ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY WALLET

# Entrée-sortie dans un tourbillon

*Annales de l'institut Fourier*, tome 36, n° 4 (1986), p. 157-184

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_4_157_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**36,** 4 (1986), 157-184.

# ENTRÉE-SORTIE DANS UN TOURBILLON

**par Guy WALLET**

L'utilisation présente du terme tourbillon ne signifie pas que l'objet de cette étude est la modélisation d'un phénomène physique ou mécanique du même nom. Choisi pour son pouvoir d'évocation, le mot tourbillon désigne ici un certain type de perturbation d'équation différentielle pour laquelle est mis en évidence un phénomène remarquable de relation entrée-sortie analogue à celui étudié par E. Benoit [1, 2, 5]. L'outil mathématique utilisé est l'approche des perturbations d'équations différentielles par l'analyse non standard dont G. Reeb fut l'initiateur [4, 6, 9, 10, 12].

Il peut être intéressant de commencer par observer un exemple simple. Soit le champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{\varepsilon}(-zx-y) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon}(x-zy) \\ \dot{z} = -1 \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ infiniment petit. En coordonnées cylindriques $(\rho,\theta,z)$, l'équation différentielle s'intègre et la solution passant par $(\rho_0,\theta_0,z_0)$ lorsque $t = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{t^2}{2} - z_0 t\right)\right] \\ \theta = \theta_0 + \dfrac{t}{\varepsilon} \\ z = z_0 - t. \end{cases}$$

*Mots-clés :* Entrée-sortie - Perturbation singulière - Champ lent-rapide - Analyse non standard.

Dans le cas où le point $(\rho_0,\theta_0,z_0)$ est standard avec $z_0 > 0$, le graphe de la fonction $t \mapsto \rho(t)$ est donné par la figure suivante :

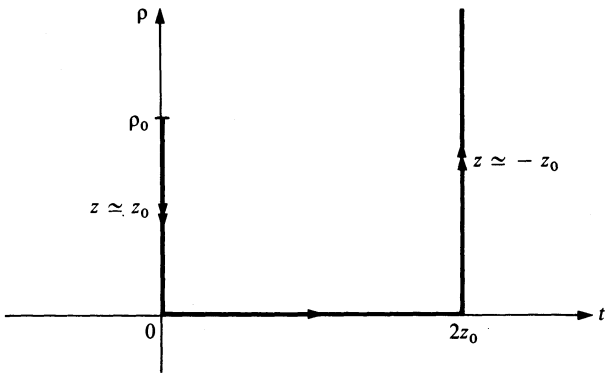



Fig. 1.

La trajectoire se rapproche rapidement de l'axe $Oz$ en spiralant. Puis elle semble se confondre avec cet axe sur le segment $[-z_0,z_0]$ parcouru à vitesse « lente » $-1$. Enfin, elle s'éloigne à grande vitesse de cet axe en spiralant à nouveau. L'objet du travail qui suit est l'étude de ce genre de phénomène dans un cadre général.

## 1. Définition d'un tourbillon.

**1.1.** Un tourbillon est un champ de vecteurs Y défini sur un ensemble standard $B \times I$ où B est une boule ouverte de $\mathbf{R}^2$ centrée en 0 et I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, et qui possède les propriétés $(t_1)$ à $(t_5)$ suivantes. On note $(x,y,z)$ un point de $B \times I$ avec $(x,y) \in B$ et $z \in I$.

$(t_1)$ Il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que Y soit de classe $C^p$ sur $(B-\{0\}) \times I$ et Y est continu en chaque point de $\{0\} \times I$. (Dans toute la suite de ce texte, la lettre $p$ désignera un tel entier $\geqslant 1$).

$(t_2)$ Le champ de Y est égal à $\frac{1}{\varepsilon}X - \frac{\partial}{\partial z}$ où $\varepsilon > 0$ est infiniment petit et X un champ de vecteurs standard appelé *modèle horizontal* du tourbillon.

$(t_3)$ Le champ de X est parallèle aux plans horizontaux ($z$ = constante) et définit donc, pour chaque $\alpha \in I$ un champ de vecteurs $X_\alpha$ de B (par identification de B avec $B \times \{\alpha\}$).

($t_4$) Pour chaque $\alpha \in I$, 0 est le seul point singulier de $X_\alpha$. De plus, il existe $\beta \in I$ tel que, pour tout $\alpha > \beta$ (respectivement $\alpha < \beta$) et pour tout voisinage U de 0 dans B, il existe un voisinage V de 0 dans B dont tout point distinct de 0 possède pour $X_\alpha$ une demi-trajectoire positive (respectivement négative) contenue dans $U - \{0\}$ qui converge vers 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). L'ensemble des points de B dont la demi-trajectoire positive (respectivement négative) converge vers 0 est appelé le bassin d'attraction (respectivement de répulsion) de 0 pour $X_\alpha$. On dit que $\beta$ est *la valeur de bifurcation* du tourbillon.

($t_5$) Soit $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ la forme différentielle « mesurant » la rotation autour de $\{0\} \times I$. On suppose qu'il existe un voisinage W de 0 dans B tel que le nombre réel 0 ne soit pas adhérent à l'ensemble :

$$\{d\theta.X(\xi);\ \xi \in (W - \{0\}) \times I\}.$$

**1.2.** L'axe $\Delta = \{0\} \times I$ est appelé *l'âme* du tourbillon Y et la condition ($t_5$) exprime que les trajectoires de X spiralent autour de $\Delta$. On remarque que $\Delta$ est une orbite particulière de Y. Le tourbillon est dit de classe $C^p$ si Y est de classe $C^p$ sur $B \times I$.

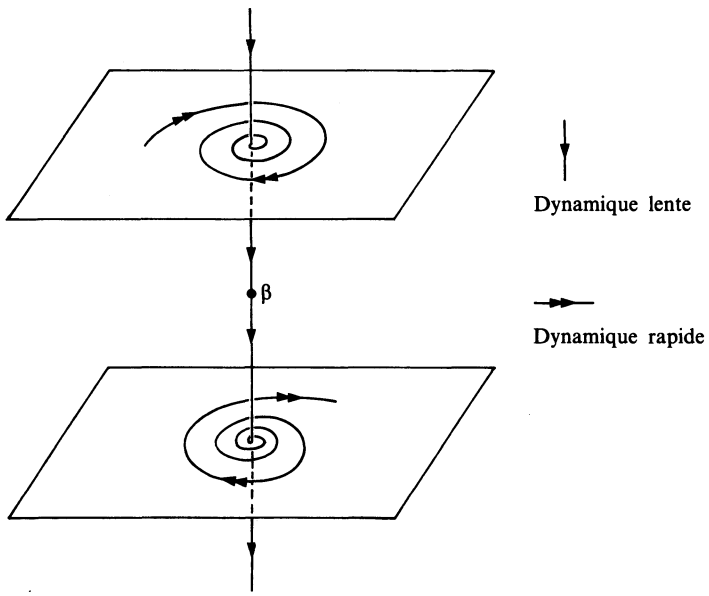



Fig. 2.

Un tourbillon $Y = \frac{1}{\varepsilon} X - \frac{\partial}{\partial z}$ est donc une perturbation singulière d'équation différentielle [12]. A l'échelle de temps $\tau = \frac{1}{\varepsilon} t$, il s'agit d'une perturbation régulière du champ X obtenu en « ajoutant à X une dérive lente et verticale ».

## 2. Description du modèle horizontal d'un tourbillon régulier.

**2.1.** On reprend les notations du paragraphe précédent. Un tourbillon Y est dit régulier lorsque son modèle horizontal possède les propriétés $(r_1)$ et $(r_2)$ suivantes :

$(r_1)$ Dans le système de coordonnées cylindriques $(\rho,\theta,z)$ associé aux coordonnées $(x,y,z)$ de $B \times I$, le système différentiel décrivant X est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^k[S_1(\theta,z)+S_2(\rho,\theta,z)] \\ \dot{\theta} = T_1(\theta,z) + T_2(\rho,\theta,z) \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

$k$ étant un nombre réel supérieur ou égal à 1 appelé *ordre du tourbillon.* Les fonctions $S_1$ et $T_1$ sont standards continues sur $\mathbf{R} \times I$, $2\pi$-périodiques par rapport à $\theta$. Les fonctions $S_2$ et $T_2$ sont standards continues sur $J \times \mathbf{R} \times I$, $2\pi$-périodiques par rapport à $\theta$, nulles sur $\{0\} \times \mathbf{R} \times I$ (où J est un intervalle de type $[0,R[$).

$(r_2)$ La fonction $T_1$ est partout non nulle; $\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z)}{|T_1(\theta,z)|} d\theta$ est strictement négatif pour $z > \beta$, et strictement positif pour $z < \beta$.

**2.2.** Les conditions $(t_i)$ et $(r_j)$ ne sont pas indépendantes. En fait un champ de vecteurs standard et continu X sur $B \times I$, de classe $C^p$ sur $(B-\{0\}) \times I$, admettant $\{0\} \times I$ comme lieu singulier et possédant les propriétés $(r_1)$ et $(r_2)$ possède aussi les propriétés $(t_4)$ et $(t_5)$. C'est clair pour la condition $(t_5)$ car $d\theta.X(\xi) \simeq T_1(\theta,z)$ lorsque $\rho \simeq 0$. (La notation $a \simeq b$ signifie que $a$ est infiniment proche de $b$).

La condition $(t_5)$ découle du lemme suivant :

**2.3.** LEMME. — *Soit* $Z$ *un champ de vecteurs continu sur* $\mathbf{R}^2$ *de classe* $C^p$ *sur* $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ *représenté en coordonnées polaires par le système différentiel :*

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^k[S_1(\theta)+S_2(\rho,\theta)] \\ \dot{\theta} = T_1(\theta) + T_2(\rho,\theta) \end{cases}$$

*avec* $S_2$ *et* $T_2$ *continues,* $S_2(0,\theta) = T_2(0,\theta) = 0$ *pour tout* $\theta$ *et* $k \geqslant 1$. *On suppose que* $T_1$ *est partout non nulle et que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta)}{|T_1(\theta)|}\,d\theta$ *est strictement négatif. Alors* 0 *est un point singulier isolé de* $Z$ *asymptotiquement* $\omega$*-stable.*

2.3.1. *Démonstration.* — On peut supposer $Z$ standard et on vérifie que 0 est le seul point singulier de $Z$ appartenant au halo de 0. Le changement de variable :

$$r = \begin{cases} \ell n(\rho) & \text{si } k = 1 \\ -\dfrac{1}{(k-1)\rho^{k-1}} & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

conduit au système différentiel :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{r} = S_1(\theta) + S_2(\rho(r),\theta) \\ \dot{\theta} = T_1(\theta) + T_2(\rho(r),\theta). \end{cases}$$

Par ce changement de variable, le halo de 0 est transformé en l'ensemble A des $(r,\theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tels que $r$ soit infiniment grand négatif. Soit $r_0 < 0$ infiniment grand, $\theta_0 \in \mathbf{R}$ et $c$ la solution de (1) vérifiant $c(0) = (r_0,\theta_0)$. La fonction $c$ est définie et à valeurs dans A pour tout $t$ limité car $|\dot{r}|$ est majoré par une constante limitée sur A.

Soit $\tau > 0$ le nombre limité tel que $\theta(\tau) = \theta_0 \pm 2\pi$. Alors :

$$r(\tau) - r_0 \simeq \int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta)}{|T_1(\theta)|}\,d\theta \ll 0.$$

Dans le système de coordonnées $(\rho,\theta)$, on en déduit :

$$\rho(\tau) < \rho(0) \quad \text{(voir fig. 3).}$$

De ceci il découle que l'orbite positive pour $Z$ de tout point du halo de 0 possède un ensemble $\omega$-limite qui se réduit au point 0.

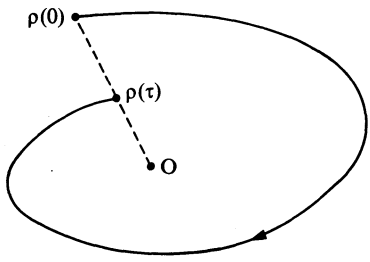



Fig. 3.

## 3. Quelques exemples.

**3.1.** *Un tourbillon régulier associé à l'équation de Van der Pol.*

Soit L le champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$L = \left(y - \frac{x^3}{3} + x\right)\frac{\partial}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

L est un champ de vecteurs parallèle aux plans horizontaux et sa restriction $L_\alpha$ au plan $\{z = \alpha\}$ est le champ de Lienard associé à l'équation différentielle de Van der Pol :

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = \alpha.$$

On sait que lorsque $\alpha$ traverse la valeur 1, $L_\alpha$ présente une bifurcation de Hopf selon le schéma de la figure 4, [2].

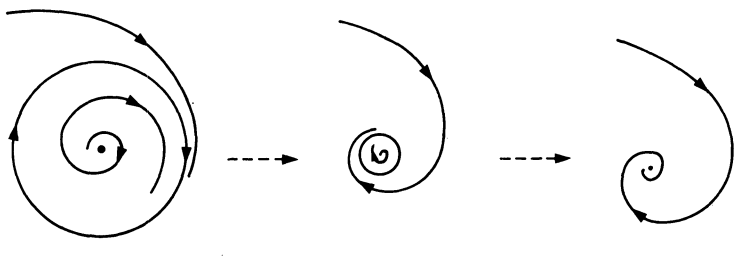



Fig. 4.

(La notation $x \ll y$ signifie $x < y$ et $x \simeq y$.)

L'ensemble des points singuliers de L est la courbe $\Omega$ paramétrée par $\left(-t, t-\frac{t^3}{3}, -t\right)$ qui est une courbe intégrale du champ V défini par :

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}.$$

Alors, comme le prouve le calcul qui suit, le champ de vecteurs $Z = \frac{1}{\varepsilon} L + V$ est un tourbillon régulier lorsque l'on redresse la courbe $\Omega$ sur l'axe $Oz$.

Le système différentiel associé à Z est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right) - 1 \\ \dot{y} = \frac{1}{\varepsilon}(z-x) + (1-x^2) \\ \dot{z} = -1. \end{cases}$$

Le changement de variable $\left\{\xi = x-z,\ \eta = y - \frac{x^3}{3} + x,\ \zeta = z\right\}$ donne le nouveau système :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{1}{\varepsilon}\eta \\ \dot{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}[-\xi + (1-\zeta^2)\eta - \xi^2\eta - 2\xi\eta\zeta] \\ \dot{\zeta} = -1. \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques $(\rho,\theta,\zeta)$ associées à $(\xi,\eta,\zeta)$, cela donne :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{1}{\varepsilon}\rho[(1-\zeta^2)\sin^2\theta - 2\rho\zeta\sin^2\theta\cos\theta - \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta] \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\varepsilon}[-1 + (1-\zeta^2)\sin\theta.\cos\theta - 2\rho\zeta\sin\theta\cos^2\theta - \rho^2\cos^3\theta\sin\theta] \\ \dot{\zeta} = -1. \end{cases}$$

On vérifie que

$$-1 + (1-\zeta^2)\sin\theta\cos\theta < 0$$

pour tout $\zeta \in ]0, \sqrt{3}[$ et que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-\zeta^2)\sin^2\theta}{1+(\zeta^2-1)\sin\theta\cos\theta}\,d\theta \quad \text{est} \quad \begin{cases} < 0 & \text{pour } \zeta \in ]1, \sqrt{3}[, \\ > 0 & \text{pour } \zeta \in ]0, 1[. \end{cases}$$

**3.2.** L'exemple précédent est un cas particulier de la situation plus générale suivante. Avec les notations du paragraphe 2, on considère un tourbillon $Y = \frac{1}{\varepsilon}X - \frac{\partial}{\partial z}$ *de classe* $C^p$. Le système différentiel associé à $X_z$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(z)x + b(z)y + x\varphi_1(x,y,z) + y\varphi_2(x,y,z) \\ \dot{y} = c(z)x + d(z)y + x\psi_1(x,y,z) + y\psi_2(x,y,z) \end{cases}$$

où les fonctions $a$, $b$, $c$, $d$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ et $\psi_2$ sont continues. Ce qui donne en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho[a(z)\cos^2\theta + (b(z)+c(z))\cos\theta\sin\theta + d(z)\sin^2\theta + R(\rho,\theta,z)] \\ \dot{\theta} &= c(z)\cos^2\theta + (d(z)-a(z))\cos\theta\sin\theta - b(z)\sin^2\theta + T_2(\rho,\theta,z). \end{aligned}$$

Alors $(c(z)\cos^2\theta + (d(z)-a(z))\cos\theta\sin\theta - b(z)\sin^2\theta)$ est non nulle si et seulement si les valeurs propres de la partie linéaire $A_z$ de $X_z$ en 0 sont non réelles. Dans ces conditions, la partie réelle de ces valeurs propres est $\dfrac{a(z)+d(z)}{2}$ et on vérifie que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(z)\cos^2\theta + (b(z)+c(z))\cos\theta\sin\theta + d(z)\sin^2\theta}{|c(z)\cos^2\theta + (d(z)-a(z))\cos\theta\sin\theta - b(z)\sin^2\theta|}\,d\theta = \frac{2\pi(a(z)+d(z))}{\sqrt{-(d(z)-a(z))^2 - 4b(z)c(z)}}.$$

Donc, Y est un tourbillon régulier d'ordre 1 si et seulement si la partie linéaire de $X_z$ en 0 admet des valeurs propres non réelles $\lambda(z) \pm i\mu(z)$ avec $\lambda(z) < 0$ pour $z > \beta$ et $\lambda(z) > 0$ pour $z < \beta$.

Dans le cas de l'exemple 3.1., le linéarisé de $X_z$ en 0 admet pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (1-z^2) \end{pmatrix}$$

ce qui correspond aux valeurs propres $\dfrac{1 - z^2 \pm i\sqrt{4 - (1 - z^2)^2}}{2}$ pour $z \in ]0, \sqrt{3}[$.

**3.3.** *Un tourbillon régulier d'ordre entier* $> 1$.

On considère le tourbillon $Y = \dfrac{1}{\varepsilon} X - \dfrac{\partial}{\partial z}$ dont le modèle horizontal est donné par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - yz + xy^2z^2 \\ \dot{y} = x + zx - x^2yz . \end{cases}$$

En coordonnées polaires, cela donne :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^3 z(z-1)\cos^2\theta \sin^2\theta \\ \dot{\theta} = (1+z) - \rho^2[z\cos^3\theta \sin\theta + z^2 \cos\theta \sin^3\theta] \end{cases}$$

et on vérifie que Y est un tourbillon régulier d'ordre 3 sur $\mathbf{R}^2 \times ]-1,1[$.

**3.4.** Soit $Y = \dfrac{1}{\varepsilon} X - \dfrac{\partial}{\partial z}$ un tourbillon *de classe* $C^p$. Pour que Y soit un tourbillon régulier d'ordre $> 1$, il est nécessaire que la partie linéaire de $X_z$ en 0 admette pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & b(z) \\ -b(z) & 0 \end{pmatrix}$ où $b(z)$ est une fonction continue sur I partout non nulle. Les valeurs propres de cette matrice sont alors $\pm ib(z)$. C'est bien le cas de l'exemple 3.3.

**3.5.** *Un tourbillon régulier non différentiable et d'ordre non entier.*

Soit $Y = \dfrac{1}{\varepsilon} X - \dfrac{\partial}{\partial z}$ le tourbillon dont le modèle horizontal est donné par

$$X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y}$$

avec

$$P(x,y,z) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ -\dfrac{x^3 z}{(x^2+y^2)^{3/4}} - y\left(1 + \dfrac{yz}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$Q(x,y,z) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ -\dfrac{x^2 yz}{(x^2+y^2)^{3/4}} + x\left(1 + \dfrac{yz}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

P et Q sont de classe $C^0$ et en coordonnées polaires on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho^{3/2} z \cos^2 \theta \\ \dot{\theta} = 1 + z \sin \theta . \end{cases}$$

Y est donc un tourbillon régulier sur $\mathbf{R}^2 \times ]-1,1[$ d'ordre $3/2$.

## 4. Le problème de la relation entrée-sortie.

On considère dans les paragraphes 4 et 5 un tourbillon régulier Y pour lequel on reprend les notations des paragraphes 1 et 2. On rappelle que le halo de $\Delta$ est l'ensemble externe suivant :

$$\text{hal}(\Delta) = \{\xi \in B \times I \setminus \exists \xi_0 \in \Delta,\ \xi_0 \text{ standard et } \xi \simeq \xi_0\}.$$

**4.1.** PROPOSITION (*Entrée dans le halo de* $\Delta$). — *Soit* $\xi_1$ *un point limité d'ombre* $(x_1, y_1, z_1) \in B \times I$. *On suppose que* $z_1 > \beta$ *et que* $(x_1, y_1)$ *appartient au bassin d'attraction de* 0 *pour* $X_{z_1}$. *Soit* $c_1(t)$ *la courbe intégrale de* Y *vérifiant* $c_1(0) = \xi_1$. *Alors :*

(i) *Il existe* $\tau_1 > 0$ *infiniment petit tel que* $c_1(\tau_1)$ *appartienne au halo de* $\Delta$.

(ii) *L'ombre de la partie* $c_1([0,\tau_1])$ *de* $B \times I$ *est l'orbite positive de* $(x_1, y_1, z_1)$ *pour le champ* X *et est donc contenue dans le plan* $\{z = z_1\}$.

(iii) *Pour* $t > \tau_1$, $c_1(t)$ *longe* $\Delta$ *et ne peut pas quitter le halo de* $\Delta$ *avant d'atteindre le halo du point* $(0,0,\beta)$.

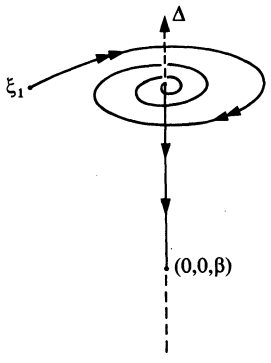



Fig. 5.

4.1.1. *Démonstration.* — On change d'échelle de temps en posant $d_1(s) = c_1(\varepsilon s)$. Ainsi $d_1$ est une courbe intégrale de $X - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$. Soit $\delta_1$ la courbe intégrale de X telle que $\delta_1(0) = (x_1, y_1, z_1)$. Puisque $X - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$ est une perturbation régulière du champ de vecteurs standard X, on a l'inclusion ensembliste :

$$\{s \geqslant 0;\ S \text{ est limité}\} \subset \{S \geqslant 0;\ \forall s \in [0,S)\ d_1(s) \simeq \delta_1(s)\}.$$

D'après une forme générale du principe de permanence [5], cette inclusion est stricte et il existe $S_1 > 0$ infiniment grand tel que :

$$\forall s \in [0,S_1], \qquad d_1(s) \simeq \delta_1(s).$$

On peut supposer que $\varepsilon S_1$ est infiniment petit et on pose $\tau_1 = \varepsilon S_1$. Puisque $\lim_{s \to \infty} \delta_1(s) = 0$, on a $\delta_1(S_1) \simeq 0$ et les conditions (i) et (ii) sont clairement vérifiées.

La stabilité asymptotique de 0 pour $X_\alpha$ se traduit lorsque $\alpha$ est standard et que $\alpha > \beta$ par le fait qu'aucune orbite positive de $X_\alpha$ ne peut sortir du halo de 0. De ceci découle la condition (iii).

4.1.2. Dans les conditions de la proposition (4.1.) on dit que *l'orbite de* $\xi_1$ *pour* Y *entre dans le halo de* $\Delta$ *à la cote* $z_1$. En renversant le sens du temps $t$, on obtient un énoncé symétrique qui décrit la sortie du halo de $\Delta$.

**4.2.** PROPOSITION (*Sortie du halo de* $\Delta$). — *Soit* $\xi_2$ *un point limité d'ombre* $(x_2, y_2, z_2) \in B \times I$. *On suppose que* $z_2 < \beta$ *et que* $(x_2, y_2)$ *appartient au bassin de répulsion de* 0 *pour* $X_{z_2}$. *Soit* $c_2(t)$ *la courbe intégrale de* Y *vérifiant* $c_2(0) = \xi_2$. *Alors :*

(i) *Il existe* $\tau_2 < 0$ *infiniment petit tel que* $c_2(\tau_2)$ *appartienne au halo de* $\Delta$.

(ii) *L'ombre de la partie* $c_2([\tau_2, 0])$ *de* $B \times I$ *est l'orbite négative de* $(x_2, y_2, z_2)$ *pour* X *et est donc contenue dans le plan* $\{z = z_2\}$.

(iii) *Pour* $t > -\tau_2$, $c_2(-t)$ *longe* $\Delta$ *et ne peut pas quitter le halo de* $\Delta$ *avant d'atteindre le halo du point* $(0,0,\beta)$.

4.2.1. Dans les conditions de la proposition (4.2) on dit que *l'orbite de* $\xi_2$ *pour* Y *sort du halo de* $\Delta$ *à la cote* $z_2$.

**4.3.** Un couple $(z_1, z_2) \in (I - \{\beta\})^2$ est dit *en relation entrée-sortie* lorsque $z_1 > \beta$, $z_2 < \beta$ et qu'il existe une orbite de Y entrant dans le halo de $\Delta$ à la cote $z_1$ et sortant du halo de $\Delta$ à la cote $z_2$. La relation entrée-sortie est une relation standard contenue dans $(I - \{\beta\})^2$.

**4.4.** On dit que le tourbillon Y possède une *fonction entrée-sortie* $f$ lorsque la relation entrée-sortie est le graphe d'une application bijective $f : I_e \to I_s$ où $I_e$ est un sous-intervalle de I de borne inférieure $\beta$ et $I_s$ un sous-intervalle de I de borne supérieure $\beta$, $I_e$ et $I_s$ étant non vides [cf. 1].

Donc, pour un tourbillon régulier Y à fonction entrée-sortie $f$, toutes les orbites de Y entrant dans le halo de $\Delta$ à la même cote $z \in I_e$ sortent du halo de $\Delta$ à la même cote $f(z) \in I_s$. Autrement dit, la cote de sortie d'une orbite donnée ne dépend que de sa cote d'entrée.

L'existence d'une fonction entrée-sortie pour un tourbillon est un phénomène remarquable de « déterminisme macroscopique » et on se propose, dans le paragraphe suivant, de montrer que tout tourbillon régulier Y possède une telle fonction entrée-sortie.

## 5. Calcul de la fonction entrée-sortie d'un tourbillon régulier.

Le principe du calcul de la fonction entrée-sortie du tourbillon régulier Y repose d'une part sur un changement de variable qui dilate suffisamment le halo de $\Delta$, d'autre part sur une moyennisation qui permet d'éliminer les oscillations infinitésimales engendrées par la variation rapide du paramètre $\theta$.

**5.1.** On considère la nouvelle variable R définie par :

$$R = \begin{cases} \varepsilon \ell n(\rho) & \text{si } k = 1 \\ \dfrac{-\varepsilon}{(k-1)\rho^{k-1}} & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Dans le système de coordonnées $(R,\theta,z)$, l'âme $\Delta$ est rejetée à l'infini et le complémentaire du halo de $\Delta$ est l'ensemble :

$$\{(R,\theta,z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times I;\ R < 0 \text{ et } \frac{R}{\varepsilon} \text{ est limité}\}$$

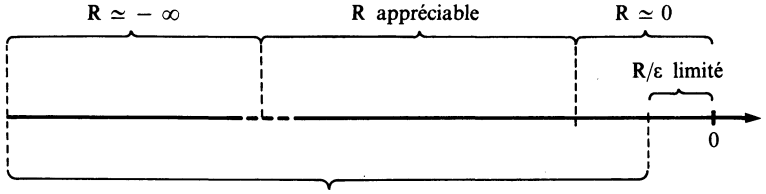
lui-même contenu strictement dans le halo suivant :

$$\{(R,\theta,z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times I;\ R<0 \text{ et } R \simeq 0\}.$$

Le halo de $\Delta$ est lui étiré sur l'ensemble :

$$\{(R,\theta,z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times I;\ R<0 \text{ et } \frac{R}{\varepsilon} \text{ est infiniment grand}\}$$

et contient en particulier la partie « visible » correspondant à R appréciable et négatif (un nombre appréciable est un nombre limité non infiniment petit).




Le demi-axe $R \leqslant 0$

Fig. 6.

**5.2.** THÉORÈME. — *Soit* $c : J \to (B-\{0\}) \times I$ *une courbe intégrale de* Y *paramétrée par* $(R(t),\theta(t),z(t))$. *On suppose que :*

(i) J *est un intervalle standard, compact d'intérieur non vide;*

(ii) $c(J)$ *est contenu dans le halo de* $\Delta$;

(iii) $\exists t_0 \in J$ *tel que* $R(t_0)$ *soit limité.*

*Alors il existe une fonction* $g : I \to \mathbf{R}$ *standard et dérivable telle que :*

(iv) $\forall t \in J,\ R(t) \simeq g(z(t))$;

(v) $\forall z \in I,\ \dfrac{dg}{dz}(z) = -\Psi(z)$;

*où* $\Psi$ *est la fonction sur* I *définie par :*

$$\Psi(z) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z)}{|T_1(\theta,z)|}\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|T_1(\theta,z)|}\right)^{-1}.$$

5.2.1. *Démonstration.*

L'hypothèse (ii) implique que pour tout $t \in J$, $z(t)$ possède une ombre dans I. Donc, pour un tel $t$, $S_1(\theta(t),z(t))$ et $T_1(\theta(t),z(t))$ sont limités alors que $S_2(\rho(t),\theta(t),z(t))$ et $T_2(\rho(t),\theta(t),z(t))$ sont infiniment petits. D'où :

$$\forall t \in J, \qquad \dot{R}(t) \simeq S_1(\theta(t),z(t))$$

et la fonction $R(t)$ est S-continue et ne prend que des valeurs limitées. Donc R possède une ombre $\bar{R}$ qui est une fonction standard et continue définie sur J et qui vérifie :

$$\forall t \in J, \qquad R(t) \simeq \bar{R}(t).$$

Comme $\dot{\theta}$ est infiniment grande, la fonction $R(t)$ peut présenter des oscillations rapides et de petite amplitude.

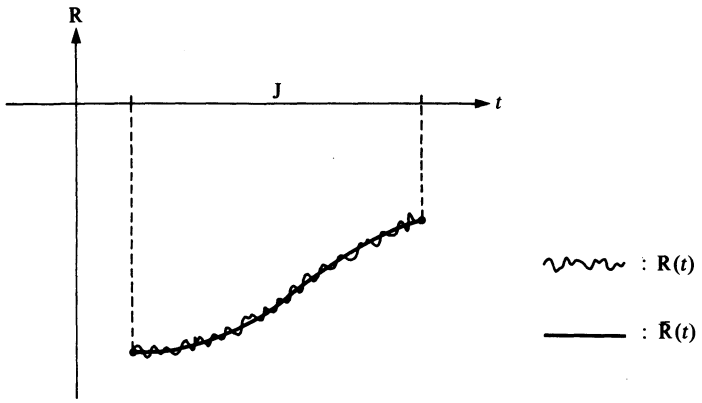



Fig. 7.

Dans ces conditions, il est naturel d'utiliser la méthode de stroboscopie infinitésimale due à J. L. Callot.

LEMME DE STROBOSCOPIE [3, 7 et 11]. — *Soit* Z *un champ de vecteurs standard continu sur un ouvert standard* U *de* $\mathbf{R}^p$, $\gamma : J \to U$ *une courbe définie sur un intervalle standard et compact* $[a,b]$ *et* $\mu > 0$ *un infiniment petit. On suppose que :*

(i) $\forall t \in J$, $\gamma(t)$ *a une ombre dans* U ;

(ii) $\forall (s,t) \in J^2$, $s \simeq t \Rightarrow \gamma(s) \simeq \gamma(t)$ ;

(iii) $\forall t_0 \in J$ *tel que* $t_0 \ll b$, $\exists t_1 \in J$ *tel que :* $\mu < t_1 - t_0 \simeq 0$ *et*

$$\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0} \simeq Z(\gamma(t_0)).$$

*Alors, pour tout standard* $c \in ]a,b[$, *il existe une courbe intégrale* $\bar{\gamma} : [a,c] \to U$ *du champ de vecteurs* $Z$ *qui est telle que :*

$$\forall t \in [a,c], \qquad \gamma(t) \simeq \bar{\gamma}(t).$$

On se propose d'appliquer la méthode de stroboscopie à la courbe :

$$J \to \mathbf{R}^2$$
$$t \mapsto (R(t), z(t)).$$

On pose $J = [a,b]$ et soit $t_0 \in J$ tel que $t_0 \ll b$. Pour déterminer $t_1 > t_0$ satisfaisant aux hypothèses du lemme de stroboscopie, on utilise la loupe :

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon} \\ V = \dfrac{R - R_0}{\varepsilon} \end{cases}$$

avec les notations : $R_0 = R(t_0)$, $\theta_0 = \theta(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

On a : $V(0) = 0$, et pour tout $\tau$ limité :

$$\frac{dV}{d\tau}(\tau) \simeq S_1(\theta(\tau), z_0 - \varepsilon\tau) \simeq S_1(\theta(\tau), z_0)$$
$$\frac{d\theta}{d\tau}(\tau) \simeq T_1(\theta(\tau), z_0 - \varepsilon\tau) \simeq T_1(\theta(\tau), z_0).$$

Soit $\tau_1 > 0$ tel que : $\theta(\tau_1) = \theta_0 \pm 2\pi$. Alors, $\tau_1$ est limité car : $\inf\{|T_1(\theta(t), z(t))| ;\ t \in J\} \gg 0$ et :

$$\tau_1 = \int_0^{\tau_1} d\tau = \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm 2\pi} \frac{d\theta}{\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)} \simeq \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm 2\pi} \frac{d\theta}{T_1(\theta, z_0)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|T_1(\theta, z_0)|}.$$

De même pour $V_1 = V(\tau_1)$ :

$$V_1 = \int_0^{T_1} \left(\frac{dV}{d\tau}\right) d\tau = \int_{\theta_0}^{\theta_0 \pm 2\pi} \left(\frac{dV}{d\tau}\right)\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^{-1} d\theta \simeq \int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta, z_0)}{|T_1(\theta, z_0)|} d\theta.$$

On remarque que $\tau_1$ est minoré par un nombre standard non nul $\delta = \dfrac{2\pi}{m}$ avec $m > \sup\{|T_1(\theta(t),z(t))|; t \in J\}$. On pose $t_1 = \varepsilon\tau_1 + t_0$. Alors :

$$\mu = \varepsilon\delta < t_1 - t_0 \simeq 0,$$

$$\frac{R(t_1) - R(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{V_1}{\tau_1} \simeq \left(\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z_0)}{|T_1(\theta,z_0)|}\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|T_1(\theta,z_0)|}\right)^{-1} = \Psi(z(t_0)),$$

$$\frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} = -1.$$

Le nombre $\mu$ est indépendant de $t_0$ et d'après le lemme de stroboscopie, pour tous standards $c \in ]a,b[$, il existe des fonctions standards et dérivables $\bar{R}$ et $\bar{z}$ sur $[a,c]$ telles que, $\forall t \in [a,c]$ :

(1) $R(t) \simeq \bar{R}(t)$, $z(t) \simeq \bar{z}(t)$, $\dot{\bar{R}}(t) = \Psi(\bar{z}(t))$, $\dot{\bar{z}}(t) = -1$.

On peut aussi appliquer le lemme de stroboscopie en partant de $b$ *en inversant le sens du temps* $t$. Ceci prouve que (1) est valable sur $J = [a,b]$ tout entier. On définit alors la fonction $g$ de I dans $\mathbf{R}$ par :

$$g(z) = \bar{R}(a) - \int_{\bar{z}\,a)}^{z} \Psi(u)\, du.$$

**5.3.** COROLLAIRE *(Existence de la fonction entrée-sortie).* — *Soient* $I_e$ *et* $I_s$ *les sous-intervalles de* I *définis par les conditions :*

i) $\operatorname{Inf} I_e = \beta$ et $\beta \notin I_e$ ;

(ii) $\operatorname{Sup} I_s = \beta$ et $\beta \notin I_s$ ;

(iii) $I_e = I \cap ]\beta, +\infty[$ ou $I_s = I \cap ]-\infty, \beta[$ ;

(iv) $\displaystyle\int_{I_e} \Psi(u)\, du = -\int_{I_s} \Psi(u)\, du$ *(les deux termes de l'égalité pouvant être infinis).*

*Le tourbillon régulier* Y *possède une fonction entrée-sortie* $f$ *de* $I_e$ *dans* $I_s$ *définie par :*

$$\forall z \in I_e, \qquad \int_{f(z)}^{z} \Psi(u)\, du = 0.$$

5.3.1. *Démonstration.*

Soit $z_1$ un nombre standard appartenant à $I \cap ]\beta, +\infty[$ et $\gamma$ une orbite de Y entrant dans le halo de $\Delta$ à la cote $z_1$. On se place dans le plan $\{(R,z)\}$ où l'image de $\gamma$ est le graphe d'une fonction $R(z)$ définie sur I.

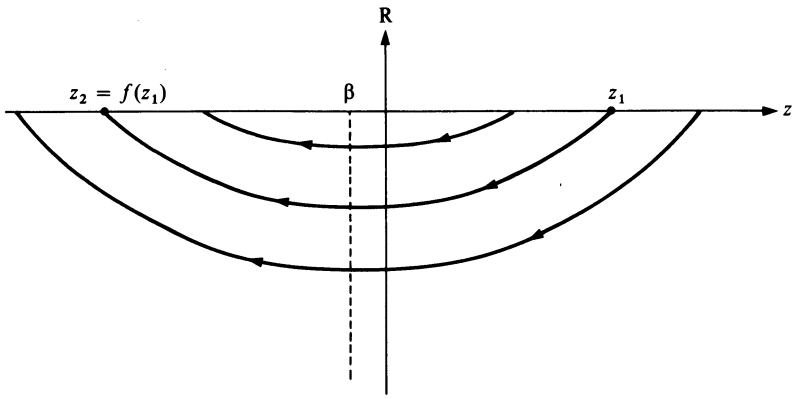



Fig. 8.

Lorsque $\gamma$ pénètre dans le halo de $\Delta$, $(z,R(z))$ est dans le halo du point $(z_1,0)$. Soit $g$ la fonction définie sur I par :

$$g(z) = -\int_{z_1}^{z} \Psi(u)\, du.$$

D'après la proposition 4.1. et le théorème 5.2., $(z,R(z))$ quitte le halo de $(z_1,0)$ pour $z \ll z_1$ en longeant le graphe de $g$. Toujours d'après le théorème 5.1., $R(z) \simeq g(z)$ tant que $g(z) \not\simeq 0$ et que $z$ possède une ombre dans I. Si $z_1 \notin I_e$, $\gamma$ ne peut pas sortir du halo de $\Delta$ à une cote $z \in I$. Si $z_1 \in I_e$, $(z,R(z))$ longe le graphe de $g$ jusqu'au halo du point $(z_2,0)$ tel que $g(z_2) = 0$.

On remarque que le graphe de $g$ coupe transversalement l'axe Oz au point $(z_2,0)$. Soit $z'_2 \simeq z_2$ tel que $R(z'_2) \simeq 0$. Le théorème 5.1. implique que $\gamma$ ne peut rester dans le halo de $\Delta$ sur tout un intervalle $[u,z'_2]$ pour tout $u \ll z'_2$. Il découle alors de la proposition 4.2. et à nouveau du théorème 5.1. que $\gamma$ sort du halo de $\Delta$ à la cote $z_2$.

**5.4.** COROLLAIRE. — *Soit un standard $z_1 > \beta$ et $\gamma$ une orbite de* Y *entrant dans le halo de $\Delta$ à la cote $z_1$. Alors le minimum de la distance d'un*

*point de* $\gamma$ *à* $\Delta$ *est atteint lorsque* $\gamma$ *traverse le halo de* $(0,0,\beta)$ *et est de la forme suivante :*

$$d(\gamma,\Delta) = \begin{cases} \left[\dfrac{\varepsilon}{(k-1)\left(\displaystyle\int_\beta^{z_1} - \Psi(u)\,du + \alpha\right)}\right]^{\frac{1}{k-1}} & si \quad k > 1, \\ \exp\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\displaystyle\int_\beta^{z_1} \Psi(u)\,du + \alpha\right)\right] & si \quad k = 1, \end{cases}$$

*avec* $\alpha \simeq 0$.

5.4.1. *Démonstration.* — D'après ce qui précède, $R(z)$ est minimal en un point $z_0 \simeq \beta$. Donc :

$$R(z_0) = \int_\beta^{z_1} \Psi(u)\,du + \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha \simeq 0.$$

5.4.2. D'après le corollaire 5.4., $d(\gamma,\Delta)$ est un infiniment petit dont l'ordre de grandeur dépend de $\varepsilon$ et de $k$. Lorsque $k > 1$, $d(\gamma,\Delta)$ est de même ordre que $\varepsilon^{\frac{1}{k-1}}$ alors que pour $k = 1$, $d(\gamma,\Delta)$ est de la forme $a^{\frac{1}{\varepsilon}}$ avec $a \ll 1$ limité $\left(\text{en fait } a \simeq \exp\left[\displaystyle\int_\beta^{z_1} \Psi(u)\,du\right]\right)$. L'orbite $\gamma$ se rapproche d'autant plus de $\Delta$ que $k$ est petit.

**5.5.** *Remarques.*

5.5.1. La notion de fonction entrée-sortie avait été mise en évidence essentiellement en dimension 2 pour des champs lent-rapides à paramètre en présence d'un canard [1]. Ici, on a un champ lent-rapide de $\mathbf{R}^3$, présentant l'analogue d'un canard : l'âme $\Delta$ de Y. Mais ce « canard » est trivial : il est donné dans la définition de Y et ne dépend pas de la variation d'un paramètre. Puisque l'on a aucune difficulté à localiser le canard, on peut espérer que le phénomène d'entrée-sortie de cette étude soit « reproductible expérimentalement », par exemple par simulation sur un micro-ordinateur. C'est bien le cas ainsi que le prouvent les dessins de l'appendice.

5.5.2. On trouve dans [7, page 131] l'énoncé d'un théorème de moyennisation par rapport à un paramètre angulaire variant rapidement, proche du théorème 5.2. Mais ce théorème n'est pas utilisé pour le calcul d'une fonction entrée-sortie.

5.5.3. La relation entrée-sortie étant mise en évidence, il est légitime de se poser la question suivante : est-ce que des orbites ayant même ombre dans le plan d'entrée ont même ombre dans le plan de sortie ? En général, il n'en est rien : deux points infiniment proches dans le plan d'entrée peuvent avoir des orbites dont les ombres sont distinctes dans le plan de sortie. Pour prouver cela, on considère le tourbillon régulier donné comme exemple dans l'introduction :

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -zx - y \\ \varepsilon\dot{y} = x - zy \\ \dot{z} = -1 \end{cases}$$

dont $z = 0$ est la valeur de bifurcation. La relation entrée-sortie est alors la symétrie $z \mapsto -z$. Avec les notations de l'introduction, pour une condition initiale $(\bar{\rho}_0, \bar{\theta}_0, \bar{z}_0) \simeq (\rho_0, \theta_0, z_0)$ avec $\bar{z}_0 = z_0 + \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$, $\rho$ reprend la valeur initiale $\bar{\rho}_0$ lorsque $t = 2z_0 + \varepsilon\pi$, ce qui donne une différence infiniment proche de $\pi$ pour les angles des deux trajectoires. Les ombres des orbites des deux points sont donc distinctes dans le plan de sortie.

## 6. Applications aux exemples.

**6.1.** Dans la situation de 3.2 et en reprenant les notations on sait que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z)}{|T_1(\theta,z)|}\, d\theta = \frac{4\pi\lambda(z)}{\sqrt{-(d(z)-a(z))^2 - 4b(z)c(z)}}$$

où $\begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$ est la matrice de la partie linéaire en 0 de $X_z$ et $\lambda(z)$ la partie réelle des valeurs propres (non réelles) de cette matrice.

De même, on vérifie que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|T_1(\theta,z)|} = \frac{4\pi}{\sqrt{-(d(z)-a(z))^2 - 4b(z)c(z)}}.$$

D'où $\Psi(z) = \lambda(z)$ et la fonction entrée-sortie $f$ vérifie :

$$\int_{f(z)}^{z} \lambda(u)\, du = 0.$$

Ce qui donne dans le cas du tourbillon associé à l'équation de Van der Pol (3.1.) : pour $z_1 \in ]1, \sqrt{3}[$, $f(z_1)$ est la racine de l'équation

$$\frac{X^3}{3} - X = \frac{z_1^3}{3} - z_1$$

qui vérifie $f(z_1) \in ]0, 1[$. La fonction entrée-sortie $f$ est un difféomorphisme décroissant de $]1, \sqrt{3}[$ sur $]0,1[$. Cette étude permet de décrire l'ombre de la trajectoire $\gamma$ d'un point $(x_0, y_0, z_0)$ limité avec $z_0 \ll \sqrt{3}$ pour le champ de vecteurs Z de l'exemple 3.1.

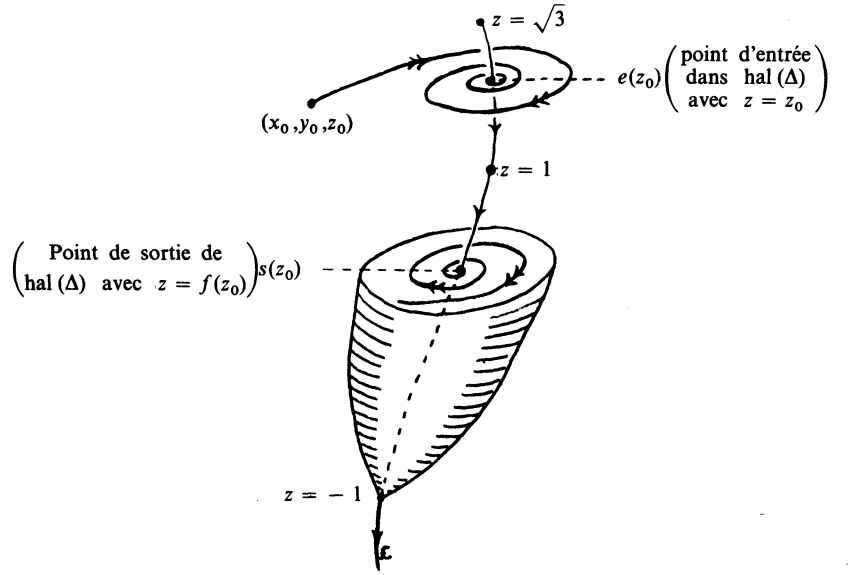



Fig. 9.

Le cas le plus intéressant est celui où $1 \ll z_0 \ll \sqrt{3}$. La trajectoire $\gamma$ spirale à grande vitesse et rejoint le halo de la courbe $\Omega$. Ensuite elle longe $\Omega$ à vitesse lente jusqu'au halo du point $s(z_0)$, avec $z = f(z_0)$ et $0 \ll f(z_0) \ll 1$.

Alors $\gamma$ quitte le halo de $s(z_0)$ en spiralant à grande vitesse et vient longer le cycle limite du champ de Lienard associé à l'équation de Van der Pol avec second membre $f(z_0)$. Puis $\gamma$ suit l'évolution du cycle limite lorsque $z$ décroît à vitesse lente $-1$. Ce cycle disparaît pour $z = -1$ et $\gamma$ recommence à longer la courbe $\Omega$.

**6.2.** Pour le tourbillon d'ordre 3 de l'exemple 3.3., on a :

$$S_1(\theta,z) = z(z-1)\cos^2\theta\sin^2\theta,$$
$$T_1(\theta,z) = (1+z).$$

Ce qui donne $\Psi(z) = \dfrac{z(z-1)}{8}$ et la fonction $f$ entrée-sortie est définie par la règle suivante : pour tout $z_1 \in ]0,1[$, $f(z_1)$ est la racine de l'équation

$$\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} = \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_1^2}{2}$$

qui vérifie $f(z_1) \in ]-1,0[$. $f$ est un difféomorphisme décroissant de $]0,1[$ sur $]-1,0[$.

## 7. Une généralisation.

**7.1.** Dans la définition d'un tourbillon, une propriété essentielle est que 0 ne soit pas adhérent à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ au voisinage de l'âme $\Delta$ du tourbillon. On peut essayer d'affaiblir cette hypothèse en demandant seulement que « $\dot{\theta}$ ne tende pas trop vite vers 0 ».

**7.2.** On considère un champ de vecteurs Y analogue à celui décrit dans le 1.1. mais ne possédant que les propriétés $(t_1)$, $(t_2)$ et $(t_3)$. On suppose de plus que le « modèle horizontal » X de Y possède les propriétés $(r'_1)$ et $(r'_2)$ suivantes :

$(r'_1)$ Dans le système de coordonnées cylindriques $(\rho,\theta,z)$ associé aux coordonnées $(x,y,z)$ de $\mathbf{B} \times \mathbf{I}$, le système différentiel représentant X est de la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{\rho} = \rho^k[S_1(\theta,z) + S_2(\rho,\theta,z)] \\ \dot{\theta} = \rho^\ell[T_1(\theta,z) + T_2(\rho,\theta,z)] \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

$k$ et $\ell$ sont des nombres réels tels que $k - 1 > \ell > 0$. Les fonctions $S_1$ et $T_1$ sont standard continues sur $\mathbf{R} \times \mathbf{I}$, $2\pi$-périodiques par rapport à $\theta$. Les fonctions $S_2$ et $T_2$ sont standard continues sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{I}$, $2\pi$-périodiques par rapport à $\theta$, nulles sur $\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{I}$.

$(r'_2)$ (Analogue à $(r_2)$) : $T_1$ est partout non nulle. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z)}{|T_1(\theta,z)|}\,d\theta$ est strictement négatif pour $z > \beta$ et strictement positif pour $z < \beta$.

**7.3.** Quitte à diviser par $\rho'$, on peut appliquer 2.2. et 2.3. et en déduire que 0 est un point singulier isolé qui est asymptotiquement $\omega$-stable (respectivement $\alpha$-stable) du champ de vecteurs $X_z$ pour $z > \beta$ (respectivement $z < \beta$). De ceci, il découle que l'entrée et la sortie du halo de $\Delta$ pour une orbite de Y se fait comme indiqué dans le paragraphe 4. Il est donc légitime de se poser la question de l'existence d'une fonction entrée-sortie. En fait, les résultats du paragraphe 5 sont encore valables pour Y.

**7.4.** THÉORÈME. — *Soit* $\Psi$ *l'application de* I *dans* **R** *définie par*

$$\Psi(z) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{S_1(\theta,z)}{|T_1(\theta,z)|}\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|T_1(\theta,z)|}\right)^{-1}.$$

*Alors,* Y *possède une fonction entrée-sortie* $f$ *telle que :*

$$\int_{f(z)}^{z} \Psi(u)\, du = 0.$$

*Si* $\gamma$ *est une orbite de* Y *entrant dans le halo de* $\Delta$ *à la cote* $z_1 > \beta$, *le minimum de la distance d'un point de* $\gamma$ *à* $\Delta$ *est atteint lorsque* $\gamma$ *traverse le halo de* $(0,0,\beta)$ *et est de la forme suivante :*

$$d(\gamma,\Delta) = \left[\frac{\varepsilon}{(k-1)\left(\int_\beta^{z_1} - \Psi(u)\, du + \alpha\right)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

avec $\alpha \simeq 0$.

7.4.1. *Démonstration.* — Dans le système différentiel représentant Y en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} \dot\rho = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho^k[S_1(\theta,z)+S_2(\rho,\theta,z)] \\ \dot\theta = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho^r[T_1(\theta,z)+T_2(\rho,\theta,z)] \\ \dot z = 1 \end{cases}$$

on fait le changement de variable $R = \dfrac{-\varepsilon}{(k-1)\rho^{k-1}}$.

On obtient le nouveau système différentiel :

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{R} = S_1(\theta,z) + S_2(\rho(R),\theta,z) \\ \dot{\theta} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{\ell}{k-1}} \left(\frac{1}{(1-k)R}\right)^{\frac{\ell}{k-1}} [T_1(\theta,z) + T_2(\rho(R),\theta,z)] \\ \dot{z} = -1. \end{cases}$$

Les orbites de ce système sont les mêmes que celles du suivant :

$$(4)\quad \begin{cases} \dot{R} = ((1-k)R)^{\frac{\ell}{k-1}} [S_1(\theta,z) + S_2(\rho(R),\theta,z)] \\ \dot{\theta} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{\ell}{k-1}} [T_1(\theta,z) + T_2(\rho(R),\theta,z)] \\ \dot{z} = -((1-k)R)^{\frac{\ell}{k-1}}. \end{cases}$$

On peut appliquer le lemme de stroboscopie (5.2.1.) à (4). Soit $(R(t),\theta(t),z(t))$ une solution de (4) telle que $R(0)$ et $z(0)$ soient limités et $\rho(R(0)) \simeq 0$. Soit $(\bar{R}(t),\bar{z}(t))$ la solution de l'équation différentielle standard :

$$\begin{cases} \dot{\bar{R}} = ((1-k)\bar{R})^{\frac{\ell}{k-1}} \Psi(\bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = -((1-k)\bar{R})^{\frac{\ell}{k-1}} \end{cases}$$

avec les conditions initiales standard : $\bar{R}(0) \simeq R(0)$ et $\bar{z}(0) \simeq z(0)$. Alors, d'après le lemme de stroboscopie, $(R(t),z(t)) \simeq (\bar{R}(t),\bar{z}(t))$ tant que $t$, $R(t)$ et $z(t)$ sont limités et que $\rho(R(t)) \simeq 0$. En tant que fonction de $z$, $\bar{R}$ vérifie $\frac{d\bar{R}}{dz} = -\Psi(z)$ et on conclut comme dans 5.3.

## Appendice : illustration graphique sur micro-ordinateur.

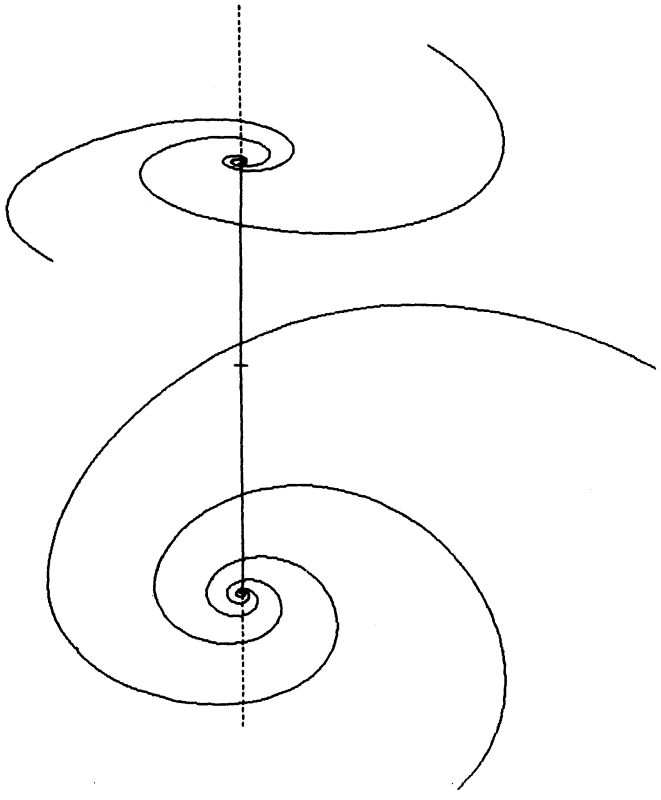
Les dessins suivants ont été obtenus à l'aide du micro-ordinateur Lisa 2.10 (Apple) du Département de Mathématiques de l'Université de Poitiers. La méthode d'approximation utilisée est la méthode RK4.

**A.1.** *Mise en évidence de la relation entrée-sortie pour un tourbillon d'ordre* 1 (*Exemple* 1.1).

$$\varepsilon\dot{x} = y; \quad \varepsilon\dot{y} = -x + (1-z^2)y - x^2y - 2xyz; \quad \dot{z} = -1; \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Conditions initiales : (0.3,0,1.3); entrée dans le ε-tube : $e = 1.284$; sortie du ε-tube : $s = 0.685$.

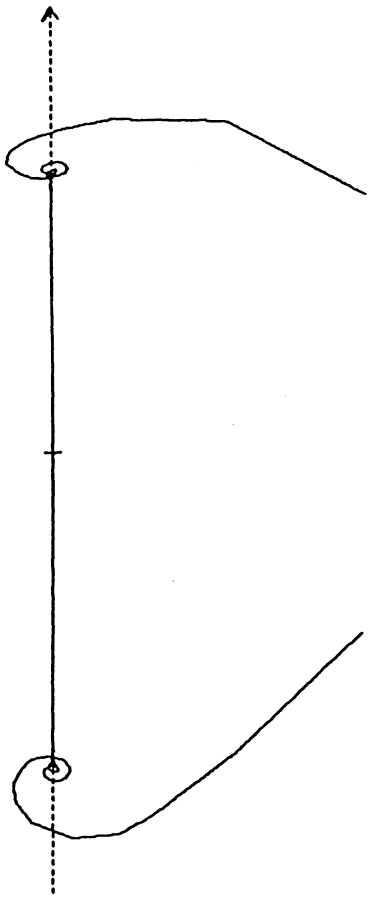
Conditions initiales : (−0.3,0,1.3); entrée dans le ε-tube : $e = 1.283$; sortie du ε-tube : $s = 0.686$.



**A.2.** *Entrée-sortie dans un tourbillon d'ordre* 3/2

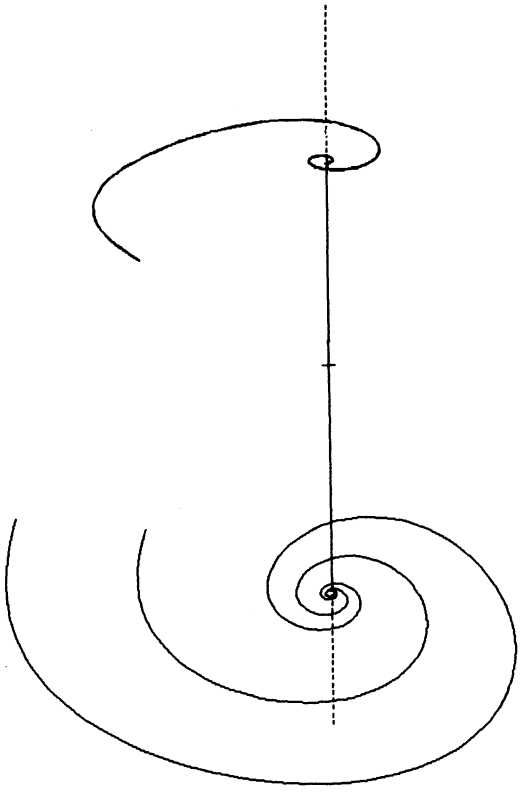
$$\varepsilon\dot{x} = -5y + (5-z)y^2/\rho + x^3(25-z^2)/\rho^{3/2};$$
$$\varepsilon\dot{y} = 5x + (z-5)xy/\rho + x^2y(25-z^2)\rho^{3/2};$$
$$\dot{z} = -1;$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \varepsilon = 10^{-2}.$$

Entrée dans le ε-tube : $e = 5.987$ ; sortie du ε-tube : $s = 3.895$.



**A.3.** *Phénomène de dispersion des orbites dans le plan de sortie.*

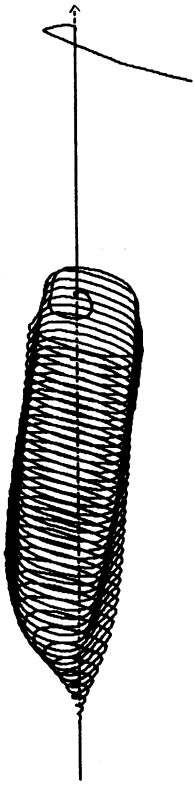
Le tourbillon considéré est celui de A.1. et l'on a tracé les orbites des points (0.3,0,1.3) et (0.3,0,1.299), lorsque $\varepsilon = 10^{-3}$. Les orbites sont presque confondues dans le plan d'entrée et nettement séparées dans le plan de sortie.



**A.4.** *Entrée-sortie dans un tourbillon avec un modèle horizontal présentant une bifurcation de Hopf.*

$$\varepsilon\dot{x} = y; \quad \varepsilon\dot{y} = -x + \left(1 - \frac{z^2}{100}\right)y - x^2y - 2xyz; \quad \dot{z} = -1.$$

Après la sortie du halo de l'axe, la trajectoire suit l'évolution du cycle limite du modèle horizontal.



## BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BENOIT, Équations différentielles : relation entrée-sortie, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 293 (1981), 293-296.

[2] E. BENOIT, J. L. CALLOT, F. DIENER and M. DIENER, Chasse au canard, *Collectanea Mathematica*, Vol. XXXII, Fasc. 1 et 2 (1981) (Barcelone).

[3] J. L. CALLOT and T. SARI, Stroboscopie infinitésimale et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solution rapidement oscillante. Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, Vol. 3, éditions du CNRS (1983).

[4] P. CARTIER, Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard, Séminaire Bourbaki n° 580.

[5] M. DIENER, Étude générique des canards, Thèse d'État, *Publication IRMA*, Strasbourg, 143/TE-18.

[6] R. LUTZ and M. GOZE, Nonstandard analysis. A practical guide with applications, *Lecture Notes in Mathematics*, 881 (Springer, Berlin, 1981).

[7] R. LUTZ, L'intrusion de l'Analyse non standard dans l'étude des perturbations singulières. III$^{e}$ rencontre de géométrie du Schnepfenried, Vol. 2, *Astérisque*, 109/110 (1983), 101-139.

[8] E. NELSON, Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83 (1977), 1165-1198.

[9] G. REEB, Équations différentielles et analyse non classique d'après J. L. Callot (Oran), *Proceedings of the 4th International Colloquium on Differential Geometry*, Santiago de Compostela (1978).

[10] G. REEB, A. TROESCH and E. URLACHER, Analyse non standard d'après un exposé fait au séminaire Loi, L'Ouvert, Organe d'information et d'échange de la régionale A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, 16 (1978), 16-26.

[11] T. SARI, Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes, Thèse d'État, Université de Haute-Alsace, Mulhouse.

[12] A. TROESCH, Étude macroscopique des systèmes différentiels. *Proc. London Math. Soc.*, (3), 48 (1984), 121-160.

Manuscrit reçu le 30 mai 1985.

Guy WALLET,
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers.