ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Racines de polynômes de Bernstein

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 4 (1986), p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_4_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 4 (1986), 1-30.

RACINES DE POLYNÔMES DE BERNSTEIN

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Notons $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ l'anneau des séries convergentes à $n+1$ variables et $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires en $\frac{\partial}{\partial X_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ à coefficients dans $\mathcal{O}$. Bernstein ([2]) a montré que pour tout polynôme P, il existe $B \in \mathbf{C}[s]$, $B \neq 0$ et $D \in \mathcal{D}[s]$ tels que l'on ait

$$DP^{s+1} = BP^s.$$

Il est clair que l'ensemble des $B \in \mathbf{C}[s]$ tels qu'il existe $D \in \mathcal{D}[s]$ avec $DP^{s+1} = BP^s$ est un idéal de $\mathbf{C}[s]$; le générateur unitaire de cet idéal est noté b et est appelé « le polynôme de Bernstein-Sato de P ». Il est facile de voir que $b(s)$ est divisible par $s+1$. On note $\tilde{b}(s) = b(s)/(s+1)$. On sait, d'après Kashiwara ([4]) que b a des racines rationnelles négatives.

Nous étudions ici le cas $n = 1$.

Soit $P(X_1, X_2) \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$, $P(X_1, X_2) = \Sigma e_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$.

Nous notons

$$\text{Supp } P = \{\alpha \in \mathbf{N}^2 / e_\alpha \neq 0\}$$

et nous supposons que $e_\alpha > 0$ pour tout $\alpha \in \text{Supp } P$.

Nous nous proposons de calculer des racines du polynôme de Bernstein-Sato de P.

Mots-clés : Singularités - Polynôme de Bernstein-Sato.

Ces résultats reposent sur l'étude de l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2 - 1} P(x_1, x_2)^s \, dx_1 \, dx_2$$

et de son prolongement sur $\mathbf{C}$.

Nous donnons des théorèmes généraux qui peuvent être complétés dans des cas particuliers en faisant des calculs explicites.

Nous utilisons les notations suivantes :

Soit $E_0 = \{\alpha + \mathbf{R}_+^2\}_{\alpha \in \text{Supp } P}$ et $\mathscr{E}_0$ l'enveloppe convexe de E_0, appelée le polygone de Newton de P. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$ les sommets de $\mathscr{E}_0$. Nous écrivons l'équation de la droite $A_i A_{i+1}$ sous la forme $f_i(x,y) = 1$ où $f_i(x,y) = x/a_i + y/b_i$.

Notons L_i le parallélogramme de sommets OA_iA_{i+1}. Soient enfin γ_0, γ_1, δ_0, δ_1 les degrés des termes de plus bas degré de $P(X,0)$, $P(X,1)$, $P(0,Y)$, $P(1,Y)$. Nous notons

$$\mathscr{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid \text{il existe } m \in \{\gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1\} \text{ et } mq \in \mathbf{N}\}.$$

THÉORÈME 1. — *Notons, pour* $i = \{1, \ldots, r\}$

$$\mathscr{B}_i = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \middle| (\beta_1, \beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathscr{N}\right\}.$$

Alors si $q \in \mathscr{B}_i$, q *ou* $q + 1$ *est racine de* $\tilde{b}$.

Notons $\bar{E}_0'$ l'ensemble maximal de la forme $\cup \{\alpha + \mathbf{R}_+^2\}_{\alpha \in \mathbf{N}^{*2}}$ qui ait pour enveloppe convexe $\mathscr{E}_0$ et

$$L_i' = \complement_{L_i} L_i \cap E_0'.$$

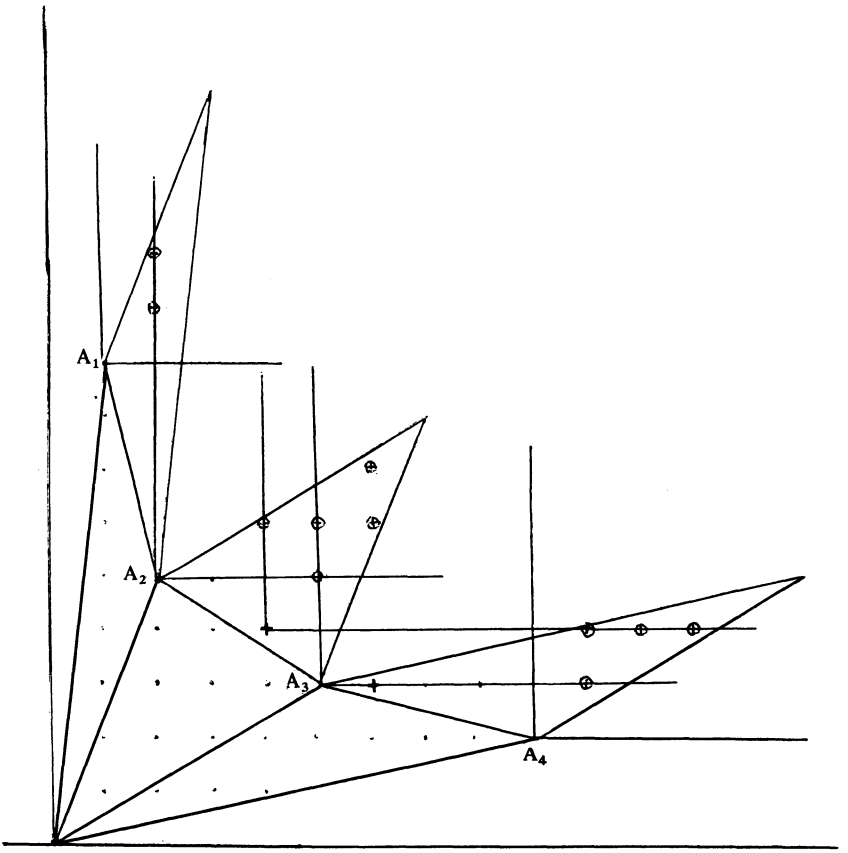
THÉORÈME 2. — *Notons, pour* $i = \{1, \ldots, r\}$

$$\mathscr{B}_{i,1} = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \middle| (\beta_1, \beta_2) \in L_i' \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathscr{N}\right\}.$$

Alors pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\mathscr{B}_{i,1}$ *est contenu dans l'ensemble des racines de* $\tilde{b}$.

Exemple I.

$$P(X_1, X_2) = X_1^9X_2^2 + X_1^6X_2^3 + X_1^5X_2^3 + X_1^4X_2^4 + X_1^2X_2^5 + X_1X_2^9$$



$$f_1(x,y) = \frac{4x}{13} + \frac{y}{13};\quad f_2(x,y) = \frac{2x}{19} + \frac{3y}{19};\quad f_3(x,y) = \frac{x}{17} + \frac{4y}{17}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 2q \in \mathbf{N}\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, on sait que

$$\mathcal{B}_{1,1} = \left\{-\frac{7}{13}, -\frac{8}{13}, -\frac{9}{13}, -\frac{10}{13}, -\frac{11}{13}, -\frac{12}{13}, -\frac{14}{13}, -\frac{15}{13}, -\frac{16}{13}, -\frac{17}{13}\right\}.$$

$$\mathscr{B}_{2,1} = \left\{ -\frac{5}{19}, -\frac{8}{19}, -\frac{10}{19}, -\frac{12}{19}, -\frac{13}{19}, -\frac{15}{19}, -\frac{16}{19}, -\frac{17}{19}, -\frac{18}{19}, -\frac{20}{19}, -\frac{21}{19}, -\frac{22}{19}, -\frac{23}{19} \right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,1} = \left\{ -\frac{6}{17}, -\frac{7}{17}, -\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, -\frac{13}{17}, -\frac{14}{17}, -\frac{15}{17}, -\frac{16}{17}, -\frac{18}{17}, -\frac{19}{17}, -\frac{20}{17}, -\frac{21}{17} \right\}$$

sont contenus dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et que si q appartient à

$$\mathscr{B}_{1,2} = \left\{ -\frac{18}{13}, -\frac{19}{13} \right\}$$

$$\mathscr{B}_{2,2} = \left\{ -\frac{25}{19}, -\frac{26}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{30}{19}, -\frac{33}{19} \right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,2} = \left\{ -\frac{22}{17}, -\frac{25}{17}, -\frac{26}{17}, -\frac{27}{17} \right\}$$

alors q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

On montrera par des calculs explicites que l'ensemble

$$\left\{ -\frac{5}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{6}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{9}{19}, -\frac{11}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{5}{17}, -\frac{9}{17}, -\frac{10}{17} \right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

Les théorèmes 1 et 2 généralisent des résultats connus dans le cas où la singularité en 0 est isolée. En effet, si μ est le nombre de Milnor, on sait que l'on peut définir un ensemble de μ nombres rationnels positifs ℓ_k, $1 \leqslant k \leqslant \mu$ appelé le spectre de la singularité qui possède les propriétés suivantes :

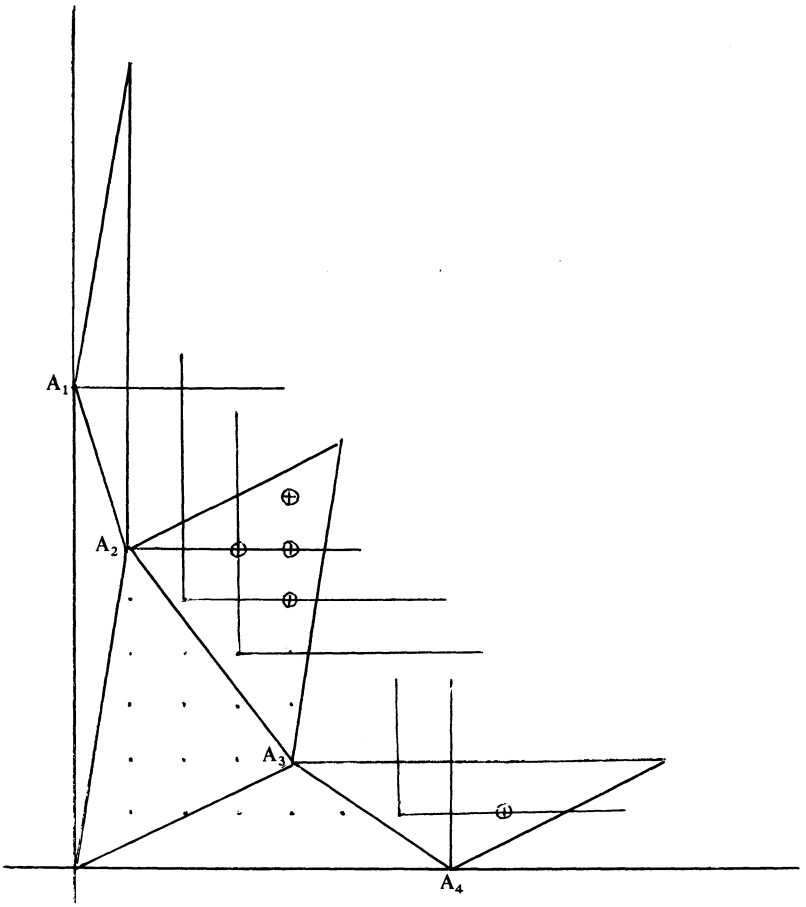
i) Étant donné ℓ_k, il existe une racine de $\tilde{b}$, ρ_k telle que $\ell_k + \rho_k$ soit un entier positif ou nul.

ii) Dans le cas où $n = 1$ et si P est générique pour son polygone de Newton [1] on sait calculer les ℓ_k : si les droites qui joignent l'origine O aux sommets A_i de $\mathscr{E}_0$ ne contiennent pas de points à coordonnées entières, le spectre de la singularité est égal à l'ensemble des $\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2}$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r$.

S'il existe des points à coordonnées entières (β_1, β_2) sur les droites OA_i on a les rationnels $\dfrac{\beta_1}{a_i} + \dfrac{\beta_2}{b_i}$ ainsi que $2 - \left(\dfrac{\beta_1}{a_i} + \dfrac{\beta_2}{b_i}\right)$.

Exemple II.

$$X_1^7 + X_1^4X_2^2 + X_1X_2^6 + X_2^9.$$



Le spectre de la singularité est

$$\left\{\frac{7}{22}, \frac{10}{22}, \frac{11}{22}, \frac{13}{22}, \frac{14}{22}, \frac{16}{22}, \frac{17}{22}, \frac{18}{22}, \frac{19}{22}, \frac{20}{22}, \frac{21}{22}, \frac{23}{22}, \frac{24}{22}, \frac{25}{22}, \frac{26}{22}, \frac{27}{22}, \frac{28}{22}, \frac{30}{22}, \frac{31}{22}, \frac{33}{22}, \frac{34}{22}, \frac{37}{22}, \frac{7}{14}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14}, \frac{19}{14}\right\}.$$

On en déduit, d'après Ehlers-Lo ([8]), que l'ensemble

$$\left\{-\frac{7}{22}, -\frac{10}{22}, -\frac{11}{22}, -\frac{13}{22}, -\frac{14}{22}, -\frac{16}{22}, -\frac{17}{22}, -\frac{18}{22}, -\frac{19}{22}, -\frac{20}{22}, -\frac{21}{22}, -\frac{23}{22}, -\frac{24}{22}, -\frac{25}{22}, -\frac{26}{22}, -\frac{27}{22}, -\frac{28}{22}, -\frac{7}{14}, -\frac{9}{14}, -\frac{11}{14}, -\frac{13}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{17}{14}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et que si q appartient à l'ensemble

$$\left\{-\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{34}{22}, -\frac{37}{22}, -\frac{19}{14}\right\}$$

alors q ou $q+1$ appartient à l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

On peut montrer par des calculs explicites que l'ensemble

$$\left\{-\frac{12}{22}, -\frac{15}{22}, -\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{5}{14}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

On peut donner une interprétation du nombre $\sum_{k=1}^{\mu} \ell_k + \rho_k$.

Pour $1 \gg \varepsilon \gg \eta > 0$, notons

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbf{C}^2 \mid \|x\| < \varepsilon \quad |P(x)| < \eta\} \\ S &= \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \eta\} \\ X_t &= P^{-1}(t) \cap X. \end{aligned}$$

Soit Ω^n l'espace des n-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}$. On note

$$G = \Omega^{n+1} / df \wedge d\Omega^{n-1}.$$

On sait d'après Brieskorn et Sebastiani que G est un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang μ, muni d'une connexion ∂_t à singularité régulière

$$\partial_t : G \to G[t^{-1}] = G \otimes_{\mathbf{C}\{t\}} \mathbf{C}\{t\}[t^{-1}].$$

On définit le saturé

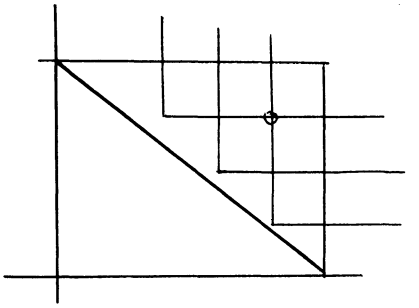
$$\tilde{G} = \sum_{i \geq 0} (\partial_t t)^i G \subset G[t^{-1}].$$

On sait d'après Malgrange ([5]) que $\tilde{b}$ est le polynôme minimal de $\partial_t t$ sur $\tilde{G}/t\tilde{G}$. La dimension de $\tilde{G}/G$ est égale à $\sum_{k=1}^{\mu} \ell_k + \rho_k$ (où $\{\rho_k\}_{1\leqslant k\leqslant \mu}$ est l'ensemble des valeurs propres de $\partial_t t$ comme endomorphisme de $\tilde{G}/t\tilde{G}$). (M. Saïto : lettre à l'auteur).

Nous traitons quelques exemples qui montrent que l'on ne peut pas améliorer les théorèmes généraux.

Exemple III.

$$X_1^5 + a_1X_1^4X_2 + a_2X_1^3X_2^2 + a_3X_1^2X_2^3 + X_2^4 \quad a_1, a_2, a_3 \geqslant 0$$



Le spectre de la singularité est

$$\left\{\frac{9}{20}, \frac{13}{20}, \frac{14}{20}, \frac{17}{20}, \frac{18}{20}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{22}{20}, \frac{23}{20}, \frac{26}{20}, \frac{27}{20}, \frac{31}{20}\right\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, l'ensemble

$$\left\{-\frac{9}{20}, -\frac{13}{20}, -\frac{14}{20}, -\frac{17}{20}, -\frac{18}{20}, -\frac{19}{20}, -\frac{21}{20}, -\frac{22}{20}, -\frac{23}{20}, -\frac{26}{20}, -\frac{27}{20}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et $-\frac{31}{20}$ ou $-\frac{11}{20}$ est aussi racine de $\tilde{b}$.

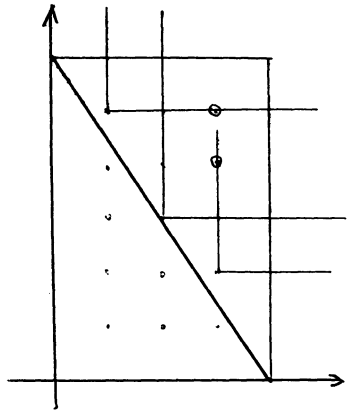
Des calculs explicites montrent que si

$$(a_1, a_2, a_3) \in \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y^2 \neq \frac{5}{2}x\}$$

alors $-\frac{11}{20}$ est racine de $\tilde{b}$. Si a_1, a_2, a_3 sont des réels positifs ou nuls tels que $a_2^2 = \frac{5}{2}a_1$ alors $-\frac{31}{20}$ est racine de $\tilde{b}$. On en déduit qu'il existe $g_1 \in \mathbf{C}\{X_1, X_2\}$ et $g_2 \in \mathbf{C}\{X_1, X_2\}$ tel que $P = g_1 \frac{\partial P}{\partial X_1} + g_2 \frac{\partial P}{\partial X_2}$.

Exemple IV.

$$(X_1^2 + X_2^3)^2 + X_1 X_2^5$$



D'après les théorèmes 1 et 2, $-\frac{5}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{13}{12}$ sont racines de $\tilde{b}$.

On sait d'après Yano que les racines de $\tilde{b}$ sont les éléments de l'ensemble

$$\left\{-\frac{5}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{13}{12}, -\frac{11}{26}, -\frac{15}{26}, -\frac{17}{26}, -\frac{19}{26}, -\frac{21}{26}, -\frac{23}{26}, -\frac{25}{26}, -\frac{27}{26}, -\frac{29}{26}, -\frac{31}{26}, -\frac{33}{26}, -\frac{35}{26}, -\frac{37}{26}\right\}.$$

On voit donc que les théorèmes 1 et 2 donnent exactement les racines de $\tilde{b}$ qui sont de la forme $\frac{\beta_1}{4} + \frac{\beta_2}{6}$ mais par contre ne donnent pas les autres.

Dans beaucoup de cas particuliers on peut compléter les théorèmes 1 et 2 par des calculs explicites qui permettent de dire effectivement si q ou

$q+1$ est racine de $\tilde{b}$. Nous traitons d'autres exemples à la fin de cet article.

Tous les résultats proviennent du calcul explicite des pôles et des résidus de la fonction $I_0(P,\beta)(s)$, prolongement à $\mathbf{C}$ de l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 P(x_1,x_2)^s x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous écrivons $P(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} e_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$ et nous notons

$$\alpha_1^0 = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \alpha_1 \qquad \alpha_2^n = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} \alpha_2 .$$

Posons $Q(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, P} e_\alpha X_1^{\alpha_1^0-\alpha_1} X_2^{\alpha_2^n-\alpha_2}$.

On note $I_\infty(Q,\beta)(s)$ le prolongement sur $\mathbf{C}$ de l'intégrale

$$\int_1^\infty \int_1^\infty Q(x_1,x_2)^{-s} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats sur $I_\infty(Q,\beta)(s)$ d'où l'on déduira les résultats pour $I_0(P,\beta)(s)$.

1. Rappels des résultats sur $I_\infty(Q,\beta)(s)$.

Nous écrivons $Q(X_1,X_2) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, Q} e'_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}$.

Notons $E_\infty = \{\alpha + \mathbf{R}_-^2\}_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, Q}$ et $\mathscr{E}_\infty$ l'enveloppe convexe de E_∞. On remarque que $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{E}_\infty$ sont symétriques par rapport au point A de coordonnées $(\alpha_1^0/2, \alpha_2^n/2)$. Notons $g_j(x,y) = 1$ où $g_j(x,y) = x/c_j + y/d_j$ les équations des faces de $\mathscr{E}_\infty$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, indicées par pente décroissante de $-\infty$ à 0. Pour tout $\nu_Q = (\nu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, Q} \in \mathbf{N}^{|\mathrm{Supp}\, Q|}$ on définit

$$(2) \qquad s_j(\beta, \nu_Q) = g_j(\beta_1,\beta_2) - \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\, Q} \nu_\alpha (1 - g_j(\alpha_1,\alpha_2)) .$$

Nous notons $S_j(\beta,Q)$ l'ensemble des $s_j(\beta,\nu_Q)$ pour tout $\nu_Q \in \mathbf{N}^{|\mathrm{Supp}\, Q|}$.

Nous posons aussi

$$F_j = \{\alpha \in \text{Supp } Q \mid g_j(x_1, x_2) = 1\} \tag{3}$$

$$F_j^- = \{\alpha \in \text{Supp } Q \mid g_j(x_1, x_2) < 1\} \tag{4}$$

et

$$Q_j(X_1, X_2) = \sum_{\alpha \in F_j} e'_\alpha X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}.$$

PROPOSITION 4. — *Les pôles de* $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *appartiennent à l'ensemble* $\bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta,Q)$.

PROPOSITION 5. — i) *La fonction* $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *est convergente pour* $\mathrm{Re}(s) > g_j(\beta_1, \beta_2)$ *où* $g_j(x, y) = 1$ *est l'équation d'une face de* $\mathscr{E}_\infty$ *coupée par la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1, β_2).

ii) *Si cette droite coupe* $\mathscr{E}_\infty$ *sur la seule face* F_j, *il y a un pôle simple pour* $s = g_j(\beta_1, \beta_2)$ *de résidu*

$$\Gamma(g_j(\beta_1, \beta_2))^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{\beta_1 - 1} t_2^{\beta_2 - 1} \exp(-Q_j(t_1, t_2))\, dt_1\, dt_2$$

si $i \neq 1$ *et* $i \neq j$. *Si* $j = 1$ (*resp.* $j = \ell$) *ce résidu est*

$$B_1 = \frac{1}{c_1} I_\infty(Q_1(1, X_2), \beta_2)(g_1(\beta_1, \beta_2))$$

$$(\textit{resp.}\quad B_\ell = \frac{1}{d_\ell} I_\infty(Q_\ell(X_1, 1), \beta_1)(g_\ell(\beta_1, \beta_2)).$$

iii) *Si la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1, β_2) *coupe* $\mathscr{E}_\infty$ *sur l'intersection des faces* F_j *et* F_{j+1}, $I_\infty(Q,\beta)(s)$ *a un pôle double pour*

$$s = g_j(\beta_1, \beta_2) = g_{j+1}(\beta_1, \beta_2).$$

Preuve. — Les points i) et ii)) sont démontrés dans [3], Théorème 10. Pour montrer le point iii), on remarque tout d'abord que $I_\infty(Q,\beta)(s) - I_\infty(Q_j, \beta)(s)$ se prolonge pour $\mathrm{Re}(s) > g_j(\beta_1, \beta_2) - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

En effet, on écrit :

$$Q = Q_j + Q_{j,1}$$

les monômes de $Q_{j,1}$, vérifiant $\frac{\alpha_1}{c_j} + \frac{\alpha_2}{d_j} < 1$

$$
\begin{aligned}
&I_\infty(Q,\beta)(s) - I_\infty(Q_j,\beta)(s) \\
&= \int_1^\infty \int_1^\infty (Q(x_1,x_2)^{-s} - Q_j(x_1,x_2)^{-s}) x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 \\
&\quad = \int_1^\infty \int_1^\infty (Q_j(x_1,x_2)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{n} \left(\frac{Q_{j,1}(x_1,x_2)}{Q_j(x_1,x_2)}\right)^n x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 \\
&\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{n} \int_1^\infty \int_1^\infty Q_j(x_1,x_2)^{-s-n} (Q_{j,1}(x_1,x_2)^n)\, x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .
\end{aligned}
$$

Chacune des intégrales est convergente pour $\mathrm{Re}(s) > g_j(\beta_1,\beta_2) - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et la série converge pour une telle valeur s.

On est donc ramené à montrer que $I_\infty(Q_j,\beta)(s)$ admet un pôle double pour $s = g_j(\beta_1,\beta_2)$. On a

$$I_\infty(Q_j,\beta)(s) = \int_1^\infty x^{\beta_2 + (d_j/c_j)\beta_1 - d_j s - 1}\, dx \,.\, I(s)$$

où

$$I(s) = \int_1^\infty v^{\beta_1} Q_j(v,1)^{-s}\, dv/v .$$

Or $I(s)$ admet un pôle simple pour $s = \frac{\beta_1}{c_j} + \frac{\beta_2}{d_j}$ lorsque (β_1,β_2) est aligné avec une des extrémités du support de Q_j.

PROPOSITION 6. — *Soit* $s_0 \in \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta,Q)$. *Si pour tout* j *et tout* ν_Q *tel que*

$$s_j(\beta,\nu_Q) = s_0, \text{ on a } s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j+1}(\beta,\nu_Q) \quad \text{et} \quad s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$$

alors le point $s = s_0$ *est un point régulier ou un pôle simple ; si de plus* $-s_0 \in \mathbf{N}$ *alors c'est un point régulier . S'il existe* i *et* ν_Q *tel que* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_0$ *avec* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_{j+1}(\beta,\nu_Q)$ *ou* $s_j(\beta,\nu_Q) = s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$, *alors il peut y avoir un pôle double pour* $s = s_0$; *si de plus* $-s_0 \in \mathbf{N}$, *alors* $s = s_0$ *est soit un point régulier soit un pôle simple* [3, Théorème 12].

Nous appelons *cas* 1, le cas où pour tout j et tout ν_Q, tels que $s_j(\beta,\nu_Q) = s_0$, on a $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j+1}(\beta,\nu_Q)$ et $s_j(\beta,\nu_Q) \neq s_{j-1}(\beta,\nu_Q)$ et $-s_0 \notin \mathbf{N}$.

Pour exprimer les résidus aux pôles dans le cas 1 nous notons

$$(5)\quad B_1(\beta,\nu_Q) = \Gamma(s_1(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_1^-}\nu_\alpha)\, I_\infty(Q_1(1,X_2),\beta_2 + \sum_{\alpha\in F_1^-}\alpha_2\nu_\alpha)(s_1(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_1^-}\nu_\alpha)$$

$$(6)\quad B_\ell(\beta,\nu_Q) = \Gamma(s_\ell(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_\ell^-}\nu_\alpha)\, I_\infty(Q_\ell(X_1,1),\beta_1 + \sum_{\alpha\in F_\ell^-}\alpha_1\nu_\alpha)(s_\ell(\beta,\nu_Q) + \sum_{\alpha\in F_\ell^-}\nu_\alpha).$$

Pour $1 < j < \ell$

$$(7)\qquad B_j(\beta,\nu_Q) = G_{Q_j}(\beta_1 + \sum_{\alpha\in F_j^-}\alpha_1\nu_\alpha,\ \beta_2 + \sum_{\alpha\in F_j^-}\alpha_2\nu_\alpha)$$

où $G_{Q_j}(s_1,s_2)$ est le prolongement sur $\mathbf{C}^2$ de

$$\int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{s_1}t_2^{s_2}\exp(-Q_j(t_1,t_2))\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$

$$c_j(Q,\nu_Q) = \prod_{\alpha\in F_j^-}\frac{(-1)^{\nu_\alpha}}{\nu_\alpha!}\,e_\alpha'^{\nu_\alpha}.$$

On remarque que, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, $s_j(\beta,\nu_Q)$, $B_j(\beta,\nu_Q)$ et $c_j(\beta,\nu_Q)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence de ν_Q pour la relation $\nu_Q \sim_j \nu'_Q$ si et seulement si ils ont mêmes composantes pour $\alpha \in F_j$. On note $\bar{\nu}_Q$ un représentant quelconque dans cette classe.

PROPOSITION 7. — *Pour tout* $s_0 \in \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j(\beta,Q)$ *satisfaisant le cas* 1

$$\Gamma(s_0)\operatorname*{Res}_{s=s_0} I_\infty(Q,\beta)(s) = \sum_{j,\bar{\nu}_Q} c_j(Q,\bar{\nu}_Q)\,B_j(\beta,\bar{\nu}_Q)$$

la sommation étant étendue à tous les j *et* $\bar{\nu}_Q$ *tels que* $s_j(\beta,\bar{\nu}_Q) = s_0$.

Voir [3, Théorème 13].

2. Étude de $I_0(P,\beta)(s)$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ et $I_\infty(P,\beta)(s)$ sont reliées par la proposition suivante :

PROPOSITION 8. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$

$$I_0(P,\beta)(s) = I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s - \beta_1, -\alpha_2^n s - \beta_2)(-s). \tag{8}$$

Preuve. — On se place pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand de telle sorte que l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 P(x_1,x_2)^s x_1^{\beta_1 - 1} x_2^{\beta_2 - 1}\, dx_1\, dx_2$$

soit convergente et on fait dans cette intégrale le changement de variables $x_1 = y_1^{-1}$, $x_2 = y_2^{-1}$.

Notons $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ les faces de $\mathscr{E}_0$ qui ne sont pas parallèles aux axes et $\mathscr{D}_i^+ = \{\alpha \in \mathrm{Supp}\ P \mid f_i(\alpha_1,\alpha_2) > 1\}$. Pour tout $\nu_P = (\nu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Supp}\ P}$, on définit, pour tout $i \in I$

$$t_i(\beta,\nu_P) = -f_i(\beta_1,\beta_2) + \sum_{\alpha \in \mathrm{Supp}\ P} \nu_\alpha (1 - f_i(\alpha_1,\alpha_2)) \tag{9}$$

et

$$T_i(\beta,P) = \{t_i(\beta,\nu_P) \mid \nu_\alpha \in \mathbf{N}^{|\mathrm{Supp}\ P|}\}.$$

THÉORÈME 9. — *L'ensemble des pôles de* $I_0(P,\beta)(s)$ *est contenu dans l'ensemble* $\bigcup_{i\in I} T_i(\beta,P)$.

Définissons :

$$B_1'(\beta\text{-},\nu_P) = \Gamma\left(-t_1(\beta,\nu_P) + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \nu_\alpha\right) I_0\left(P_1(1,X_2), \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(t_1(\beta,\nu_P) - \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \nu_\alpha\right) \tag{10}$$

$$B_\ell'(\beta,\nu_P) = \Gamma\left(-t_\ell(\beta,\nu_P) + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_\ell^+} \nu_\alpha\right) I_0\left(P_\ell(X_1,1), \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_\ell^+} \alpha_1 \nu_\alpha\right)\left(t_\ell(\beta,\nu_P) - \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_\ell^+} \nu_\alpha\right) \tag{11}$$

si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_\ell$ ne sont pas des axes, et pour $1 < i < \ell$

$$(12) \qquad B_i'(\beta,\nu_P) = G_{P_i}\Big(\beta_1 + \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+} \alpha_1\nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+} \alpha_2\nu_\alpha\Big).$$

THÉORÈME 10. — i) *La fonction* $I_0(P,\beta)(s)$ *est convergente pour* $\mathrm{Re}(s) > -f_i(\beta_1,\beta_2)$ *où* $f_i(\beta_i,\beta_2) = 1$ *est l'équation d'une face de* $\mathscr{E}_0$ *coupée par la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1,β_2).

ii) *Si cette droite coupe* $\mathscr{E}_0$ *sur la seule face* $\mathscr{D}_i$, *il y a un pôle simple pour* $t = -f_i(\beta_1,\beta_2)$ *de résidu*

$$\Gamma(f_i(\beta_1,\beta_2))^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{\beta_1-1} t_2^{\beta_2-1} \exp(-Q_j(t_1,t_2))\, dt_1\, dt_2$$

si $\mathscr{D}_i$ *n'est pas parallèle aux axes, et*

$$I_0(P_1(1,X_2),\beta_2)(-f_1(\beta_1,\beta_2))$$

ou

$$I_0(P_\ell(X_1,1),\beta_1)(-f_\ell(\beta_1,\beta_2))$$

sinon.

iii) *Si la droite passant par* $(0,0)$ *et* (β_1,β_2) *coupe* $\mathscr{E}_0$ *sur l'intersection des faces* $\mathscr{D}_i$ *et* $\mathscr{D}_{i+1}$, $I_0(P,\beta)(s)$ *a un pôle double pour*

$$s = -f_i(\beta_1,\beta_2) = -f_{i+1}(\beta_1,\beta_2).$$

THÉORÈME 11. — *Soit* $t_0 \in \bigcup_{i\in I} T_i(\beta,P)$. *Si pour tout* i *et tout* ν_P *tel que* $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$, *on a* $t_i(\beta,\nu_P) \neq t_{i-1}(\beta,\nu_P)$ *et* $t_i(\beta,\nu_P) \neq t_{i+1}(\beta,\nu_P)$, *alors le point* $s = t_0$ *est un point régulier ou un pôle simple. Dans ce cas, on a :*

$$\Gamma(-t_0) \operatorname*{Res}_{s=t_0} I_0(P,\beta)(s) = \sum_{i,\nu_P} c_i(P,\nu_P) B_i'(\beta,\nu_P)$$

lorsque c'est non nul, la sommation étant prise sur tous les i *et* ν_P *tels que* $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$ *où*

$$c_i(P,\nu_P) = \prod_{\alpha\in\mathscr{D}_i^+} \frac{(-1)^{\nu_\alpha}}{(\nu_\alpha!)} e_\alpha.$$

Preuve. — Nous démontrons les théorèmes 9, 10 et 11.

Considérons une face F de $\mathscr{E}_\infty$ d'équation $g(x,y) = 1$ avec

$$g(x,y) = x/c + y/d$$

et la face $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}_0$ symétrique de F par rapport au point A d'équation $f(x,y) = 1$ avec $f(x,y) = x/a + y/b$. On a

$$(13) \qquad c = \frac{\alpha_1^0 b + \alpha_2^n a - ab}{b}, \qquad d = \frac{\alpha_1^0 b + \alpha_2^n a - ab}{a}.$$

Les singularités de $I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s - \beta_1, -\alpha_2^n s - \beta_2)(-s)$ vérifient

$$(14) \quad -s = -\frac{\alpha_1^0 s + \beta_1}{c} - \frac{\alpha_2^n s + \beta_2}{d} - \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d}\right).$$

Considérons tout d'abord le cas où c et d sont tous deux finis. Alors (14) est équivalent à (15)

$$(15) \quad s\left(1 - \frac{\alpha_1^0}{c} - \frac{\alpha_n^\alpha}{d}\right) = \frac{\beta_1}{c} + \frac{\beta_2}{d} + \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d}\right).$$

On en déduit que les singularités de $I_0(P,\beta)(s)$ vérifient

$$(16) \qquad s = -\left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_2}{b}\right) + \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a} - \frac{\alpha_2}{b}\right).$$

Si maintenant c est infini, alors $b = \alpha_2^n - \alpha_1^n$. Si $\alpha_1^n = 0$, alors il n'y a pas de singularité correspondante pour $I_0(P,\beta)(s)$. Si $\alpha_1^n \neq 0$, alors (14) s'écrit

$$s = -\frac{\beta_2}{\alpha_1^n} - \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^n}\right).$$

Supposons maintenant que $I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s - \beta_1, -\alpha_2^n s - \beta_2)(s)$ ait un pôle double pour $s = s_0$, alors il existe j et ν_P tels que

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{\alpha_1^0 s_0 + \beta_1}{c_j} - \frac{\alpha_2^n s_0 + \beta_2}{d_j} - \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c_j} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d_j}\right) \\ &= -\frac{\alpha_1^0 s_0 + \beta_1}{c_{j-1}} - \frac{\alpha_2^n s_0 + \beta_2}{d_{j-1}} - \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1^0 - \alpha_1}{c_{j-1}} - \frac{\alpha_2^n - \alpha_2}{d_{j-1}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit, si $\mathscr{D}_i$ et $\mathscr{D}_{i-1}$ sont les faces de $\mathscr{E}_0$ symétriques de F_j et F_{j-1} par rapport à A,

$$\begin{aligned} s_0 &= -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) + \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a_i} - \frac{\alpha_2}{b_i}\right) \\ &= -\left(\frac{\beta_1}{a_{i-1}} + \frac{\beta_2}{b_{i-1}}\right) + \sum_{\alpha \in \operatorname{Supp} P} \nu_\alpha \left(1 - \frac{\alpha_1}{a_{i-1}} - \frac{\alpha_2}{b_{i-1}}\right). \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant les résidus. Soit $t_0 \in \bigcup_{i \in I} T_i(\beta,P)$

$$\operatorname*{Res}_{s=t_0} \Gamma(-s)I_0(P,\beta)(s)$$
$$= \operatorname*{Res}_{s=t_0} \Gamma(-s)I_\infty(Q, -\alpha_1^0 s-\beta_1, -\alpha_2^n s-\beta_2)(-s)$$
$$= \Gamma(-t_0) \operatorname*{Res}_{s \to t_0} I_\infty(Q,-\alpha_1^0 t_0-\beta_1, -\alpha_2^n t_0-\beta_2)(-s).$$

Donc

$$\operatorname*{Res}_{s \to t_0} \Gamma(-s)I_0(P,\beta)(s) = \sum_{j,\nu_Q} c_j(Q,\nu_Q)B_j(\beta',\nu_Q)$$

la sommation étant étendue à tous les j et ν_Q tels que $s_j(\beta',\nu_Q) = -t_0$ avec $\beta'_1 = -\alpha_1^0 t_0 - \beta_1$ et $\beta'_2 = -\alpha_2^n t_0 - \beta_2$, c'est-à-dire à tous les i et ν_P tels que $t_i(\beta,\nu_P) = t_0$. Si $j \neq 1$ et ℓ

$$B_j(\beta',\nu_Q) = G_{Q_j}\left(\beta'_1 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_1\nu_\alpha, \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_2\nu_\alpha\right)$$

où $G_{Q_j}(s_1,s_2)$ est le prolongement sur $\mathbf{C}^2$ de

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{s_1} t_2^{s_2} \exp(-Q_j(t_1,t_2)) \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

On a encore

$$G_{Q_j}(s_1,s_2) = \Gamma\left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\int_0^1 v^{s_1} Q_j(\nu,1)^{-(s_1/c_j+s_2/d_j)}\frac{dv}{v}$$
$$+ \Gamma\left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\int_0^1 v^{s_2} Q_j(1,\nu)^{-(s_1/c_j+s_2/d_j)}\frac{dv}{v}.$$

Posons :

$$s'_1 = -s_1 + \left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\alpha_1^0$$
$$s'_2 = -s_2 + \left(\frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}\right)\alpha_2^n.$$

On a

$$\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i} = \frac{s_1}{c_j}+\frac{s_2}{d_j}.$$

Donc

$$G_{Q_j}(s_1,s_2) = \Gamma\left(\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i}\right)\int_1^\infty v^{s'_1} P_i(\nu,1)^{-(s'_1/a_i+s'_2/b_i)}\frac{dv}{v}$$
$$+ \Gamma\left(\frac{s'_1}{a_i}+\frac{s'_2}{b_i}\right)\int_1^\infty v^{s'_2} P_i(1,\nu)^{-(s'_1/a_i+s'_2/b_i)}\frac{dv}{v}.$$

Il est alors facile de montrer que

$$G_{Q_j}(s_1, s_2) = G_{P_i}(s'_1, s'_2).$$

On a donc

$$G_{Q_j}(\beta'_1 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_1 \nu_\alpha, \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_j^-} \alpha_2 \nu_2)$$
$$= G_{P_i}\left(\beta_1 + \sum_{\alpha \in F_j^-} (\alpha_1^0 - \alpha_1)\nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha \in F_j^-} (\alpha_2^n - \alpha_2)\nu_\alpha\right)$$
$$= G_{P_i}\left(\beta_1 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_i^+} \alpha_1 \nu_\alpha, \beta_2 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_i^+} \alpha_2 \nu_\alpha\right).$$

Si $j = 1$ ou ℓ

$$B_1(\beta', \nu_Q) = \Gamma\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right)$$
$$I_\infty\left(Q_1(1, X_2), \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right)$$

$$s_1(\beta', \nu_Q) - \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha = -t_0 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha = f_1(\beta_1, \beta_2) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha f_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$I_\infty\left(Q_1(1, X_2), \beta'_2 + \sum_{\alpha \in F_1^-} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(s_1(\beta', \nu_Q) + \sum_{\alpha \in F_1^-} \nu_\alpha\right)$$
$$= I_0\left(P_1(1, X_2), \beta_2 + \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \alpha_2 \nu_\alpha\right)\left(t_0 - \sum_{\alpha \in \mathscr{D}_1^+} \nu_\alpha\right).$$

Les théorèmes sont donc démontrés.

3. Lien avec les polynômes de Bernstein.

Notons $\mathscr{O} = \mathbf{R}\{x_1, x_2\}$ l'anneau des séries convergentes à deux variables et $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires en $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ à coefficients dans $\mathscr{O}$.

Bernstein ([2]) a montré que pour tout polynôme P, il existe $B \in \mathbf{R}[s]$, $B \neq 0$ et $D \in \mathscr{D}[s]$ tels que l'on ait

$$DP^{s+1} = BP^s.$$

Il est clair que l'ensemble des $B \in \mathbf{R}[s]$ tels qu'il existe $D \in \mathscr{D}[s]$ avec $DP^{s+1} = BP^s$ est un idéal de $\mathbf{C}[s]$; le générateur unitaire de cet idéal est noté b et est appelé le « polynôme de Bernstein » de P.

Nous avons donc :

$$I_0(P,\beta)(s) = \frac{1}{b(s)} \int_0^1 \int_0^1 D[P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous connaissons les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ et nous étudions les pôles de

$$\int_0^1 \int_0^1 D[P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nous écrivons D sous la forme

$$D = \sum_{j=1}^{N} D_j s^j \qquad \text{avec} \qquad D_j \in \mathscr{D} .$$

On définit $\operatorname{ord}^T D = \max \{\operatorname{ord} D_j + j\}$ et on peut montrer ([7]) qu'i existe D tel que

$$\operatorname{ord}^T D = \deg b(s) .$$

Donc on peut écrire :

$$D_j = \sum_{i_1,i_2} a_{j,i_1,i_2}(x_1,x_2) \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}}$$

avec $a_{j,i_1,i_2}(x_1,x_2) \in \mathscr{O}$ et $i_1 + i_2 \leqslant M$, M fixé.

Nous sommes donc ramenés à étudier un nombre fini d'intégrales de forme

$$I_{j,i}(s) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$

avec $a_{j,i}(x_1,x_2) \in \mathscr{O}$.

Par intégration par parties, nous obtenons $I_{j,i}(s) = A_{j,i}(s) - B_{j,i}(s)$ av

$$A_{j,i}(s) = \left[\int_0^1 \frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x_1^{i_1-1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2)\, dx_2 \right]_{x_1=0}^{x_1=1}$$

$$B_{j,i}(s) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x_1^{i_1-1}} \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} [P(x_1,x_2)]^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_1} [x_1^{\beta_1-1} x_2^{\beta_2-1} a_{j,i}(x_1,x_2)]\, dx_1\, dx_2$$

En recommençant l'intégration par parties un nombre suffisant de fois, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{j,i}(s) = \sum_k \int_0^1 P(1,x_2)^{s+1-k} e_k(x_2)\, dx_2 \\ + \sum_{k'} \int_0^1 P(x_1,1)^{s+1-k'} e_{k'}(x_1)\, dx_1 \\ + \sum_{\ell} \int_0^1 P(0,x_2)^{s+1-\ell} e_{\ell}(x_2)\, dx_2 \\ + \sum_{\ell'} \int_0^1 P(x_1,0)^{s+1-\ell'} e_{\ell'}(x_1)\, dx_1 \\ + \int_0^1 \int_0^1 P(x_1,x_2)^{s+1} e_{j,i}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \end{aligned}$$

où e_k et e_ℓ sont des éléments de $\mathbf{R}\{x_2\}$, $e_{k'}$ et $e_{\ell'}$ des éléments de $\mathbf{R}\{x_1\}$ et $e_{j,i} \in \mathbf{R}\{x_1,x_2\}$. Toutes ces sommes sont finies.

Ceci permet, connaissant les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ et les pôles des différentes fonctions qui apparaissent ici, d'en déduire des résultats sur $b(s)$.

Notons $Z = \inf_{(m_1,m_2) \in \mathbf{N}^{*2}} \{f_i(m_1,m_2) \mid i \in I\}$.

THÉORÈME 12. — *Soit* $q \in \bigcup_{\beta \in \mathbf{N}^{*2}} \bigcup_{i \in I} T_i(\beta,P)$. *S'il existe* β *tel que* q *soit effectivement un pôle de* $I_0(P,\beta)(s)$ *et si* $q \notin \mathcal{N}$, *alors* q *est racine de* b *si* $q > -Z-1$ *ou si* $q+1$ *n'est pas un pôle de* $I_0(P,\beta')(s)$ *quel que soit* β'.

4. Démonstration des théorèmes. Étude des exemples.

Nous allons tout d'abord montrer

THÉORÈME 1. — *Notons, pour* $i = \{1,\ldots,r\}$

$$\mathcal{B}_i = \left\{ q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \mid (\beta_1,\beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2} \text{ et } q \notin \mathcal{N} \right\}.$$

Alors si $q \in \mathcal{B}_i$, q *ou* $q+1$ *est racine de* $\tilde{b}$.

Preuve. — Soit $(\beta_1,\beta_2) \in L_i \cap \mathbf{N}^{*2}$, posons

$$q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right).$$

Supposons tout d'abord que (β_1,β_2) n'appartienne pas au bord de L_i. Considérons $I_0(P,\beta)(s)$. Puisque la droite passant par l'origine et le point (β_1,β_2) coupe $\mathscr{E}_0(P)$ en $\mathscr{D}_i$, $I_0(P,\beta)(s)$ a effectivement un pôle pour $q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$. Si $q > -Z-1$ ou si $q+1$ n'est pas un pôle de $I_0(P,\beta')(s)$ pour tout β', alors q est racine de $\tilde{b}$. Si $q+1$ est un pôle de $I_0(P,\beta')(s)$ pour un β', $q+1 > -Z-1$ et donc $q+1$ est racine de $\tilde{b}$. Le théorème est démontré dans ce cas. Si (β_1,β_2) appartient au bord de L_i et $\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) < 1$, alors $I_0(P,\beta)(s)$ a un pôle double pour $s = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$ et donc $-\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right)$ est racine double de $\tilde{b}$.

THÉORÈME 2. — *Notons pour* $i \in \{1,\ldots,r\}$

$$\mathscr{B}_{i,1} = \left\{q = -\left(\frac{\beta_1}{a_i} + \frac{\beta_2}{b_i}\right) \mid (\beta_1,\beta_2) \in L_i' \cap \mathbf{N}^{*2},\ q \in \mathscr{N}\right\}.$$

Alors pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\mathscr{B}_{i,1}$ *est contenu dans l'ensemble des racines de* $\tilde{b}$.

Preuve. — Il suffit de remarquer que si $q \in \mathscr{B}_{i,1}$ alors $q > -Z-1$.

Nous traitons maintenant des exemples et tout d'abord ceux de l'introduction.

Exemple I.

$$P(X_1,X_2) = X_1^9X_2^2 + X_1^6X_2^3 + X_1^5X_2^3 + X_1^4X_2^4 + X_1^2X_2^5 + X_1X_2^9.$$

Après avoir appliqué les théorèmes 1 et 2, il reste à voir si q appartient à

$$\mathscr{B}_{1,2} = \left\{-\frac{18}{13}, -\frac{19}{13}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{2,2} = \left\{-\frac{25}{19}, -\frac{26}{19}, -\frac{28}{19}, -\frac{30}{19}, -\frac{33}{19}\right\}$$

$$\mathscr{B}_{3,2} = \left\{-\frac{22}{17}, -\frac{25}{17}, -\frac{26}{17}, -\frac{27}{17}\right\}$$

si q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

Dans le tableau suivant on indique les racines q et $\tilde{b}$ telles que $q + 1 \in \mathscr{B}_{i,r}$ avec $i = 1, 2, 3$ en donnant une fonction $I_0(P,\beta)(s)$ pour laquelle q est un pôle, avec le résidu correspondant

$-\frac{5}{13}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{13}\Gamma\left(\frac{8}{13}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{13}\right)\Gamma\left(\frac{5}{13}\right)^{-1}$
$-\frac{6}{13}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{13}\Gamma\left(\frac{7}{13}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{13}\right)\Gamma\left(\frac{6}{13}\right)^{-1}$
$-\frac{6}{19}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\frac{6}{19}\Gamma\left(\frac{15}{19}\right)\Gamma\left(\frac{10}{19}\right)\Gamma\left(\frac{6}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{7}{19}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{8}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{19}\right)\Gamma\left(\frac{7}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{9}{19}$	$I_0(P,(3,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{13}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{4}{19}\right)\Gamma\left(\frac{9}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{11}{19}$	$I_0(P,(4,1))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{18}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{7}{19}\right)\Gamma\left(\frac{11}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{14}{19}$	$I_0(P,(4,2))(s)$	$\frac{1}{19}\Gamma\left(\frac{16}{19}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{19}\right)\Gamma\left(\frac{14}{19}\right)^{-1}$
$-\frac{5}{17}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{2}{17}\right)\Gamma\left(\frac{7}{17}\right)\Gamma\left(\frac{5}{17}\right)^{-1}$
$-\frac{9}{17}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{7}{17}\right)\Gamma\left(\frac{16}{17}\right)\Gamma\left(\frac{9}{17}\right)^{-1}$
$-\frac{10}{17}$	$I_0(P,(2,2))(s)$	$\frac{1}{17}\Gamma\left(-\frac{4}{17}\right)\Gamma\left(\frac{14}{17}\right)\Gamma\left(\frac{10}{17}\right)^{-1}$

Exemple II :

$$P(X_1,X_2) = X_1^7 + X_1^4X_2^2 + X_1X_2^6 + X_2^9$$

$$f_1(x,y) = \frac{3x}{9} + \frac{y}{9}; \qquad f_2(x,y) = \frac{4x}{22} + \frac{3y}{22}; \qquad f_3(x,y) = \frac{2x}{14} + \frac{3y}{14}$$

$$\mathscr{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 7q \in \mathbf{N} \text{ ou } 9q \in \mathbf{N}\}.$$

Après application des théorèmes 1 et 2, il reste à voir, si q appartient à l'ensemble $\left\{-\frac{30}{22}, -\frac{31}{22}, -\frac{34}{22}, -\frac{37}{22}, -\frac{19}{14}\right\}$, si q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

Dans le tableau suivant on indique les racines de b :

$-\frac{5}{14}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$\frac{1}{14}\Gamma\left(\frac{7}{14}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{14}\right)\Gamma\left(\frac{5}{14}\right)^{-1}$
$-\frac{12}{22}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\frac{1}{22}\Gamma\left(-\frac{4}{22}\right)\Gamma\left(\frac{38}{22}\right)\Gamma\left(\frac{12}{22}\right)^{-1}$
$-\frac{15}{22}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{22}\Gamma\left(-\frac{5}{22}\right)\Gamma\left(\frac{42}{22}\right)\Gamma\left(\frac{15}{22}\right)^{-1}$

Exemple III :

$$P(X_1,X_2) = X_1^5 + a_1X_1^4X_2 + a_2X_1^3X_2^2 + a_3X_1^2X_2^3 + X_2^4$$

$$f(x,y) = \frac{x}{5} + \frac{y}{4}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 4q \in \mathbf{N} \text{ ou } 5q \in \mathbf{N}\}.$$

Il reste à savoir si c'est $-\frac{11}{20}$ ou $-\frac{31}{20}$ qui est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, aucune fonction $I_0(P,(\beta)(s))$ n'admet de pôles pour $s = -\frac{11}{20}$. Donc $-\frac{31}{20}$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_1 = 0 = a_2$, il en est de même. En effet, les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{N}$ sont

$$-\left(\frac{\beta_1}{5} + \frac{\beta_2}{4}\right) - \frac{3\nu}{20}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

et donc aucune fonction $I_0(P,\beta)(s)$ n'admet de pôle pour $s = -\frac{11}{10}$. (On retrouve le fait que dans ce cas P est quasi-homogène déjà montré par Yano ([6]).)

Si $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$:

Alors $I_0(P,\beta)(s)$ peut avoir des pôles pour

$$-\left(\frac{\beta_1}{5}+\frac{\beta_2}{4}\right)-\frac{\nu_1}{20}-\frac{2\nu_2}{20}, \qquad (\nu_1,\nu_2)\in \mathbf{N}^2.$$

Donc $I_0(P,(1,1))(s)$ peut avoir un pôle pour $s=-\frac{11}{20}$; les autres fonctions $I_0(P,(\beta_1,\beta_2))(s)$ ne peuvent pas avoir de pôles pour $s=-\frac{11}{20}$.

La fonction $I_0(P,(1,1))(s)$ a effectivement un pôle pour $s=-\frac{11}{20}$ si

$$+\frac{1}{2.20}a_1^2\,\Gamma\left(\frac{9}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{20}a_2\,\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \text{ est non nul,}$$

c'est-à-dire si $\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2$.

Si $\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2$, alors $-\frac{11}{20}$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $\frac{2}{5}a_1^2 = a_2$, alors aucune fonction $I_0(P,\beta)(s)$ n'a pour pôle $-\frac{11}{20}$ et c'est donc $-\frac{31}{20}$ qui est racine de $\tilde{b}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que si

$$\frac{2}{5}a_1^2 = a_2 \quad \text{on a} \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1,X_2\}/(P,P'_{X_1},P'_{X_2}) = 12$$

et si

$$\frac{2}{5}a_1^2 \neq a_2 \quad \text{on a} \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1,X_2\}/(P,P'_{X_1},P'_{X_2}) = 11.$$

Exemples IV :

$$P(X_1,X_2) = X_1^7 + X_2^6 + \Sigma\, a_\alpha X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}$$

où

$$\alpha_1 \leqslant 6, \qquad \alpha_2 \leqslant 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha_1}{7}+\frac{\alpha_2}{6} > 1,$$

$$f(x,y) = \frac{x}{7} + \frac{y}{6}$$

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathbf{Q} \mid 7q \in \mathbf{N} \text{ ou } 6q \in \mathbf{N}\}.$$

D'après les théorèmes 1 et 2, l'ensemble

$$\left\{-\frac{13}{42}, -\frac{19}{42}, -\frac{20}{42}, -\frac{25}{42}, -\frac{26}{42}, -\frac{27}{42}, -\frac{31}{42}, -\frac{32}{42}, -\frac{33}{42}, -\frac{34}{42}, -\frac{37}{42}, -\frac{38}{42}, -\frac{39}{42}, -\frac{40}{42}, -\frac{41}{42}, -\frac{43}{42}, -\frac{44}{42}, -\frac{45}{42}, -\frac{46}{42}, -\frac{47}{42}, -\frac{50}{42}, -\frac{51}{42}, -\frac{52}{42}, -\frac{53}{42}\right\}$$

est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$ et si q appartient à

$$\left\{-\frac{57}{42}, -\frac{58}{42}, -\frac{59}{42}, -\frac{64}{42}, -\frac{65}{42}, -\frac{71}{42}\right\}$$

alors q ou $q+1$ est racine de $\tilde{b}$.

Si $a_\alpha = 0$ pour tout α, les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{N}$ sont

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right)$$

et donc l'ensemble $\left\{-\frac{57}{42}, -\frac{58}{42}, -\frac{59}{42}, -\frac{64}{42}, -\frac{65}{42}, -\frac{71}{42}\right\}$ est contenu dans l'ensemble des racines de $\tilde{b}$.

Nous étudions tout d'abord les cas séparément.

Dans les tableaux suivants, on indique les rationnels $q+1$ qui sont racines de b, les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ qui ont des pôles en ces points avec les résidus correspondants. La notation * signifie que la fonction $I_0(P,\beta)(s)$ est la seule qui admette la valeur correspondante comme pôle.

1) $X_1^7 + X_2^6 + a_1 X_1^6 X_2$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}.$$

$-\frac{15}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42}a_1^2\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{15}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{16}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{6.42}a_1^3\Gamma\left(\frac{19}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{16}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{24.42}a_1^4\Gamma\left(\frac{25}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$\frac{1}{2.42}a_1^2\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{6.42}a_1^3\Gamma\left(\frac{19}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,3))(s)$	$-\frac{1}{2.42}a_1^2\Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

2) $X_1^7 + X_2^6 + a_2X_1^5X_2^2$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{2\nu}{42}, \qquad \nu\in\mathbf{N}$$

$-\frac{15}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{15}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42}a_2\Gamma\left(\frac{11}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$\frac{1}{2.42}a_2^2\Gamma\left(\frac{12}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,3))(s)$	$-\frac{1}{42}a_2\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

3) $X_1^7 + X_2^6 + a_3 X_1^4 X_2^3$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{3\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\frac{16}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{16}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(2,2))(s)$	$-\frac{1}{42}a_3\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

4) $X_1^7 + X_2^6 + a_4 X_1^3 X_2^4$.

$I_0(P,\beta)(s)$ peut admettre des pôles pour

$$s=\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{4\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\frac{17}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{4}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{17}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(3,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_4\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

5) $X_1^7 + X_2^6 + a_5 X_1^2 X_2^5$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s=-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{5\nu}{42}$$

$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42} a_5^2 \Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42} a_5^2 \Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

6) $X_1^7 + X_2^6 + a_6 X_1^6 X_2^2$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s = -\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{8\nu}{42}$$

$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$\frac{1}{2.42} a_6^2 \Gamma\left(\frac{13}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

7) $X_1^7 + X_2^6 + a_7 X_1^5 X_2^3$.

Les fonctions $I_0(P,\beta)(s)$ peuvent admettre des pôles pour

$$s = -\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{9\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\frac{22}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42} a_7 \Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{22}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,2))(s)^*$	$-\frac{1}{42} a_7 \Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

8) $X_1^7 + X_2^6 + a_8 X_1^4 X_2^4$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7} + \frac{\beta_2}{6}\right) - \frac{10\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\frac{23}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42} a_8 \Gamma\left(\frac{5}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{23}{42}\right)^{-1}$
$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(2,1))(s)^*$	$-\frac{1}{42} a_8 \Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

9) $X_1^7 + X_2^6 + a_9 X_1^5 X_2^4$.

Les pôles de $I_0(P,\beta)(s)$ qui ne sont pas dans $\mathcal{N}$ sont de la forme

$$-\left(\frac{\beta_1}{7}+\frac{\beta_2}{6}\right)-\frac{16\nu}{42}, \qquad \nu \in \mathbf{N}$$

$-\frac{29}{42}$	$I_0(P,(1,1))(s)$	$-\frac{1}{42}a_9\,\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{29}{42}\right)^{-1}$

Pour tous les autres trinômes on sait qu'il existe $g_1(X_1,X_2) \in \mathbf{C}\{X_1,X_2\}$ et $g_2(X_1,X_2) \in \mathbf{C}\{X_1,X_2\}$ tels que $P = g_1{}^{t}(X_1,X_2)P'_{X_1} + g_2(X_1,X_2)P'_{X_2}$.

On peut résumer l'ensemble de ces résultats dans un tableau :

X_2^6		$-\ -\ -\ -\ 23$ 29		-		
		$X_1^2\ X_2^5$	$-\ -\ 17\ -\ 23$ 29	$-\ -\ -\ -\ 23$ 29	$-\ -\ -\ -\ -$ 29	
			$X_1^3X_2^4$	$-\ 16\ -$ 22 23 29	$-\ -\ -\ -\ -$ 29	
				$X_1^4X_2^3$	15 $-\ 17$ 22 23 29	$-\ -\ -\ -\ -$ 29
					$X_1^5X_2^2$	15 16 17 22 23 29
						$X_1^6X_2$

X_1^7

Dans le tableau suivant, on a calculé tous les polynômes de Bernstein des déformations à μ constant de $X_1^7 + X_2^6$. On a indiqué aussi les strates qui correspondent à τ constant $\left(\tau = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1,X_2\}/\left(P, \frac{\partial P}{\partial X_1}, \frac{\partial P}{\partial X_2}\right)\right)$ calculées par Laudal et Pfister (Modular Singularities, Lecture Notes, à paraître). On peut constater que l'on peut avoir plusieurs polynômes de Bernstein dans une strate à τ constant et que τ peut varier dans une famille à b constant.

b constant et τ constant

pour $X_1^7 + X_2^6 + T_1X_1^5X_2^2 + T_2X_1^4X_2^3 + T_3X_1^3X_2^4 + T_4X_1^5X_2^3 + T_5X_1^4X_2^4 + T_6X_1^5X_2^4$

<table>
<tr>
<td>S_{26}
$9T_2^2-8T_1T_3+\frac{20}{7}T_1^3\neq 0$</td>
<td>$T_1\neq 0$
$T_2\neq 0$
$T_3\neq\frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}\ \frac{16}{42}\ \frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1\neq 0$
$T_2\neq 0$
$T_3=\frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}\ \frac{16}{42}$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1\neq 0$
$T_2=0$
$T_3\neq\frac{2}{7}T_1^2$
$T_3\neq\frac{5}{14}T_1^2$
ou
$T_5\neq\frac{5}{7^4.6}T_1^5$
$\frac{15}{42}\ -\ \frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1\neq 0$
$T_2=0$
$T_3=\frac{2}{7}T_1^2$
$\frac{15}{42}\ -\ -$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1=0$
$T_2\neq 0$
$T_3\neq 0$
$-\ \frac{16}{42}\ \frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1=0$
$T_2\neq 0$
$T_3=0$
$-\ \frac{16}{42}\ -$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{27}
$9T_2^2-8T_1T_3+\frac{20}{7}T_1^3=0$
$T_1\neq 0$ ou $T_2\neq 0$
ou $T_3\neq\frac{5}{14}T_1^2$</td>
<td>$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1\neq 0$
$T_2=0$
$T_3=\frac{5}{14}T_1^2$
et
$T_5=\frac{5}{7^4.6}T_1^5$
$\frac{15}{42}\ -\ \frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td></td>
<td>$T_1=0$
$T_2=0$
$T_3\neq 0$
$T_4\neq 0$
$-\ -\ \frac{17}{42}$
$\frac{22}{42}\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_1=0$
$T_2=0$
$T_3\neq 0$
$T_4=0$
$-\ -\ \frac{17}{42}$
$-\ \frac{23}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{28}
$T_1=T_2=T_3=0$</td>
<td>$T_4\neq 0$
$\frac{22}{29}$</td>
<td>$T_5=0$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_4=0$
$\frac{23}{42}$</td>
<td>$T_5\neq 0$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_4\neq 0$
$\frac{22}{42}$
$\frac{29}{42}$</td>
<td>$T_5\neq 0$
$\frac{23}{44}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>S_{29}</td>
<td colspan="6">$\frac{29}{42}$</td>
</tr>
<tr>
<td>S_{30}</td>
<td colspan="6">quasi-homogène</td>
</tr>
</table>

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD, On some problems in singularity theory, Geometry and Analysis, *Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi*, Springer Verlag, 1981.

[2] I. N. BERNSTEIN, Feasibility of the analytic continuation f_+^λ for certain polynomials f translated from *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, vol. 2, n° 1, p. 92-93, January-March 1968.

[3] P. CASSOU-NOGUÈS, Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées, *Journal of Number Theory*, Vol. 23, n° 1 (1986), 1-54.

[4] M. KASHIWARA, B functions and holonomic systems, Rationality of roots of b functions, *Invent. Math.*, (1976-1977), 33-53.

[5] B. MALGRANGE, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes in Math.*, vol. 459, Springer Verlag 1975, 98-119.

[6] T. YANO, On the theory of b-functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 14 (1978), 111-202.

[7] T. YANO, b-functions and exponents of hypersurface isolated singularities, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 40 (1983), Part. 2.

[8] F. EHLERS et K. LO, Minimal characteristic exponent of the Gauss-Manin connection of isolated singular point and Newton polyhedron, *Math. Ann.*, 259 (1982), 431-441.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1984
révisé le 18 juin 1985.

Pierrette CASSOU-NOGUÈS,
L. A. au C.N.R.S. n° 226
U.E.R. de Mathématiques
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex.