Revue d'histoire des mathématiques,
4 (1998), p. 237–260.

PERSPECTIVE HISTORIQUE SUR LES RAPPORTS ENTRE LA THÉORIE DES MODÈLES ET L'ALGÈBRE.

UN POINT DE VUE TENDANCIEUX

Daniel LASCAR (*)

RÉSUMÉ. — Je vais traiter, d'un point de vue personnel, la naissance et les premiers développements de la théorie des modèles pendant la période qui s'étend de sa naissance vers 1870, avec les travaux de Peirce, jusqu'au théorème de Morley vers 1965. J'insisterai particulièrement sur l'aspect « algèbre universelle » et j'essaierai de dégager comment la notion de définissabilité a fait évoluer cette théorie jusqu'à une science complexe pouvant apporter de nouvelles idées au reste des mathématiques.

ABSTRACT. — AN HISTORICAL PERSPECTIVE ON THE RELATIONSHIP BETWEEN MODEL THEORY AND ALGEBRA : A TENDENTIOUS VIEWPOINT. — This article presents a personal point of view dealing with the theory of models from its birth, with Peirce's work around 1870, to Morley's theorem in 1965. It insists particularly on "universal algebras" and explains how this theory evolved through the notion of definability towards a complex science able to infuse the rest of mathematics with new ideas.

La théorie des modèles est traditionnellement, et à juste titre, considérée comme faisant partie de la logique mathématique. Pourtant, les différences avec les autres parties de cette discipline, et je pense notamment à la théorie de la démonstration ou à l'étude des logiques non classiques, se font de plus en plus évidentes. Lorsqu'on examine la théorie des modèles actuelle, on s'aperçoit que la logique (entendez : l'analyse du langage mathématique) n'y a en fait qu'une place modeste. Les objets de son étude sont ceux des mathématiques dites classiques (structures, groupes, et même les nombres réels, complexes, etc.), contrairement, en reprenant un des exemples précédents, à la théorie de la démonstration, qui analyse

(*) Texte reçu le 19 novembre 1997, révisé le 15 décembre 1998.
Daniel LASCAR, C.N.R.S., Équipe de Logique Mathématique, UPRESA 7056, Université Paris 7, Denis Diderot, 2 place Jussieu 75251, PARIS CEDEX 05.
Courrier électronique : lascar@logique.jussieu.fr.

le raisonnement mathématique, et en ce sens mérite bien mieux sa place au sein de la logique mathématique. Je mets à part ici, des disciplines comme l'étude des modèles des logiques non classiques ou celle des modèles du λ-calcul.

Chang et Keisler [1973] ont défini la théorie des modèles par l'équation

$$\textit{Théorie des modèles} = \textit{Algèbre universelle} + \textit{Logique}$$

à laquelle je préfère

$$\textit{Théorie des modèles} = \textit{\Large Algèbre universelle} + \textit{\scriptsize Logique}$$

Dans cette équation il faut prendre le terme « Algèbre universelle » dans le sens « d'étude générale des structures algébriques ». En effet un des aspects de la théorie des modèles est de dégager les rapports cachés existant entre différentes disciplines mathématiques, le plus souvent algébriques. On est bien obligé de constater que nombre de théoriciens des modèles concentrent leur activité sur un type de structures particulier, par exemple les corps ou même les corps valués. Personnellement, je dirais plutôt que le théoricien des modèles est un mathématicien qui s'écoute parler. Il s'intéresse aux mêmes objets que le mathématicien classique : entiers naturels, nombres réels, groupes, corps, etc. Mais, il est conscient, par exemple, que le langage qui est nécessaire à la définition d'un corps valué est beaucoup plus simple que celui requis pour définir un anneau nœthérien. Et ces faits, il sait les exploiter.

La théorie des modèles est, depuis déjà longtemps, une discipline autonome avec sa problématique propre et possédant un corps de résultats important. Je pense qu'une nouvelle étape a été franchie récemment avec la preuve de la conjecture géométrique de Mordell-Lang en toute caractéristique par E. Hrushovski [1996]. Ses travaux sur la conjecture de Manin-Mumford semblent montrer que, loin d'être en présence d'un fait isolé, on assiste à l'émergence de méthodes nouvelles en géométrie algébrique et diophantienne.

C'est un peu pour comprendre comment une discipline originellement développée pour étudier les rapports entre le langage et les structures algébriques est parvenue à apporter quelque chose de nouveau à une discipline aussi élaborée que la géométrie algébrique que je vais essayer de traiter, d'un point de vue personnel, la naissance et les premiers balbutiements de cette théorie, pendant la période qui s'étend de Peirce à Morley. Mon but n'est pas de donner un compte rendu historique et exhaustif de cette période. Je suis convaincu que les apports vraiment originaux de la théorie des modèles au reste des mathématiques se trouvent dans la notion de définissabilité (je devrais certainement ajouter la notion d'interprétabilité ; mais celle-ci ne s'est imposée que plus tard et est d'un caractère plus technique, aussi ne la mentionnerai-je plus). C'est sur cette notion de définissabilité que je me concentrerai, ce qui me fera négliger de vastes pans de la théorie des modèles.

J'ai distingué quatre grandes périodes : durant la première, on assiste à l'élaboration des concepts de base de la théorie ; dans la seconde, on voit comment le premier problème de la théorie s'est posé et a été résolu, et le rôle moteur qu'ont joué ses généralisations ; c'est au cours de la troisième que l'acte de naissance est clairement établi et que les ambitions de la théorie sont énoncées ; dans la quatrième, la problématique change et la théorie devient vraiment adulte[1]. Tout compte fait, je ne ferai allusion qu'à un petit nombre d'articles. Il m'a fallu être injuste dans le choix de ces articles ainsi que dans le choix des titres des différentes sections de cet article.

CHARLES SANDERS PEIRCE ET ERNST SCHRÖDER

Il est classique, et je pense tout à fait justifié, de faire remonter l'origine de la théorie des modèles à Charles Sanders Peirce.

Le titre de l'article de Peirce paru en 1870 est tout à fait explicite : «*Description of a notation for logic of relatives, resulting from an amplification of the conception of Boole's calculus of logic*» [Peirce 1870]. Il s'agit donc avant tout d'un système de notations, c'est-à-dire de l'élaboration d'un langage pour une théorie à venir. On connaît évidemment l'importance de ce genre de travail, mais il n'y a pas dans cet article, à proprement parler, de résultats mathématiques significatifs.

[1] Pour ce travail, j'ai utilisé [Heijenoort 1967], les notes historiques de [Hodges 1993] et les articles [Vaught 1971], [Chang 1971] et [Thiel 1977]. Je remercie Monsieur Markus Junker : son aide m'a été indispensable lorsqu'il s'est agi de consulter les livres et les articles en langue allemande, et en particulier le livre de Schröder, et Monsieur Gabriel Sabbagh pour ses remarques pertinentes. Les rapporteurs de cet article m'ont aussi permis d'éviter un certain nombre d'erreurs historiques et m'ont poussé, par leurs remarques, à une réflexion plus profonde.

Par ailleurs, il s'agit d'une généralisation du travail de Boole [1847]. Afin de mieux apprécier la distance qu'il reste à parcourir, je vais exposer, très rapidement, en quoi consiste la « logique des relations » (*logic of relatives*).

G. Boole avait inventé le calcul propositionnel en vue d'analyser ce qu'il appelait les lois de la pensée. Son calcul est construit à l'aide de variables propositionnelles (ce ne sont que des lettres, A, B, C par exemple, censées représenter des assertions qui peuvent être vraies ou fausses) qui sont reliées entre elles par des connecteurs propositionnels (la conjonction, la disjonction, la négation, l'implication). Il obtenait ainsi les formules propositionnelles, par exemple $A \wedge B$ (lire A *et* B), $B \Rightarrow \neg C$ (B *implique non* C).

Les quantificateurs (pour tout, il existe) échappaient à son calcul. Pour remédier à cette déficience, Peirce affecte les variables propositionnelles d'un ou plusieurs indices[2] qui peuvent parcourir un ensemble I. On obtient par exemple A_i ou A_{ij}. Il peut alors introduire de nouvelles opérations, dont les plus importantes, en ce qui nous concerne, sont :

- le produit $\prod_i A_i$ qui correspond à ce que nous appelons de nos jours le quantificateur universel,
- la somme $\sum_i A_i$ qui correspond au quantificateur existentiel.

Ainsi, l'assertion «*tous les hommes sont mortels*» si chère aux philosophes, se formalise par $\prod_i A_i$ où A_i exprime que l'individu i est mortel (c'est-à-dire prend la valeur 1 si i est mortel, 0 sinon) et le produit est pris sur l'ensemble de tous les hommes. Dans un sens, on n'est pas très éloigné du calcul des prédicats actuel : il y a peu de différences entre $\prod_i A_i$ et $\forall x\, Ax$ (cependant, il n'y a rien qui corresponde à nos symboles de fonction). On peut évidemment composer ces opérations entre elles, et les composer avec les connecteurs booléens habituels. On obtient ainsi ce que l'on appelle aujourd'hui les formules du premier ordre.

En poussant le parallèle calcul booléen/calcul des relations plus loin,

[2] Peirce attribuera plus tard à Mitchell [1883] l'idée d'adjoindre des indices à des variables propositionnelles. Mais en fait, Mitchell, toujours d'après Peirce, n'envisage que deux indices, l'un pour exprimer que la proposition à laquelle il s'applique est toujours vraie, et l'autre pour exprimer qu'elle est toujours fausse. C'est évidemment insuffisant.

on retrouve naturellement la notion de structure. En effet, qu'entendons-nous par structure ? Prenons l'exemple d'une seule relation binaire. Une structure dont le type de similarité (voir plus loin) consiste en une seule relation binaire est un ensemble, disons X (pour des raisons techniques, il faut préciser «*non vide*») muni d'un sous-ensemble R de X^2. Dans le cas d'un ensemble ordonné par exemple, R est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x < y$. Il peut y avoir plusieurs relations binaires ou/et des relations n-aires (correspondant à des sous-ensembles de X^n). La donnée, pour chaque entier n du nombre de relations n-aires dont on exige la présence constitue le *type de similarité* de la structure (mais, certainement à cause de la laideur de cette expression, on préfère parler, à tort, du *langage* de la structure). En fait, il faut aussi des applications de X^n dans X (par exemple dans un groupe, il nous faut la multiplication, qui est une application de X^2 dans X). Mais nous allons oublier ces applications, car, comme nous l'avons dit, elles n'apparaissent pas encore dans le langage de Peirce. Il faut aussi remarquer que cette notion de structure est purement du domaine de l'algèbre universelle.

Pour déterminer si une formule du calcul booléen est vraie ou non, il faut donner une valeur de vérité à chacune des variables propositionnelles apparaissant dans la formule. Il faut faire exactement la même chose ici : par exemple dans le cas d'un triple indice, il faut dire, pour chaque triplet d'indices i, j et k dans I si A_{ijk} est vraie ou non.

Le fait d'assigner une valeur de vérité à A_{ijk} pour chaque triplet (i, j, k) de I définit en fait une structure dont l'ensemble de base est I et dont le type de similarité est constitué d'une relation ternaire, celle qui est définie par

$$(i, j, k) \in R \text{ si et seulement si } A_{ijk} \text{ prend la valeur } 1.$$

En poursuivant notre exemple, pour des indices j et k donnés dans I, la formule

$$\prod_i A_{ijk}$$

sera vraie (prendra la valeur 1) si pour tout i dans I, $A_{i,jk}$ prend la valeur 1.

En conclusion, étant donné une structure M d'un certain type de similarité τ, on peut considérer les formules construites à partir d'un ensemble de variables propositionnelles contenant, pour chaque n, autant de variables propositionnelles affectées de n indices qu'il y a de relations n-aires dans τ. L'ensemble de ces formules s'appelle le langage de M.

Il faut distinguer entre, d'une part les formules (comme $\prod_i \sum_j A_{ij}$) qui ne contiennent que des indices qui sont *quantifiés* par un opérateur $\sum$ ou $\prod$. Celles-ci sont des *formules closes* ou *énoncés*. Dans une structure donnée M, elles prennent la valeur 1 (dans lequel cas on dit qu'elles sont satisfaites dans M ou que M est un *modèle* de la formule) ou 0. Et d'autre part les autres, qui nous conduisent à la notion d'ensemble définissable. Par exemple, la formule

$$\prod_i A_{ij}$$

définit l'ensemble des éléments j de I qui sont tels que, pour tout i, A_{ij} est vrai.

Ces précisions nous permettent de situer une contribution de Ernst Schröder et le développement considérable du travail de Peirce que constituent les trois gros volumes de son *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder 1890–91, 1895]. L'interprétation ensembliste qui est esquissée ci-dessus est explicite chez Schröder. L'ensemble I d'indices possède un et même deux noms («*Denkbereich*» ou «*Universum*»). Les relations binaires sont représentées graphiquement (voir l'illustration de la figure 1, tirée de [Schröder 1895, p. 47]) et Schröder envisage même, dans le cas où l'ensemble I est fini, de les représenter sur des cartes percées aux points de coordonnées (i, j) lorsque A_{ij} prend la valeur vraie. Ainsi, toujours d'après Schröder, on pourra traiter ces informations électriquement lorsque les progrès de la technique le permettront ! On le voit, la contribution des logiciens à l'informatique ne date pas d'hier.

Cependant, comme le fait remarquer van Heijenoort [1967, p. 229], il y a encore confusion entre les deux interprétations, propositionnelle et ensembliste. Il faudra du temps pour dissiper cette équivoque. Par ailleurs, il est à noter que le calcul des relations n'a pas seulement mené à la théorie des modèles. La logique algébrique en constitue un autre prolongement. C'est certainement à cette branche que pensait Tarski lorsqu'il écrivait en 1941 : «(*La théorie des relations*) *est de nos jours pratiquement au même point qu'elle était il y a quarante-cinq ans*» [Tarski 1941, p. 74].

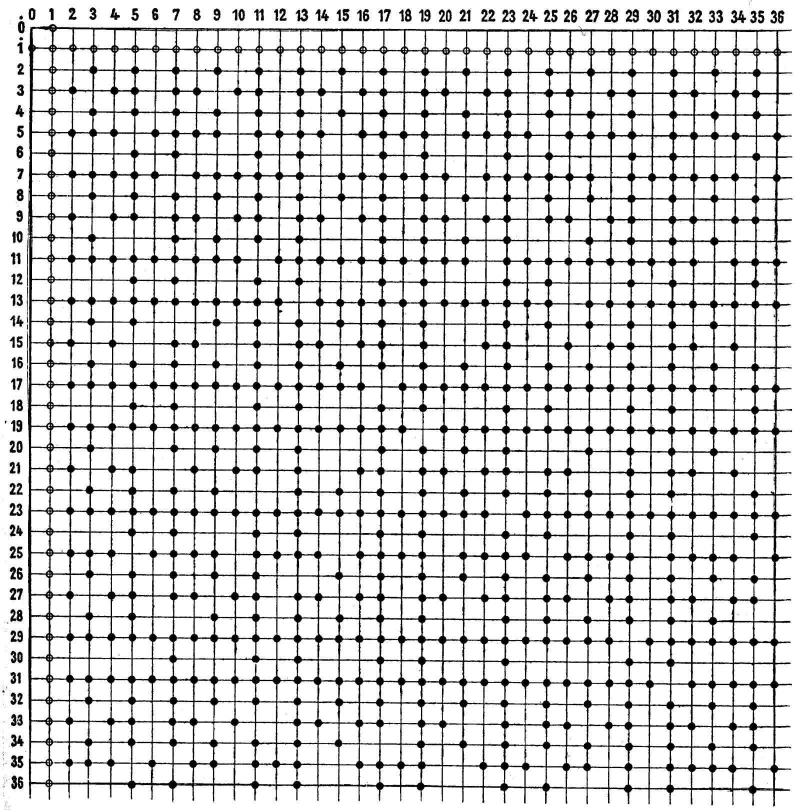

Fig. 3. Matrix des Relativs: „teilerfremd mit-".

Figure 1. Relation : «être premier avec»

Curieux jugement de la part de l'un des fondateurs de la théorie des modèles !

Il y a eu, à peu près à cette époque d'autres travaux sur la formalisation des mathématiques, ceux de Frege surtout, et aussi les travaux de Peano. Il y a cependant une différence essentielle, comme l'a d'ailleurs très bien vu Frege lorsqu'il écrit en réponse à Schröder [1880] qui lui reprochait de ne pas avoir suivi la ligne établie par Peirce :

«Mon intention n'était pas de représenter une logique abstraite par des formules, mais d'exprimer un contenu à l'aide de signes, de façon plus précise et plus claire que cela n'aurait été possible qu'avec des

mots. En fait, ce que je voulais créer n'était pas simplement un calculus ratiocinator*, mais bien une* lingua characteristica *dans le sens de Leibniz*» [Frege 1882, p. 1/2].

C'est la notion même de raisonnement mathématique qui est visée par le travail de Frege, tandis que l'ambition de Peirce et Schröder était d'établir un formalisme pour la « théorie des relations » qui étudierait des objets mathématiques classiques. Ces deux approches auront des postérités séparées, en gros la théorie des modèles d'un côté et la théorie de la démonstration de l'autre. Le fait aussi que la notion de domaine de quantification (« *Universum* ») soit présente dans la seconde et absente de la première est symptomatique de la différence des deux points de vue. Frege s'intéressait au raisonnement mathématique en général, Peirce et Schröder à des structures particulières.

LEOPOLD LÖWENHEIM ET THORALF SKOLEM

Le théorème de Löwenheim, dont on va parler maintenant, a été publié dans [Löwenheim 1915] et, en langage moderne, il s'énonce comme suit :

Si une formule du premier ordre F a un modèle, alors elle a un modèle fini ou dénombrable.

On considère souvent que ce théorème constitue le vrai début de la théorie des modèles. Il marque sans aucun doute un véritable tournant, aussi bien par le problème qui est posé et résolu que par sa démonstration. Il faut se rendre compte que le résultat n'a de sens que si on se place résolument dans l'interprétation « ensembliste » du calcul des relations. À une époque où la préoccupation des logiciens était de nature essentiellement syntactique, cela constitue une première originalité.

Un des problèmes principaux de cette théorie des relations était « la résolution d'équations logiques » (« *Auflösungsproblem im logischen Klassenkalkül* »). Pour bien comprendre ce qu'est ce problème, revenons un instant au calcul booléen. On possède des algorithmes (par exemple ceux qui sont basés sur les tables de vérité) permettant de reconnaître si une proposition est une tautologie, c'est-à-dire une formule qui prend la valeur 1 quelles que soient les valeurs que l'on assigne aux variables propositionnelles ($A \wedge B \Rightarrow A$ en est un exemple). Les exacts analogues des tautologies sont les formules qui prennent la valeur 1 quel que soit l'ensemble de référence I et les valeurs de vérité données aux différentes variables affectées d'indices qui y interviennent. Si l'ensemble de base I est infini, il y aura un nombre infini de valeurs de vérité à préciser, ce qui rend évidemment le problème beaucoup plus difficile. Dans l'interprétation ensembliste, ce sont exactement les formules qui sont satisfaites dans *toutes* les structures (dont le type de similarité correspond aux relations apparaissant dans la formule). De nos jours, nous appelons ces formules les *formules universellement valides*. Il s'agissait donc de trouver un algorithme pour décider si une formule donnée est universellement valide. (On sait maintenant qu'un tel algorithme n'existe pas.)

Les logiciens étaient complètement conscients de l'importance du problème, puisqu'un tel algorithme pourrait résoudre, du moins en principe, tous les problèmes mathématiques. Dans l'article dont nous parlons, Löwenheim donne un procédé effectif pour résoudre les équations logiques dans le cas où le langage ne contient que des symboles de prédicat unaire (les variables propositionnelles sont affectées d'un seul indice) et d'une façon générale montre que l'on peut toujours se ramener à un langage ne contenant qu'une relation binaire.

Il est significatif que, dès son premier théorème, la théorie des modèles fasse appel à la notion de cardinalité. De nos jours les questions de cardinalité sont au centre de la théorie des modèles, mais ce n'était certainement pas le cas à l'époque, et, bien que le dénombrable ait toujours joué un rôle particulier, on peut s'étonner de l'intrusion de ce genre de considérations. Le théorème devient beaucoup plus naturel lorsqu'on sait qu'une autre section de l'article est consacrée à la preuve du fait qu'il y a des formules du premier ordre ayant des modèles mais pas de modèles finis.

On a bien l'impression que le premier espoir de Löwenheim était de trouver une méthode de résolution des équations logiques en montrant que, si une formule a un modèle, alors elle a un modèle fini[3]. Cet espoir ayant été déçu, son théorème n'était qu'un pis-aller.

---

[3] Techniquement : l'ensemble des formules ayant un modèle fini est récursivement énumérable, ainsi que l'ensemble des formules n'ayant pas de modèle du tout. Si ces deux ensembles sont complémentaires l'un de l'autre, ils sont tous deux récursifs ; autrement dit, il existe un algorithme permettant de savoir si une formule donnée appartient à l'un ou à l'autre. Évidemment Löwenheim n'avait pas à sa disposition les outils pour faire un tel raisonnement, mais il était cependant clair que ramener le problème « *est-ce qu'une formule a un modèle ?* » au problème « *est-ce qu'une formule a un modèle fini ?* » aurait été un progrès considérable.

Skolem sera un des rares à réagir à ce travail. On va pourtant voir que le théorème de Löwenheim sera par la suite le moteur principal de la théorie des modèles, peut-être jusqu'aux années cinquante. Il aura une influence sur la théorie de la démonstration, puisque sa preuve portait en germe les preuves des théorèmes de complétude.

La démonstration est également extrêmement intéressante, et nous allons la résumer et la commenter rapidement. Tout d'abord, pour prouver son résultat, Löwenheim a besoin de construire un modèle dénombrable ou fini. Il aurait pu, pour ce faire, utiliser le modèle qui existe déjà par hypothèse (ce sera cela que fera plus tard Skolem). Mais en fait l'hypothèse (F a un modèle) est seulement utilisée pour montrer que F a une certaine propriété (on sera plus précis plus loin) qui à son tour implique que F a un modèle dénombrable ou fini. Il n'est guère étonnant que Löwenheim ait été amené à un tel raisonnement, puisque, on l'a déjà dit, ce qui l'intéressait c'était de trouver une méthode de résolution pour les équations logiques, ce qui passe obligatoirement par un procédé de construction de modèles *ex nihilo*.

On peut distinguer deux étapes dans la preuve de Löwenheim, qui ont eu une postérité toutes les deux.

1) Dans un premier temps, il se ramène à des formules universelles, c'est-à-dire des formules commençant par des quantificateurs universels, suivis d'une formule sans quantificateurs. La méthode préfigure celle qui est connue de nos jours du nom de «*skolémisation*». L'idée est due à Schröder [1890-91, 1895]. Aujourd'hui, on dirait que, pour se débarrasser des quantificateurs existentiels, on peut remplacer la formule

$$\prod_i \sum_j A_{ij}$$

(pour tout i, il existe j tel que A_{ij}) par la formule

$$\prod_i A_{if(i)}$$

(pour tout i, $A_{if(i)}$, f étant un nouveau symbole de fonction) puisque si l'une de ces deux formules a un modèle, l'autre en a aussi un. Löwenheim n'avait pas de symboles de fonction à sa disposition, et il s'en sort en introduisant des écritures compliquées et assez obscures.

Dans cette étape, Löwenheim utilise l'axiome du choix sans le dire. C'est un péché qui peut paraître véniel de nos jours, mais qui ne l'était certainement pas en 1915, à une époque où les paradoxes faisaient rage et où la théorie des ensembles, même sans axiome de choix, était suspecte.

2) Pour les formules universelles, Löwenheim utilise un argument qui sera notamment repris plus tard par Herbrand, et qui permet de ramener la satisfiabilité d'une formule du calcul des prédicats à la satisfiabilité d'un ensemble infini dénombrable de propositions. C'est uniquement pour montrer que l'ensemble de propositions qui découle de sa formule n'est pas contradictoire qu'il se sert de l'hypothèse « F a un modèle ». Cet argument est assez naturel lorsqu'on considère le « calcul des relations » comme une généralisation du calcul booléen. Ensuite, il faudrait utiliser le théorème de compacité pour ce calcul (un ensemble de propositions est non contradictoire si et seulement si tous ses sous-ensembles finis le sont), ce qui nécessite encore une fois l'axiome de choix, mais Löwenheim traite très rapidement cette étape.

Thoralf Skolem semble avoir été fortement marqué par l'article de Löwenheim. En fait, il semblerait que la raison en soit que Skolem ne croyait pas à la théorie des ensembles, et l'existence d'un modèle dénombrable de cette théorie lui semblait un bon moyen de la discréditer. Il a affiné et complété l'article de Löwenheim dans plusieurs publications s'échelonnant de 1920 à 1930. On va examiner de plus près [Skolem 1920] et [Skolem 1923].

Dans l'article de 1920, Skolem reprend (entre autres choses) le théorème de Löwenheim. D'une part, sa preuve (totalement différente de celle de Löwenheim) est complète, alors que, on l'a vu, celle de Löwenheim comportait des lacunes ; d'autre part, elle est beaucoup plus claire. Il y a aussi deux étapes, mais sensiblement différentes.

La première étape est aussi une étape de réduction. Mais Skolem se contente de se ramener à une formule commençant par des quantificateurs universels, suivis de quantificateurs existentiels, suivis d'une formule sans quantificateur. Pourquoi fait-il moins bien que son prédécesseur ? Tout d'abord parce que l'argument de Löwenheim était loin d'être limpide et rigoureux. De plus Skolem évite ainsi l'emploi de l'axiome de choix (même si cet axiome s'avèrera nécessaire pour la seconde étape). En fait, l'enrichissement du langage que Skolem doit effectuer pour réduire sa formule est tout à fait anodin et peut se résumer en une manipulation formelle.

Dans la seconde étape, Skolem raisonne de façon complètement sémantique, contrairement à Löwenheim. Étant donné une formule F (écrite sous la forme « pour tout il existe ») et une structure M vérifiant F, Skolem construit une sous-structure M_0 de M, dénombrable ou finie, dans laquelle F est aussi satisfaite. En particulier, sa démonstration fonctionne aussi bien, comme il le remarque d'ailleurs, pour les formules infinitaires de $L_{\omega_1\omega}$ (à savoir l'ensemble des formules dans lesquelles on peut se permettre des conjonctions et des disjonctions dénombrables).

Dans l'article de 1922, Skolem s'attache à éliminer l'utilisation de l'axiome de choix. Il dévoile alors ses vraies motivations : construire un modèle dénombrable de la théorie des ensembles.

En 1930, Gödel démontre, comme corollaire du théorème de complétude dans [Gödel 1930], le théorème de compacité : si un ensemble d'énoncés n'a pas de modèle, alors il en existe un sous-ensemble fini qui déjà n'a pas de modèle. C'est évidemment un théorème clef, sans lequel rien n'aurait pu se faire.

ALFRED TARSKI

L'année 1931 voit la parution de «*Sur les ensembles définissables de nombres réels*» par Alfred Tarski. Ce n'est pas la première contribution importante de Tarski à la théorie des modèles, mais l'introduction de cet article constitue un véritable manifeste, et je me permettrai d'en citer quelques phrases. L'article débute ainsi :

«*Les mathématiciens, en général, n'aiment pas à opérer avec la notion de définissabilité, leur attitude envers cette notion étant méfiante et réservée. Les raisons de cette aversion sont tout à fait claires et compréhensibles. D'abord le sens de la notion considérée n'est point bien précisée* [...] *La méfiance* [...] *se trouve enfin renforcée par une opinion assez courante suivant laquelle cette notion dépasse les limites proprement dites des mathématiques*» [Tarski 1931, p. 210].

Je voudrais faire remarquer que ces phrases relatives à la méfiance des mathématiciens envers la logique sont toujours d'actualité, du moins en France. Par ailleurs, il existait une espèce de réciproque : les logiciens de l'époque, même les plus grands, considéraient les méthodes sémantiques avec beaucoup de méfiance. Cette retenue se manifeste dans certaines démonstrations compliquées faites à cette époque, alors que le théorème de compacité donnait une réponse évidente. Par exemple, dans [Vaught 1971], on raconte comment Gödel envisageait de démontrer l'existence de modèles non standard de l'arithmétique de Peano en utilisant son propre théorème d'incomplétude ; on peut aussi citer la preuve, par Tarski lui-même, du fait que la classe des bons ordres n'est pas élémentaire [Tarski 1936a]. Si Gödel préfère cette preuve, c'est peut-être qu'elle est valide en logique intuitionniste. Quant à Tarski, on peut penser que sa preuve est due à son penchant pour l'élimination des quantificateurs par des méthodes syntactiques[4]. Certes, mais ces exemples montrent bien que, en 1930, la composante « logique » de la théorie des modèles était beaucoup plus importante qu'elle ne l'est aujourd'hui, que les méthodes purement sémantiques n'étaient pas encore complètement acceptées, bref qu'un cordon n'était pas encore coupé.

Il est toujours hasardeux de se livrer à des explications psychologiques, mais je pense que les paradoxes qui avaient secoué le monde mathématique au début du siècle sont, en partie du moins, responsables de cette méfiance. Les rapports existant entre la syntaxe et la sémantique, n'étaient pas complètement éclaircis, de sorte que les logiciens hésitaient à mêler ces deux aspects. C'est Tarski qui le premier, dans l'article qui nous occupe, affirme haut et fort son intention de le faire.

Plus loin, dans l'article de Tarski, on lit :

«*Je crois cependant avoir trouvé une méthode générale qui permet* [...] *de reconstruire cette notion dans le domaine des mathématiques* [...] *Les notions ainsi reconstruites ne diffèrent en rien des autres notions mathématiques et ne peuvent par suite éveiller des craintes ou des doutes ; leur étude rentre complètement dans le domaine des raisonnements mathématiques normaux*» [Tarski 1931, p. 210/211].

C'est donc tout un programme qui va donner naissance à la théorie des modèles telle que nous la connaissons : exploiter la notion de définissabilité pour résoudre des problèmes mathématiques. Il s'avère que dans beaucoup de structures habituellement considérées en mathématique, les ensembles définissables (c'est-à-dire les ensembles d'éléments ou de suites d'éléments de longueur finie et fixée satisfaisant une formule donnée) sont

[4] Je remercie un des rapporteurs d'avoir attiré mon attention sur ces points.

complètement analysables. Un exemple typique est donné par les corps algébriquement clos. Les géomètres disent : la projection d'un ensemble constructible (un ensemble constructible est une combinaison booléenne de variétés affines, qui elles-mêmes sont des ensembles de solutions de systèmes d'équations polynomiales) est constructible ; le théoricien des modèles dira : tout ensemble définissable dans un corps algébriquement clos est définissable par une formule sans quantificateur. C'est ce qu'on appelle un théorème d'élimination des quantificateurs. D'ailleurs, le but de l'article dont nous analysons l'introduction est de démontrer l'élimination des quantificateurs dans le corps des réels, résultat qui sera repris dans [Tarski 1951].

Cette problématique a donné naissance à ce qu'il est convenu d'appeler la théorie des modèles appliquée à l'algèbre (de façon impropre je pense, car on y trouve peu d'applications proprement dites ; l'idée est plutôt de prendre des concepts de théorie des modèles, comme l'équivalence élémentaire, la décidabilité et plus tard la stabilité, et de voir leur signification dans des exemples de structures algébriques classiques) qui sera l'objet de développements considérables. Je me contenterai de citer les plus importants : étude de la théorie du corps des nombres réels [Tarski 1951], des corps algébriquement clos [Tarski 1949], des groupes abéliens [Szmieliew 1955], des corps p-adiques ([Ax et Kochen 1965], [Ershov 1965], avec ici, une vraie application à l'algèbre). On peut ajouter les résultats récents obtenus par A. Wilkie [1992] sur le corps des nombres réels avec la fonction exponentielle.

Mais Tarski envisage aussi une théorie beaucoup plus novatrice. On y étudiera les structures de façon complètement générale ; ce sera donc une espèce d'algèbre universelle, mais où la notion de définissabilité va pouvoir s'épanouir. Il continue :

« *Une description tout à fait générale et abstraite de la méthode en question comporterait certaines difficultés techniques et, donnée d'emblée, manquerait de cette clarté que je veux lui donner* [...] » [Tarski 1931, p. 211].

On peut penser qu'ici « description générale » renvoie à la définition de la satisfaction d'une formule dans une structure. À peu près à la même époque (lors d'une communication en 1931, article publié dans [Tarski 1933]), il donne cette définition dans un style moins « mathématique ».

La période qui suit, jusqu'aux années 60 environ, et où Tarski apparaît comme l'acteur principal, voit l'émergence des notions de base : équivalence élémentaire et extension élémentaire[5]. Historiquement, la situation est plutôt confuse, car il est évident que ces notions ont été dégagées bien avant leurs premières traces écrites.

Une fois la notion de propriété ou formule du premier ordre dégagée et reconnue comme fondamentale (ce sont les propriétés qui s'expriment par une formule du premier ordre, c'est-à-dire dans le langage que nous avons décrit plus haut), la notion d'équivalence élémentaire devient naturelle, on peut même dire nécessaire. On dit que deux structures sont élémentairement équivalentes si elles satisfont les mêmes propriétés du premier ordre. Cette définition apparaît explicitement en 1936 dans l'article [Tarski 1936a] (en fait dans l'appendice de cet article !), mais, d'après une note dans ce même appendice, il semble bien qu'il l'avait depuis quelques années déjà.

La notion d'extension élémentaire est aussi due à Tarski : une structure M est une extension élémentaire d'une structure N si, premièrement, elle en est une extension, et deuxièmement toute propriété du premier ordre vérifiée par des points de N dans N est encore vérifiée par ces mêmes points dans M. Cette définition a été énoncée par Tarski en 1952 au cours du séminaire qu'il tenait à Berkeley à cette époque. Elle est publiée en particulier dans l'article [Tarski et Vaught 1957].

Les généralisations du théorème de Löwenheim (les théorèmes de Löwenheim-Skolem ou de Löwenheim-Skolem-Tarski) ont joué un rôle de moteur dans la naissance de ces concepts. On comparera les deux théorèmes suivants :

1) *Si M est une structure infinie dans un langage dénombrable, alors, pour toute cardinalité infinie κ il existe une structure N, élémentairement équivalente à M, de cardinalité κ.*

2) *Dans la situation de* 1), *on peut même demander que la structure N soit une extension élémentaire de M si κ est supérieur à la cardinalité de M, et que M soit une extension élémentaire de N dans le cas contraire.*

Chacun des deux théorèmes se décompose en fait en deux, suivant que κ est inférieur (sens descendant) ou supérieur (sens ascendant) à la

[5] Jusqu'à la fin des années 1950, Tarski emploie le mot « arithmetical » à la place de « elementary » : extension arithmétique, équivalence arithmétique.

cardinalité de M.

Le théorème 1) remonte quasiment aux origines de la théorie des modèles : à la suite d'un article de Skolem [Skolem 1934], les éditeurs mentionnent que ce théorème a été montré par Tarski en 1928. Il apparaît en clair dans [Tarski 1949]. Le théorème 2) apparaît beaucoup plus tard, en 1957, dans l'article de Tarski et Vaught déjà mentionné. Il est clairement indiqué que le sens ascendant a été obtenu indépendamment par les deux auteurs, tandis que le sens descendant avait été démontré dans [Tarski 1952]. L'article de Tarski et Vaught a joué un rôle particulièrement important, (on en reparlera par la suite) car les grands théorèmes concernant les extensions élémentaires s'y trouvent clairement énoncés, en particulier le critère de Tarski-Vaught (un critère très utile pour vérifier qu'une sous-structure est élémentaire) et la méthode des diagrammes (permettant de construire des extensions et des extensions élémentaires).

Il y a deux autres articles dans cette période que je voudrais mentionner dans cette optique : tout d'abord l'article de Birkhoff [1933] : «*On the combination of subalgebras*». La notion de structure abstraite (dans un langage ne comportant que des symboles de fonction) y est pour la première fois explicitement dégagée. Il y a aussi un article important de Maltsev [1936], où des langages non dénombrables sont considérés. Il s'agit d'un pas théorique important (techniquement, la généralisation ne pose guère de problème). En tant que moyen d'expression, un langage ne peut qu'être dénombrable. Le fait de considérer des langages non dénombrables montre clairement qu'ils sont devenus des objets et des outils mathématiques.

MICHAEL MORLEY

C'est vers le début des années cinquante qu'apparaît une problématique qui conduira à une accélération considérable de la théorie, et qui, finalement, provoquera les travaux de Morley. Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés de la classe des modèles d'une théorie donnée. Le théorème de Löwenheim, et même le théorème de compacité, entrent indubitablement dans ce cadre. Mais maintenant, les choses vont se faire de façon plus profonde, à la manière et surtout avec la problématique de l'algèbre universelle. Avant d'aborder le théorème de Morley proprement dit, je voudrais dire deux mots du développement de la théorie des modèles durant la période qui l'a précédé, disons les années 1955–1965.

Personnellement, cette période me donne l'impression de marquer un temps d'arrêt, comme si la machinerie, prête à tourner, ne savait quelle direction prendre. Beaucoup de logiciens pensaient à l'époque que la théorie des modèles n'avait plus rien à dire[6]. Il y avait bien l'étude des théorèmes de préservation : par exemple la classe des modèles d'une formule F est close par sous-structure si et seulement si F est logiquement équivalente à une formule universelle, mais ceux-ci ne pouvaient guère mener bien loin. Les théorèmes des deux cardinaux (ici, on s'intéresse aux théories ayant un modèle dans lequel un ensemble définissable est infini, mais de cardinalité strictement inférieure à celle du modèle) datent aussi de cette époque. Ils pouvaient sembler bien techniques à l'époque. Cependant, les procédés mis au point pour leurs démonstrations montraient qu'on était en présence d'une théorie puissante et originale. Ils s'avèreront très importants par la suite. Hasard ou clairvoyance ?

Une propriété qui va jouer un rôle clef dans notre problématique est la propriété d'amalgamation : on dit qu'une classe K de structures a la propriété d'amalgamation, si étant donné trois structures M_1, M_2 et M_3 de K, M_1 se plongeant dans M_2 et M_3, il existe une quatrième structure M_4 dans laquelle se plongent M_2 et M_3.

C'est par un article de Fraïsse [1954], que cette notion fait son entrée dans la théorie des modèles, avec sa conséquence la plus intéressante, à savoir l'existence de structures universelles (toutes les structures de la classe considérée s'y plongent) et homogènes (deux sous-structures isomorphes sont conjuguées par un automorphisme). Bjarni Jónsson [1956, 1960] en donne un traitement plus général dans l'optique de l'algèbre universelle, alors que Tarski et Vaught, dans leur article de 1957, utilisent délibérément le langage de la logique. Vers la fin des années 1950 et le début des années 1960, on réalise que si on considère la classe des modèles d'une théorie et qu'on se restreint aux injections élémentaires (c'est-à-dire aux morphismes injectifs préservant les propriétés du premier ordre), alors on se trouve devant une catégorie aux propriétés quasiment miraculeuses : elle possède la propriété d'amalgamation [Morley et Vaught 1962] et est close par limite inductive [Tarski et Vaught 1957]. Ici apparaît un aspect

[6] Je remercie l'un des rapporteurs de m'avoir signalé ce fait.

capital de la théorie des modèles : on ne s'intéresse pas à une seule structure, mais à toute une catégorie de structures. Cela est rendu possible par le fait qu'à une formule correspond de façon uniforme un ensemble définissable dans chaque structure de la catégorie. C'est un point qu'elle partage avec la géométrie algébrique (une même équation polynomiale définit une variété dans chaque corps), ce qui a fait dire à W. Hodges que la théorie des modèles, c'est de «*la géométrie algébrique moins les corps*» (*algebraic geometry minus fields*). Des faits mentionnés plus haut, Morley et Vaught déduiront en 1962 l'existence (avec l'hypothèse généralisée du continu) et l'unicité à cardinalité fixée de modèles homogènes universels, rebaptisés par la suite modèles saturés [Morley et Vaught 1962].

Il y aurait bien d'autres travaux de cette époque qu'il faudrait citer si on voulait être exhaustif (ce qui n'est pas mon cas). Parmi les plus importants, il y a l'article de Jerzy Łoš [1955] contenant la construction des ultraproduits (permettant de construire, à partir d'une famille $(M_i;\, i \in I)$ et d'un ultrafiltre U sur I une nouvelle structure, l'ultraproduit de la famille $(M_i;\, i \in I)$ suivant U) et le fameux théorème qui s'y attache (une formule est vraie dans l'ultraproduit des M_i si et seulement si elle est vraie dans «*presque*» tous les M_i). Il permet de démontrer le théorème de compacité sans passer par le théorème de complétude de Gödel, et donc de couper un des derniers ponts qui rattachait la théorie des modèles au reste de la logique. Il faut signaler que cette construction se trouvait déjà en germe dans [Skolem 1934] (il utilisait une variante de cette méthode pour construire un modèle non standard des axiomes de Peano). Mentionnons aussi : la création de l'analyse non standard par Abraham Robinson [1961], qui aura des applications importantes en analyse, mais qui deviendra très vite la propriété des analystes ; le développement des logiques infinitaires, notamment avec l'article [Scott et Tarski 1958].

Le théorème de Löwenheim-Skolem a une signification intéressante : il n'est pas possible de caractériser une structure infinie par sa théorie du premier ordre. En effet, cette théorie aura nécessairement des modèles d'autres cardinalités, donc non isomorphes à la structure de départ.

Dans cette optique, une question s'impose : existe-t-il des structures infinies qui sont caractérisées, à isomorphisme près, par leur théorie et leur cardinalité ? Łoš [1954] et Vaught [1954] définissent indépendamment les théories catégoriques en un cardinal : si κ est un cardinal infini et T

une théorie, on dit que T est κ-catégorique si T admet un modèle de cardinalité κ et si tous les modèles de T de cardinalité κ sont isomorphes. Il était naturel de commencer par le cas où κ est égal au dénombrable (on ne pouvait pas deviner, à l'époque, que le cas non dénombrable était si intéressant). On en trouve des exemples dans le monde mathématique (les ordres denses sans extrémités, les espaces vectoriels sur un corps fini par exemple). Par ailleurs, il s'avère que les théories $\aleph_0$-catégoriques peuvent être caractérisées par des conditions très élégantes : l'une de ces caractérisations fait intervenir les algèbres de Boole des sous-ensembles définissables dans les modèles de la théorie, [Ryll-Nardzewski 1959], [Engeler 1959] ; une autre se fait en terme du nombre d'orbites du groupe d'automorphismes agissant sur la structure [Svenonius 1959]. Il est intéressant de remarquer que ces théorèmes établissent un lien entre un caractère de simplicité de la classe des modèles d'une théorie (le fait que tous ses modèles dénombrables soient isomorphes) et la simplicité d'objets attachés à cette théorie. Cette correspondance deviendra un leitmotiv pour les trente années suivantes.

Cependant, c'est le cas non dénombrable qui va provoquer l'explosion. L'étude des exemples de théories catégoriques en un cardinal non dénombrable (les espaces vectoriels sur un corps dénombrable, les corps algébriquement clos de caractéristique donnée, par exemple) a amené Łoš à poser la question suivante [Łoš 1954] :

Soient κ et μ deux cardinaux non dénombrables. Est-ce qu'une théorie κ-catégorique est nécessairement μ-catégorique ?

Morley répondra affirmativement à cette question dix ans plus tard. Je vais essayer de dégager les quelques idées clefs qui se trouvent dans sa preuve.

Tout d'abord, il introduit la notion fondamentale de type. Le type d'une suite finie d'éléments est l'ensemble des formules que cette suite d'éléments satisfait. Par exemple, dans un corps algébriquement clos, il est déterminé par l'ensemble des polynômes (ici à coefficients dans le corps premier, mais on peut généraliser) annulés par la suite d'éléments. On peut aussi interpréter cette notion de façon plus algébrique : dans un modèle saturé, deux suites ont même type si elles sont conjuguées par un automorphisme du modèle.

En fait, la situation est plus complexe, puisque Morley introduit toute une catégorie d'espaces de types, qu'il analyse très finement, notamment au moyen d'outils topologiques. Il dégage très bien une correspondance entre la complexité d'une théorie et la complexité de ces espaces de types. Saharon Shelah, qui sera le principal personnage de l'acte suivant, fera de cette correspondance un des piliers de son immense travail.

Un autre aspect important est l'utilisation de techniques combinatoires, en particulier du théorème de Ramsey. En fait, ce genre d'argument avait déjà été utilisé en théorie des modèles par Ehrenfeucht et Mostowski [1956], pour une construction générale et originale de modèles ayant un groupe d'automorphismes très riche, et aussi par Ehrenfeucht [1957], qui montrait que les modèles d'une théorie catégorique en un cardinal non dénombrable étaient en quelque sorte combinatoirement simples. La combinatoire infinie était appelée, grâce à Shelah une fois de plus, à jouer un rôle majeur en théorie des modèles.

Une troisième notion, qui prendra une importance considérable par la suite se trouvait dissimulée dans cette preuve. C'est celle d'ensemble fortement minimal. Elle sera complètement dégagée par Marsh [1966]. Dans ces ensembles, on peut définir une relation de dépendance algébrique qui satisfait les axiomes de Van der Waerden (ce sont les axiomes qui, par exemple, sont vérifiés par la relation de dépendance linéaire dans un espace vectoriel, et qui permettent de montrer que deux bases d'un tel espace ont même cardinalité). On est en présence de ce qu'on appelle une *géométrie combinatoire*. En découle, comme dans les espaces vectoriels, une notion de dimension qui se révèlera extraordinairement puissante. Cette notion de dépendance sera généralisée par Shelah (le «*forking*» [Shelah 1978]), et l'étude géométrique sera reprise, mais de façon beaucoup plus fine, par Zilber et plus tard, par Hrushovski.

CONCLUSION

En répondant affirmativement à la question de Łoš, Morley a certainement fait franchir un pas considérable à la théorie des modèles. Son théorème a immédiatement été considéré comme fondamental. Le fait d'établir un résultat de cette ampleur a montré que le travail de ses prédécesseurs était hautement significatif. De plus, comme d'habitude en de telles circonstances, en résolvant un problème, il en ouvrait une multitude d'autres et découvrait un large champ de recherches, provoquant la vocation d'une génération de théoriciens des modèles.

Une page est tournée. La théorie des modèles, qui dispose maintenant d'outils mathématiques puissants (combinatoires, topologiques, etc.) va s'affranchir encore un peu plus de ses origines logiques pour se rapprocher de considérations plus traditionnelles en mathématiques. Cependant, il faut bien se rendre compte qu'elle va, pendant encore une bonne vingtaine d'années, se consacrer essentiellement à explorer des voies qui lui sont propres et résoudre des questions qu'elle pose elle-même, même si ces questions sont tout à fait naturelles dans l'optique de « l'algèbre universelle ». Les théorèmes dont nous avons parlé dans l'introduction nous semblent être le signe que l'on est maintenant passé à une autre période, celle où le corps de résultats qu'elle a accumulé va éclairer d'autres disciplines mathématiques.

Tout est maintenant prêt pour l'étape suivante. Celle-ci sera dominée par la forte personnalité de Saharon Shelah.

BIBLIOGRAPHIE

AX (James) & KOCHEN (Simon)

[1965] Diophantine problems over local fields II, *American Journal of Mathematics* 87 (1965), p. 631–648.

BIRKHOFF (Garrett)

[1933] On the combination of subalgebras, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29 (1933), p. 441–464.

BOOLE (George)

[1847] *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge : Macmillan, Barclay & Macmillan, 1847.

CHANG (Chen Chung)

[1971] Model theory 1945–1971, *Proceedings of the Tarski Symposium*, Berkeley, 1971, p. 173–186.

CHANG (Chen Chung) & KEISLER (Jérôme H.)

[1973] *Model Theory*, Amsterdam : North Holland, 1973.

EHRENFEUCHT (Andrzej)

[1957] On theories categorical in power, *Fundamenta Mathematica*, 44 (1957), p. 241–248.

EHRENFEUCHT (Andrzej) & MOSTOWSKI (Andrzej)

[1956] Models of axiomatic theories admitting automorphisms, *Fund. Math.*, 43 (1956), p. 50–68.

ENGELER (Erwin)

[1959] A characterisation of theories with isomorphic denumerable models, Abstract, *Notices of the American Mathematical Society*, 6 (1959), p. 161.

ERSHOV (Yu)

[1965] On the elementary theory of maximal normed fields (en russe), *Algebra i logika*, 4 (3) (1965), p. 31–70.

Fraïsse (Roland)

[1954] Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 71 (1954), p. 363–388.

Frege (Gottlob)

[1878] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*, Halle 1878. Traduction en anglais dans [Heijenoort 1967, p. 1–82].

[1882] Ueber den Zweck der *Begriffsschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr* 1882, p. 1–10.

[1964] *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, éd. par Ignacio Angelelli, Hildesheim : Olms, 1964.

Gödel (Kurt)

[1930] Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37 (1930), p. 349–360. Traduction en anglais dans [Heijenoort 1967, p. 582–591].

Heijenoort (Jean van)

[1967] *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, Cambridge, Ma. : Harvard University Press, 1967.

Hodges (Wilfrid)

[1993] *Model Theory*, Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

Hrushovski (Ehud)

[1996] The Mordell-Lang conjecture for function fields, *Journal of the American Mathematical Society*, 9 (1996), p. 667–690.

Jønsson (Bjarni)

[1956] Universal relational systems, *Mathematica Scandinavica*, 4 (1956), p. 193–208.

[1960] Homogeneous universal relational systems, *Math. Scand.*, 8 (1960), p. 137–142.

Łoš (Jerzi)

[1954] On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems, *Colloquium Mathematicum*, 3 (1954), p. 58–62.

[1955] Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, dans Brouwer (L.E.J.) *et al.*, eds., *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, Amsterdam : North Holland, 1955, p. 98–113.

Löwenheim (Leopold)

[1915] Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen*, 76 (1915), p. 447–470. Traduit en anglais dans [Heijenoort 1967].

Maltsev (Anatolii Ivanovich)

[1936] Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, *Matematiceskij Sbornik*, 1 (43) (1936), p. 323–336.

Marsh (William)

[1966] On ω_1 but not ω-categorical theories, Ph. D. thesis, University of Dartmouth, 1966.

Mitchell

[1883] *Studies in Logic*, by members of the Johns Hopkins University, Boston : Little & Brown, 1883.

Morley (Michael)

[1965] Categoricity in Power, *Transactions of the American Mathematical Society*, 114 (1965), p. 514–538.

MORLEY (Michael) & VAUGHT (Robert L.)

[1962] Homogeneous universal models, *Math. Scand.*, 11 (1962), p. 37–57.

PEIRCE (Charles Sanders)

[1870] Description of a notation for logic of relatives, resulting from an amplification of the conception of Boole's calculus of logic, *Memoirs of the American Academy of Art and Sciences*, 9 (1870), p. 317–378.

ROBINSON (Abraham)

[1961] Non standard analysis, *Indagationes Mathematicae*, 23 (1961), p. 432–440.

RYLL-NARDZEWSKI (Czeslaw)

[1959] On the categoricity in power $\aleph_0$, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences mathématiques, astronomiques et physiques*, 7 (1959), p. 545–548.

SCHRÖDER (Ernst)

[1880] Revue critique de Frege, *Begriffsschrift. . . , Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25 (1880), Historisch-literarische Abtheilung, p. 81–94.

[1890, 1891, 1895] *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Leipzig 1890, 1891, 1895. Republié par Chelsea, New York, en 1966.

SCOTT (Dana) & TARSKI (Alfred)

[1958] The sentential calculus with infinitely long expressions, *Colloquium Mathematicum*, 6 (1958), p. 165–170.

SHELAH (Saharon)

[1978] *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models*, Amsterdam : North Holland, 1978.

SKOLEM (Thoralf)

[1920] Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Videnskapsselskapets Skrifter*, I, Matem. naturv. klasse I, n°4, 1920, p. 1–36. Traduit en anglais dans [Heijenoort 1967].

[1923] Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, dans *Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen Redogörelse*, Helsinki, 1922, p. 217–232. Traduit en anglais dans [Heijenoort 1967].

[1934] Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, *Fund. Math.*, 23 (1934), p. 150–161.

SVENONIUS (Lars)

[1959] $\aleph_0$-categoricity in first order predicate calculus, *Theoria*, 25 (1959), p. 82–94.

SZMIELEW (Wanda)

[1955] Elementary properties of Abelian groups, *Fund. Math.*, 41 (1955), p. 203–271.

TARSKI (Alfred)

[1931] Sur les ensembles définissables de nombres réels, *Fund. Math.*, 17 (1931), p. 210–239.

[1933] Pojęciu prawdy w jezybach nauk dedukcyjnych, Warsawa, 1933. Traduit en anglais dans *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford : Clarendon Press, 1956, p. 152–278.

[1936a] Grundzüge des Systemenkalküls. Zweiter Teil, *Fund. Math.*, 26 (1936), p. 283–301. Traduit en anglais dans *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford : Clarendon Press, 1956.

[1936b] Über den Begriff der logischen Folgerung, *Actes du congrès international de philosophie des sciences*, vol. 7, Actualités scientifiques et industrielles 394, Paris : Hermann, 1936, p. 1–11. Traduit en anglais dans *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford : Clarendon Press, 1956.

[1941] On the calculus of relations, *Journal of Symbolic Logic*, 7 (1941), p. 73–89.

[1949] Arithmetical classes and types of algebraically closed and real closed fields, Abstract, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55 (1949), p. 1192.

[1951] *A decision method for elementary algebra and geometry*, Berkeley : University of California Press, 1951.

[1952] Some notions and methods on the borderlines of algebra and metamathematics, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Cambridge Ma, American Mathematical Society, Providence, Rhodes Island, 1952, p. 705–720.

Tarski (Alfred) & Vaught (Robert L.)

[1957] Arithmetical extension of relational systems, *Compositio Mathematica*, 13 (1957), p. 81–102.

Thiel (Christian)

[1977] Leopold Löwenheim : life, work and early influence, in Gandy (R.O.) & Hyland (J.M.E.), eds., *Logic Colloquium*, 76, Amsterdam : North Holland, p. 235–252.

Vaught (Robert L.)

[1954] Application of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Ser. A, 57 (1954) = *Indag. Math.*, 16, p. 467–472.

[1971] Model theory before 1945, *Proceedings of the Tarski Symposium*, Berkeley, 1971, p. 153-172

Wilkie (Alex)

[1996] Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function, *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 9, n° 4, Oct. 1996, p. 1051–1094.