ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL MEYER

Minoration de la première valeur propre non nulle du problème de Neumann sur les variétés riemanniennes à bord

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 2 (1986), p. 113-125

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_113_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 113-125.

MINORATION DE LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE NON NULLE DU PROBLÈME DE NEUMANN SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES À BORD

par Daniel MEYER

1. Introduction.

Le but de ce travail est d'obtenir une minoration générale de la première valeur propre non nulle (notée Λ_1) du laplacien d'une variété riemannienne compacte connexe à bord, avec condition de Neumann sur le bord.

Dans [9], L. E. Payne et H. Weinberger donnent la minoration suivante :

$$\Lambda_1 \geqslant \pi^2/d^2$$

pour un domaine convexe de $\mathbf{R}^n$, dont d désigne le diamètre. Ce résultat a été généralisé par P. Li et S. T. Yau (cf. [6]) dans le cas des variétés riemanniennes compactes connexes de dimension n à bord convexe, de courbure de Ricci minorée par $(n-1)\mathrm{K}$ et de diamètre d. Ils obtiennent une minoration du type

$$\Lambda_1 \geqslant \frac{\mathrm{C}(n, \mathrm{K}, d)}{d^2}.$$

Leur méthode s'apparente, en l'améliorant, à l'approche de L. E. Payne et I. Stackgold (cf. [8]) dont l'article est consacré aux domaines convexes de $\mathbf{R}^n$.

En modifiant la méthode utilisée par P. Li et S. T. Yau, on généralise leur résultat au cas où le bord n'est pas convexe.

Mots-clés : Variétés riemanniennes à bord - Problème de Neumann - Minoration de la première valeur propre.

Plus précisément, soit $(M, \partial M, g)$ une variété riemannienne compacte connexe à bord. Notons n sa dimension et d son diamètre (la distance entre deux points x et y étant la borne inférieure des longueurs des courbes de M joignant x à y). On appelle courbures principales du bord les valeurs propres de la seconde forme fondamentale $\Pi(.,.)$ pour la normale intérieure U, i.e. :

$$\Pi(X,Y) = \langle \nabla_X U, Y \rangle = - \langle \nabla_X Y, U \rangle$$

pour tous les vecteurs X, Y tangents à ∂M. (Avec ces conventions la seconde forme fondamentale est définie négative pour des variétés riemanniennes à bord strictement convexe). Enfin, on appelle rayon de coupure le rayon d'injectivité de l'exponentielle normale au bord. On montre le

THÉORÈME 1. — *Soient n un entier $\geqslant 2$, D et a des réels positifs, e et K des réels. Pour toute variété riemannienne compacte connexe à bord $(M,\partial M,g)$, de dimension n, dont les courbures principales au bord sont majorées par e, dont le rayon de coupure est minoré par a, dont le diamètre d est majoré par D et la courbure de Ricci minorée par $(n-1)K$, on a :*

$$\Lambda_1 \geqslant C(n,e,a,D,K)/d^2$$

où :

$$C(n,e,a,D,K) = \alpha(n) e^{-\beta(n) D \operatorname{Sup}\left(e, \frac{1}{a}\right)}, \quad \text{si} \quad K \geqslant 0,$$

et où

$$C(n,e,a,D,K) = \alpha(n) e^{-\left[\beta(n).D.\operatorname{Sup}\left(e,\frac{1}{a}\right) + \gamma(n) D \frac{\sqrt{|K|}}{\operatorname{Th}\left(\frac{a\sqrt{|K|}}{2}\right)}\right]}$$

si $K < 0$, *avec :*

$$\alpha(n) = \frac{e^{-2}}{4(n-1)}$$
$$\beta(n) = 16.n$$
$$\gamma(n) = 2.(n-1)^{3/2}.$$

Remarques. — 1. Les quantités $e.D$, D/a, $D\sqrt{|K|}$, $a.\sqrt{|K|}$ intervenant dans le calcul de $C(n,e,a,D,K)$ sont invariantes par homothéties sur la métrique.

2. Le théorème 1 signifie que l'invariant $\Lambda_1 d^2$ (où d est introduit pour homogénéiser) est uniformément minoré sur la classe des variétés vérifiant les hypothèses.

3. Si l'on supprime l'une des hypothèses du théorème 1 l'expression $\Lambda_1 d^2$ peut tendre vers 0, comme le prouvent les contre-exemples du paragraphe 2.

4. Dans le cas convexe, notre démonstration devient identique à celle de [6].

Après avoir donné une liste d'exemples qui prouvent la nécessité de toutes les hypothèses du théorème 1 (§ 2), on montre que l'on peut contrôler, sous les hypothèses du théorème 1, la courbure moyenne des hypersurfaces parallèles au bord (§ 3). Si u désigne une fonction propre associée à Λ_1 (le maximum de u est normalisé à 1), P. Li et S. T. Yau montrent que, pour minorer Λ_1, il suffit d'estimer le maximum de l'expression $\frac{|\nabla u|^2}{(\mu-u)^2}$ (en fonction de μ, pour $\mu > 1$). Leur méthode ne donne une estimation que dans le cas où ce maximum n'est pas sur le bord, ce qu'implique l'hypothèse de convexité.

Ici, on multiplie la fonction $\frac{|\nabla u|^2}{(\mu-u)^2}$ (où $\mu > 1$) par une fonction φ ad-hoc, de manière à s'assurer que le maximum de $\frac{\varphi . |\nabla u|^2}{(\mu-u)^2}$ est atteint en un point intérieur. Par une méthode qui s'inspire de celle de P. Li et S. T. Yau, on estime le maximum de la quantité modifiée (§ 4). Un contrôle de φ, de son gradient et de son laplacien (utilisant le § 3) sont nécessaires pour surmonter les difficultés supplémentaires (§ 5).

En conclusion, nous renvoyons à [7] pour d'autres développements : en particulier nous y montrons comment majorer la dimension du premier groupe de cohomologie relative $H^1(M,\partial M;\mathbf{R})$ en fonction d'un minorant de Λ_1 ; d'où l'intérêt d'une minoration de Λ_1 qui soit uniforme sur toute une classe de variétés, la plus vaste possible (voir les exemples de la section 2).

Je tiens à remercier P. Bérard, M. Berger, J. P. Bourguignon et B Maurey pour leurs conseils. Je suis particulièrement redevable à D. Hulin des critiques qu'elle m'a faites sur une version précédente. C'est à l'occasion d'un séjour à l'Université de Grenoble que j'ai achevé la rédaction actuelle; elle doit tout à un travail aussi intense que généreux de G. Besson et S. Gallot.

2. Contre-exemples.

Les exemples qui suivent sont une variation sur l'exemple classique de l'haltère (cf. [3], p. 569. 04).

On s'attache dans cette section à montrer la nécessité de chacune des hypothèses du théorème 1, à savoir :

2.1. — *Un majorant du diamètre.*

On ne peut, par exemple, espérer remplacer d par un majorant du volume : considérer un cylindre $S^1(1/d) \times [0,d]$ muni de la métrique produit, où $S(1/d)$ est le cercle de rayon $1/d$. Lorsque d tend vers l'infini, la première valeur propre $\Lambda_1 = \pi^2/d^2$ tend vers zéro.

2.2. — *La présence de la dimension est nécessaire si* $K < 0$.

Notons f la fonction de classe C^∞ définie sur $[-1,1]$, paire, convexe, constante et égale à 1 sur $[0,1/2]$ et telle que $f(x) \geqslant 3/2$ pour tout $x \in [3/4,1]$. Considérons l'hypersurface à bord $\mathscr{H}^n$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par

$$\mathscr{H}^n = \{(x_0,\ldots,x_n) : x_0 \in [-1,1] \text{ et } f(x_0)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2\}.$$

Munie de la métrique riemannienne induite, $\mathscr{H}^n$ est une variété de dimension n de courbure négative. Lorsque n tend vers l'infini, on vérifie aisément que toutes les autres grandeurs géométriques qui interviennent dans les hypothèses du théorème 1 restent fixées par le choix de f. Notons $\tilde{u}$ la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ 2x & \text{si} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ +1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Considérons la fonction u_n définie sur $\mathscr{H}^n$ par $u_n(x_0,\ldots,x_n) = \tilde{u}(x_0)$. Cette fonction étant d'intégrale nulle sur $\mathscr{H}^n$, nous avons

$$\Lambda_1(\mathscr{H}^n) \leqslant \int_{\mathscr{H}^n} |du_n|^2 \Big/ \int_{\mathscr{H}^n} u_n^2 \leqslant 2^{2+n}/3^{n-1}.$$

Par conséquent, $\Lambda_1(\mathscr{H}^n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2.2. *bis.* — *La présence de* n *est nécessaire lorsque* $e > 0$.

Dans l'exemple précédent on remplace $\mathscr{H}^n$ par le domaine M^{n+1} de $\mathbf{R}^{n+1}$ défini par

$$M^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_n) : x_0 \in [-1,1] \text{ et } f(x_0)^2 \geqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2\};$$

(on peut si on le désire lisser le bord de M^{n+1}). En considérant la même fonction u_n que précédemment on voit que $\Lambda_1(M^{n+1})$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, bien que les autres grandeurs géométriques qui interviennent dans les hypothèses du théorème 1 restent fixées.

2.3. — *Un minorant de Ricci.*

On reprend l'exemple 2.2 en fixant n et en remplaçant f par $f_\ell = f - (\ell - 1)/\ell$ pour $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Notons $\mathscr{H}_\ell$ l'hypersurface de révolution obtenue comme en 2.2. Un raisonnement analogue à celui de 2.2 montre que $\Lambda_1(\mathscr{H}_\ell)$ tend vers zéro lorsque ℓ tend vers l'infini. Pourtant toutes les grandeurs géométriques qui interviennent dans les hypothèses du théorème 1 sont uniformément bornées, à l'exception de la courbure de Ricci.

2.4. — *Un minorant du rayon de coupure du bord.*

Soit $\tilde{f}$ une fonction C^∞ sur $]-2,2[$, paire, égale à f sur $[-1, +1]$, telle que $\tilde{f}(2) = 2$ et $\tilde{f}'(2) = -\infty$. Enfin $\tilde{f}$ est > 1 sur $[1, 2]$. On pose $\tilde{f}_\ell = \tilde{f} - \dfrac{\ell - 1}{\ell}$ où $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $\mathscr{D}_\ell$ est le domaine de $\mathbf{R}^2$ limité par la courbe formée par les graphes de $\tilde{f}_\ell$ et $-\tilde{f}_\ell$ et par les segments verticaux raccordant ces deux graphes. Il est facile de voir que Λ_1 et a tendent vers zéro lorsque ℓ tend vers l'infini; les autres grandeurs géométriques qui interviennent dans les hypothèses du théorème 1 étant fixées.

2.5. — *Un majorant du défaut de convexité.*

Il n'intervient, bien sûr, que dans le cas des variétés à bord non localement convexe.

Soit $\mathscr{C}_\ell$ la couronne plane définie pour $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ par :

$$\mathscr{C}_\ell = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid 1/\ell \leqslant d(x,0) \leqslant a + 1/\ell\}.$$

On découpe cette couronne le long d'un rayon et l'on recolle, de façon connexe et lisse, ℓ exemplaires de la couronne ainsi découpée, le premier avec le second, le second avec le troisième, et ainsi de suite; localement la géométrie est celle de $\mathscr{C}_\ell$, excepté aux bords libres du premier et du dernier exemplaire. On ferme les extrémités du colimaçon $\mathscr{C}_\ell$ ainsi obtenu, par deux disques identiques de taille fixe. Soit $\mathscr{A}_\ell$ la surface à bord lisse ainsi obtenue (une sorte d'alambic plan). Faisant tendre ℓ vers l'infini, il est facile de voir que le rayon de coupure du bord est fixe, le diamètre est de l'ordre de $\ell \cdot \dfrac{2\pi}{\ell} = 2\pi$ (suivre les chemins qui s'enroulent sur le bord interne du colimaçon). Enfin on définit une fonction u d'intégrale nulle sur $\mathscr{A}_\ell$, élément de $H^1(\mathscr{A}_\ell)$, dont l'intégrale de Rayleigh Ritz tend vers 0 lorsque $\ell \to \infty$: u vaut 1 sur un disque terminal et -1 sur l'autre; $u = \cos\left(\dfrac{\theta}{2\ell}\right)$ dans le colimaçon (qui est paramétré par $(r,\theta) \in [1/\ell, a+1/\ell] \times [0,2\pi\ell]$, depuis le premier jusqu'au second disque).

Alors $|du|^2 = \dfrac{1}{4\ell^2 r^2} \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2\ell}\right)$ sur le colimaçon et

$$\int_{\mathscr{C}_\ell} |du|^2 \, d\,\mathrm{vol} \leqslant \frac{2\pi}{4\ell} \int_{1/\ell}^{a+1/\ell} \frac{dr}{r} \to 0$$

lorsque $\ell \to \infty$; d'autre part

$$\int_{\mathscr{A}_\ell} |u|^2 \, d\,\mathrm{vol} \geqslant \mathrm{vol}\,(\mathscr{A}_\ell - \mathscr{C}_\ell)$$

qui est un nombre fixe. Observons que $e = \ell \to +\infty$.

Remarque 1. — On peut fabriquer des exemples du même type en choisissant sur $\mathscr{C}_\ell$ une métrique de la forme $dr^2 + f^2(r)\,d\theta^2$ avec $f(r) \sim r^\alpha$, lorsque $r \to 0$, et $\alpha \in]0,1[$ ou $\alpha < 0$; ces métriques ne sont pas à courbure bornée supérieurement si $\alpha \in]0,1]$; à courbure bornée inférieurement si $\alpha < 0$. Le colimaçon ci-dessus correspond au cas $\alpha = 1$.

Remarque 2. — La constante de Cheeger tend vers 0 avec ℓ tendant vers l'infini : on rajoute de plus en plus de volume, alors que la largeur du colimaçon (rayon de coupure) reste fixe.

3. Courbure moyenne des hypersurfaces à distance constante d'une hypersurface donnée.

Pour une hypersurface N d'une variété riemannienne M, on définit l'application de Weingarten de la manière suivante :

Soit $\mathscr{V}$ un champ normal unitaire défini au voisinage d'un point x de N. On note $S_{\mathscr{V}_x}$ l'endomorphisme de T_xN défini par :

$$S_{\mathscr{V}_x}(X) = \nabla_X \mathscr{V}.$$

Soit H une hypersurface d'une variété riemannienne. On considère l'application Φ de $H \times]0,d[$ sur M, définie par $\Phi(y,t) = \exp_y(t\mathscr{V}_y)$, où $\mathscr{V}$ est un champ de vecteurs normaux à H, défini sur un voisinage $\mathring{H}$ du point x. Pour x fixé, la courbe $c(t) = \exp_x(t\mathscr{V}_x)$ est une géodésique normale. Posons $H_t = \Phi(\mathring{H} \times \{t\})$; la courbure moyenne de H_t au point $c(t)$ est par définition la trace de l'homomorphisme de Weingarten $S_{\dot{c}(t)}$. Notons $\tilde{a}_x$ le rayon focal de H en x dans la direction $\mathscr{V}_x$ ($\tilde{a}_x = +\infty$ éventuellement). On a le :

LEMME 2. — *Si la variété* (M,g) *est de courbure de Ricci minorée par* $(n-1)K$, *on a*

$$\forall t \in [0,\tilde{a}_x[, \quad \operatorname{trace} S_{\dot{c}(t)} \geqslant -(n-1)\frac{\sqrt{|K|}}{T(\sqrt{|K|}\,(\tilde{a}_x - t))}$$

où $T(t) = \begin{cases} \operatorname{tg} t \\ t \\ \operatorname{th} t \end{cases}$ *selon que* $K = \begin{cases} > 0 \\ = 0, \\ < 0 \end{cases}$ *et où l'on passe à la limite dans le membre de droite lorsque* $\tilde{a}_x = +\infty$ *ou lorsque* $K = 0$.

Preuve (pour des résultats analogues, voir [1], [4], [5] et [2]). — Considérons un point $t_0 < \tilde{a}_x$ et posons $y = c(t_0)$. Notons H' l'image par $\exp_y$ de la sphère de rayon t_0 dans T_yM. Comme H' est tangente à H en x et comme son rayon focal en ce point est inférieur à $\tilde{a}_x$, la formule de la variation seconde assure que la courbure moyenne de H est minorée par celle de H'. Par le théorème de comparaison de Bishop (cf. [1], p. 254), cette dernière est minorée par $-(n-1)\dfrac{\sqrt{|K|}}{T(\sqrt{|K|}\,t_0)}$. On achève la preuve en faisant tendre t_0 vers $\tilde{a}_x$, en remplaçant H par H_t et $\tilde{a}_x$ par le rayon focal $\tilde{a}_x - t$ de H_t.

4. Lemmes préparatoires.

On se donne sur $(M,g,\partial M)$ une fonction u de moyenne nulle, $u \not\equiv 0$, vérifiant $\Delta u = \Lambda_1 u$ et une fonction $\varphi > 0$, de classe C^2. On va étudier la fonction $\mathscr{L} = \varphi \cdot \dfrac{|\nabla u|^2}{(\mu - u)^2}$, où l'on a supposé une fois pour toutes que u est normée de manière à ce que $\operatorname{Sup} u = 1$, et où μ est une constante réelle $\mu > 1$. On pose aussi :

$$f = \frac{|\nabla u|^2}{(\mu - u)^2}.$$

On obtient facilement, en dérivant, le

LEMME 3. — *En un point* $x \in M \setminus \partial M$, *critique pour* $\mathscr{L}$, *on a :*

(i) $\nabla f_x = -\left(\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}\right)_x \cdot f(x)$,

(i') $\dfrac{\nabla(|\nabla u|^2)}{(\mu - u(x))^2} = -\left(\dfrac{\nabla\varphi}{\varphi}\right)_x . f(x) - 2\dfrac{(\nabla u)_x}{(\mu - u(x))} \cdot f(x)$.

LEMME 4. — *Si la fonction* $\mathscr{L}$ *admet un maximum local en un point* x *et si* x *n'appartient pas à* ∂M, *on a en ce point :*

$$\text{(ii)}\quad 0 \leqslant \Delta\mathscr{L}_x/\varphi(x) \leqslant -\frac{1}{n-1} f^2(x) + \left(2 - \frac{1}{n-1}\right)\left|\frac{\nabla\varphi}{\varphi}\right| . f(x)^{3/2}$$
$$+ \left(\frac{\Delta\varphi}{\varphi}(x) + 2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}(x) + \frac{2\mu}{\mu - u(x)} \cdot \Lambda_1 - 2(n-1)K\right) f(x)$$
$$+ \frac{2\Lambda_1^2 u^2(x)}{(n-1)(\mu - u(x))^2}.$$

Preuve. — Tous les calculs sont effectuées *au point* x, sans qu'il soit toujours nécessaire de le rappeler. D'après le lemme 3, on a

$$\text{(1)}\qquad \Delta\mathscr{L}(x) = \varphi . \Delta f + f(x)(\Delta\varphi + 2|\nabla\varphi|^2/\varphi).$$

Par ailleurs,

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta(|\,du|^2)}{(\mu - u)^2} + \Delta\left(\frac{1}{(\mu - u)^2}\right)|\nabla u|^2 - 2\left\langle \nabla(|\nabla u|^2), \nabla\left(\frac{1}{(\mu - u)^2}\right)\right\rangle.$$

Le lemme 3 donne alors

$$(2)\quad \Delta f(x) = \frac{\Delta(|du|^2)}{(\mu-u)^2} + 2\Lambda_1\left(\frac{u}{\mu-u}\right).f(x) + 2f^2(x) + 4\left\langle \frac{\nabla\varphi}{\varphi}, \frac{\nabla u}{\mu-u}\right\rangle f(x).$$

Pour estimer $\Delta(|du|^2)$, on suit la méthode de [6], pp. 209-210 en appliquant la formule de Bochner :

$$(3)\quad \Delta(|du|^2) = 2\langle \Delta\, du, du\rangle - 2\,\mathrm{ric}(\nabla u, \nabla u) - 2|\nabla\, du|^2 \leqslant 2\Lambda_1.|\nabla u|^2 - 2(n-1)\mathrm{K}.|\nabla u|^2 - 2|\nabla\, du|^2.$$

Afin d'estimer $2|\nabla\, du|^2$, on applique l'inégalité de Schwarz, ce qui implique dans des coordonnées normales x_i en x, t.q. $\dfrac{\partial}{\partial x_1|_x} = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|_x}$:

$$(4)\qquad 2\sum_2^n (\nabla\, du)^2_{ii}(x) \geqslant \frac{1}{n-1}[(\nabla\, du)^2_{11} - 2(\Delta u)^2].$$

En appliquant l'égalité (i') du lemme 3 à la première coordonnée, on obtient

$$(5)\quad \frac{2(\nabla\, du)^2_{11}}{(\mu-u)^2}(x) = 2f(x)^2 + 2\left\langle \frac{\nabla\varphi}{\varphi}, \frac{\nabla u}{\mu-u}\right\rangle f(x) + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\nabla\varphi}{\varphi}, \frac{\nabla u}{\mu-u}\right\rangle^2.$$

Le lemme 4 s'obtient par collection des formules (1), (2), (3), (4) et (5). □

5. Établissement du théorème.

On va utiliser les lemmes de la section 3 en choisissant φ de manière à ce que :

(a) *la fonction $\mathscr{L}$ atteigne son maximum en un point x qui n'appartient pas au bord ∂M* ;

(b) *la fonction $\mathscr{L}$ ne s'écarte pas trop de f, afin qu'une estimation sur le maximum de $\mathscr{L}$ donne une bonne estimation sur le maximum de f.*

Posons $k = \mathrm{Sup}\left(2e, \dfrac{4}{a}\right)$. Choisissons $k' > k$ et $\eta > 0$. On construit une fonction $\tilde{\varphi}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) $\tilde{\varphi}$ est une fonction C^∞ sur $[0, \infty[$ à valeurs réelles;

(ii) $\tilde{\varphi}$ est croissante et $\tilde{\varphi}(0) = 1$;

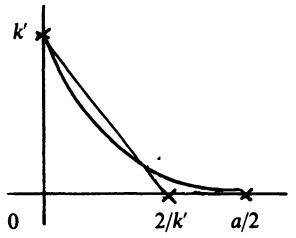
(iii) $\tilde{\varphi}$ est constante sur $[a/2,\infty[$, égale à 2;

(iv) $\tilde{\varphi}'$ est décroissante et $\tilde{\varphi}'(0) = k'$, donc: $0 \leqslant \tilde{\varphi}'(t) \leqslant \tilde{\varphi}'(0)$ pour tout $t \in [0,\infty[$ et $\tilde{\varphi}'(t) = 0$ pour tout $t \geqslant a/2$;

(v) $(\forall t \in [0,\infty[)\ |\tilde{\varphi}''(t)| \leqslant + \dfrac{(k')^2}{2} + \eta$.

Puis, *nous poserons* $\varphi(\cdot) = \tilde{\varphi}(d(\partial M,\cdot))$. *Pour construire* $\tilde{\varphi}$, *nous partons de sa dérivée*, qui sera à une légère modification près la fonction linéaire par morceaux qui vaut k' en 0 et 0 en $2/k'$ et qui est ensuite nulle. Cette fonction n'est malheureusement pas de classe C^∞ (ni même de classe C^1), aussi nous la remplaçons par une fonction convexe, lisse, de classe C^∞, *notée* $\tilde{\varphi}'$, vérifiant (iv) et (v), pour le choix d'un $k' > k$ et d'un nombre η petit et arbitraire; de plus, nous imposons la condition:

$$\int_0^{a/2} \tilde{\varphi}'(t)\,dt = 1 \quad \text{(cf. figure).}$$



La fonction $\tilde{\varphi}$, *alors définie par:*

$$\tilde{\varphi}(t) = 1 + \int_0^t \tilde{\varphi}'(s)\,ds,$$

vérifie manifestement les conditions (i), (ii) et (iii).

La fonction φ satisfait alors à la condition (*b*), puisque:

$$1 \leqslant \varphi = \mathscr{L}/f \leqslant 2.$$

D'autre part, la fonction φ vérifie également (*a*). En effet, soit $z \in \partial M$ un maximum pour $\mathscr{L}$; on a, si $v = \nu_z$ est la normale unité rentrante:

$$\nabla_v \mathscr{L} = \frac{\nabla_v(|du|^2)}{(\mu - u(z))^2} + (\nabla_v \varphi)\frac{|du|^2}{(\mu - u(z))^2},$$

puisque $\nabla_v u = 0$ (condition de Neumann). Par ailleurs

$$\nabla_v(|du|^2) = 2(\nabla\, du)(\nabla u, v) = -\,2\,du(\nabla_{\nabla u}\nu) = -\,2\Pi_v(\nabla u, \nabla u).$$

Donc

$$(\mu - u(z))^2 . \nabla_v \mathscr{L} \geqslant -\,2e|du|_z^2 + k'|du|_z^2 > 0,$$

car le maximum de $\mathscr{L}$ n'étant pas nul, on a $|du|_z \neq 0$.

Par conséquent, le maximum ne peut être atteint sur le bord.

D'après la construction de φ, on sait que :

$$|\nabla\varphi| = |\tilde{\varphi}'| \leqslant k' = |\tilde{\varphi}'(0)| \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \varphi \leqslant 2.$$

D'autre part, puisque φ est définie radialement à partir du bord, on a :

$$\Delta\varphi_{c(t)} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{\varphi}) - \operatorname{trace}(S_{\dot{c}(t)})\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\varphi})_t$$

où $c(t)$ est une géodésique normale minimisante issue du bord, d'où en appliquant la proposition 2 et le fait que $a \leqslant \tilde{a}$:

$$\Delta\varphi \leqslant \left(\frac{k'}{2}\right)^2 + \eta + k'(n-1)\frac{\sqrt{|K|}}{T\left(\sqrt{|K|}\,\frac{a}{2}\right)}.$$

Finalement, en reportant tout ceci dans l'inégalité (ii) du lemme 3, on obtient en x, maximum pour $\mathscr{L}$, puisque $x \in M \backslash \partial M$ (en faisant tendre η vers 0) :

$$0 \leqslant D + CX^2 + BX^3 - AX^4 \quad \text{où} \quad A = \frac{1}{n-1},$$

$$B = \left(2 - \frac{1}{n-1}\right)k',$$

$$C = \frac{5}{2}(k')^2 + k'(n-1)\frac{\sqrt{|K|}}{T\left(\sqrt{|K|}\,\frac{a}{2}\right)} + 2\Lambda_1\frac{\mu}{\mu-1} - 2(n-1)K^-,$$

$$D = \frac{2\Lambda_1^2}{(n-1)(\mu-1)^2} \qquad \text{et} \qquad X = \sqrt{f(x)},$$

avec $K^- = \operatorname{Inf}(K,0)$.

Un raisonnement par l'absurde montre que l'on a

$$X = \sqrt{f(x)} \leqslant B/A + (C/A)^{\frac{1}{2}} + (D/A)^{\frac{1}{4}}.$$

Or, pour tout $x' \in M$, on a aussi : $f(x') \leqslant 2.f(x)$. On a donc établi, en tout point de M, l'inégalité :

$$|d(\mathrm{Log}\,(\mu - u))| \leqslant \sqrt{2}(B/A + (C/A)^{\frac{1}{2}} + (D/A)^{\frac{1}{4}}).$$

Notons γ un chemin (paramétré par sa longueur) qui réalise le minimum de la distance entre un zéro et un maximum de la fonction u (nous avions normalisé u de manière à ce que ce maximum soit égal à 1). Suivant [6], p. 215, nous *intégrons* l'inégalité ci-dessus le long de γ, ce qui donne :

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right) \leqslant \sqrt{2}.d[(B/A)+(C/A)^{\frac{1}{2}}+(D/A)^{\frac{1}{4}}]$$
$$\leqslant \sqrt{2}.d\left[\sqrt{\Lambda_1}\left[\frac{2^{\frac{1}{4}}+(2\mu(n-1))^{\frac{1}{2}}}{(\mu-1)^{\frac{1}{2}}}\right] + \theta(k')\right]$$

où θ est la fonction définie par

$$\theta(k') = (2n-3)k' + (n-1)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot\left(\frac{5}{2}(k')^2 + k'(n-1)\frac{\sqrt{|K|}}{T(\sqrt{|K|}\,a/2)} - 2(n-1)K^-\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons $\tau = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$. Comme l'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout $\mu \in]1, \infty[$, nous avons

$$\sqrt{\Lambda_1} \geqslant (1+2^{-1/4}(n-1)^{-\frac{1}{2}})^{-1}(2(n-1))^{-\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \operatorname*{Sup}_{\tau \in]0,1[}\left(\tau\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,d}\,\mathrm{Log}\,(1/\tau^2) - \theta(k')\right)\right).$$

L'expression de droite atteint son maximum pour $\tau = e^{-\left(1+\frac{d.\theta(k')}{\sqrt{2}}\right)}$. En substituant, et en faisant tendre k' vers k nous obtenons

$$\Lambda_1 \geqslant \frac{1}{(1+2^{-\frac{1}{4}}(n-1)^{-\frac{1}{2}})^2(n-1)\,d^2}\,\frac{1}{\exp[-2-\sqrt{2}\,d\theta(k)]}.$$

Des majorations grossières permettent d'en déduire le théorème 1. □

Remarque. — Si $e \leqslant 0$, la construction précédente se réduit à celle de [6], en prenant $\varphi = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP, CRITTENDEN, *Geometry of manifolds*, Academic Press, 1964.
[2] GAGE, *Indiana Math. Journ.*, Vol. 29 (1980), 897-912.
[3] GALLOT, Séminaire Bourbaki, Février 1981, n° 569.
[4] HEINTZE, KARCHER, *Journ. Ann. Sc. Ec. Nor. Sup.*, 4^{e} ser., t. 11 (1978), 451-470.
[5] KASUE, Laplacian comparaison theorems, preprint.
[6] LI, YAU, *Proc. Symp. Pure Math.*, (36) (1980),205-239.
[7] MEYER, Une inégalité de géométrie hilbertienne et ses applications à la géométrie riemannienne, à paraître.
[8] PAYNE, STACKGOLD, *Appl. Analysis*, vol. 3 (1973), 295-306.
[9] PAYNE, WEINBERGER, *Journ. Soc. Ind. Appl. Math.*, 5 (1957), 171-182.

Manuscrit reçu le 12 février 1985
révisé le 3 juin 1985.

Daniel MEYER,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212
U.E.R. Math.
Univ. Paris VII
75251 Paris Cedex 05 (France).