ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ATHANASE PAPADOPOULOS

Deux remarques sur la géométrie symplectique de l'espace des feuilletages mesurés sur une surface

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 2 (1986), p. 127-141

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_127_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 127-141.

DEUX REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE DE L'ESPACE DES FEUILLETAGES MESURÉS SUR UNE SURFACE

par Athanase PAPADOPOULOS

1. La structure symplectique de $\mathcal{MF}$ (*).

Dans tout ce qui suit, M désigne une surface fermée orientable, de genre $g \geqslant 2$, et $\mathcal{MF}$ l'espace des classes de Whitehead de feuilletages mesurés sur M.

On renvoie à [2] pour la définition et la topologie de $\mathcal{MF}$.

On rappelle qu'un *réseau ferroviaire* τ sur M est un graphe lisse, en chaque sommet duquel les arêtes qui y aboutissent sont tangentes à une même direction (voir figure 1), et tel qu'aucune composante de $M - \tau$ ne soit un anneau dont le bord est lisse, ou un disque dont le bord a 0, 1 ou 2 pointes.

Soit τ un réseau ferroviaire sur M ayant N arêtes. On considère l'espace vectoriel isomorphe à $\mathbf{R}^N$ des systèmes de poids sur les arêtes et on définit une cellule convexe $E_\tau \subset \mathbf{R}^N$ comme l'ensemble des points vérifiant les équations linéaires exprimant la conservation de masse aux aiguillages et les inéquations exprimant que toutes les coordonnées sont positives ou nulles.

On associe à τ un voisinage régulier V_τ appelé *voisinage adapté* de τ, muni d'une rétraction $V_\tau \searrow \tau$ dont les fibres sont appelées *traverses* (voir figure 3). La donnée d'un point de E_τ permet de construire un feuilletage

(*) Cette structure a été trouvée par Thurston. L'auteur exprime sa gratitude à C. Series pour lui avoir indiqué ce résultat, ainsi qu'à F. Laudenbach pour des conversations enrichissantes.

Mots-clés : Feuilletage mesuré - Réseau ferroviaire - Structure symplectique - Hamiltonien.

mesuré transverse aux traverses, dont le support est contenue dans V_τ, et déposant sur une traverse le poids assigné à l'arête à son pied. On dit alors que ce feuilletage est *porté par* τ. Ce feuilletage partiel a une classe bien définie dans $\mathcal{MF}$, et on a ainsi une application naturelle $\varphi_\tau : E_\tau \to \mathcal{MF}$.

Un réseau ferroviaire τ est dit *maximal* si l'image $\varphi_\tau(E_\tau)$, notée $\mathcal{MF}(\tau)$, est d'intérieur non vide. L'ensemble des applications φ_τ, lorsque τ décrit l'ensemble des réseaux ferroviaires maximaux sur M, constitue un atlas PL de $\mathcal{MF}$, pour lequel l'action du groupe $\pi_0 \operatorname{Diff}(M)$ est PL. Tout ceci est dû à Thurston et est contenu pour l'essentiel dans [11], chapitre 8. On pourra aussi consulter [1] et [9]. On rappelle que τ est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

– τ est récurrent (i.e. E_τ contient des points à coordonnées toutes > 0);

– chaque composante de $M - \tau$ est un triangle (i.e. un disque à 3 pointes).

Soit τ un réseau ferroviaire maximal sur M, et soit E'_τ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^N$ défini par les équations de conservation de masse aux aiguillages. E'_τ est l'espace engendré par E_τ (ceci utilise la récurrence de τ). En regardant E_τ comme sous-variété de $\mathbf{R}^N$, on peut voir E'_τ comme l'espace tangent en chaque point de E_τ.

On définit sur E'_τ un produit scalaire gauche de la manière suivante :

Supposons d'abord que les aiguillages de τ soient simples (c'est-à-dire que chaque aiguillage soit constitué par deux arêtes rentrantes et une arête sortante). Ayant fixé une orientation sur M, on a, pour tout aiguillage i de τ, une notion d'arête rentrante *à droite* a_i, et d'arête rentrante *à gauche* a'_i. Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont 2 éléments de E'_τ, on désigne, pour tout aiguillage i, par (x_i, x'_i) (resp. (y_i, y'_i)), les couples de poids attribués par $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$) au couple d'arêtes (a_i, a'_i). On définit alors le produit $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ comme la somme $\sum_i \frac{1}{2}(x_i y'_i - x'_i y_i)$, où l'indice i décrit l'ensemble des aiguillages de τ.

Si le réseau ferroviaire τ possède des aiguillages multiples, on se ramène, pour écrire la formule du produit, à des aiguillages simples, à l'aide de légers glissements d'arêtes, ou bien on remarque que toute la théorie peut se faire en ne considérant que des réseaux ferroviaires à aiguillages simples.

Le produit $\langle\ ,\ \rangle$ définit une 2-forme fermée non dégénérée sur E'_τ. On en déduit une structure symplectique sur le cône E_τ, linéaire et à coefficients constants. Cette forme est invariante par toute application $\varphi_{\tau_i\tau_j}$ de changement de coordonnées de l'atlas PL défini ci-dessus, dans le complémentaire des *hyperplans de fracture* de $\varphi_{\tau_i\tau_j}$, c'est-à-dire de l'ensemble de points au voisinage de chacun desquels l'application n'est pas linéaire. On a ainsi une structure symplectique sur $\mathcal{MF}$, naturelle (dans le sens que l'on vient de préciser) par rapport à la structure PL considérée. Comme Thurston, nous dirons que c'est une *structure symplectique linéaire par morceaux*. Remarquons que pour vérifier la naturalité en question, il suffit de la vérifier pour les opérations élémentaires de « collapse » représentées par la figure 1 (au voisinage d'un point où le changement de coordonnées $\varphi_{\tau_i\tau_j}$ est linéaire, cette application s'écrit comme un produit de telles opérations et de leurs inverses). Cette vérifiation est immédiate.

Fig. 1.

Il est peut-être bon de préciser que le produit $\langle\ ,\ \rangle$ ne définit pas un produit global sur $\mathcal{MF}$ comme c'est le cas pour le nombre d'intersection géométrique.

2. Sous-espaces isotropes de $\mathcal{MF}$.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de M dont les singularités sont des selles ayant au moins 3 séparatrices. On définit la *plaque* de $\mathcal{F}$, notée $P(\mathcal{F})$, comme l'ensemble des mesures transverses invariantes sur $\mathcal{F}$, de support non vide mais pas nécessairement égal au support de $\mathcal{F}$ tout entier. De plus on identifiera deux telles mesures si elles ne diffèrent que sur des segments transverses rencontrant des feuilles lisses fermées, et si de plus la mesure d'un arc transverse allant du bord au bord d'une composante maximale feuilletée par des cercles lisses parallèles (appelée composante *annulaire*) est la même pour les deux mesures.

$P(\mathcal{F})$ est un cône convexe qui s'écrit comme $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{R}.\gamma_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{M}_i$, où les γ_i sont les classes d'isotopie distinctes des feuilles lisses compactes de $\mathcal{F}$, et où chaque $\mathcal{M}_i$ est le cône convexe des mesures supportées par une composante *minimale* M_i de $\mathcal{F}$ (une telle composante a la propriété que toute demi-feuille n'aboutissant pas en une singularité est dense). On

rappelle au passage qu'un feuilletage représentant un élément de $\mathcal{MF}$ est une réunion de composantes minimales ou annulaires.

On sait (voir [4], [5] et [8]) que chaque composante minimale possède un nombre fini de classes de proportionnalité de mesures transverses ergodiques, et qu'une mesure transverse quelconque sur une telle composante s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire $\geqslant 0$ de mesures ergodiques. On renvoie à [6], chapitre IV, pour une description de ces faits. Chaque $\mathcal{M}_i$ est ainsi le cône sur un simplexe, dont les points extrémaux sont les mesures transverses ergodiques sur $\mathcal{M}_i$. Katok démontre dans [4] que dans le cas d'un feuilletage orientable et minimal, le nombre de mesures ergodiques est inférieur ou égal au genre g de la surface. Levitt traite le cas non nécessairement orientable et minimal et montre que ce nombre, dans le cas général, est $\leqslant 3g - 3$ (cf. [6], chap. IV). Nous retrouvons ce résultat comme corollaire du théorème 1 ci-dessous. Signalons que Veech traite aussi le cas orientable, dans le cadre de la théorie des échanges d'intervalles (cf. [12]).

Dans la suite de ce paragraphe, tous les feuilletages mesurés géométriques (i.e. sans équivalence) considérés sont des feuilletages partiels de M, dont les singularités sont toutes sur le bord de leur support, et sont toutes du type « aiguillage » (l'espace tangent aux feuilles est défini même aux singularités). A part cette condition, ce sont des feuilletages d'une sous-surface à bord, au sens ordinaire de la théorie avec bord (cf. [2]).

THÉORÈME 1. — $\mathrm{P}(\mathcal{F})$ *se plonge comme sous-variété isotrope de* $\mathcal{MF}$.

Démonstration. — Précisons d'abord en quel sens $\mathrm{P}(\mathcal{F})$ est une *sous-variété* plongée. C'est un sous-espace qui possède une structure linéaire *intrinsèque* qu'on peut d'ailleurs décrire de plusieurs manières : le cône abstrait des mesures invariantes sur $\mathcal{F}$ se plonge linéairement dans $\mathcal{MF}$, quel que soit le système de coordonnées locales (associé à un réseau ferroviaire) qu'on prend sur $\mathcal{MF}$. En effet, soit τ un réseau ferroviaire sur M, V un voisinage adapté de τ muni d'un feuilletage $\mathcal{I}$ par les traverses, et μ une mesure transverse invariante pour $\mathcal{F}$ de support maximal. Dire que le feuilletage mesuré $(\mathcal{F},\mu)$ est un élément de $\mathcal{MF}(\tau)$ est équivalent à dire qu'il existe un représentant de $(\mathcal{F},\mu)$ par un feuilletage partiel, dont le support est contenu dans V, et transverse à $\mathcal{I}$. Ainsi, si $(\mathcal{F},\mu)$ appartient à $\mathcal{MF}(\tau)$, chaque élément de la plaque $\mathrm{P}(\mathcal{F})$ définit un système de poids sur les arêtes de τ et par conséquent un élément de $\mathcal{MF}(\tau)$. L'image de la plaque dans $\mathcal{MF}(\tau)$ est une sous-cellule convexe.

Le fait que l'application de $P(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{MF}$ soit un plongement est contenu dans les propositions II.2 et II.3 de [9] qui affirment que l'application φ_τ associée à τ est un homéomorphisme sur son image. (La démonstration de ces propositions fait intervenir le relèvement de $\mathcal{F}$ au revêtement universel de M qui est le disque de Poincaré, dont le bord à l'infini est noté S^1, et l'interprétation d'une mesure transverse invariante comme une mesure sur l'ensemble $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbf{Z}_2$ invariante par l'action du groupe fondamental de M sur cet ensemble; ici Δ est la diagonale et $\mathbf{Z}_2$ agit en échangeant les coordonnées. Pour plus de détails, on renvoie à [9].)

Le fait que $P(\mathcal{F})$ soit plongé nous permet de parler de *plaque dans* $\mathcal{MF}$. Bien que le plongement de $\mathcal{MF}(\tau)$ dans l'espace fonctionnel $\mathbf{R}_+^{\mathcal{L}}$ soit linéaire *par morceaux*, la restriction de ce plongement à une plaque est toujours linéaire. Une autre manière (équivalente) d'exprimer que la structure linéaire des plaques dans $\mathcal{MF}$ est intrinsèque, est de remarquer que les applications de changement de cartes $\varphi_{\tau_i\tau_j}$ de l'atlas de $\mathcal{MF}$ sont linéaires en restriction aux plaques (ces applications sont analysées dans [9], § III.4, où il est montré que les *fractures* de linéarité correspondent à des opérations de *subdivision* sur les réseaux (cf. figure 2); une plaque n'est pas affectée par ces subdivisions puisqu'elle est contenue toute entière dans l'un ou l'autre des réseaux obtenus par subdivision).

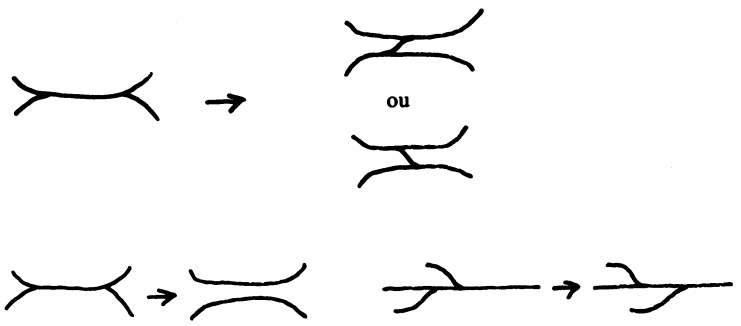


Fig. 2.

Nous démontrons maintenant que cet espace est isotrope. Soit τ un réseau ferroviaire maximal tel que $(\mathcal{F},\mu)$ soit à l'intérieur de l'espace $\mathcal{MF}(\tau)$. On regarde maintenant la forme symplectique comme un produit de vecteurs dans l'espace vectoriel E'_τ. L'espace tangent à $P(\mathcal{F})$ en un point quelconque de cette plaque s'identifie naturellement au sous-espace vectoriel de E'_τ engendré par les mesures transverses invariantes sur $\mathcal{F}$. Il

suffit donc de montrer que si $(\mathscr{F},\mu_1)$ et $(\mathscr{F},\mu_2)$ sont deux points de $P(\mathscr{F})$, le produit $\langle(\mathscr{F},\mu_1),(\mathscr{F},\mu_2)\rangle$ est nul.

Pour cela, on représente ces deux points par deux mesures transverses invariantes sur un feuilletage géométrique fixé, transverse à $\mathscr{I}$ et de support égal à V. On note encore $\mathscr{F}$ ce feuilletage. On « décolle » maintenant toutes les liaisons entre les singularités de $\mathscr{F}$, tout en gardant le feuilletage « décollé » $\mathscr{F}^*$ ainsi obtenu transverse à $\mathscr{I}$ et de support contenu dans V (voir figure 3).

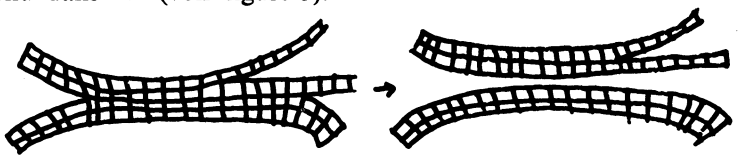


Fig. 3.

Le système de traverses $\mathscr{I}$ induit sur le support de $\mathscr{F}^*$ un feuilletage par des segments allant du bord au bord, i.e. un système de traverses que l'on notera $\mathscr{I}^*$, et le quotient de cette figure par l'opération qui consiste à écraser chacune des traverses de $\mathscr{I}^*$ en un point admet une réalisation dans M comme un réseau ferroviaire τ^* (non nécessairement connexe) portant $(\mathscr{F},\mu_1)$ et $(\mathscr{F},\mu_2)$. Le réseau τ^* est porté par τ, et donc le produit $\langle(\mathscr{F},\mu_1),(\mathscr{F},\mu_2)\rangle$ se calcule à partir des poids sur les arêtes de τ^* attribués par $(\mathscr{F},\mu_1)$ et $(\mathscr{F},\mu_2)$, par le procédé décrit au § 1 ci-dessus, la somme portant maintenant sur les aiguillages de τ^*.

Les composantes connexes de $\mathscr{F}^*$ sont de deux types : des composantes *annulaires* et des composantes *minimales*.

Les composantes de τ^* provenant des composantes annulaires de $\mathscr{F}^*$ n'interviennent pas dans le calcul de $\langle(\mathscr{F},\mu_1),(\mathscr{F},\mu_2)\rangle$ car ce sont des cercles lisses sans aiguillage.

AFFIRMATION. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut construire, à partir de* τ^* *et grâce à un nombre fini d'opérations de subdivision (ce sont les opérations inverses des opérations de collapse; cf. figures* 1 *et* 2), *un réseau ferroviaire* τ_ε *tel que :*

— $(\mathscr{F},\mu_1)$ *et* $(\mathscr{F},\mu_2)$ *sont portés par* τ_ε;

— τ_ε *est porté par* τ^*, *et donc par* τ;

— *le poids attribué par* $(\mathscr{F},\mu_1)$ *et* $(\mathscr{F},\mu_2)$ *à chaque arête de* τ_ε *contenue dans une composante de ce réseau provenant d'une composante minimale de* $\mathscr{F}^*$ *est* $< \varepsilon$.

Démonstration de l'affirmation. — On rappelle que dans chaque composante minimale de $\mathscr{F}^*$, toute demi-feuille qui n'aboutit pas à une singularité est dense, et qu'il n'y a pas de liaison entre les singularités.

Soit A une arête de τ^* provenant d'une composante minimale de $\mathscr{F}^*$ et soient x son poids et R le rectangle feuilleté de $\mathscr{F}^*$ correspondant à l'arête en question. Étant donné un nombre $\delta > 0$ petit, on prend une transversale t à $\mathscr{F}^*$ de mesure δ et coupant la feuille centrale du rectangle R. On prend un point singulier quelconque sur la composante de $\mathscr{F}^*$ en question, et on considère la demi-feuille (« séparatrice ») issue de ce point. Par densité, elle rencontre t. On décolle alors le feuilletage $\mathscr{F}^*$ en suivant cette séparatrice, jusqu'à ce que l'ouverture rencontre t et traverse le rectangle R tout entier. Le fait de décoller $\mathscr{F}^*$ en suivant une séparatrice correspond, sur le réseau ferroviaire quotient, à une opération de subdivision. $\mathscr{F}^*$ dépose sur les arêtes du nouveau réseau qui sont au-dessus de l'arête A (pour la rétraction naturelle) des poids bornés par $\frac{x}{2} + \delta$, où δ peut être choisi au départ arbitrairement petit.

En répétant ce processus, en prenant à chaque fois comme arête A celle dont le poids majore tous les autres poids sur les arêtes, on obtient le réseau τ_ε recherché.

Fin de la démonstration du théorème 1. — Comme τ_ε est porté par τ, et comme les feuilletages mesurés $(\mathscr{F},\mu_1)$ et $(\mathscr{F},\mu_2)$ sont portés par τ_ε, on peut, par la propriété d'invariance du produit $\langle\ ,\ \rangle$ par subdivision rappelée au § 1, calculer $\langle(\mathscr{F},\mu_1),(\mathscr{F},\mu_2)\rangle$ à partir des poids sur τ_ε. Par construction, ce nombre est majoré par $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \times A$, où A est le nombre d'aiguillages (borné). Comme ε est arbitraire, ce produit est nul. □

COROLLAIRE. — *La dimension d'une plaque est* $\leqslant \frac{1}{2}\dim \mathscr{MF} = 3g-3$.

D'après la discussion précédant l'énoncé du théorème, on voit que le nombre de mesures transverses ergodiques non proportionnelles pour un feuilletage donné est $\leqslant 3g - 3$.

Remarque. — Les démonstrations données par Katok et Levitt du résultat sur le nombre de mesures ergodiques sont elles aussi symplectiques; elles consistent, dans le cas orientable, à plonger l'espace des mesures transverses invariantes dans $H^1(M,\mathbf{R})$ et à montrer que le cup-produit est nul sur l'image. Dans le cas non orientable, il faut passer au

revêtement $\tilde{M}$ ramifié à 2 feuillets qui oriente le feuilletage, et la même discussion est faite dans $H^1(\tilde{M},\mathbf{R})$. On pourrait d'ailleurs relier les deux démonstrations en considérant le revêtement ramifié à 2 feuillets d'orientation du réseau ferroviaire et en y interprétant le produit symplectique comme un produit homologique.

3. La fonction intersection géométrique et son champ de vecteurs hamiltonien.

Soit γ un élément quelconque de l'ensemble des courbes simples fermées sur M, non homotope à un point, et $i(\gamma,.)$ la fonction intersection géométrique qui lui est associée, définie sur $\mathcal{MF}$. On rappelle que cette fonction est linéaire par morceaux par rapport à la structure PL de $\mathcal{MF}$ donnée par les réseaux ferroviaires (cf. [1] ou [10]).

On appellera $\mathcal{N}(\gamma)$ le sous-ensemble de $\mathcal{MF}$ défini par l'équation $i(\gamma,.) \neq 0$, et on notera i_γ la restriction de la fonction $i(\gamma,.)$ à cet espace. Ces définitions ne dépendent bien sûr que de la classe d'isotopie $[\gamma]$ de γ.

Dans ce qui suit, on associe à $[\gamma]$ un groupe à 1 paramètre d'homéomorphismes de $\mathcal{N}(\gamma)$ où la trajectoire d'un point quelconque $(\mathcal{F},\mu)$ de $\mathcal{N}(\gamma)$ sera définie par le *twist* le long d'un représentant de $[\gamma]$ transverse à un représentant de $(\mathcal{F},\mu)$, et on démontre que le champ de vecteurs tangent à cette déformation est le dual de la différentielle de i_γ pour la forme symplectique $\langle .,. \rangle$ restreinte à $\mathcal{N}(\gamma)$.

Remarquons tout de suite que ceci doit se vérifier dans des cartes locales où la fonction i_γ est différentiable. On montrera, au cours de la démonstration du théorème 2, le lemme suivant :

LEMME 1. — *Il existe au voisinage de chaque point de $\mathcal{N}(\gamma)$ un système de coordonnées locales dans lequel la fonction i_γ est linéaire.*

On a par ailleurs le

LEMME 2. — *Le complémentaire dans $\mathcal{MF}$ de l'ensemble $\mathcal{N}(\gamma)$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{MF}$, et au voisinage de chacun de ses points la fonction $i(\gamma,.)$ n'est linéaire dans aucun système de coordonnées locales.*

Remarque. — La deuxième partie du lemme 2 explique pourquoi on ne s'intéresse, dans ce qui suit, qu'à l'ensemble $\mathcal{N}(\gamma)$.

Démonstration du lemme 2. — Appelons I_γ le sous-espace de $\mathcal{MF}$ en question : il est défini par l'équation $i([\gamma],.) = 0$. Cet espace s'écrit canoniquement comme une somme directe $\mathbf{R}_+.\gamma \oplus I_\gamma^*$, où I_γ^* est l'espace des feuilletages mesurés sur la variété à bord M_γ, obtenue en découpant M le long de γ. On rappelle que la théorie « à bord » des feuilletages mesurés interdit l'existence de feuilles lisses parallèles au bord et que la dimension de l'espace des feuilletages mesurés sur une surface de genre g dont le bord possède b composantes est $6g - 6 + 2b$. A partir de là, l'assertion se réduit à un calcul simple. Par exemple, si γ est non séparante, la dimension de I_γ^* est $6g - 12 + 4$, et donc la dimension de I_γ est $6g - 12 + 4 - 1 = 6g - 7$. Un réseau ferroviaire maximal sur M_γ (pour une théorie à bord) se prolonge en un réseau ferroviaire maximal sur la surface initiale, et par conséquent les espaces I_γ^* et I_γ sont des sous-variétés linéaires de $\mathcal{MF}$. La première partie du lemme est démontrée.

Pour la deuxième partie, on remarque que la fonction $i(\gamma,.)$ étant toujours $\geqslant 0$, elle ne peut être linéaire au voisinage d'un point $(\mathcal{F},\mu)$ vérifiant $i(\gamma,(\mathcal{F},\mu)) = 0$ que si elle est identiquement nulle dans un voisinage de ce point. Il est facile de voir qu'il n'existe pas d'ouvert de $\mathcal{MF}$ sur lequel la fonction $i(\gamma,.)$ s'annule identiquement. Pour cela on peut prendre un système $C_1, \ldots, C_n$ de courbes simples fermées sur M en position d'intersection géométrique minimale et dont le complémentaire est une réunion de cellules. Un élément quelconque de $\mathcal{MF}$ a alors un nombre d'intersection géométrique non nul avec au moins l'une de ces courbes. Si $\mathcal{V}$ est un ouvert quelconque de l'espace projectif $\mathcal{PMF}$, on peut trouver un élément φ du groupe $\pi_0\mathrm{Diff}(M)$ tel que les images par φ des classes projectives des courbes $C_1, \ldots, C_n$ soient toutes dans $\mathcal{V}$ (par exemple, prendre pour φ une puissance assez grande d'un pseudo-Anosov dont la classe de feuilletage instable se trouve dans $\mathcal{V}$). L'image du système de courbes $C_1, \ldots, C_n$ par un difféomorphisme vérifie les mêmes propriétés que ce système, et il existe donc un élément dans $\mathcal{V}$ dont le nombre d'intersection géométrique avec γ est non nul. □

Remarques. — 1) Le lemme 2 (comme le montre la démonstration) reste vrai si la courbe γ est remplacée par un feuilletage mesuré quelconque $(\mathcal{F},\mu)$, sauf en ce qui concerne la codimension de l'espace $\{i((\mathcal{F},\mu),.)=0\}$. Par exemple, si $(\mathcal{F},\mu)$ est uniquement ergodique, cet espace est réduit au rayon passant par $(\mathcal{F},\mu)$ (cf. [7]).

2) Si τ est un réseau ferroviaire maximal quelconque sur M et γ une

courbe simple fermée, le sous-espace de $\mathcal{MF}(\tau)$ formé des points au voisinage desquels la fonction $i(\gamma,.)$ n'est pas linéaire dans les coordonnées naturelles associées à τ n'est en général pas réduit à l'intersection $\mathcal{MF}(\tau) \cap I_\gamma$.

Définition du twist le long de γ.

Soit $(\mathcal{F},\mu)$ un feuilletage mesuré vérifiant $i(\gamma,(\mathcal{F},\mu)) \neq 0$. Quitte à modifier $(\mathcal{F},\mu)$ dans sa classe d'équivalence, on peut supposer que γ est transverse à $(\mathcal{F},\mu)$ et ne passe pas par les singularités (cf. proposition II.6, exposé 5 de [2]). On définit alors une famille à 1 paramètre $\{H_t^\gamma(\mathcal{F},\mu)\}_{t\in\mathbf{R}}$ de feuilletages mesurés sur M de la façon suivante : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $H_t^\gamma(\mathcal{F},\mu)$ est obtenu en coupant la surface le long de la courbe γ, puis en recollant les 2 composantes du bord de la surface ainsi obtenue entre elles, de telle sorte que 2 points sur des composantes de bord différentes de la surface coupée qui provenaient d'un même point de M soient à une distance égale à $|t|$ après le recollement, la métrique sur γ étant donnée par la mesure μ, et le signe de t étant > 0 (resp. < 0) si la déformation, qu'on appelle le twist le long de γ, est effectuée dans le sens de l'orientation de M (resp. dans le sens opposé) (voir fig. 4).

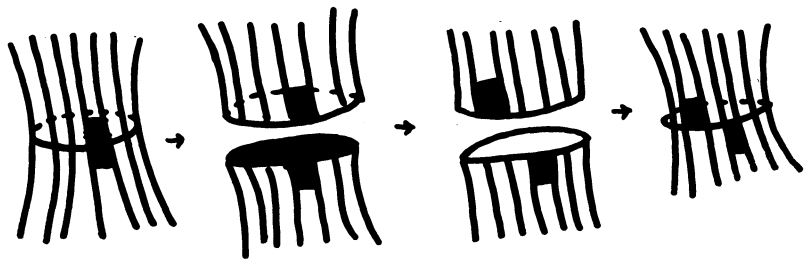


Fig. 4.

La classe de Whitehead du feuilletage mesuré $H_t^\gamma(\mathcal{F},\mu)$ varie continûment en fonction de t, et ne dépend que de la classe de Whitehead de $(\mathcal{F},\mu)$ et de la classe d'isotopie $[\gamma]$. En effet, il vient comme cas particulier de la proposition V.3 de l'exposé 6 de [2] qu'étant donnés deux feuilletages mesurés géométriques transverses à une même courbe simple fermée γ ne passant pas par leurs singularités, on peut passer de l'un à l'autre par (isotopie et) mouvements de Whitehead ne rencontrant pas γ.

Remarquer aussi que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$i(\gamma,H_t^\gamma(\mathcal{F},\mu)) = i(\gamma,(\mathcal{F},\mu)) \neq 0.$$

$H_t^\gamma(.)$ définit un groupe à 1 paramètre d'homéomorphismes de $\mathcal{N}(\gamma)$, et on a le

THÉORÈME 2. — *Le groupe à 1 paramètre,* H_t^γ *possède un champ de vecteurs tangent* h^γ *qui est le hamiltonien de la fonction* i_γ *pour la forme symplectique* $\langle\ ,\ \rangle$. *En d'autres termes, on a :* $\langle h^\gamma, . \rangle = -di_\gamma(.)$.

Démonstration. — La formule se démontre au voisinage de chaque point de $\mathcal{N}(\gamma)$ en prenant un système de coordonnées locales convenable.

Pour cela, étant donnée une décomposition de M en pantalons, on lui associe $3g-3$ *anneaux* $A_1, \ldots, A_{3g-3}$ parallèles aux courbes de la décomposition, et $2g-2$ pantalons $P_1, \ldots, P_{2g-2}$. On rappelle alors (cf. [1] ou [3]) que l'espace $\mathcal{MF}$ tout entier est égal à une réunion $\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{MF}(\tau_i)$ de sous-espaces portés par un nombre fini de réseaux ferroviaires, chaque réseau τ_i étant obtenu en recollant entre eux des réseaux sur les anneaux $A_1, \ldots, A_{3g-3}$ et $P_1, \ldots, P_{2g-2}$, où sur chaque anneau on prend l'un des réseaux donnés par les figures 5 (*a*) et (*b*), et sur chaque pantalon l'un des réseaux donnés par la figure 6 (*a*), (*b*), (*c*) et (*d*). (Harer et Penner produisent en fait un *pavage* de $\mathcal{MF}$ à partir de cette idée.)

(*a*) (*b*)

Fig. 5.

On utilisera ce fait uniquement pour voir qu'étant donnée notre courbe γ et un élément $(\mathcal{F},\mu) \in \mathcal{MF}$, il existe un réseau ferroviaire maximal τ' qui porte $(\mathcal{F},\mu)$ et tel que γ soit plongée dans τ' et rencontre uniquement 2 aiguillages (γ sera le cercle horizontal, dans la figure 5 (*a*) ou 5 (*b*)).

L'étape suivante consiste à voir que si $(\mathcal{F},\mu)$ est un élément de $\mathcal{N}(\gamma)$ (vérifiant donc $i(\gamma,(\mathcal{F},\mu)) \neq 0$), on peut choisir τ' comme ci-dessus, et tel que $(\mathcal{F},\mu)$ charge toutes les arêtes de τ'. Pour cela remarquons d'abord que, dans les figures 5 (*a*) ou (*b*), on a une notion naturelle d'arête *pistée*

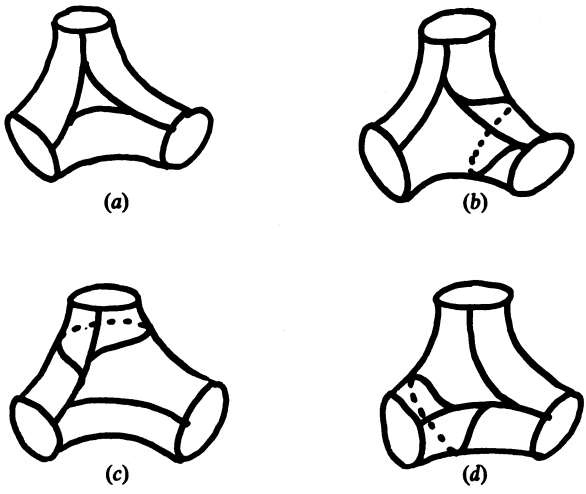


Fig. 6.

par γ et d'arête *aboutissant sur* γ. Comme $i(\gamma,(\mathscr{F},\mu)) \neq 0$, les 2 arêtes de τ' aboutissant sur γ sont chargées (leur poids commun est égal à $i(\gamma,(\mathscr{F},\mu))$. Si les 2 arêtes pistées par γ ne sont pas chargées, on modifiera τ' dans l'anneau considéré, comme indiqué par la figure 7 (c'est une opération de collapse le long du cercle central). Ces arêtes deviennent alors elles aussi chargées. Soit τ'' le nouveau réseau ferroviaire ainsi obtenu; il est, comme τ', maximal.

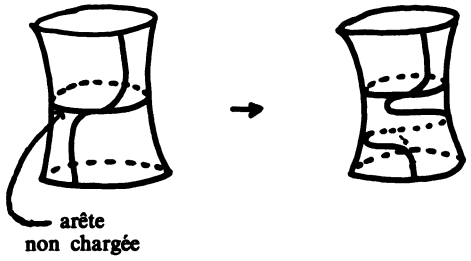


Fig. 7.

On considère maintenant le réseau ferroviaire τ^* obtenu en effaçant toutes les arêtes de τ'' qui ne sont pas chargées par $(\mathscr{F},\mu)$. τ^* est un sous-réseau de τ'', qui n'est maximal que s'il est égal à τ'' tout entier. La courbe γ *est* dans τ^*, ainsi que les 2 arêtes de τ'' qui aboutissaient sur γ. On construit alors, à partir de τ^*, un réseau ferroviaire *maximal* τ

tel que $(\mathcal{F},\mu) \in \text{int}\, \mathcal{MF}(\tau)$, à l'aide d'un nombre fini d'opérations de *pincement* (fig. 8), de sorte que ces opérations ne portent pas sur les arêtes de τ^* qui pistent γ.

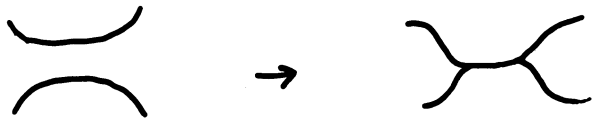
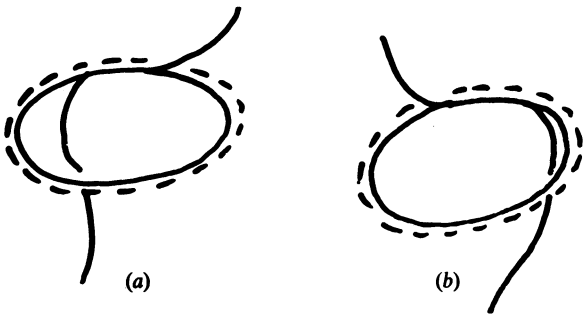


Fig. 8.

(Il s'agit donc de pincer les régions du complémentaire de τ^* pour les rendre *triangulaires*; si la composante initiale est plane, il est clair que l'opération peut se faire sans toucher à la courbe γ. Si la composante n'est pas plane, c'est clair aussi : on diminue successivement la *complexité* de cette composante par des opérations de pincement ne portant pas sur la courbe γ.)

Nous récapitulons les conditions vérifiées par le réseau ferroviaire τ : τ est maximal, $(\mathcal{F},\mu)$ est porté par ce réseau en chargeant toutes les arêtes, et γ est *plongée* dans τ, rencontrant exactement 2 aiguillages, comme dans la figure 9. En particulier, on a $[\gamma] \in \mathcal{MF}(\tau)$. Les deux figures 9(*a*) et 9(*b*) sont en fait les mêmes que les figures 5 (*a*) et 5 (*b*), et elles diffèrent entre elles simplement par ce que M est orientée.



(γ en pointillés)

Fig. 9.

Un feuilletage mesuré porté par un tel réseau ferroviaire τ attribue le même poids, x, aux 2 arêtes de τ aboutissant sur la courbe C, et la fonction $i(\gamma,.)$ sur $\mathcal{MF}(\tau)$ est donnée par x (remarquer que le lemme 1 est ainsi démontré).

Sur le cône E_τ, la forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$ est trivialisable comme on l'a expliqué au § 1, et la forme différentielle di_γ s'identifie naturellement

à la forme linéaire dx. Suivant la position des arêtes de τ aboutissant sur γ (rentrantes « par la gauche » ou « par la droite », correspondant donc respectivement aux figures 9 (a) et 9(b)), l'ensemble des feuilletages mesurés $\{H_t^\gamma(\mathscr{F},\mu)\}_{t\leqslant 0}$ ou $\{H_t^\gamma(\mathscr{F},\mu)\}_{t\geqslant 0}$ est tout entier contenu dans $\mathscr{MF}(\tau)$.

Pour calculer en coordonnées le champ de vecteurs tangent à la déformation, dans un cas comme dans l'autre, on considère un voisinage adapté V de τ, muni d'un feuilletage $\mathscr{I}$ par les traverses, et d'un feuilletage mesuré géométrique transverse aux traverses, de support égal à V, et dans la même classe que $(\mathscr{F},\mu)$. On appellera encore $(\mathscr{F},\mu)$ ce feuilletage.

Considérons une courbe simple fermée γ' dans V, dans la classe $[\gamma]$, transverse à $\mathscr{F}$ et à $\mathscr{I}$, et un voisinage annulaire A de γ' contenu dans V; sur la figure 10, on a dessiné la trace de $\mathscr{I}$ et de $\mathscr{F}$ sur A; on est dans le cas de figure où le chemin $\{H_t^\gamma(\mathscr{F},\mu)\}_{t\geqslant 0}$ est dans $\mathscr{MF}(\tau)$.

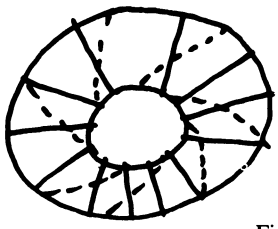


Fig. 10.

On voit alors que seuls les poids attribués aux deux arêtes de τ qui pistent γ varient au cours de cette déformation (ces deux poids restent d'ailleurs égaux entre eux), puisque seules les mesures déposées sur les traverses correspondant à ces deux arêtes sont affectées. Si y est le poids commun de ces arêtes, on voit par ailleurs que l'on a $dy = dt$, ce qui implique que le vecteur h^γ tangent à la déformation a pour coordonnées 1 sur les deux arêtes pistées par γ et 0 partout ailleurs. On vérifie immédiatement alors que l'on a $\langle h^\gamma, . \rangle = -di_\gamma$. Dans le cas symétrique (correspondant donc à la figure 9 (b)), c'est le vecteur $-h^\gamma$ qui interviendrait puisque ce sont les coordonnées de la déformation $\{H_t^\gamma(\mathscr{F},\mu)\}_{t\leqslant 0}$ qui seraient apparues sur τ, et on aurait de même $\langle ., -h^\gamma \rangle = di_\gamma$.

Le théorème est ainsi démontré. □

Remarque finale. — Il existe une analogie (au moins formelle) entre la situation présentée par le théorème 2 et une situation sur l'espace de

Teichmüller de M, décrite par S. Wolpert dans [13], où il s'agit de déformation de structures hyperboliques sur M en effectuant des twists le long de géodésiques. Il reste à trouver une relation profonde entre ces 2 situations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. J. Casson, Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston, cours à l'« University of Texas at Austin », 1982-83, notes prises par S. Bleiler.
[2] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, Travaux de Thurston sur les surfaces (Séminaire Orsay), *Astérisque*, 66-67 (1979).
[3] J. Harer et R. Penner, Combinatories of train tracks and pavings of projective lamination spaces, Preprint.
[4] A. Katok, Invariant measures of flows on oriented surfaces, *Soviet Math. Dokl.*, 14 (1973), 1104-1108.
[5] G. Levitt, Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension 1, *C.R.A.S.*, Paris, 290 (1980), 1139-1140.
[6] G. Levitt, Feuilletages des surfaces, Thèse de doctorat d'État, Univ. Paris VII, 1983.
[7] H. Masur, Interval exchange transformations and measured foliations, *Ann. of Math.*, 115 (1982), 169-200.
[8] J. Plante, Foliations with measure-preserving holonomy, *Ann. of Math.*, 102 (1975), 327-361.
[9] A. Papadopoulos, Réseaux ferroviaires, difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie d'une surface, Publi. Math. Orsay, n° 83-03.
[10] A. Papadopoulos, Réseaux ferroviaires et courbes simples, *C.R.A.S.*, Paris, 297 (1983), 565-569.
[11] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Notes de cours à Princeton.
[12] W. Veech, Interval exchange transformations, *Jour. d'Anal. Math.*, 33 (1978), 222-272.
[13] S. Wolpert, On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface, *Ann. of Math.*, 117 (1983), 207-234.

Manuscrit reçu le 23 juillet 1984
révisé le 11 juin 1985.

Athanase Papadopoulos,
LP 13 du C.N.R.S.
Topologie différentielle
Université Paris-Sud
Mathématique, bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex.