I^K_{\lambda,0})$ comme dans (8.1) ci-dessus. Les deux formules de récurrence (4.18) et la relation (4.17) permettent alors de montrer que : $\forall k \geq 3$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{k,3} = [h_{k-2}]^2.\hat{\psi}_{k-1,3} + (h_{k-2}.S_{k-2}^{(r)_{k-2}}).R_{k-2}.\bar{z}_{k-1}.\bar{\Sigma}_{k-2}^{(z)_{k-2}} \\ + y_{k-1}.z_{k-1}.[R_{k-2}]^2.[S_{k-2}^{(r)_{k-2}}]^2\end{aligned} \tag{8.2}$$

les fonctions $(y_i)_{i=1,...,k-1}$ et $(z_i)_{i=1,...,k-1}$ sont données par (5.12) et (5.6) et la fonction $\bar{z}_{k-1}$ est donnée par : $\forall \lambda \in O$

$$\bar{z}_{k-1}(\lambda) = (r_k(\lambda) + 1).z_{k-1}(\lambda); \tag{8.3}$$

pour compléter la relation de récurrence (8.2), donnons l'expression de $\hat{\psi}_{k,3}$ pour $k = 2$: $\forall (x, \lambda) \in \mathcal{U}$

$$\hat{\psi}_{2,3}(x, \lambda) = y_1(\lambda).z_1(\lambda) \tag{8.4}$$

(cf. (8.1)). Le Lemme de finitude (Lemme 6) dit que si la fonction $\hat{\psi}_{k,3}$ satisfait aux conditions de l'ensemble $G(k-2,2,2)$, alors la fonction $\psi_{k,3}$ (et donc la fonction $\hat{\psi}_{k,3}$) admet, pour tout $\lambda \in O$, au plus $N(k-2,2,2)$ racines en x sur $\mathcal{U}_\lambda$ (comptées avec leurs ordres de multiplicité).

D'après ce même Lemme iii) et ce qui est dit ci-dessus, les conditions de l'ensemble $G(k-2,2,2)$ sont, dans notre application, de la forme $g(r_1(0), r_2(0), ..., r_k(0), [r_k^1(0)]^{-1}) \neq 0$ où g est une fonction polynomiale de $(k+1)$ variables. Or en faisant (formellement) :

$$b_1(\lambda) = 0,\ b_2(\lambda) = 0, ...,\ b_{k-2}(\lambda) = 0$$

dans l'expression (8.1), les deux termes $(R_k(\lambda))^1$ et $(R_{k-1}(\lambda))^1$ (cf.(4.9) et (4.14)) se mettent en facteur, on en déduit que dans l'algorithme du Lemme 6 appliqué à la fonction $\hat{\psi}_{k,3}$ (cf.(8.1)), les deux conditions : $(R_k(0))^1 \neq 0$ et $(R_{k-1}(0))^1 \neq 0$ apparaîtront sûrement au plus après l'élimination du dernier terme de translation $b_1(\lambda)$. De plus les relations (6.13) du Lemme 6 montrent que les premières conditions de l'ensemble $G(k-2,2,2)$ sont celles qui portent sur la fonction $\hat{\psi}_{k-1,3}$ (cf.(8.2)) et (8.4) ci-dessus montre que pour $k = 2$ ces conditions sont $(R_1(0))^1 \neq 0$ et $(R_2(0))^1 \neq 0$, on en conclut par une simple récurrence et en utilisant la définition de la fonction $\hat{\psi}_{k-1,3}$ que l'ensemble $G(k-2,2,2)$ pour $k \geq 3$ contient les conditions :

$$\begin{cases} (R_i(0))^1 \neq 0 & \text{pour} \quad i \in \{1, ..., k\} \\ (R_j(0).r_k(0))^1 \neq 0 & \text{pour} \quad j \in \{1, ..., k-2\} \end{cases} \tag{8.5}$$

(cf.(4.9)), mais comme le montre le cas $k = 3$ ci-dessous, $G(k-2,2,2)$ peut contenir d'autres conditions de structure additive et qu'on nomme "*conditions parasites*" (ce nom sera justifié dans [M2] où on montre que la condition "parasite" du cas $k = 3$ peut être déduite des autres conditions).

Les conditions du type (8.5) seront appelées "conditions hyperboliques". Pour $k = 3$, les conditions de l'ensemble $G(1,2,2)$ appliquées à la fonction $\hat{\psi}_{3,3}$ sont :

(8.6)

$$\begin{cases} (r_1(0))^1.(r_1.r_3(0))^1 \neq 0 \\ r_1(0).(r_2.r_3(0))^1 + (r_1.r_2(0))^1 + (r_1.r_3(0))^1 \neq 0 \quad \text{(condition parasite)} . \\ (r_1.r_2(0))^1.(r_1.r_2.r_3(0))^1 \neq 0 \end{cases}$$

Les relations de récurrence (6.12) du Lemme 6 permettent de donner une estimation (grossière!) de l'entier $N(k-2,2,2)$ de la façon suivante : désignons par f et g les fonctions définies sur R par

$$f(x) = [2]^{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = x.[2]^x,$$

alors on a

$$N(k-2,2,2) \leq 2. \prod_{j=0}^{k-3} f(g^j(2)) \tag{8.7}$$

où g^j désigne la composée j fois de la fonction g (avec la convention $g^0(x) = x$).

Pour le cas $k = 3$, on calcule directement : $N(1,2,2) = 2$.

Ceci finit la preuve du Théorème 2 en ajoutant aux conditions $G(k-2,2,2)$ la condition (5.3) et en posant : $e(k) = N(k-2,2,2) + 3$.

— Il est clair, d'après la preuve ci-dessus, que le Théorème 2 est vrai sur tout cône non vide $C^-(P_j, v)$ avec $j \in \{1,...,k\}$ et $v \in E = \{+,-\}$ (cf. (3.3).§1), l'entier $e(k)$ étant le même, par contre les conditions $G(k-2,2,2)$ $\{r_k^1(0) \neq 0\}$ doivent subir la permutation correspondante (précédée éventuellement d'une inversion qui consiste à remplacer les r_i par $s_i = [r_i]^{-1}$ si $v = -$).

Citons l'exemple du cas $k = 3$ pour donner un sens à l'existence de ce phénomène : dans la preuve ci-dessus faite sur le cône $C^-(P_1, +)$, on remarque (cf. (8.6)) l'absence de la condition $(r_2(0).r_3(0))^1 \neq 0$, or si on reprend la preuve sur le cône $C^-(P_2, +)$, le triplet (r_1, r_2, r_3) est remplacé par le triplet (r_2, r_3, r_1) et on doit retrouver, d'après (8.6) 3e ligne, la condition $(r_2(0).r_3(0))^1 \neq 0$.

Signalons enfin que si la déformation (X_λ) est générique au sens donné dans [M1], le Lemme 2-§1 montre alors que les conditions $G(k-2,2,2)$ $\{r_k^1(0) \neq 0\}$ doivent subir toutes les permutations circulaires possibles et doivent être écrites dans les deux sens.

BIBLIOGRAPHIE

[A] A.A. ANDRONOV, E.A. LEONTOVITCH, I.I. GORDON and A.G. MAIER, Theory of bifurcation of dynamical systems on the plane, Israel program of scientific translations, Jerusalem, 1971.

[B] N. BAUTIN, On the number of limit cycles appearing with variations of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center, Mat. Sb. (N.S), 30 (72) (1952), 181-196.

[EMMR] J. ECALLE, J. MARTINET, R. MOUSSU, J.P. RAMIS, Non-accumulation de cycles limites, C.R.A.S., t. 304, série I, n° 14 (1987), (I) : 375-378, (II) : 431-434.

[FP] J.P. FRANÇOISE and C.C. PUGH, Keeping track of limit cycles, Journal of Diff. Eq., 65 (1986), 139-157.

[I] YU. IL'YASHENKO, Ycπ, Man. Hayk., 42, 3 (1987), 223.

[L] L.A. CHERKAS, Structure Of A Successor Function In The Neighborhood Of A Separatrix Of A Perturbed Analytic Autonomous System In The Plan, Translated From Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 17,n^0.3, March. 1981, pp. 469-478.

[M1] A. MOURTADA, Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan- Mise sous forme normale, L.N.M., Proceeding Luminy 1989 (Bifurcations of planar vector fields), Ed. J.P. Françoise et R. Roussarie, n° 1445, pp. 272-314.

[M2] A. MOURTADA, Bifurcation de cycles limites au voisinage de polycycles hyperboliques et génériques à trois sommets, Preprint-Dijon (1990).

[M3] A. MOURTADA, Bifurcation de cycles limites au voisinage de polycycles hyperboliques et génériques à quatre sommets, Preprint-Dijon (1990).

[M4] A. MOURTADA, Polycycles hyperboliques et génériques à trois ou quatre sommets, Thèse-Dijon.

[M5] A. MOURTADA, Déformations verselles de polycycles hyperboliques à quatre sommets de cyclicité cinq dans les familles génériques, Preprint-Dijon (1990).

[P] J. PALIS, Jr, W. De MELO, Geometric theory of dynamical systems, Springer-Verlag, New-york, Heidelberg, Berlin.

[R] R. ROUSSARIE, A note on finite cyclicity property and Hilbert's 16th problem, Dynamical systems (proc. Chilean symp., Valparaiso 1986), L.N.M. n° 1331, ed. R. Barmon, R. Labarca and J. Palis, Jr, (Berlin : Springer) 1988, pp. 161-168.

Manuscrit reçu le 19 avril 1990,
révisé le 10 juin 1991.

Abderaouf MOURTADA,
Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
Laboratoire de Topologie
B.P. 138
21004 Dijon Cedex.