ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARIE MORVAN
LOUIS NIGLIO

Classes caractéristiques des couples de sous-fibrés lagrangiens

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 2 (1986), p. 193-209
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_193_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 193-209

CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES COUPLES DE SOUS-FIBRÉS LAGRANGIENS

par J.-M. MORVAN et L. NIGLIO

Introduction.

L'étude qualitative du comportement asymptotique des solutions d'une équation aux dérivées partielles, sur une variété M, conduit à la considération de sa caractéristique Σ, sous-ensemble du fibré cotangent T^*M de M. La structure symplectique canonique de T^*M intervient de façon fondamentale : On étudie les sous-variétés lagrangiennes de T^*M, contenues dans Σ, et transverses aux fibres de T^*M. L'étude de cette transversalité permet d'interpréter certains phénomènes physiques, en optique notamment, (cf. [7] par exemple). La classe de Maslov, invariant cohomologique de degré 1, est une obstruction à cette transversalité. Elle peut être définie plus généralement sur un fibré symplectique muni de deux champs de plans lagrangiens. Cette classe n'est pas unique : en décrivant la topologie de la grassmannienne lagrangienne de $\mathbf{C}^n$, D. B. Fuks ([5]) a mis en évidence des classes d'homologie d'ordres supérieurs (« classes de Maslov d'ordres supérieurs ») et en a déduit par dualité de Poincaré, des classes de cohomologie, sans faire appel à la géométrie de cette grassmannienne. L'objet de notre travail est d'adopter un point de vue dual : utilisant la structure géométrique de la grassmannienne lagrangienne, (plus précisément, sa structure d'espace symétrique) nous construisons *explicitement* des formes différentielles fermées, représentant des classes de cohomologie, obstructions à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens. Dans le cas d'une sous-variété lagrangienne orientée de $\mathbf{C}^n$, nous déduisons de la construction précédente, des formules qui les relient à la *géométrie extrinsèque* de l'immersion, c'est-à-dire à sa seconde forme fondamentale.

Remerciements : Les auteurs remercient le Professeur Nagano pour une utile correspondance, et Michèle Audin, pour de fructueuses discussions.

Mots-clés : Symplectique - Lagrangien - Classe de Maslov.

1. Plans lagrangiens. Grassmanniennes lagrangiennes.

Le lecteur pourra consulter [7] [1] [11] pour les détails et les démonstrations des résultats (bien connus) énoncés ici.

1.1. *Notations.* — Soit E un espace vectoriel symplectique (c'est-à-dire muni d'une deux-forme non dégénérée Ω), de dimension $2n$. Un sous-espace vectoriel L est appelé plan lagrangien s'il est de dimension n et s'il vérifie $\Omega(X,Y) = 0$, $\forall X, Y \in L$. On appelle structure hermitienne adaptée à Ω sur E la donnée d'une structure complexe J sur E ($J^2 = -\mathrm{Id}$) et d'un produit scalaire hermitien h sur E tels que la partie imaginaire de h soit la forme symplectique Ω. Dans ce cas, la partie réelle g de h est un produit scalaire sur E vérifiant

$$\Omega(X,Y) = g(X,JX), \qquad \forall X, Y \in E.$$

Rappelons que la donnée de deux plans lagrangiens transverses L et L′ de E, et d'un produit scalaire g_0 sur L, permet de construire une structure complexe J et un produit scalaire g (dont la restriction à L est g_0), adaptée à Ω. On appelle grassmannienne lagrangienne de (E,Ω) l'espace des n-plans lagrangiens $\mathscr{L}(E,\Omega)$ de (E,Ω). La donnée d'une structure hermitienne adaptée à Ω, et d'une base orthonormée sur E, permet d'identifier $\mathscr{L}(E,\Omega)$ à l'espace symétrique $U(n)/O(n)$. Il est important de noter que la classe d'homotopie de cette identification est indépendante du choix de la structure hermitienne et de la base. On a donc un isomorphisme entre les espaces de cohomologie

$$H^*(\mathscr{L}(E,\Omega),\mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R}),$$

indépendant de la structure hermitienne et de la base choisies.

Rappelons également que si l'on se fixe un plan lagrangien L, l'ensemble des plans lagrangiens transverses à L est canoniquement muni d'une structure affine. Il est donc, en particulier, contractile.

Soit, maintenant, l'espace des n-plans lagrangiens orientés $\mathscr{L}_0(E,\Omega)$. Des considérations analogues permettent d'identifier $\mathscr{L}_0(E,\Omega)$ à $U(n)/SO(n)$ (revêtement à deux feuillets de $U(n)/O(n)$) et $H^*(\mathscr{L}_0(E,\Omega),\mathbf{R})$ à $H^*(U(n)/SO(n),\mathbf{R})$.

Nous traiterons en général séparément le cas orienté et le cas non orienté car les situations sont différentes. (On pourra, par exemple

remarquer que l'espace des droites orientées de $\mathbf{C}$, transverses à une droite orientée, n'est pas connexe).

1.2. *Fibré canonique au-dessus de* $U(n)/SO(n)$.

Le fibré vectoriel canonique ξ_n de base $U(n)/SO(n)$ est défini de manière classique par son espace total

$$E_n = \{(\pi(a),v) \in U(n)/SO(n) \times \mathbf{C}^n,\ v \in a(\mathbf{R}^n)\}$$

où $\pi : U(n) \to U(n)/SO(n)$ est la projection canonique. La première projection de $U(n)/SO(n) \times \mathbf{C}^n$ sur $U(n)/SO(n)$ induit une application $\tilde{\pi} : E_n \to U(n)/SO(n)$. Le fibré des repères orthonormés directs dans ξ_n est le $SO(n)$ fibré principal $\pi : U(n) \to U(n)/SO(n)$.

1.3. *Fibration de* $U(n)/SO(n)$ *et* $U(n)/O(n)$ *sur* S^1.

L'application « déterminant » :

$$U(n) \xrightarrow{\det} S^1$$

se factorise à travers $U(n)/SO(n)$. De même l'application « déterminant au carré »

$$U(n) \xrightarrow{\det^2} S^1$$

se factorise à travers $U(n)/O(n)$. Ceci détermine une fibration $(U(n)/SO(n), \det, S^1)$ (resp. $U(n)/O(n)$, $\det^2$, S^1) de base S^1, à fibre simplement connexe $SU(n)/SO(n)$. On en déduit que

$$\pi_1(U(n)/SO(n) \simeq \mathbf{Z}, \qquad \pi_1(U(n)/O(n) \simeq \mathbf{Z}$$

d'où $$H_1(U(n)/SO(n),\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}, \qquad H_1(U(n)/O(n),\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}.$$

La classe de Maslov peut s'interpréter comme un générateur du dual de $H_1(U(n)/SO(n),\mathbf{R})$, (ou $H_1(U(n)/O(n),\mathbf{R})$.

1.4. *Remarque.* — La fibration $(U(n)/SO(n), \det, S^1)$ est triviale. Par suite $U(n)/SO(n)$ s'identifie topologiquement à $SU(n)/SO(n) \times S^1$.

2. Cohomologie de $U(n)/SO(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $U(n)/O(n)$.

Nous avons déjà remarqué que la fibration $U(n)/SO(n) \xrightarrow{\det} S^1$ fait apparaître que $H^1(U(n)/SO(n),\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Le but de ce paragraphe est de

déterminer la cohomologie réelle de $U(n)/SO(n)$. Le lecteur trouvera tous les détails dans [3] ou [6] par exemple.

2.1. *Rappels sur la cohomologie d'un espace symétrique.*

Dans ce paragraphe, G est un groupe de Lie connexe compact et K un sous-groupe de Lie connexe compact. Les ingrédients essentiels sont :

a) L'algèbre I(G) (resp. I(K)) des polynômes invariants sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G (resp. $\mathfrak{k}$ de K). On note $I^+(G)$ l'ensemble des éléments de I(G) de degré positif.

b) L'application σ de $I^+(G)$ dans l'algèbre Λ^*G des formes différentielles sur G biinvariantes (resp. : $\sigma : I^+(K) \to \Lambda^*K$), définie de la façon suivante : à $p \in I^+(G)$ on associe la fonction symétrique invariante $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ telle que $f(X,\ldots,X) = p(X).\sigma(p)$ est alors la $(2k-1)$ forme différentielle obtenue en antisymétrisant la fonction

$$(X_1,\ldots,X_{2k-1}) \to f([X_1,X_2],[X_3,X_4],\ldots,[X_{2k-3},X_{2k-2}],X_{2k-1})$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_{2k-1}$ appartiennent à $\mathfrak{g}$.

c) L'homomorphisme de Chern-Weil de la fibration $G \to G/K$:

$$\chi : \quad I(K) \to H^*(G/K,\mathbf{R}).$$

d) L'homomorphisme de restriction $r : \quad I(G) \to I(K)$.

On a alors les résultats suivants :

(i) Si $p \in \operatorname{Ker} r$ est de degré k, alors la $(2k-1)$ forme $\sigma(p)$ biinvariante sur G est projetable et définit une forme fermée invariante à gauche sur G/K.

(ii) Si on note $\mathscr{A}$ la sous-algèbre de $H^*(G/K,\mathbf{R})$ engendrée par les classes de cohomologie des $\sigma(p)$ par $p \in \operatorname{Ker}(r)$, alors

$$H^*(G/K,\mathbf{R}) \simeq \mathscr{A} \otimes \operatorname{Im} \chi.$$

On remarque en particulier que les générateurs de $\mathscr{A}$ sont de degré impair et que les éléments de $\operatorname{Im} \chi$ sont de degré pair. $\operatorname{Im} \chi$ est l'ensemble des *classes caractéristiques* du fibré $G \to G/K$.

2.2. *Application à* $U(n)/SO(n)$, $SU(n)/SO(n)$, $U(n)/O(n)$.

2.2.1. *Espace tangent à l'origine.*

L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$ de $U(n)$ (resp. $\mathfrak{su}(n)$ de $SU(n)$) s'identifie à l'espace vectoriel réel des matrices à coefficients complexes antihermitiennes

(resp. antihermitiennes de trace nulle). L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ de $SO(n)$ est la sous-algèbre de Lie de $u(n)$ formée des matrices réelles antisymétriques. On a une décomposition

$$u(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus E \quad (\text{resp. } \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus E_1)$$

où E (resp. E_1) est le sous-espace vectoriel de $u(n)$ (resp. $su(n)$) formé des matrices de la forme iM où M est réelle symétrique (resp. réelle symétrique de trace nulle). E (resp. E_1) s'identifie à l'espace tangent à l'origine de $U(n)/SO(n)$ ou $U(n)/O(n)$ (resp. $SU(n)/SO(n)$). En particulier $U(n)/SO(n)$ et $U(n)/O(n)$ sont de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et $SU(n)/SO(n)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

2.2.2. *Les algèbres* $I(U(n))$ *et* $I(SO(n))$.

Rappelons les résultats suivants (cf. [9] par exemple).

a) Soient $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions polynômiales sur l'algèbre de Lie $u(n)$, définies par

$$\det(\lambda \operatorname{Id} + iX) = \lambda^n - f_1(X)\lambda^{n-1} + f_2(X)\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n f_n(X).$$

Alors $f_1, \ldots, f_n$ sont algébriquement indépendants et engendrent $I(U(n))$.

b) Soient $g_1, \ldots, g_m$ ($n=2m$ ou $n=2m+1$) sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ définies par

$$\det(\lambda \operatorname{Id} - X) = \lambda^n + g_1(X)\lambda^{n-2} + \ldots + g_n(X).$$

Alors

i) Si $n = 2m + 1$, $g_1, \ldots, g_m$ sont algébriquement indépendants et engendrent $I(SO(2m+1))$.

ii) Si $n = 2m$, il existe une fonction h unique au signe près, telle que $g_m = h^2$, et les fonctions $g_1, \ldots, g_{m-1}$, h sont algébriquement indépendantes et engendrent $I(SO(2m))$.

c) Les générateurs (f_k) de $I(U(n))$ d'indice k impair constituent une base du noyau de la restriction r: $I(U(n)) \to I(SO(n))$.

L'ensemble des classes caractéristiques du fibré $U(n) \to U(n)/SO(n)$ est déterminé comme suit :

a) Si $n = 2m + 1$, l'ensemble des classes caractéristiques du fibré

$$U(n) \to U(n)/SO(n) \text{ (resp. } SU(n) \to SU(n)/SO(n))$$

est réduit à $\{0\}$.

b) Si $n = 2m$, l'ensemble des classes caractéristiques du fibré

$$U(n) \to U(n)/SO(n) \text{ (resp. } SU(n) \to SU(n)/SO(n))$$

a pour générateur l'image par l'homomorphisme de Weil de la fonction polynômiale $h = \sqrt{\det X}$ $(X \in \mathfrak{so}(2m))$. Le générateur est la classe d'Euler du fibré canonique.

On déduit de 2.1. et 2.2. le théorème suivant :

2.3. THÉORÈME. — *Considérons les formes différentielles invariantes à gauche sur* $U(n)/O(n)$ *ou* $U(n)/SO(n)$ *(resp.* $SU(n)/SO(n)$*) définies sur l'espace tangent à l'origine par :*

$$C_{4q+1}(X_1, X_2, \ldots, X_{4q+1}) = (-1)^q \frac{((2q)!)^2}{(4q+1)!} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{2q+1}} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_{4q+1}} \operatorname{tr}(M_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ M_{\varepsilon_{4q+1}})$$

où $X_j = iM_j \in E$ *(resp.* E_1*),* $\forall j \in [1, 4q+1]$ *et* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

i) *Les formes différentielles* C_{4q+1} *pour* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ $\left(\text{resp. } 1 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$ *représentent un système de générateurs de la sous-algèbre* $\mathcal{A}$ *de* $H^*(U(n)/SO(n), \mathbf{R})$ (resp. $H^*(SU(n)/SO(n), \mathbf{R})$).

ii) *La classe d'Euler du fibré*

$$U(n) \to U(n)/SO(n) \text{ (resp. } SU(n) \to SU(n)/SO(n))$$

est un générateur de la sous-algèbre $\operatorname{Im} \chi$ *de*

$$H^*(U(n))/SO(n), \mathbf{R}) \text{ (resp. } H^*(SU(n)/SO(n), \mathbf{R}).$$

iii) *Le polynôme de Poincaré* $P(t)$ *de* $U(n)/SO(n)$ *est le suivant :*

pour $n = 2m + 1$ $\quad P(t) = \prod_{q=0}^{m} (1 + t^{4q+1})$

pour $n = 2m$ $\quad P(t) = (1 + t^{2m}) \prod_{q=0}^{m-1} (1 + t^{4q+1})$.

iv) Le polynôme de Poincaré $P(t)$ *de* $SU(n)/SO(n)$ *est le suivant :*

pour $n = 2m+1$ $\quad P(t) = \prod_{q=1}^{m} (1+t^{4q+1})$

pour $n = 2m$ $\quad P(t) = (1+t^{2m}) \prod_{q=1}^{m-1} (1+t^{4q+1})$.

Les formes différentielles C_{4q+1}, *pour* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ *représentent un système de générateurs de* $H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R})$.

Le polynôme de Poincaré $P(t)$ *de* $U(n)/O(n)$ *est le suivant :*

pour $n = 2m+1$ $\quad P(t) = \prod_{q=1}^{m} (1+t^{4q+1})$

pour $n = 2m$ $\quad P(t) = \prod_{q=0}^{m-1} (1+t^{4q+1})$.

Esquissons la démonstration de ce théorème :

(i) Il suffit d'expliciter les formules du théorème 2.1 et d'appliquer les résultats de la section 2.2.

(ii) Résulte de 2.2.3.

(iii) et (iv) sont une conséquence directe de (i) et (ii).

(v) L'application « oubli de l'orientation » de $U(n)/SO(n)$ dans $U(n)/O(n)$ est un revêtement régulier de fibre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. La suite spectrale associée à ce revêtement permet de conclure.

2.4. *Une curiosité : l'homologie de* $U(n)/SO(n)$ *en dimension* 1 *et* 5.

2.4.1. La classe de Maslov étant le pull-back par la submersion $U(n)/SO(n) \xrightarrow{\det} S^1$, de la classe de cohomologie représentée par la forme volume de S^1, S^1 est trivialement un représentant du dual de cette classe dans $H_1(U(n)/SO(n),\mathbf{Z})$.

2.4.2. On peut construire explicitement un représentant d'un générateur de $H_5(U(n)/SO(n),\mathbf{R})$ dual de la classe C_5. Considérons en effet l'immersion canonique :

$$SU(3)/SO(3) \xhookrightarrow{j} U(n)/SO(n) \quad (n \geqslant 3),$$

$SU(3)/SO(3)$ a la cohomologie de S^5 d'après 2.5. Désignons par $C_5^{(n)}$

(resp. $C_5^{(3)}$) la 5-forme différentielle donnée par le théorème 2.4 sur $U(n)/SO(n)$ (resp. 2.5 sur $SU(3)/SO(3)$). On a la relation :

$$j^*(C_5^{(n)}) = C_5^{(3)} \neq 0.$$

Par suite $C_5^{(3)}$ est une forme volume de $SU(3)/SO(3)$ et $j(SU(3)/SO(3)$, qu'on peut identifier à $SU(3)/SO(3)$, est duale de C_5.

2.4.3. Ceci n'est plus vrai pour $n = 4$:

$$\dim SU(4)/SO(4) = 9 \qquad \text{et} \qquad P(SU(4)/SO(4),t) = (1+t^4)(1+t^5).$$

La cohomologie de $SU(4)/SO(4)$ est donc engendrée par sa classe d'Euler e_4 et C_5. Si l'on considère l'immersion canonique

$$SU(4)/SO(4) \xrightarrow{j} U(n)/SO(n), \quad n \geqslant 4,$$

on a $j^*(C_9 = 0)$. On a en fait un résultat plus précis : quand on calcule C_9 en utilisant la formule du § 2.5,

$$(C_9(X_1,\ldots,X_9) = \frac{((4)!)^2}{9}\frac{1}{(2\pi)^5}\sum_{\varepsilon\in\mathscr{S}_5}(-1)^{sg(\varepsilon)}\,\mathrm{Tr}(M_{\varepsilon_1}\circ\ldots\circ M_{\varepsilon_9}))$$

on observe en fait que tout produit $M_{\varepsilon_1}\circ\ldots\circ M_{\varepsilon_9}$ est nul. Nous n'avons pas pu trouver, dans le cas général, de représentant dual de C_{4q+1}, pour $q > 1$.

3. Classes caractéristiques des sous-variétés et champs de plans lagrangiens.

Précisons le cadre géométrique de cette étude. Nous considérons (E,Π,B) un fibré symplectique, complexifié d'un fibré trivial L_0. Par abus de langage, un tel fibré sera appelé un fibré symplectique trivial. Nous considérons également un couple (L,L') de champs de plans lagrangiens de (E,Π,B). Les fibres de E sont de dimension $2n$.

3.1. *Remarque.* — Le complexifié de L (et de L') étant égal à E, il est trivial, et, par suite, les classes de Stiefel Whitney de L (et de L') sont de carré nul [4], [8], [10].

Si L' est partout transverse à L, on sait qu'il existe une structure presque complexe $\tilde{J}$ (adaptée à Ω), telle que $\tilde{J}L = L'$. $\tilde{J}$ est un isomorphisme de fibrés; L et L' ont donc mêmes classes de Pontrjagin.

3.2. *Application de Gauss.*

Soit (g,J) une structure presque complexe adaptée à la structure symplectique Ω, soit L_0 un sous-fibré *trivial* de E. E s'identifie à $B \times (L_0 \oplus JL_0) \simeq B \times (\mathbf{R}^n \oplus J\mathbf{R}^n) \simeq B \times \mathbf{C}^n$.

On peut donc associer à chaque champ de plans lagrangiens L une application de Gauss $G_{L_0,L}$ à valeurs dans $\Lambda(n)$, la grassmannienne lagrangienne de $\mathbf{C}^n$

$$G_{L_0,L} : B \to \Lambda(n) \simeq U(n)/O(n)$$
$$p \curvearrowright L_p$$

L_p étant considéré comme un plan lagrangien de $\mathbf{C}^n$.

Il est important de remarquer que des considérations analogues à celles du § 1.1 permettent d'affirmer que l'application :

$$G^*_{L_0,L} : H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R}) \to H^*(B,\mathbf{R})$$

est parfaitement déterminée par L, et est indépendante du choix de (g,J) et L_0. On pourra donc poser $G^*_{L_0,L} = G^*_L$.
La situation précédente est classique lorsqu'on considère une sous-variété lagrangienne L de $\mathbf{C}^n \simeq \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n$. On pose alors $L_0 = \mathbf{R}^n$. De même, si M^n est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n+p}$, son fibré normal $T^\perp M^n$ est lagrangien dans $T^*\mathbf{R}^{n+p} \simeq \mathbf{C}^{n+p}$. Plus généralement (mais nous n'utiliserons pas cela dans la suite), on peut définir sur un fibré symplectique (E,Π,B), muni de deux champs de plans lagrangiens L_1 et L_2, une « application de Gauss » $G : B \to \Lambda(n)$ en posant $G(p) = A_p \in U(n)/O(n)$, où $\tilde{A}_p(L_{1_p}) = L_{2_p}$ si $\tilde{A}_p$ est un représentant de A_p (cf. [2] sur ce point).

3.3. *Obstructions cohomologiques à la transversalité d'un couple de champs de plans lagrangiens.*

Soit (L,L') un couple de champs de plans lagrangiens du fibré symplectique trivial (E,Π,B). Munissons (E,Π,B) d'un champ de plans lagrangiens trivial L_0. Notons

$$G_{L_0,L} : \to U(n)/O(n)$$
$$G_{L_0,L'} : \to U(n)/O(n)$$

les applications de Gauss associées à (L_0,L) et (L_0,L').

Pour définir des obstructions à la transversalité de L et L′ on fait l'observation suivante : si L et L′ sont partout transverses, soit J la

structure presque complexe sur E telle que $JL = L'$. On considère pour $t \in [0,1]$, $L_t = (tJ+(1-t)id)(L)$ qui est lagrangien.

L'application de Gauss G_{L_0,L_t} réalise une homotopie entre $G_{L_0,L}$ et $G_{L_0,L'}$.

On a donc $G_L^* = G_{L'}^*$. Par suite si $[c] \in H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R})$ est une classe non nulle,

$$G_L^*([c]) = G_{L'}^*([c]).$$

Nous sommes donc ainsi conduits à donner la

3.3.1. Définition. — *Soient* L *et* L′ *deux champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial* (E,Π,B). *Soient :*

$$G_L^* : H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R}) \to H^*(B,\mathbf{R})$$
$$G_{L'}^* : H^*(U(n)/O(n),\mathbf{R}) \to H^*(B,\mathbf{R})$$

le pull-back des applications de Gauss de L *et* L′.

On appelle classes caractéristiques du couple (L,L′) *les classes :*

$$m_{4q+1}(L,L') = G_L^*([C_{4q+1}]) - G_{L'}^*([C_{4q+1}]) \in H^{4q+1}(B,\mathbf{R}),$$

définies pour tout q *tel que :* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$

où $[C'_{4q+1}] \in H^{4q+1}(U(n)/O(n),\mathbf{R})$ *est la classe de cohomologie de degré* $4q+1$ *définie par la forme* C_{4q+1}.

Les propositions suivantes sont immédiates.

3.3.2. Proposition. — *Soient* L *et* L′ *deux champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial* (E,Π,B).

Si L *et* L′ *sont partout transverses,* $m_{4q+1}(L,L') = 0$.

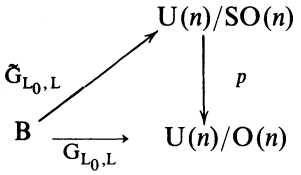
3.3.3. Proposition. — *Soient* L, L′, L″, *trois champs de plans lagrangiens d'un fibré symplectique trivial* (E,Π,B).

i) On a $m_{4q+1}(L,L'') = m_{4q+1}(L,L') + m_{4q+1}(L',L'')$, $\forall q$ *tel que* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{m-1}{2}\right]$.

ii) $m_{4q+1}(L,L') = -m_{4q+1}(L',L)$, $\forall q$ *tel que* $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{m-1}{2}\right]$.

3.4. *Sous-fibré lagrangien orienté d'un fibré trivial.*

Soit (E,Π,B) un fibré symplectique trivial, L_0 un sous-fibré lagrangien trivial orienté. Si L est un sous-fibré lagrangien orienté de (E,Π,B), on peut définir comme en 3.2 une application de Gauss $\tilde{G}_{L_0,L}$: $B \to U(n)/SO(n)$ rendant le diagramme suivant commutatif :



On peut aussi, comme en 3.3, considérer l'application induite par $G_{L_0,L}$ en cohomologie :

$$\tilde{G}_{L_0,L} : H^*(U(n)/SO(n),\mathbf{R}) \to H^*(B,\mathbf{R}).$$

Connaissant un système de générateurs de $H^*(U(n)/SO(n),\mathbf{R})$ on est amené à la

3.4.1. DÉFINITION. — *On appelle classes caractéristiques de* L *relativement à* L_0 *les classes :*

a) $m_{4q+1}(L,L_0) = \tilde{G}^*_{L_0,L}([C_{4q+1}])$, $0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$, *où* $[C_{4q+1}]$ *est la classe de cohomologie de la forme* C_{4q+1}.

b) Si n *est pair* $(n=2m)$

$$e_{2m}(L,L_0) = \tilde{G}^*_{L_0,L}(e_{2m}),$$

où e_{2m} *est la classe d'Euler du fibré canonique* ξ_n.

On voit immédiatement, soit sur les formules exprimant C_{4q+1} et C'_{4q+1}, soit à partir de la relation $G_{L_0,L} = p \circ \tilde{G}_{L_0,L}$, que les classes m_{4q+1} sont celles qui ont été définies en 3.3 sans tenir compte de l'orientation existant sur les fibrés.

Par contre la classe $e_{2m}(L_0,L)$ mérite un commentaire particulier :

3.4.2. PROPOSITION. — $e_{2m}(L_0,L)$ *est une obstruction à la transversalité de* L *et* L_0.

Démonstration. — Supposons que pour tout $x \in B$, L_x soit transverse à L_{0_x}. Comme L_{0_x} est un lagrangien indépendant de x, l'image de B

par $G_{L_0,L}$ est contenue dans l'ensemble W des lagrangiens transverses à L_{0_x}, qui est un ouvert contractile de $U(n)/O(n)$. Si B est connexe, $\tilde{G}_{L_0,L}(B)$ est alors lui aussi contenu dans une composante connexe de $p^{-1}(W)$, elle-même contractile; il s'ensuit que $\tilde{G}_{L_0,L}$ est homotope à zéro, donc $e_m(L_0, L) = 0$. Si B n'est pas connexe, on raisonne de même sur chaque composante connexe de B.

3.5. *Cas d'une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}^n$.

Si L est une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$, muni de la structure riemanienne canonique, le procédé précédent permet de définir des *formes* différentielles sur L.

Posons $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n$; donnons la :

3.5.1. DÉFINITION. — *Soit* $L \hookrightarrow \mathbf{C}^n$ *une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}_n$. *On appelle formes caractéristiques de* L *les formes différentielles*

$$\alpha_{4q+1} = G^*_{\mathbf{R}^n,TL}(C_{4q+1}) \qquad 0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Remarques. — i) Ces formes différentielles sont fermées et définissent des classes de cohomologie sur L qui sont des obstructions à la transversalité de TL avec $\mathbf{R}^n$.

ii) Si L est orientable, en choisissant une orientation, on pose $\alpha_n = \tilde{G}_{\mathbf{R}^n,TL}(e_n)$. TL est alors isomorphe au fibré $G^*_{\mathbf{R}^n,TL}(\xi_n)$, image réciproque par $\tilde{C}_{\mathbf{R}^n,TL}$ du fibré canonique au-dessus de $U(n)/SO(n)$; α_n apparaît comme une forme différentielle définissant la classe d'Euler de L, d'où la :

3.5.2. PROPOSITION. — *Si* L *est une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}_n$ *orientée, la classe d'Euler de* L *est une obstruction à la transversalité de* TL *avec* $\mathbf{R}^n$.

(Un raisonnement direct permet de retrouver ce résultat.)

4. Expression riemannienne des formes caractéristiques d'une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$.

4.1. *Tenseur caractéristique.*

Soit L une sous-variété lagrangienne de $\mathbf{C}^n$, munie de sa structure complexe canonique $(\langle , \rangle, J)$. On munit L de la métrique g induite par

$\langle , \rangle$. Notons $\tilde{\nabla}$ (resp. ∇) la connexion de Levi-Civita associée à $\langle , \rangle$ (resp. g). La seconde forme fondamentale de L est notée σ ; elle est à valeur dans $T^{\perp}L$, le fibré normal à L :

$$\sigma : TL \times TL \to T^{\perp}L$$
$$(X,Y) \mapsto \sigma(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y .$$

Rappelons que σ est bilinéaire symétrique. Donnons la

4.1.1. DÉFINITION. — *Soit* L *une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}^n$.

On appelle tenseur caractéristique de L *le tenseur symétrique*

$$\bar{\sigma} : TL \times TL \to TL \qquad \textit{défini par} \qquad \bar{\sigma} = J \circ \sigma .$$

4.1.2. *Notation.* — Si $X \in TL$, on note $\bar{\sigma}_X : TL \to TL$ le tenseur défini par $\bar{\sigma}_X(Y) = \bar{\sigma}(X,Y) = J(\sigma(X,Y))$. On a le

4.2. THÉORÈME. — *Soit* L *une sous-variété lagrangienne de* $\mathbf{C}^n$, *de seconde forme fondamentale* σ, *les formes caractéristiques fondamentales de* L *sont données par les formules :*

$$\alpha_{4q+1}(X_1, \ldots, X_{4q+1}) = (-1)^q \frac{((2q)!)^2}{(4q+1)!} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{2q+1}} \operatorname{trace}\left(\sum_{\varepsilon \in \mathscr{S}_{4q+1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\varepsilon} \sigma_{X_{\varepsilon_1}} \circ \ldots \circ \sigma_{X_{\varepsilon_{4q+1}}} \right),$$

$X_1, \ldots, X_{4q+1}$ *étant des vecteurs tangents en un point de* L,

$$\forall q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

4.3. *Remarque.* — Si $q = 0$, on retrouve l'expression de la classe de Maslov en fonction du vecteur de courbure moyenne de l'immersion [10].

4.4. *Démonstration du théorème.* — *a*) Il est facile de voir que l'espace tangent $T_p(\mathscr{L}(\mathbf{C}^n))$ en un point $p \in (\mathbf{C}^n)$ s'identifie à l'espace $\mathscr{E}$ des endomorphismes β de P dans $P^{\perp}$ tels que :

$$\langle \beta(X), J(Y) \rangle = \langle \beta(Y), J(X) \rangle$$

$\forall X, Y \in P$ (cf. [10]).

Soit $G : L \to \mathscr{L}(\mathbf{C}^n) \simeq \mathscr{E}$ l'application de Gauss de L. Considérons la seconde forme fondamentale comme tenseur σ à valeur dans $T^*L \otimes T^{\perp}L$:

$$\sigma : TL \to T^*L \otimes T^{\perp}L$$
$$X \hookrightarrow (\sigma_X : Y \to \sigma(X,Y))$$

$\forall X, Y \in TL$.

Il est bien connu que dG s'identifie à σ, c'est-à-dire que l'on a :

$$dG_m(X) = (\sigma_X)_m \in T^*_m L \otimes T^{\perp}_m L.$$

On a donc :

$$G^*(C_{4q+1})(X_1, \ldots, X_{4q+1}) = C_{4q+1}(dG(X_1), \ldots, dG(X_{4q+1}))$$
$$= \alpha_{4q+1}(\sigma_{X_1}, \ldots, \sigma_{X_{4q+1}}).$$

5. Exemples.

5.1. Une remarque : *cas d'une sous-variété de* $\mathbf{C}^n$. — Considérons une sous-variété L compacte lagrangienne de $\mathbf{C}^n$. Il est facile de voir que L n'est transverse à aucun plan lagrangien L_0 fixe.

En effet, considérons le « vecteur position » $\vec{x}$ de L pour une origine 0, et définissons la fonction « distance à L_0 » :

$$d : L \to \mathbf{R}$$
$$p \hookrightarrow d(p) = \text{distance de } p \text{ à } L_0.$$

Soit q un point critique de d et r la projection de q sur L_0 alors T_qL et L_0 sont orthogonaux à la droite qr. Si $\vec{u}$ est un vecteur porté par qr, $J\vec{u}$ appartient à T_qL et L_0.

Nous verrons ci-dessous des exemples de sous-variétés lagrangiennes compactes de $\mathbf{C}^n$, pour lesquelles certaines des obstructions sont cependant nulles.

5.2. On peut construire trivialement des immersions lagrangiennes à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ telles que l'on ait :

— $m_k = 0, \forall k$: il suffit de considérer n'importe quelle immersion lagrangienne de S^2 dans $\mathbf{C}^2$, (l'immersion de Whitney par exemple (cf. [13])),

— $m_1 \neq 0$; $m_k = 0$, $\forall k$, $k \neq 1$: il suffit de considérer une immersion du cercle S^1 dans $\mathbf{C}$.

5.3. L'immersion du tore standard lagrangien

$$T^n = S_1^1 \times \cdots \times S_i^1 \times \cdots \times S_n^1$$

satisfait

$$m_1 \neq 0, \quad m_5 = 0, \quad m_9 = 0, \quad \chi(T^n) = 0.$$

5.4. Considérons le fibré trivial $(U(n)/SO(n) \times \mathbf{C}^n, U(n)/SO(n))$. Soit $L_0 = \mathbf{R}^n$ le champ de plans lagrangiens « horizontal » de $\mathbf{C}^n$. Considérons le champ de plans lagrangiens L défini par $L(p) = A_p(\mathbf{R}^n)$, où A_p est une matrice unitaire représentant le point p. L'application de Gauss $G_{L_0 L}$ est alors l'identité de $U(n)/SO(n)$ et $m_{4q+1}(L_0, L) \neq 0$, pour tout $q \in [0, m]$, si $n = 2m + 1$ si n est impair, et pour tout $q \in [0, m-1]$, où $n = 2m$ si n est pair.

5.5. L'immersion lagrangienne de $U(n)/O(n)$ (resp. $U(n)/SO(n)$) dans $\mathbf{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Considérons l'espace vectoriel V des matrices $(n \times n)$ complexes symétriques. V s'identifie à $\mathbf{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. On munit V du produit hermitien défini par $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X\overline{Y})$. L'application

$$A \to A\,{}^tA$$

de $U(n)$ dans V passe au quotient par $O(n)$ et définit une application

$$f : U(n)/O(n) \to V.$$

Considérons également l'application

$$G : U(n) \to U(V)$$

(où $U(V)$ désigne le groupe unitaire de V), définie par :

$$G(A)(X) = AX\,{}^tA, \qquad \forall X \in V.$$

G est un homomorphisme de groupes. De plus, f possède la propriété d'équivariance suivante :

$$\forall \xi \in U(n)/O(n), \qquad \forall A \in U(n), \qquad f(A.\xi) = G(A).f(\xi).$$

Ce résultat permet de montrer facilement, en se ramenant à l'origine, que f est une immersion lagrangienne.

De plus, on peut montrer que les *classes caractéristiques de l'immersion* f, *de degré inférieur à* $\frac{n(n+1)}{2}$, *ne sont pas nulles.*

Esquissons simplement la démonstration : l'application de Gauss g de f est induite par G. (On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{G} & U(V) \\ \downarrow & & \downarrow \Pi \\ U(n)/O(n) & \xrightarrow{g} & U(V)/O(V).) \end{array}$$

On étudie $G^*(\Pi^* C_{4q+1})$, et donc ${}^t dG_{id} = I(U(V)) \to I(U(n))$. Des arguments standards permettent de se ramener aux tores maximaux de $U(n)$ et $U(V)$. Si f_{2q+1} est le générateur de $I(U(V))$ correspondant à C_{4q+1} (cf. § 2), la composante de ${}^t dG_{id}(f_{2q+1})$ sur le générateur de degré $2q + 1$ de $I(U(n))$ est non nulle. Par conséquent, la classe caractéristique correspondante est non nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold, Appendice au livre de V. P. Maslov : *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[2] M. Audin, Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques, Travaux en cours, *Géométrie symplectique et de contact*, 1984 et Classes caractéristiques lagrangiennes (à paraître).

[3] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de Groupes de Lie compacts, *Annals of Math.*, 57 (1953), 115-207.

[4] P. Dazord, Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 13 (1981).

[5] D. B. Fuks, Maslov-Arnold Characteristic classes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 178 (1968) ou *Soviet. Math. Dokl.*, 9 (1968), 96-99.

[6] W. Greub, S. Halperin et R. Vanstone, *Connexions, curvature and cohomology*, Academic Press, 1972.

[7] V. Guillemin et S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, A.M.S., (1977).

[8] T. Kawashima, Some remarks on Lagrangian imdeddings, *J. Math. Soc. Japan*, 33-2 (1981).

[9] S. Kobayashi et K. Nomizu, *Fondations of differential geometry*, Interscience Publishers, 1969.

[10] J. M. MORVAN, Classe de Maslov d'une immersion lagrangienne, *C.R.A.S.*, t. 292, Série I (30 mars 1981), et quelques invariants topologiques en géométrie symplectique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 38, n° 4 (1983), 349-370.

[11] J. M. SOURIAU, *Structures des systèmes dynamiques*, Paris, Dunod, 1970 et Construction explicite de l'indice de Maslov et applications, Theoretical Methods in Physics, 4^{e} Int. Colloq. Nijmigen, 1975, *Lecture Notes in Physics*, pp. 117-148.

[12] V. A. VASSILIEV, Characteristic classes of lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustic and wave front, *Funkt. Anal.*, 15 (1981), 164-173 (traduction américaine).

[13] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, *A.M.S. Regional Conf. Serie*, 29 (1977).

[14] F. W. KAMBER et Ph. TONDEUR, Foliated bundles and Characteristic classes, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 493, Springer Verlag, Berlin, New-York, 1975.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1984
révisé le 23 décembre 1985.

J. M. MORVAN et L. NIGLIO,
Faculté des Sciences d'Avignon
Département de Mathématiques
33, rue Louis Pasteur
84000 Avignon.