ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS LAUDENBACH

Homotopie régulière inactive et engouffrement symplectique

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 2 (1986), p. 93-111

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_93_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 93-111.

HOMOTOPIE RÉGULIÈRE INACTIVE ET ENGOUFFREMENT SYMPLECTIQUE

par François LAUDENBACH

Soit (M^{2n},ω) une variété symplectique. Soient Δ une variété compacte et $\varphi : \Delta \times [0,1] \to M$; à la source de φ, la variable est notée (x,t). On note $\dot{\varphi}$ la dérivée partielle par rapport au temps t et φ' l'application tangente, à t fixé. En un point (x,t), $\omega(\dot{\varphi},\varphi')$ est une forme linéaire sur l'espace tangent à Δ en x.

On rappelle que φ est une homotopie régulière si φ' est de rang maximum en tout point. Si φ est elle-même une immersion, on dira qu'il s'agit d'une homotopie super-régulière. Enfin, on dira que φ est inactive si $\omega(\dot{\varphi},\varphi')$ est identiquement nulle : l'aire balayée par tout segment de Δ est nulle; la terminologie « inactive » a été choisie en souvenir de l'intégrale d'action des mécaniciens.

Notant comme d'habitude par φ_t la restriction de φ à $\Delta \times \{t\}$, on remarque que si φ_0 est une immersion lagrangienne, il n'y a pas moyen de changer l'image par homotopie régulière inactive.

Voici une question qui nous paraît intéressante : étant donné un ouvert U de M, existe-t-il une homotopie régulière inactive avec une origine donnée et finissant dans U ? Cette question est reliée au problème de l'engouffrement symplectique, problème sur lequel nous reviendrons plus loin.

Hormis l'obstruction topologique concernant l'existence d'une homotopie régulière quelconque, la remarque précédente met en évidence une obstruction, encore incomprise, venant de la structure symplectique. D'ailleurs, l'engouffrement des sous-variétés lagrangiennes n'est pas possible en général, car il implique qu'une sous-variété lagrangienne

Mots-clés : Homotopie régulière - Engouffrement - Géomérie symplectique.

compacte L, de caractéristique d'Euler nulle, peut être disjointe d'elle-même par isotopie hamiltonienne. Or ce résultat est connu comme faux, par exemple si L est la section nulle de son cotangent et si L est plate [Conley-Zehnder-Chaperon]; sans cette hypothèse, voir [Hofer].

Nous allons établir que, si $\dim \Delta < n$, le problème posé ne recèle aucune obstruction de nature symplectique.

THÉORÈME I. — *Soient* U *un ouvert de* (M^{2n},ω) *et* $f: \Delta \times [0,1] \to M$ *une homotopie régulière telle que* $f_1(\Delta) \subset U$. *Si* $\dim \Delta < n$, *il existe une homotopie régulière inactive* φ, *avec* $\varphi_0 = f_0$ *et* $\varphi_1(\Delta) \subset U$, *homotope à* f *parmi les homotopies régulières partant de* f_0 *et finissant dans* U. *De plus, si* f *est déjà inactive au voisinage de* $\partial\Delta$, *on peut prendre* $\varphi = f$ *sur un voisinage de* $\partial\Delta$.

Remarques. — 1) Le problème est du type « système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles » : φ' de rang maximum et $\omega(\phi,\varphi') = 0$. Mais, à cause de la linéarité en ϕ, il n'apparaît pas pouvoir relever de la technique d'intégration convexe [Gromov-Spring]. D'autre part, comme dans les problèmes de Cauchy en théorie des EDP non linéaires du 1er ordre, on est confronté à des problèmes de fronce (abaissement du rang de φ').

2) Dans les conditions de dimension envisagées, on peut de façon équivalente, par position générale, dire que f est une homotopie ou une isotopie. Mais nous avons le souci de localiser autant que possible la nécessité de l'hypothèse dimensionnelle, c'est pourquoi nous avons choisi l'énoncé sous cette forme.

Mai 1985. Lorsque la variété symplectique ambiante est un espace cotangent, la théorie d'intersection des sous-variétés lagrangiennes est mieux comprise [Laudenbach-Sikorav]. Pour étendre ces résultats à une variété symplectique générale, il est tentant d'essayer des méthodes de « topologie symplectique », par exemple, des méthodes d'engouffrement. Le présent travail est une première étape dans ce programme; il précise qu'il n'y a pas d'obstruction à l'engouffrement des polyèdres de dimension $< n$.

1. Préliminaires.

Commençons par quelques remarques élémentaires sur les homotopies régulières inactives.

1.1. Si H est une hypersurface immergée contenant Δ et si ϕ est dans la direction des caractéristiques de H (lignes dirigées par le noyau de la forme induite par ω), on a évidemment $\omega(\phi,\varphi') = 0$. Réciproquement, une homotopie super-régulière inactive est toujours de ce type : le long de $\varphi(\Delta \times [0,1])$, on a le champ d'hyperplans définis par $\omega(\phi,-) = 0$, qui est tangent à cette sous-variété immergée; une hypersurface, contenant $\varphi(\Delta \times [0,1])$ et tangente à ce champ d'hyperplans, répond à la question [un champ d'hyperplans le long d'une sous-variété, tangents à cette sous-variété, est toujours intégrable. En effet ce champ définit un sous-fibré du fibré normal à la sous-variété et l'espace total du sous-fibré fournit l'hypersurface cherchée.]

1.2 Considérons l'espace étendu $\tilde{M} = M \times [0,1] \times \mathbf{R}$, $\tilde{\omega} = \omega + dt \wedge dh$. Soit φ une homotopie régulière inactive à valeurs dans $\tilde{M}$, avec $\varphi_t(\Delta) \subset M \times \{t\} \times \mathbf{R}$. L'homotopie est super-régulière et une hypersurface H, construite comme en 1.1, est nécessairement transverse à $\dfrac{\partial}{\partial h}$ car ce vecteur ne peut être $\tilde{\omega}$-orthogonal à un vecteur transverse aux feuilles $M \times \{t\} \times \mathbf{R}$. Ainsi, H apparaît comme le graphe d'un hamiltonien multiforme $H(x,t)$. Soit ψ_t la projection de φ_t dans M; $\dot{\psi}_t(x)$ est le gradient symplectique pour ω de la fonction H_t au point $\psi_t(x)$. On voit ainsi apparaître la notion d'homotopie régulière hamiltonienne dans M, dont le « graphe » dans l'espace étendu donne lieu à une homotopie super-régulière inactive.

DÉFINITION. — *Une homotopie régulière* $\psi_t : \Delta \to (M^{2n},\omega)$ *est dite hamiltonienne s'il existe* V^{2n}, *variété contenant* Δ *en son intérieur, un prolongement de rang maximum* $\bar{\psi}_t$ *de* ψ_t *à* V *et une fonction* $H : V \times [0,1] \to \mathbf{R}$ *tels que :*

$$(1) \qquad \bar{\psi}_t^* \left[i\left(\frac{\partial \bar{\psi}_t}{\partial t}(x)\right)\omega \right] = - dH_t(x),$$

pour tout $x \in \Delta$. *Noter que* $\bar{\psi}_t^*\omega = \bar{\psi}_0^*\omega$ *et que l'immersion* $V \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \tilde{M}$, *donnée par* $(x,t,h) \mapsto (\bar{\psi}_t(x),t,h+H_t(x))$, *est symplectique en munissant la source de la forme symplectique* $\bar{\psi}_0^*\omega + dt \wedge dh$.

Une homotopie régulière ψ_t est hamiltonienne si, et seulement si, pour tout 1-cycle γ de Δ, l'aire balayée par $\psi_t(\gamma)$ est identiquement nulle, l'aire (algébrique) étant donnée par intégration de ω. La fonction H_t sera

appelée le *hamiltonien à la source;* sa connaissance ne permet pas de déterminer l'homotopie. Noter que, pour $\Delta = M$, la fonction qui entre dans l'équation de Hamilton, dont ψ_t est solution, est $(\psi_t)_*(H_t)$ et non H_t.

Si ψ_t est inactive, elle est hamiltonienne. D'autre part, ψ_t, hamiltonienne, et son hamiltonien à la source H_t donnent une homotopie régulière inactive dans $\tilde{M}$:

$$\varphi_t(x) = (\psi_t(x), t, H_t(x)).$$

La simplicité d'écriture de cette formule justifie la considération du hamiltonien à la source de préférence au hamiltonien usuel.

Une isotopie hamiltonienne de plongements d'une sous-variété Δ dans M, en particulier une isotopie inactive, se prolonge en une isotopie hamiltonienne ambiante : il s'agit de prolonger à M le 1-jet de la fonction $(\psi_t)_*(H_t)$ donné le long de $\psi_t(\Delta)$.

En revanche, l'extension d'une homotopie régulière hamiltonienne ne peut se faire « mollement ».

1.3. Une partie C de l'espace étendu $\tilde{M}$ est un cylindre si elle est réunion de segments dirigés par $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et limités par deux valeurs t_0 et t_1 de t. Ce cylindre est dit convexe s'il est réunion de segments dirigés par $\dfrac{\partial}{\partial h}$ et rencontrant $M \times [0,1] \times \{0\}$. Pour $x \in M$, on note $C_-(x)$ et $C_+(x)$ les bornes du plus grand intervalle tel que $\{x\} \times \{t\} \times [C_-(x), C_+(x)]$ soit contenu dans C.

Si le hamiltonien à la source H d'une homotopie régulière hamiltonienne ψ_t vérifie $H(x,t) \in]C_-(\psi_t(x)), C_+(\psi_t(x))[$, on dira que l'homotopie régulière ψ est C-bornée.

1.4. Soient V une variété compacte à bord, $\dim V = \dim M$, $f : V \to M$ une immersion et $H : V \times [0,1] \to \mathbf{R}$ un hamiltonien nul au bord de V pour tout $t \in [0,1]$. Alors, il existe une isotopie φ_t de V, laissant fixes les points du bord, hamiltonienne pour la forme $t^*\omega$ avec H_t comme hamiltonien au sens usuel.

Preuve. — On résoud l'équation de Hamilton. Comme les points du bord sont à l'équilibre, d'une part le flot du hamiltonien laisse V invariant, d'autre part les solutions existent jusqu'à $t = 1$ par compacité de V. □

Si H est donné sur $V \times [0,\varepsilon]$, nul au bord de V et si $H(x,0) \in]C_-(f(x)),C_+(f(x))[$, alors on peut prolonger le germe de H à $V \times [0,1]$ de sorte que la contrainte soit satisfaite à chaque instant et que $H(x,t)$ soit identiquement nulle au voisinage de $t = 1$. En conséquence de ces deux faits, on a :

LEMME. — *Un germe en $t = 0$ d'homotopie régulière hamiltonienne de V dans M, qui laisse fixes les points du bord et qui est C-bornée, se prolonge en une homotopie régulière du même type jusqu'à $t = 1$ et stationnaire au voisinage de $t = 1$.*

1.5. Soit $\psi : \Delta \times [0,1] \to M$ une homotopie régulière hamiltonienne C-bornée. Soit $f : V \to M$ un voisinage de $\psi_0(\Delta)$. Pendant un temps assez petit, $\psi_t(\Delta)$ reste dans $f(V)$ et ψ_t est la restriction à Δ d'une homotopie régulière hamiltonienne de V, C-bornée et de hamiltonien nul au bord.

Preuve. — Pour ε petit et $t \leqslant \varepsilon$, on peut écrire $\psi_t = f \circ j_t$ où j_t est une isotopie de plongements de Δ dans int V, hamiltonienne pour $f^*\omega$. Le hamiltonien (usuel) H_t de cette isotopie, défini le long de $j_t(\Delta)$ vérifie $H_t(j_t(x)) \in]C_-(\psi_t(x)),C_+(\psi_t(x))[$. Par partition de l'unité, on peut prolonger H_t en une fonction sur V vérifiant $H_t(x) \in]C_-(f(x)),C_+(f(x))[$ et $H_t(x) = 0$ si $x \in \partial V$. Ainsi j_t se prolonge en une isotopie ambiante $\bar{j}_t$ et $f \circ \bar{j}_t$ est la solution cherchée.

□

En conséquence, on a

LEMME. — *Si Δ est un collier $\Delta_0 \times [0,1]$, un germe en $\Delta_0 \times \{0\}$ d'homotopie régulière hamiltonienne C-bornée, se prolonge, pour un temps $\varepsilon > 0$, en une homotopie régulière, hamiltonienne C-bornée de Δ, laissant fixes les points voisins de $\Delta_0 \times \{1\}$.*

1.6. *Principe de freinage.* Soient $\lambda(x,t)$ une fonction à valeurs dans $[0,1]$ et φ une homotopie régulière inactive. On pose $\psi(x,t) = \varphi(x,\lambda(x,t)t)$. On a $\omega(\psi',\dot{\psi}) = 0$, mais en général ψ n'est plus une homotopie régulière, sauf si φ est elle-même super-régulière.

COROLLAIRE. — *Si Δ_0 est une sous-variété compacte de codimension 0 dans Δ, alors toute homotopie super-régulière inactive de Δ_0 se prolonge en homotopie régulière inactive de Δ.*

1.7. Nous finissons ce paragraphe de préliminaires par un énoncé sur les homotopies super-régulières, ce qui donne l'occasion de rappeler sous forme d'une figure la construction fondamentale de la théorie des immersions de Gromov.

PROPOSITION. — *Soient* $\varphi : \Delta \times [0,1] \to M$ *une homotopie régulière et* U *un voisinage de* $\varphi_1(\Delta)$. *On suppose qu'il existe, le long de* φ_0 *deux champs de vecteurs* X *et* Y, *indépendants dans le fibré normal à* φ_0. *Alors* φ *est déformable, à travers les homotopies régulières de* φ_0 *finissant dans* U, *jusqu'à une homotopie super-régulière* ψ *telle que* $X = \dot{\psi}|_{t=0}$.

Démonstration. — Par la théorie des fibrés, les champs X et Y se prolongent le long de φ, en champs indépendants dans le fibré normal à φ_t. Pour simplifier les notations, on va supposer que M est un espace numérique. Donc pour un $\varepsilon > 0$ uniforme et tout $\theta \in [0,1]$, $\gamma^\theta : \Delta \times [0,\varepsilon] \to M$, défini par $\gamma^\theta(x,t) = \varphi_\theta(x) + tX$, est une homotopie super-régulière. Une perturbation d'homotopie super-régulière l'est encore. Alors, par compacité de l'intervalle, il existe une suite $\theta_0 = 0$, $\theta_1, \ldots, \theta_n = 1$ et des homotopies super-régulières $\Gamma_k : \Delta \times [0,\varepsilon] \to M$ telles que Γ_k coïncide avec γ^{θ_k} au voisinage de $\Delta \times \{\varepsilon\}$ et avec $\gamma^{\theta_{k+1}}$ au voisinage de $\Delta \times \{0\}$, pour $k = 0, \ldots, n-1$.

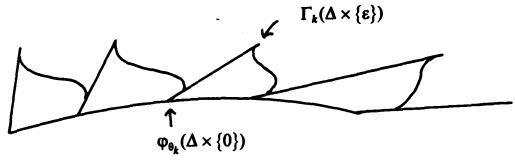

Fig. 1.

La mise bout à bout des $\gamma^{\theta_k} * \Gamma_k$ donne une homotopie régulière, super-régulière par morceaux, partant de φ_0 et finissant dans U. Vient alors la fameuse construction de la boucle de Gromov [Haefliger]. Quel que soit $\eta \in]0,\varepsilon[$, il y a une isotopie du segment $\gamma^\theta(x,[0,\varepsilon])$, dans le plan engendré par X et Y, laissant fixes les points voisins de $x \times \{0\}$ et de $x \times \{2\eta\}$ et poussant $x \times \{\eta\}$ sur $x \times \{\varepsilon\}$ sans retournement de la tangente, comme il est indiqué sur la figure 2.

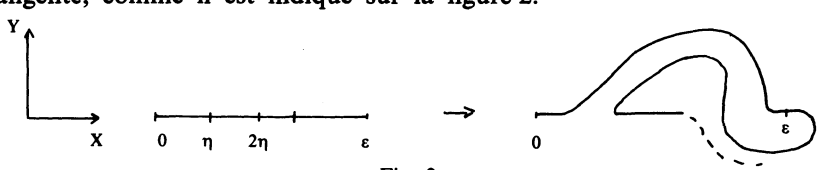

Fig. 2.

On choisit η tel que Γ_k coïncide avec $\gamma^{\theta_{k+1}}$ sur $[0,2\eta]$. La construction ci-dessus appliquée à $\gamma^{\theta_{k+1}}$ induit une déformation de $\Gamma_k | \Delta \times [\eta,\varepsilon]$ jusqu'à Γ'_k super-régulière, reliant un germe de Γ_k à un germe de Γ_{k+1}.

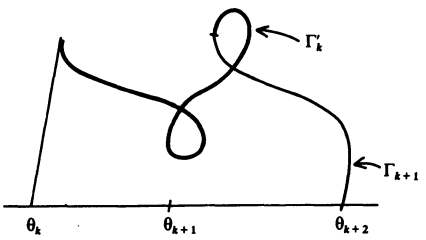

Fig. 3.

La figure 3 représente la mise bout à bout de Γ'_k et de Γ_{k+1}; c'est une homotopie super-régulière. On fera une construction ad hoc pour Γ'_0, de sorte que celle-ci parte de $\varphi_0(\Delta)$ dans la direction X. Alors, en mettant bout à bout tous les Γ'_k, on obtient l'homotopie super-régulière cherchée. □

2. Énoncés auxiliaires.

2.1. THÉORÈME I (k,n), où k et n sont deux entiers, $k \leqslant n-1$. — *Son énoncé est celui du théorème I, quelles que soient* M, *variété symplectique de dimension* $2n$ *et* Δ, *variété compacte de dimension* k.

2.2. Une boîte de travail B est un domaine compact de M, muni d'une fonction θ sans point critique à valeurs dans $[0, 1]$; B est limité par $\theta = 0$, $\theta = 1$ et une hypersurface latérale Σ transverse aux niveaux de θ. On notera S_t le niveau « $\theta = t$ » dans B.

Si φ est une homotopie régulière vérifiant $\varphi_t(\Delta) \subset S_t$ (en particulier φ est super-régulière), on dira que l'homotopie est adaptée à la boîte de travail. Si en plus φ est inactive, $\varphi_t(\Delta)$ n'est nulle part tangent aux lignes caractéristiques de S_t.

2.3. THÉORÈME II (k,n). — *Soit* B *une boîte de travail de dimension* $2n$. Soit Δ *une sous-variété compacte de dimension* $k < n$, *immergée dans* $\operatorname{int} S_0$ *et nulle part tangente aux lignes caractéristiques. Alors, tout*

germe d'homotopie régulière inactive le long de $\partial\Delta$, *adaptée à la boîte de travail, se prolonge à* Δ. *De plus, on peut imposer que* $\dot{\varphi}|t = 0$ *soit un quelconque champ de vecteurs le long de* Δ, ω*-orthogonal à* Δ.

Si $\partial\Delta$ est vide, le théorème affirme l'existence de φ.

2.4. THÉORÈME III (k,n), version locale du précédent. — *Son énoncé est le même que ci-dessus, avec* $M = \mathbf{R}^{2(n-1)} \times \mathbf{R}^2$, $\omega = \omega_0 + d\theta \wedge dh$, *où* ω_0 *est la forme symplectique canonique de* $\mathbf{R}^{2n-2}$, θ *étant donc l'une des coordonnées, et* h *sa coordonnée « duale ».* $[\{\theta,h\} = 1$ *et le crochet de Poisson de* h *avec les autres coordonnées est nul.] On suppose en outre que* B *est un cylindre, dirigé par* $\frac{\partial}{\partial\theta}$ *et convexe par rapport à la coordonnée* h, *au sens précisé en* 1.3. *Enfin,* Δ *est un k-disque.*

La démonstration met en jeu une récurrence tournant sur l'ensemble des trois théorèmes. Le début de la récurrence est le théorème II (0,1) qui est trivial.

2.5. Théorème II $(k,n) \Rightarrow$ Théorème I (k,n).

Au départ, il est donné une homotopie régulière $\psi : \Delta \times [0,1] \to M$ avec $\psi_1(\Delta)$ contenu dans l'ouvert U. Dans un premier temps, on fait l'hypothèse suivante :

(H) Le long de $\psi_0(\Delta)$, il existe deux champs de vecteurs X et Y, ω-orthogonaux à Δ, indépendants dans le fibré normal à ψ_0 et tels que $\omega(X,Y) = 1$.

D'après 1.7 (si on veut éviter d'utiliser ici la restriction dimensionnelle), on peut remplacer ψ par une homotopie super-régulière vérifiant $Y = \dot{\psi}|_{t=0}$. puis M par un voisinage tubulaire de ψ, ce qui ramène au cas où ψ est un plongement. On prend pour S_0 le germe d'hypersurface le long de $\psi_0(\Delta)$ tangent au champ d'hyperplans défini par $\omega(X,-) = 0$. Le champ Y est transversal à S_0. Soit $\bar{\psi}$ un prolongement de ψ à un voisinage de Δ. Quitte à rétrécir S_0 autour de $\psi_0(\Delta)$, la collection des $S_t = \bar{\psi}_t(S_0)$ définit une boîte de travail dont la fonction θ est le temps. On peut donc appliquer le théorème II (k,n) qui fournit l'homotopie régulière inactive cherchée.

Dans le cas général, on observe que l'hypothèse (H) est toujours vérifiée ponctuellement donc localement : si E est un espace vectoriel symplectique, F un sous-espace vectoriel et F* son ω-orthogonal, alors $F^*/F^* \cap F$ est symplectique, non réduit à 0 si $2 \dim F < \dim E$. Par

conséquent, il existe une décomposition en anses de Δ, assez fine pour que le long de chaque anse $\psi_0(A_i)$, il existe des champs X_i et Y_i vérifiant l'hypothèse (H). On rappelle qu'une anse d'indice r d'une variété de dimension k est un produit $D^r \times D^{k-r}$; le bord inférieur $\partial_- A$ est $\partial D^r \times D^{k-r}$, le bord supérieur est $D^r \times \partial D^{k-r}$. On procède alors à la construction de l'homotopie régulière inactive, anse après anse, par indice croissant.

Disons qu'après les premières opérations on soit ramené au cas où $\psi_0(\partial_- A_i) \subset U$. Par le théorème de Hirsch-Gromov sur les immersions [Haefliger], on peut supposer que $\psi | A_i \times [0,1]$ est une homotopie régulière de A_i telle que $\psi_1(A_i) \subset U$, $\psi_t(\partial_- A_i) \subset U$ pour tout $t \in [0,1]$.

Une homotopie régulière inactive préserve la géométrie symplectique, puisqu'elle se prolonge en une homotopie régulière hamiltonienne d'un voisinage (1.2). Donc notre $\psi_0(A_i)$ vérifie encore l'hypothèse (H) comme sa position initiale. L'hypothèse (H) permet, comme précédemment, de construire une boîte de travail dont la feuille S_0 contient $\psi_0(A_i)$. Le théorème II (k,n) fournit une homotopie super-régulière φ_t de A_i, inactive et adaptée à la boîte de travail; $\varphi_1(A_i) \subset U$ et, grâce à la version relative, on assure $\varphi_t(\partial_- A_i) \subset U$ pour tout $t \in [0,1]$.

Comme φ_t est super-régulière, on a le droit de la freiner (1.6), ce qui permet de la prolonger à Δ tout entier. On obtient ainsi $\bar{\varphi}_t^i$, homotopie régulière inactive de Δ avec $\bar{\varphi}_1^i(A_i) \subset U$ et $\bar{\varphi}_t^i\left(\partial_- A_i \bigcup_{j<i} A_j\right) \subset U$ pour tout $t \in [0,1]$. La mise bout à bout de tous les $\bar{\varphi}^i$ fournit l'homotopie régulière inactive cherchée, à ceci près qu'il y a des discontinuités de la vitesse car $\dot{\bar{\varphi}}^i | t = 1 \neq \dot{\bar{\varphi}}^{i+1} | t = 0$. On corrige cela en freinant les $\bar{\varphi}^i$ de sorte que la vitesse soit nulle au voisinage de $t = 0$ et de $t = 1$. Noter qu'en freinant $\bar{\varphi}^i$ on ne sort pas des homotopies régulières car $\bar{\varphi}^i$ est elle-même obtenue en freinant une homotopie super-régulière. □

2.6. PROPOSITION. — *Pour $k < n$, si $\varphi : \Delta^k \times [0,1] \to M^{2n}$ est une homotopie régulière hamiltonienne qui induit un plongement de $\Delta^k \times \{0\}$ et une isotopie d'un voisinage collier Γ de $\partial\Delta^k$, alors φ est approchable* rel. $A = \Delta^k \times \{0\} \cup \Gamma \times [0,1]$ *par une isotopie hamiltonienne.*

En particulier, si φ est inactive, il y a une approximation par une isotopie hamiltonienne dont le hamiltonien est aussi C^0-petit que l'on veut sur $\Delta^k \times [0,1]$.

Démonstration. — Introduisons l'espace métrique complet HH des homotopies hamiltoniennes coïncidant avec φ sur A; une homotopie singulière ψ appartient à HH si, pour tout 1-cycle γ de Δ^k, l'aire balayée par $\psi_t(\gamma)$ est nulle. On note HRH l'ouvert de HH formé des homotopies régulières hamiltoniennes; donc HRH a la propriété de Baire.

Plongeons HRH dans $C^\infty((\Delta^k \times \Delta^k - \text{diag}) \times [0,1], M \times M \times [0,1])$ par la formule $(x,y,t) \mapsto (\psi_t(x), \psi_t(y), t)$. La topologie induite par ce prolongement coïncide avec la topologie initiale de HRH. La propriété (*) ci-dessous implique que la famille HRH est transversale dans son ensemble à $\text{diag}(M) \times [0,1]$; alors [Abraham-Robbin], presque tout $\psi \in \text{HRH}$ est transversale à cette sous-variété, ce qui signifie que presque tout $\psi \in \text{HRH}$ est une isotopie. En effet, vu les dimensions, la transversalité sur $\text{diag}(M) \times [0,1]$ signifie que cette sous-variété est évitée.

(*) Soit $\psi \in \text{HRH}$; soit X un vecteur tangent à M au point $\psi_\tau(a) = \psi(a,\tau)$, avec $(a,\tau) \notin A$. Alors, il existe un chemin ψ^u dans HRH avec $\left.\dfrac{\partial \psi^u}{\partial u}\right|_{u=0} (a,\tau) = X$.

Vérification de (*). Considérons pour chaque t un champ de vecteurs $\tilde{X}_t$, hamiltonien sur le voisinage tubulaire N_t de ψ_t, nul au voisinage du bord $\partial\Delta_k \times \{t\}$; pour t voisin de 0, on prend $\tilde{X}_t = 0$. Une telle famille de champs $\tilde{X}_t$ existe avec $\tilde{X}_\tau(\psi(a,\tau)) = X$. Soit alors $f_t(x,u)$ le flot local de $\tilde{X}_t$, où u est le paramètre du flot. Par compacité de $\Delta^k \times [0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, tout $x \in \Delta^k$, $f_t(\psi(x,t),u)$ existe pour tout $u \in [0,\varepsilon]$. On pose $\psi^u(x,t) = f_t(\psi(x,t),u)$. Évidemment, ψ^u coïncide avec ψ sur $\Delta^k \times \{0\} \cup \Gamma$. Pourquoi $\psi^u \in \text{HRH}$? Comme ω est fermée, l'aire balayée par un cycle γ sous ψ^u pour t variant de 0 à T est la somme de celle balayée sous ψ pour t variant de 0 à T et de celle balayée sous le flot f_T jusqu'au temps u, qui sont deux aires nulles. □

3. Du théorème local au théorème global.

Nous prouvons dans ce paragraphe que les théorèmes II (j,n) pour $j < k$, et le théorème III (k,n) impliquent le théorème II (k,n).

3.1. *Atlas cylindrique recouvrant la boîte de travail.*

(A1) Les cartes choisies linéarisent à la fois ω et θ. On rappelle qu'une telle linéarisation est possible au voisinage de chaque point où θ

est non singulière d'après l'une des preuves classiques du théorème de Darboux [Duistermaat]. Dans une telle carte, on note h la coordonnée duale de θ.

(A2) En tout point de Σ, $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ est transverse à Σ et rentre dans la boîte de travail. A cause de la transversalité de Σ aux niveaux de θ, cette condition est facile à satisfaire au voisinage de chaque point de Σ. Il suffit d'ailleurs de le faire ponctuellement, ce qui devient un problème d'algèbre linéaire. Soient θ une coordonnée de (E,ω), X_θ un vecteur dirigeant le noyau de la forme induite par ω sur l'hyperplan $\theta = 0$; l'orientation du noyau est choisie en sorte que $\omega(X_\theta,X) > 0$ implique $d\theta(X) > 0$; on choisit alors $X_h = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ dans l'hyperplan affine $\omega(X_\theta,X) = 1$, lequel rencontre les deux régions séparées par un hyperplan Σ transverse à $\theta = 0$.

On commence par recouvrir la boîte de travail par un système fini de telles cartes. Dans une carte, on appelle cylindre un domaine limité par deux niveaux de θ et une hypersurface latérale éventuellement à coins, tangente à $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$.

(A3) Les cylindres considérés sont convexes, au sens de 1.3, vis-à-vis de la coordonnée h. Cette propriété est liée à la carte choisie.

Par compacité des S_t, puis de $[0,1]$, on construit un raffinement du recouvrement par cartes, formés de cylindres convexes vérifiant en outre les deux conditions suivantes.

(A4) Pour deux cylindres C_i, $i = 1,2$, compris entre les niveaux a_i et b_i, les intervalles $]a_1,b_1[$ et $]a_2,b_2[$ sont ou bien disjoints ou bien égaux.

(A5) Si des cylindres $C_1, \ldots, C_q$ sont compris entre les niveaux a et b et si $C_1 \cap \ldots \cap C_q \neq \varnothing$, alors il existe un point d'intersection intérieur à tous ces cylindres et le type topologique de $S_t \cap C_1 \cap \ldots \cap C_q$ est constant pour $t \in [a,b]$.

Le recouvrement R ainsi construit s'appelle un atlas cylindrique. On dit qu'un cylindre de R est intérieur s'il ne rencontre pas le bord latéral Σ de la boîte de travail B. On note $t_0 = 0$, $t_1, \ldots, t_m = 1$ la suite croissante des niveaux limitant les cylindres de R. La bande $B[t_i,t_{i+1}]$ est le domaine de B limité par les niveaux indiqués de la fonction θ. La

propriété suivante n'est pas automatique :

(A6) (propriété d'escalier). Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, les cylindres intérieurs de la bande $B[t_i,t_{i+1}]$ recouvrent la trace X^i des cylindres intérieurs de la bande $B[t_{i-1},t_i]$ sur S_{t_i}.

LEMME. — *Il existe un atlas cylindrique* R′ *plus fin que* R *vérifiant* (A6).

Preuve. — On suppose que (A6) est vérifiée dans $B[0,t_i]$. On va modifier le système de cylindres dans la bande $B[t_i,t_{i+1}]$ pour y gagner (A6). La modification se fera par subdivision de cet intervalle et ajout de cylindres intérieurs.

D'une façon générale, un système de cylindres intérieurs vérifiant (A3)-(A6) est un escalier. En subdivisant un escalier par un nombre fini de niveaux de θ, on obtient encore un escalier. La réunion de deux escaliers, qui possèdent la même suite de niveaux bornant les cylindres, vérifie (A6); c'est donc un escalier à condition que (A5) soit vérifié.

Soit maintenant $C_1, \ldots, C_q$ les cylindres de R dans la bande $B[t_i,t_{i+1}]$, qui sont non intérieurs. Soit $X_1^i = C_1 \cap X^i$ et Z_1 la frontière dans int C_1 de la réunion des cylindres intérieures de R. On commence par mettre des petits cylindres intérieurs couvrant $X_1^i \cup Z_1$; on les prend cylindriques convexes au sens de la carte de C_1. La petitesse assure la constance du type topologique des intersections avec les cylindres de R, dans chaque niveau compris entre deux bornes d'un même cylindre; on sous-entend que R est subdivisé par les niveaux des sous-cylindres construits dans C_1. Ainsi on a un système de cylindres vérifiant (A5). Grâce à (A2), on complète immédiatement cette figure, sans ajouter de nouveaux niveaux, par des sous-cylindres de C_1 ne rencontrant ni Σ ni Z_1, jusqu'à former un escalier R_1; noter que (A5) est automatiquement vérifiée car les derniers cylindres ajoutés ne rencontrent pas ceux de R et que, pour des cylindres d'une même carte, (A5) est automatique.

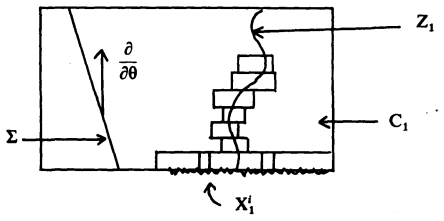

Fig. 4.

Ensuite, on travaille dans C_2. Soit $X_2^i = C_2 \cap X^i$ et Z_2 la frontière dans int C_2 de la réunion des cylindres intérieurs; comme précédemment, on construit un escalier R_2 contenant R_1. Les cylindres intérieurs de R_2 couvrent $X_1^i \cup X_2^i$, etc. Ainsi, en remplaçant R par R_q dans la bande $B[t_i,t_{i+1}]$, on obtient un escalier dans $B[0,t_{i+1}]$. □

Finalement, on obtient :

PROPOSITION. — *Étant donné un compact* K *dans* $B - \Sigma$, *il existe un atlas cylindrique vérifiant* (A6) *et dont les cylindres intérieurs recouvrent un voisinage de* K.

3.2. Entrons maintenant dans la démonstration du théorème II (k,n).

Soit φ une homotopie régulière inactive d'un collier V_0 de $\partial\Delta$, avec $\varphi_t(V_0) \subset \text{int } S_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Soit K la réunion de Δ et de l'image de φ. On travaille alors avec l'atlas cylindrique donné par la proposition ci-dessus.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une bande. Soient $C_1, \ldots, C_q$ les cylindres intérieurs de l'atlas choisi. On triangule Δ de sorte que chaque simplexe σ soit contenu dans $\text{int}_{S_0}(C_i \cap S_0)$ pour au moins un $i = i_\Delta(\sigma)$. D'autre part, on décompose $V_0 \times [0,1]$ de la façon suivante. On choisit une partition de l'intervalle $t'_0 = 0$, $t'_1, \ldots, t'_\ell$ et pour chaque t'_j une triangulation de V_0 vérifiant :

a) pour chaque simplexe σ, il existe $i = i_V^j(\sigma)$ tel que, pour tout $t \in [t'_j,t'_{j+1}]$, $\varphi_t(\sigma) \subset \text{int}_{S_t}(C_i \cap S_t)$;

b) $V_0 \times \{0\}$ est un sous-polyèdre de $\Delta \times \{0\}$, et le morphisme de finesse i_Δ induit $i_{V_0}^0$.

On construit d'abord le prolongement Φ du germe de φ pour $t \in [0,t'_1]$. Pour σ, simplexe de $\Delta \times \{0\}$, si $\tau_1, \ldots, \tau_r$ sont les simplexes qui le contiennent, on exigera :

$$(*) \qquad \Phi_t(\sigma) \subset \bigcap_{j=1}^{r} \text{int}_{S_t}(C_{i_\Delta(\tau_j)} \cap S_t).$$

Cette condition est satisfaite par φ_t et les simplexes de $\partial\Delta$.

Noter que si l'homotopie régulière inactive $\Phi_t(\sigma)$ est construite et si $\dot{\Phi}|t = 0$ est ω-orthogonal à Δ, alors Φ_t se prolonge à un voisinage de

σ. On voit que les théorèmes II (j,n), $j < k$, fournissent une homotopie régulière inactive Φ, définie sur un voisinage dans Δ du $(k-1)$-squelette pour $t \in [0,t'_1]$ et prolongeant le germe de φ le long du bord. D'autre part, la condition (*) revient à astreindre chaque simplexe à se déplacer dans une certaine boîte de travail, d'après (A5). Donc, si Φ est construite de proche en proche sur les squelettes de dimension inférieure, on peut garantir (*) pour tous les simplexes de dimension $< k$.

Soit alors σ un k-simplexe de Δ. Par l'hypothèse (*), Φ est donnée sur un voisinage de $\partial\sigma$ à valeurs dans $C_{i_\Delta(\sigma)}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème III (k,n) (dit théorème local) pour prolonger Φ à tout σ, toujours à valeurs dans $C_{i_\Delta(\sigma)}$.

Une fois que $\Phi_{t'_1}$ est construite, on choisit un nouveau collier V_1 de $\partial\Delta$ sur lequel le germe φ est défini et tel que $\varphi_{t'_1}|V_1 = \Phi_{t'_1}|V_1$. On le prend comme sous-polyèdre d'une subdivision de la triangulation de $V_0 \times \{t'_1\}$, de sorte que la condition *a)* est automatiquement satisfaite par ses simplexes. Puis, on triangule Δ de façon plus fine que le recouvrement par les cylindres et satisfaisant *b)*. On peut alors poursuivre le prolongement de Φ pour $t \in [t'_2,t'_2]$. Et ainsi de suite.

Lorsque l'atlas cylindrique comporte plusieurs bandes limitées par les niveaux $t_1, t_2, \ldots$, la construction précédente fournit Φ_t pour $t \in [0,t_1]$. On observe qu'un voisinage de $\Phi_{t_1}(\Delta)$ est recouvert par les cylindres intérieurs de la première bande. D'après (A6), il y a aussi un voisinage de $\Phi_{t_1}(\Delta)$ recouvert par les cylindres intérieurs de la deuxième bande, ce qui permet de poursuivre le prolongement sans toucher à l'atlas. □

4. Démonstration du théorème local.

4.1. Nous allons démontrer le théorème III (k,n) à partir du théorème I $(k-1,n-1)$. Cette récurrence nous oblige à prendre $k < n$, car le théorème I (0,1) est trivialement vrai alors que le théorème II (1,1) est toujours faux, étant donné que $\Delta^1 \subset M^2$ est lagrangienne. En grande dimension, il se pourrait que le théorème I (n,n) soit vrai avec quelques hypothèses sur Δ; par exemple aucun des plans tangents à Δ n'est lagrangien, ce qui est vrai génériquement pour n assez grand.

L'ingrédient géométrique de notre démonstration est l'astuce de la boucle de Gromov pour le théorème de classification des immersions (voir 1.7). Cette astuce est adaptée ici au contexte symplectique.

4.2. Pour le théorème local, on travaille dans un espace donné comme étendu $\mathbf{R}^{2n-2} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, les deux dernières coordonnées étant θ et h; $\mathbf{R}^{2n-2}$ est muni de la forme symplectique canonique ω_0. Plus précisément, on est limité à un cylindre C, dirigé par $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et convexe par rapport à la coordonnée h (1.3). On pose $N = \text{int}\,(C \cap \langle\langle h=0, \theta=0 \rangle\rangle)$. L'homotopie régulière inactive cherchée φ_t se projette en une homotopie régulière $\psi_t : \Delta \to N$, hamiltonienne et C-bornée. Comme $\dim \Delta = \frac{1}{2}\dim N$ est autorisé, on voit que, même génériquement, ψ_t peut avoir des points doubles.

Les données au bord sont les suivantes : $\psi_0(\Delta)$ ainsi que ψ_t, $t \in [0,1]$, au voisinage de $\partial\Delta$; un hamiltonien à la source $H(x,t)$ pour $t = 0$, $x \in \Delta$, et pour tout $t \in [0,1]$, x voisin de $\partial\Delta$. Il s'agit de prolonger ψ et H à $\Delta \times [0,1]$ pour former une homotopie régulière hamiltonienne C-bornée.

4.3. *Solution locale dans le temps.*

Puisque $\frac{\partial}{\partial h}$ n'est nulle part tangent à $\varphi_0(\Delta)$, il n'y a aucune obstruction à construire un germe d'hypersurface Σ le long de $\varphi_0(\Delta)$, immergée dans l'espace étendu transversalement à $\frac{\partial}{\partial h}$; en effet, en chaque point, l'espace des hyperplans tangents à $\varphi_0(\Delta)$ et transverses à $\frac{\partial}{\partial h}$ est contractile. En poussant $\varphi_0(\Delta)$ le long des caractéristiques de Σ, on obtient la solution cherchée.

De plus, pour la même raison, on peut recoller Σ à un germe d'hypersurface Σ_0, donnée le long de $\varphi(\partial\Delta \times [0,1])$ dont les caractéristiques portent les trajectoires $\varphi_t(x)$ pour x voisin de $\partial\Delta$.

□

4.4. *La microcompressibilité* (terminologie de Gromov).

On fixe une fois pour toutes un collier $\Gamma = \partial\Delta \times [0,1]$ de $\partial\Delta$ dans Δ sur lequel ψ_t est défini à valeurs dans N. Le point courant est noté $x = (y,s)$, $y \in \partial\Delta$, $s \in [0,1]$; $(y,0) \in \partial\Delta$.

LEMME. — *Il existe* $\varepsilon > 0$, *un voisinage tubulaire* V *du collier* Γ *dans* N *et une homotopie régulière hamiltonienne, C-bornée,* $f_t : V \to N$,

$t \in [0,2\varepsilon]$, *avec un hamiltonien à la source noté* K_t *et vérifiant :*

— $K_t(x) = 0$ *pour tout* $x \in V$, *assez voisin de* $\partial\Delta \times \{1\}$ *et tout* $t \in [0,2\varepsilon]$;

— *le germe de* (f_t, K_t) *coïncide avec celui de* (ψ_t, H_t) *le long de* $\partial\Delta \times \{0\}$.

C'est le lemme 1.5. Notons U un voisinage tubulaire de $\partial\Delta \times \{1\}$ dans V où $K_t \equiv 0$. Dans ce qui suit, on poursuit avec la même situation.

PROPOSITION. — *Soit* $0 < \eta < \frac{1}{2}$. *Il existe une homotopie régulière hamiltonienne C-bornée du collier* Γ, $(\hat{f}_t, \hat{K}_t)$, $t \in [0,2\varepsilon]$ *avec les propriétés suivantes :*

a) le long de $\partial\Delta \times \{0\}$, *le germe de* $(\hat{f}_t, \hat{K}_t)$ *coïncide avec celui de* (ψ_t, H_t);

b) Pour t *voisin de* 0, $s \in [0,2\eta]$, $\hat{f}_t(y,s) = f_t(y,s)$;

c) Pour $t \geqslant \varepsilon$ *et* s *voisin de* η, $\hat{K}_t(y,s) = 0$;

d) Pour $t \in [0,2\varepsilon]$, s *voisin de* 2η, $\hat{f}_t(y,s) = f_t(y,s)$.

Démonstration.

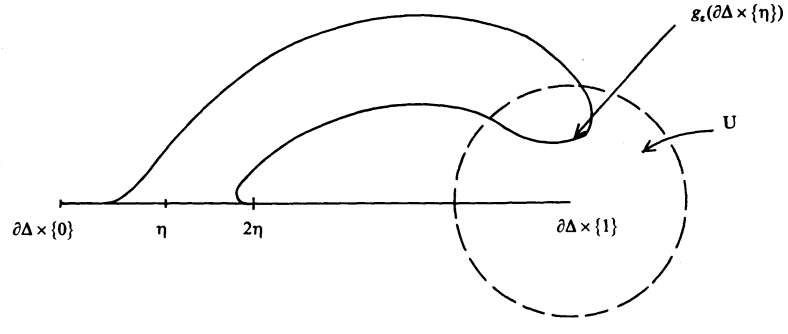

Fig. 5.

Considérons l'immersion $F : \tilde{V} = V \times [0,2\varepsilon] \times \mathbf{R} \to N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, donnée par $(x,t,h) \to (f_t(x),t,K_t(x)+h)$; c'est une immersion symplectique si la source est munie de la forme $\omega_V + dt \wedge dh$, où $\omega_V = f_0^* \omega_0$. Si on a une homotopie régulière hamiltonienne de Γ dans V, dont le « graphe » dans $\tilde{V}$ s'écrit $(g_t(x),t,R_t(x))$, alors par composition avec F on obtient une homotopie régulière hamiltonienne $\hat{f}_t = f_t \circ g_t$ dont le hamiltonien à la source est $\hat{K}_t = K_t \circ g_t + R_t$. D'autre part, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\sup |R_t| < \delta$, alors $(\hat{f}_t, \hat{K}_t)$ est C-bornée. Par conséquent, il nous reste à

construire une homotopie régulière hamiltonienne $g_t : \Gamma \to V$, $t \in [0,2\varepsilon]$, dont le hamiltonien à la source R_t soit δ-borné et vérifiant :

- g_0 = inclusion canonique;
- $g_t(y,s) \in U$ et $R_t(y,s) = 0$ pour $t \geqslant \varepsilon$ et s voisin de η;
- $g_t(y,s) = (y,s)$ pour tout $t \in [0,2\varepsilon]$ et s voisin de 0 ou de 2η.

Or, d'après le théorème I $(k-1,n-1)$, il existe une homotopie régulière inactive de $\partial\Delta \times \{\eta\}$ dans V qui aboutit dans U au temps $t = \varepsilon$. On peut même la prendre à valeurs dans un ouvert V′ qui ne rencontre le collier Γ qu'au voisinage de $\partial\Delta \times \{\eta\}$; en effet, on peut appliquer le théorème I dans le voisinage d'une isotopie donnée à l'avance; or il existe une isotopie de $\partial\Delta \times \{\eta\}$ qui part sans contact avec Γ (car le fibré normal est trivial, Δ étant un disque) et qui aboutit dans U sans retoucher Γ (« piping » des points d'intersection générique par le bord $\partial\Delta \times \{1\}$).

D'après 2.6, l'homotopie régulière inactive ainsi trouvée est approchable par une isotopie hamiltonienne δ-bornée à valeurs dans int V′. D'après 1.2, cette dernière se prolonge en une isotopie hamiltonienne δ-bornée de V′, à support dans V′; après quoi, on la rend stationnaire à partir de $t = \varepsilon$. Cette dernière induit sur Γ le g_t cherché.

□

Remarque. — La proposition 2.6 n'est pas vitale; c'est seulement une commodité. En revanche, je ne sais pas éviter l'utilisation du théorème I $(k-1,n-1)$, ce qui, pour le départ de la récurrence, nécessite de prendre $k < n$.

4.5. *Fin de la démonstration.*

On suppose que l'homotopie régulière hamiltonienne $\psi_t : \Delta \to N$ est construite pour $t \in [0,t_0+\varepsilon]$. Soit $f_t : \Gamma \to N$ une homotopie du collier vérifiant le lemme 4.4, au remplacement près de 0 par t_0, pour $t \in [t_0,t_0+2\varepsilon]$. Soit η tel que, sur le sous-collier $\partial\Delta \times [0,2\eta]$, f_t (resp. K_t) coïncide avec ψ_t (resp. H_t). Pour $t \in [t_0,t_0+\varepsilon]$, on remplace sur ce collier ψ_t par $\hat{\psi}_t$ selon la modification qui transforme f_t en $\hat{f}_t$, donnée par la proposition 4.4.

On observe sur le hamiltonien $\hat{H}_t$ de $\hat{\psi}_t$ la propriété suivante : $\hat{H}_{t_0+\varepsilon}(y,s) = 0$ pour s voisin de η. D'après 1.4, $\hat{\psi}_t|\Delta - \partial\Delta \times [0,\eta[$ se prolonge en homotopie régulière hamiltonienne, C-bornée, pour $t \in [t_0+\varepsilon,t_0+2\varepsilon]$ en laissant fixes les points voisins de $\partial\Delta \times \{\eta\}$.

Toujours pour $t \in [t_0+\varepsilon, t_0+2\varepsilon]$, on immerge le collier $\partial\Delta \times [0,\eta]$ par $\hat{f}_t$. Les deux formules se recollent de façon lisse et finalement on obtient $\hat{\psi}_t : \Delta \to N$, pour $t \in [0, t_0+2\varepsilon]$ ayant le germe donné le long du bord. Comme $[0,1]$ est compact et que ε ne dépend pas de η (propriété de microcompressibilité), le théorème local est démontré, comme en 1.7; d'ailleurs, la figure est la même.

5. Engouffrement symplectique.

5.1. Dans (M^{2n},ω), considérons une hypersurface S dont le complémentaire a deux composantes M_+ et M_-. Soit $K = K_0 \cup \sigma$ un polyèdre de dimension $\leqslant n$, où $K_0 \subset M_-$ et où σ est un k-simplexe de K avec $k < n$. On suppose que (M, M_-) est k-connexe et que toute composante connexe de K_0 rencontre σ.

THÉORÈME IV. — *Dans ces conditions, il existe une isotopie hamiltonienne f_t de M à support compact, telle que $f_1(M_-) \supset K$ et, pour tout $t \in [0,1]$, $f_t(M_-) \supset K_0$.*

Démonstration. — On considère la variété ouverte $M' = M - K_0$; $M'_- = M_- - K_0$. On vérifie que la paire (M', M'_-) est encore k-connexe. Soit Δ un sous-k-simplexe de σ avec $\partial\Delta \subset M'_-$; soit Γ l'adhérence de $\sigma - \Delta$ supposé non vide et contenu dans M'_-.

Le théorème I donne une homotopie régulière inactive φ_t de Δ dans M', laissant fixes les points voisins du bord et telle que $\varphi_1(\Delta) \subset M'$. D'après 2.6, on peut changer φ_t en une isotopie hamiltonienne, avec les mêmes propriétés. Par le même argument de position générale qu'en 2.6, on peut supposer que $\varphi_t(\text{int}\,\Delta) \cap \Gamma = \varnothing$. Donc φ_t, par extension, est une isotopie hamiltonienne, à support compact, de $\text{int}\,\sigma$ dans M'.

Par le prolongement du hamiltonien comme en 1.2, on prolonge φ_t en une isotopie hamiltonienne $\tilde{\varphi}_t$ de M', à support compact. Donc $\tilde{\varphi}_t$, prolongée par l'identité à K, est hamiltonienne. On pose alors $f_t = \tilde{\varphi}_t^{-1}$. □

5.2. *Remarque.* — Le domaine stable, $k < n$, permet de remplacer une homotopie régulière inactive par une isotopie. Mais cette commodité camoufle l'intérêt des homotopies inactives qui permet l'engouffrement symplectique même pour $k = n$.

RÉFÉRENCES

[Abraham-Robbin]
R. ABRAHAM, J. ROBBIN, *Transversal mappings and flows*, Benjamin, New-York, Amsterdam, 1967.

[Conley-Zehnder-Chaperon]
C. CONLEY et E. ZEHNDER, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold, *Inv. Math.*, 73 (1983), 33-49.

M. CHAPERON et E. ZEHNDER, Quelques résultats globaux en géométrie symplectique, in *Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie III*, ed. par P. Dazord, N. Desolneux-Moulis, Hermann, Paris, 1984.

M. CHAPERON, Une idée du type « géodésiques brisées » pour les systèmes hamiltoniens, *C.R.A.S.*, Paris, 298 (1984), 293-296.

[Duistermaat]
J. J. DUISTERMAAT, *Fourier integral operators*, Courant Inst. of Math., N.Y.U., 1973.

[Gromov]
M. GROMOV, Convex integration of differential relations, *Math. U.S.S.R. Izvestia*, 7 (1973), 329-343.

[Haeflinger]
A. HAEFLIGER, Lectures on the theorem of Gromov, 128-141, in Proceedings of Liverpool singularities Symposium II, *Lect. Notes in Math.*, 209, Springer, 1971.

[Hofer]
H. HOFER, Lagrangian embeddings and critical point theory, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire*, 2 (1985), 407-462.

[Laudenbach-Sikorav]
F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV, Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, *Invent. Math.*, 82 (1985), 348-357.

[Spring]
D. SPRING, Convex integration of non-linear systems of partial differential equations, *Ann. Inst. Fourier*, 33, 3 (1983), 121-177.

Manuscrit reçu le 17 décembre 1984.

François LAUDENBACH,
Université Paris-Sud
Mathématiques, bâtiment 425
et L.P. 13 du C.N.R.S.
F-91405 Orsay Cedex.