*Revue d'histoire des mathématiques*
12 (2006), p. 249–290

# LA RÉCEPTION DES *VORLESUNGEN ÜBER NEUERE GEOMETRIE* DE PASCH PAR PEANO

Sébastien Gandon

Résumé. — Peano écrit en 1888 le *Calcolo geometrico*. Un an après, il publie *I principii di geometria*, où il développe, dans le sillage des *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Pasch, une axiomatisation de la géométrie. Comment concevoir le rapport entre ce projet et celui du calcul géométrique ? Dans cet article, nous soulignons le profond fossé entre les deux entreprises : alors que l'élaboration d'une algèbre géométrique vise chez Peano à manifester la singularité des grandeurs spatiales par rapport aux nombres, l'axiomatisation se développe de façon autonome et sans aucune référence à la distinction entre entités géométriques et numériques. Mais nous montrons dans un second temps que la façon dont Peano lit Pasch est complètement tributaire de son engagement antérieur dans la tradition grassmannienne : le segment $AB$ n'est pas, pour lui, comme il l'est pour Pasch un objet observable, mais le résultat d'un certain produit de points. Le tableau, au final, est assez complexe : d'une part, calcul et axiomatique sont supportés par des conceptions fondamentalement opposées de l'objet géométrique ; en même temps, la méthode axiomatique, telle qu'elle se développe dans *I principii*, résulte d'une lecture de Pasch selon une grille élaborée dans le *Calcolo*.

Texte reçu le 7 novembre 2005, révisé le 20 octobre 2006.

S. Gandon, MSH Clermont, PHIER, Université Blaise Pascal, 4 rue Ledru, 63000 Clermont-Ferrand, France.
Courrier électronique : sgandon@wanadoo.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 03-03.

Mots clefs : Pasch, Peano, calcul géométrique, axiomatique.

Key words and phrases. — Pasch, Peano, geometrical calculus, axiomatic.

ABSTRACT (The Reception by Peano of Pasch's *Vorlesungen über neuere Geometrie*)

Peano wrote the *Calcolo geometrico* in 1888. One year later, in 1889, he published *I principii di geometria*, in which he developed, in Pasch's wake, an axiomatisation of geometry. What is the relationship between this work and the previous elaboration of a geometrical calculus ? In this article, we outline the deep difference between the two methods : although the construction of a geometrical algebra aimed at showing the specificity of spatial magnitudes, the axiomatisation does not refer to the ontological distinction between geometrical and numerical entities. However, we show that the way Peano read Pasch's *Vorlesungen* depended on his previous involvement in the Grasmannian tradition : for him, the segment *AB* does not refer (as it did for Pasch) to an observable object, rather, AB designates the result of a new geometrical product. In the end, the situation is quite complicated : on the one hand, the algebra and the axiomatic are grounded, in Peano's thought, on completely opposite conceptions of geometrical objects ; on the other, the axiomatic method, as it is developed in *I principii*, results directly from an interpretation of Pasch entirely based on the *Calcolo*.

En 1889, Peano rédige deux articles qui constituent le point de départ de son entreprise de réécriture de l'ensemble des mathématiques : le très célèbre *Arithmetices principia, nova methodo esposita*, consacré aux fondements de l'arithmétique, et *I principii di geometria logicamente esposti*, portant sur les principes de la géométrie. Comme le manifeste le choix des sous-titres, une commune « nouvelle méthode d'exposition », logique, axiomatique, se dégage de ces travaux. Dans la préface du premier opuscule, Peano caractérise son approche en ses termes :

> « Les questions relevant des fondements des mathématiques, bien que très travaillées de nos jours, manquent encore d'une solution satisfaisante. Les difficultés les plus grandes proviennent de l'ambiguïté du discours.
>
> Pour cette raison, il est de la plus haute importance de considérer attentivement les mots que nous utilisons. J'ai pris la décision de faire cet examen, et présente dans cet article les résultats de mon étude, ainsi que des applications à l'arithmétique.
>
> J'ai indiqué par des signes toutes les idées qui apparaissent dans les fondements de l'arithmétique, de façon à ce que chaque proposition soit énoncée à l'aide de ces seuls signes. [. . .]
>
> Grâce à cette notation, chaque proposition [du système] possède la forme et la précision dont les équations jouissent en algèbre, et de ces propositions ainsi écrites d'autres peuvent être déduites, par un processus qui ressemble à celui de la résolution des équations algébriques[1]. »

[1] [Peano 1889a, p. iii] : « *Quaestiones, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multi tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur. Quare summi interest verba ipsa, quibus utimur attente perpendere. Hoc examen mihi proposui, atque mei studii resultatus, et arithmeticae applicationes in hoc scripto expono. Ideas omnes quae in arithmeticae principiis occorrunt, signis indicavi, ita ut quaelibet propositio his tantum signis enuncietur. [. . .]. His notationibus quaelibet propositio formam assumit atque praecisionem, qua*

Ce n'est donc qu'en usant d'une notation artificielle respectant les articulations conceptuelles que le mathématicien peut espérer, selon Peano, se libérer des associations non justifiées que la langue commune introduit dans le contenu scientifique, et fonder de façon enfin satisfaisante les mathématiques.

Mais dans l'extrait cité, un autre élément attire l'attention : la comparaison de la déduction à la résolution d'équation, celle de la proposition à une équation. La comparaison arrête surtout lorsqu'on la replace dans le contexte des travaux de Peano. Le mathématicien a, en effet, publié en 1888, un an avant d'écrire ces lignes, un ouvrage intitulé *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, consacré, comme son nom l'indique, aux algèbres géométriques et plus particulièrement au calcul grassmannien. Quel rapport faire entre le *Calcolo* et les deux articles de 1889 ? En quoi la méthode employée dans *Arithmetices principia et I principii* est-elle nouvelle, si en la présentant, Peano la compare à celle, toute algébrique, de la résolution d'équations ? Plus généralement, comment concevoir, chez le mathématicien italien, la relation entre calcul et axiomatique ?

L'idée qu'il y a une continuité entre la tradition du calcul géométrique et l'approche fondationnelle ultérieure est souvent avancée dans la littérature secondaire[2] : le *Calcolo* représenterait la première étape du processus aboutissant au projet d'axiomatisation développé dans la *Rivista* [Peano 1894]. À l'inverse, la distinction, effectuée pour la première fois par van Heijenoort, entre la logique comme langue et la logique comme calcul pourrait suggérer une opposition entre l'approche axiomatique et celle de l'algèbre géométrique [van Heijenoort 1967]. Même si la position de Peano à l'égard de la logique n'est pas facilement caractérisable[3], la nouvelle présentation adoptée en 1889, qui met en avant l'existence d'une partie logique commune à toutes les branches mathématiques, paraît plus propice au développement d'un universalisme logique, que le modèle algébrique déployé dans le *Calcolo*.

Nous voudrions, dans ce qui suit, défendre deux thèses. La première est qu'il y a discontinuité sur le plan de la méthode entre le *Calcolo* [Peano 1888] et *I principii* [Peano 1889b]. En 1888, Peano met au point

---

*in algebra aequationes gaudent, et a propositionibus ita scriptis aliae deducuntur, idque processis qui aequationum resolutioni assimilantur.* » Les traductions ont été faites par l'auteur de cet article.

[2] Grattan-Guinness [2000, p. 223–224] écrit : « [Peano, dans le *Calcolo*] employait un style plus axiomatique que Grassmann lui-même [...], un trait qui prendra de l'importance dans son travail à partir de ce livre. » ; voir également [Bottazzini 1895] et note *infra*.

[3] Voir sur ce point les analyses de Rodriguez-Consuegra [1991]. La logique est parfois définie par Peano comme un instrument, parfois comme une science dotée d'un objet propre.

un symbolisme s'appliquant directement à un certain type d'entité spécifiée par avance ; la méthode nouvelle mobilisée dans *I principii* entend caractériser de manière complète un domaine de réalité en ne se référant qu'à ses propriétés formelles. Mais notre seconde thèse atténue quelque peu cette première opposition : la référence au calcul est encore bien présente dans *I principii* et permet à Peano, qui suit les *Vorlesungen über neuere Geometrie* [Pasch 1822a] de très près, de renouveler complètement l'approche développée par Pasch. La reformulation, en termes algébriques, des concepts géométriques fondamentaux, élimine les contraintes très fortes que le parti pris empiriste du mathématicien allemand (Pasch) faisait peser sur sa propre pratique. Pour le dire autrement, c'est grâce au calcul que Peano réussit à penser l'axiomatique comme un système abstrait.

Dans les deux premières sections de l'article, nous montrerons en quoi la méthode du *Calcolo* diffère de celle utilisée dans *I principii.* Dans la troisième section, nous présenterons l'axiomatisation proposée dans *I principii* et la comparerons à celle exposée dans les *Vorlesungen.* Enfin, dans un dernier temps, nous pointerons, en prenant quelques exemples, la différence fondamentale entre Peano et Pasch.

## 1. CALCUL GÉOMÉTRIQUE ET AXIOMATIQUE DE LA GÉOMÉTRIE

*I principii di geometria* présente un système qui ne contient, outre les symboles logiques, que deux signes primitifs, les lettres de point et de segment :

> « Le signe **1** se lira point. [...]
>
> Si $a$, $b$ sont des points, par $ab$ nous entendrons la classe formée des points intérieurs au segment $ab$. Ainsi, la formule $c \in ab$ signifiera '$c$ est un point intérieur au segment $ab$'[4]. »

Tous les autres concepts fondamentaux, notamment ceux de droite et de plan, sont définis à partir de ces deux là. Mais quel statut ont ces entités primitives ?

Que ce soit en 1889 ou en 1894[5], Peano ne conçoit pas les concepts géométriques primitifs comme étant définis implicitement par l'ensemble des axiomes. Suivant la plupart de ses contemporains, en particulier Pasch, le mathématicien italien considère alors la géométrie comme une

---

[4] [Peano 1889b, p. 9] : « *Il signo* **1** *leggasi punto. [...] Se a, b sono punti, con ab intenderemo la classe formata dai punti interni al segmento ab. Quindi la formula c* $\in$ *ab significa 'c è un punto interno al segmento ab'.*

[5] 1894 est la date de publication de *Sui fondamenti della geometria* qui reprend et étend le propos de *I principii.*

science de la nature, qui décrit certaines propriétés élémentaires des corps. Peano écrit ainsi dans la préface de *I principii di geometria* :

> « Quelles sont, parmi les entités géométriques, celles que nous pouvons définir et celles qu'il nous faut admettre sans définition ?
>
> Et, parmi les propriétés de ces entités qui sont *expérimentalement* vraies, lesquelles pouvons-nous admettre sans démonstration, et lesquelles devons-nous déduire comme conséquence ?[6] » [Nous soulignons.]

Dans *Sui fondamenti della geometria*, il est encore plus explicite :

> « Avant d'abandonner ce sujet, une remarque concernant la nature *pratique* ou *expérimentale* des postulats sera encore utile. On a certes le droit de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent. Mais pour qu'un tel travail mérite le nom de Géométrie, il faut que ces hypothèses ou postulats expriment le résultat *des observations les plus simples et élémentaires des figures physiques*[7]. » [Nous soulignons.]

La méthode de Peano n'est pas celle de Hilbert. Les termes non définis désignent chez le mathématicien italien une classe d'objets ou de relations empiriquement identifiables, dont les principales propriétés sont énoncées dans les postulats.

Malgré tout, comme l'ont montré de nombreux commentateurs, [Avellone *et al.* 2002], [van der Waerden 1986], [Freguglia 1985], [Contro 1976], Peano a une très claire conscience du caractère « abstrait » de son système. Si l'expérience fonde la vérité des axiomes et donne une signification aux concepts primitifs, elle ne joue, et ne doit jouer, aucun rôle dans le développement des preuves. C'est ce qu'indique Peano lorsqu'il affirme, dans l'extrait cité, que l'on a le droit « de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent ». La possibilité d'une axiomatisation ne dépend pas d'un ancrage empirique, et l'interprétation des symboles primitifs n'a aucune incidence sur le développement théorique lui-même. Il précise ainsi :

> « Le lecteur peut comprendre [*può intendere*] par le signe **1** une catégorie quelconque d'entités, et par $c \in ab$ une relation quelconque entre trois entités de cette catégorie ; toutes les définitions qui suivent (§ 2) auront toujours une valeur, et toutes les propositions du § 3 subsisteront. Selon la signification attribuée aux signes non définis **1** et $c \in ab$, les axiomes pourront être, ou non, satisfaits. Si un certain groupe d'axiomes est vérifié, *toutes les propositions qui s'en*

[6] [Peano 1889b, p. 3] : « *Quali fra gli enti geometrici si possono definere, e quali occorre assumere senza definizione ? E fra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza ?* »

[7] [Peano 1894, p. 75] : « *E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenuto in quelle ipotesi. Ma affinchè questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche.* »

> *déduisent seront aussi vraies*, puisque ces propositions ne sont rien d'autres que des transformations de ces axiomes et des définitions[8]. » [Nous soulignons.]

Pasch, dont s'inspire Peano, combinait déjà une approche empirique de la géométrie à une démarche axiomatique. L'auteur des *Vorlesungen* soulignait aussi que, si les concepts indéfinissables ont un contenu empirique, le sens de ces notions ne doit jouer aucun rôle dans les preuves[9]. Le mathématicien italien va cependant plus loin que son collègue allemand, puisque, dès 1889, il présente des preuves d'indépendance. Par exemple, pour montrer que l'axiome 3, qui stipule que si « $a$ est un point, la classe $aa$ est vide », n'est pas toujours vrai, Peano propose une interprétation numérique des points, et algébrique des segments :

> « Si, par **1** nous désignons le nombre (fini), et si nous prenons pour relation fondamentale une équation $f(a,b,c) = 0$, que nous supposerons algébrique et de premier degré en $c$, alors, afin de rendre vraie la prop. 3, qui dans notre cas signifie 'l'équation $f(a,a,c) = 0$ ne peut être satisfaite pour aucune valeur de $a$ et de $c$', il faut que le coefficient de $c$ dans $f(a,b,c)$ soit divisible par $a - b$ [...][10]. »

La pratique n'est pas encore, dans *I principii di geometria*, systématiquement mise en œuvre ; mais l'existence de quelques exemples suffit pour montrer que Peano mesure toute l'importance de la possibilité de varier les interprétations des indéfinissables.

Pour résumer : le fait, en premier lieu, que Peano détache les indéfinissables de leur interprétation géométrique attendue – le fait, en second lieu, que Peano use de la variabilité des interprétations pour prouver

[8] [Peano 1889b, p. 24] : « *Il lettore puó intendere col segno* **1** *une categoria qualunque di enti, e con $c \in ab$ una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria ; avranno sempre valore tutti le definizioni che seguono (§ 2), e sussisteranno tutte le proposizione del § 3. Dipendentemente dal significato attribuito ai segni non definiti* **1** *e $c \in ab$, potranno essere soddisfatti, opurre no, gli assiomi. Se un certo gruppo di assiomi è verificato, saranno pure vere tutte le proposizioni che si deducono, non essendo queste proposizioni che trasformazioni di quegli assiomi e delle definizioni.* »

[9] Voir notamment [Pasch 1822a, p. 98] : « Pour que la géométrie soit véritablement déductive, il est nécessaire que le processus d'inférence soit complètement indépendant du sens des concepts géométriques, comme il doit être indépendant des figures – ce sont seulement les relations entre les concepts géométriques, telles qu'elles sont consignées dans les théorèmes et les définitions concernés, que l'on doit prendre en compte. » [*Es muss in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Process des Folgerns überall unabhängig sein vom Sinn der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren ; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen.*]

[10] [Peano 1889b, p. 31] : « *Se* **1** *significa numero (finito), e si prende per relazione fondamentale un'equazione $f(a,b,c) = 0$, che supporremo algebrica e di primo grado in $c$, affinchè sia vera la prop. 3, che qui nel nostro caso significa : 'l'equazione $f(a,a,c) = 0$ non può essere soddisfatta da alcun valore di a e di c', bisogna che il coefficiente di c in $f(a,b,c)$ sia divisibile per $a - b$* [...]. »

l'indépendance des postulats, montre que, dans *I principii*, les conditions posées dans les axiomes déterminent complètement le type de réalité auquel le système s'applique. Si Peano affirme encore que la géométrie est une science de la nature, c'est parce qu'il considère que le contenu déjà autonome de la théorie, pour être qualifié de géométrique, doit correspondre aux données fournies par notre expérience de l'espace. Mais ces données intuitives ne sont en rien constitutives – elles agissent comme des contraintes, que le système purement conceptuel, engendré de façon indépendante par la totalité des axiomes, doit retrouver et satisfaire[11].

On pourrait croire que le calcul géométrique, dans la mesure où il met en avant les procédures formelles au dépens de l'intuition et des figures, prépare le tournant axiomatique de l'année 1889[12]. Il nous semble pourtant qu'il n'en est rien et que la méthode déployée dans *I principii di geometria* et dans *Arithmetices principia* s'oppose à l'approche algébrique développée dans le *Calcolo*. Loin, en effet, de vouloir caractériser de façon purement formelle un contenu donné, Peano cherche en 1888 à exprimer dans le *medium* du calcul, les spécificités propres à un domaine d'objets, celui des grandeurs géométriques. Ainsi, c'est sur la notion d'analogie que Peano met l'accent lorsqu'il définit la nature de son projet : l'algèbre ordinaire est à l'arithmétique et aux nombres ce que le nouveau calcul est censé être à la géométrie et aux grandeurs spatiales. Citons le début de la préface du *Calcolo* :

> « De manière générale, le calcul géométrique consiste en un système d'opérations sur des entités géométriques, analogues [*analoghe*] à celle que l'algèbre fait sur les nombres. Il permet d'exprimer en formules des résultats des constructions géométriques, de représenter par des équations les propositions de géométrie, et de substituer une transformation d'équations à un raisonnement. Le calcul géométrique présente une analogie [*presenta analogia*] avec la géométrie analytique ; mais il en diffère en ce que, alors que dans la géométrie analytique, les calculs sont faits sur des nombres qui déterminent des entités géométriques, dans cette nouvelle science les calculs sont faits sur les entités géométriques elles-mêmes[13]. »

[11] Pour une analyse très éclairante des différences entre les démarches de Peano et de Hilbert, voir [Avellone *et al.* 2002], notamment p. 376–379. Cf. également note *infra*.

[12] Cela semble être l'opinion de I. Grattan-Guinness (voir note *supra.*). U. Bottazzini [1895], soutient également que le *Calcolo* est à la base de l'entreprise axiomatique – mais il fonde sa conclusion sur le rôle que l'algèbre de la logique joue dans le *Calcolo* et dans les œuvres ultérieures. Même si cette dernière analyse nous paraît très pertinente, nous avons choisi ici de mettre l'accent sur les différences entre les méthodes de l'algèbre et de l'axiomatique géométrique. Sur ce choix, voir notre note 64.

[13] [Peano 1888, p. 3] : « *Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un systema di operazioni a eseguirci sui enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fra sopra i numeri. Esso permette esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, di rappresentare con equazioni proposizioni di geometria,*

Les spécificités du calcul géométrique sont immédiatement ici rapportées à celle d'un champ ontologique particulier, les êtres géométriques. Le projet peanien d'un calcul géométrique repose ainsi complètement sur la distinction, admise comme primitive, entre grandeurs géométriques et nombres. L'algèbre ordinaire, parfaitement adaptée aux grandeurs numériques, s'ajuste mal aux spécificités d'un autre type d'objet, les entités géométriques, et doit donc, selon Peano, être complétée par l'élaboration d'un nouveau calcul, dont les opérations et les règles reflètent les particularités de ce sur quoi il porte. Ce qui distingue la nouvelle discipline de la géométrie analytique est que « les calculs sont faits [directement] sur les entités géométriques elles-mêmes ». Quelle différence avec le programme développé un an plus tard, dans lequel la variabilité des interprétations, non seulement est admise, mais constitue un des instruments méthodologiques fondamentaux ! Dans *I principii*, la forme du système détermine de façon autonome ses applications possibles ; dans le *Calcolo*, c'est le contraire : les règles d'emploi des symboles sont censées refléter les spécificités d'entités connues par ailleurs.

## 2. UN EXEMPLE D'APPLICATION DU CALCUL GÉOMÉTRIQUE : LA DÉFINITION DE L'AIRE D'UNE SURFACE

Peano, autour des années 1890, consacre plusieurs textes à la définition de l'aire d'une surface gauche[14]. Ces riches analyses mériteraient en elle-même une étude précise et détaillée que, faute de temps et de place, nous ne mènerons pas ici[15]. Toutefois le rôle que Peano entend faire jouer, à cette occasion, à son calcul géométrique illustre particulièrement bien, nous semble-t-il, l'opposition qui existe, sur le plan de la méthode, entre les projets du *Calcolo* et de *I principii.* Afin de donner davantage de chair au propos de la section précédente, nous chercherons, dans ce paragraphe, à expliciter la fonction que le mathématicien italien assigne à l'algèbre géométrique dans une question relevant à la fois des fondements de l'analyse et de la géométrie, celle de la définition du concept d'aire.

*e di sustituire una transformazione di equazioni ad un ragionamento. Il calcolo geometrico presenta analogia colla geometria analitica ; ne differisce in sciò, che, mentra nella geometria analytica, i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi.* » Voir également [Peano 1896].

[14] Voir [Peano 1887] et [Peano 1890]. Nous nous sommes concentrés ici sur le court article de 1890.

[15] L'étude des problèmes liés à la définition peanienne de l'aire d'une surface gauche est l'objet d'un travail en cours, fait en collaboration avec Yvette Perrin.

Dans *Sulla definizione dell'area d'una superficie*, Peano [1890] dresse de façon très claire le tableau des problèmes posés alors par le concept d'aire. Il commence par critiquer la définition avancée par Serret dans le second volume de son *Cours de calcul différentiel et intégral* [Serret 1879] :

> « On ne peut comparer à une ligne droite qu'une autre ligne droite ou une somme de telles lignes ; aussi nous avons dû définir avec précision, dans le Calcul différentiel, la longueur rectiligne qu'on nomme longueur d'un arc de courbe. Nous emploierons ici des considérations analogues pour définir ce que nous entendons par aire d'une portion déterminée de surface courbe. [...]
>
> Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C ; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrique inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal ayant pour limite le contour C. » [Serret 1879, p. 292–293]

Pour définir la longueur d'un arc de courbe, Serret considérait la famille des polygones inscrits et posait que la longueur de l'arc est la limite de la somme des longueurs des côtés des polygones, lorsque ces longueurs tendent vers zéro. Serret souhaite étendre cette technique aux problèmes de quadrature : l'aire d'une surface est conçue par lui comme la limite de la somme des aires des faces d'une surface polyédrale inscrite, lorsque les aires des faces du polyèdre tendent vers zéro (et lorsque le contour polygonal des polyèdres tend vers le contour de la surface à quarrer)[16]. Peano, après Schwarz, note que cette définition est erronée. Serret présuppose en effet que « le plan passant par trois points de la surface a pour limite le plan tangent à cette surface » [Peano 1890, p. 55]. Ce n'est pas toujours vrai, comme le montre le contre-exemple de la quadrature de l'aire d'une surface cylindrique développé par Peano[17].

Plus intéressant pour notre propos, Peano rejette une seconde définition, donnée par Hermite, qui, si elle est mathématiquement irréprochable, présente l'inconvénient de ne pas respecter l'analogie entre rectification d'une courbe et quadrature d'une surface. Au début de sa note [Peano 1890, p. 54], Peano rappelle les deux définitions qu'Archimède donne de la longueur d'un arc plan et de l'aire d'une surface plane, pour souligner l'analogie stricte établie entre les cas unidimensionnels

[16] Dans ce qui suit, même si les mathématiciens dont on va parler ne l'explicitent pas, les surfaces considérées sont régulières, c'est-à-dire décrites par un point $A(u,v)$ fonction de deux paramètres $u$ et $v$, admettant en chaque point $(u,v)$ des dérivées partielles continues et non colinéaires définissant le plan tangent à la surface au point $A(u,v)$. De plus, les portions de la surface dont l'aire est considérée sont limitées par une courbe fermée régulière par morceaux, c'est-à-dire décrite par un point $C(t)$ dont chaque morceau admet en chacun des points des dérivées continues définissant la droite tangente à la courbe au point $C(t)$.

[17] Schwarz découvre la difficulté en 1880 et envoie une lettre en 1881 à Genocchi contenant une brève critique de la définition de Serret. Peano redécouvre l'erreur indépendamment (sur ce point, voir [Kennedy 2002, p. 20–22] et [Lebesgue 1975, p. 95]).

et bidimensionnels[18] : ce qui vaut de la définition de la longueur doit valoir de celle de l'aire. Le maintien de cette analogie est pour Peano une exigence, que la définition de Hermite ne satisfait précisément pas. En effet, dans sa définition de l'aire, le mathématicien français introduit une référence à un système de coordonnées extérieur à la surface considérée[19]. Comment expliquer, demande Peano, que, subitement, lorsque l'on passe à la définition de l'aire d'une surface, une référence à des éléments extrinsèques devienne nécessaire, alors qu'une définition intrinsèque pouvait être donnée de la longueur d'une courbe ? Pourquoi est-on obligé dans le cas bidimensionnel de renoncer à une stratégie qui fonctionne dans le cas unidimensionnel ? Peano retrouve ici, d'une certaine manière, Serret, dont la stratégie « archimédienne » consistait à étendre aux surfaces la procédure de rectification d'une courbe par inscription d'un polygone. L'« erreur » de Serret montre cependant que la quadrature des surfaces pose un problème spécifique. Comment, dès lors, conserver l'analogie archimédienne, sans céder sur la rigueur[20] ?

C'est pour répondre à ce dilemme que Peano introduit des concepts provenant de son algèbre géométrique. Citons-le :

> « La rigueur et l'analogie entre les définitions concernant l'arc et l'aire peuvent être toutes les deux obtenues en faisant usage non seulement du

---

[18] Peano reformule les définitions classiques en expliquant que, selon Archimède, la longueur d'un arc convexe plan est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des courbes polygonales inscrites, et de la limite inférieure des longueurs des courbes polygonales circonscrites ; que l'aire d'une surface convexe plane est la valeur commune de la limite supérieure des aires des surfaces polyédrales inscrites, et de la limite inférieure des aires des surfaces polyédrales circonscrites.

[19] Hermite [1882, p. 39–42] définit l'aire comme « la limite d'un système de polygones non contigus tangents à la surface » [Peano 1890, p. 56]. Il projette les polygones tangents sur un plan arbitraire extérieur à la surface, et fait donc référence, dans sa définition, aux angles entre les plans tangents et ce plan de projection.

[20] Lebesgue, qui a lu et s'est inspiré de *Sulla definizione dell'area d'una superficie* [Peano 1890], décrit, de façon très claire la situation [Lebesgue 1975, p. 96] : « On avait une définition analytique [de l'aire d'une surface], il n'y avait qu'à en donner des interprétations géométriques et même on possédait déjà de telles interprétations. Avant que soit connu l'exemple de Schwarz qui montra l'impossibilité de conserver la définition alors admise, les difficultés de cette définition s'étaient révélées à tous ceux qui avaient essayé de la mettre en œuvre rigoureusement ; certains avaient imaginé de restreindre la famille des polyèdres inscrits de façon à pouvoir prouver l'existence d'une limite de leurs aires. Ainsi : l'aire d'une surface est la limite des aires de surfaces polyédrales inscrites dans la surface, quand leurs faces deviennent infiniment petites dans toutes les dimensions et *de façon que les angles de ces faces ne tendent pas vers zéro*, disaient les uns, *de façon que les angles que font les faces avec la surface tendent vers zéro*, disaient d'autres. Seulement ces restrictions sont artificielles : rien ne prouve que d'autres restrictions simples ne donneraient pas une autre limite ; on ne sait laquelle de toutes ces limites correspond le mieux à la notion physique d'aire. »

concept de segment linéaire considéré comme ayant une grandeur et une direction *(segment, vecteur)*, mais également du concept dual de région planaire considérée comme ayant une grandeur et une orientation. Ces entités ont été introduites en géométrie par les travaux de Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann et Hamilton. Une région planaire ainsi considérée, ou plutôt sa limite, peut être appelée un bivecteur, puisqu'elle est le produit, au sens de Grassmann, de deux vecteurs[21]. »

Dans la suite du texte, Peano définit la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface de manière à rendre manifeste l'analogie archimédienne :

« La longueur d'un arc de courbe est la limite supérieure de la somme des grandeurs des vecteurs qui constituent ses parties. [...]

L'aire d'une région de surface est la limite supérieure de la somme des grandeurs des bivecteurs qui constituent ses parties. » [22]

Pour retrouver l'analogie sans renoncer à la rigueur, il faut, nous dit Peano, abandonner les concepts géométriques traditionnels (triangles, polygones, polyèdres, ... ) utilisés par Serret et Hermite, au profit de notions plus raffinées, qui possèdent en elles-mêmes indissociablement « une grandeur et une direction » : les vecteurs et bivecteurs du *Calcolo geometrico*.

Sans entrer dans le détail de la solution, et des nombreux problèmes qu'elle soulève[23], expliquons-en brièvement l'idée maîtresse. Un bivecteur (l'analogue bidimensionnel du vecteur) peut être défini comme une famille de figures planes, de même grandeur (de même aire), de même direction (les plans de ces figures sont identiques ou parallèles) et de même sens (les bords de ces figures sont parcourus dans le même sens). Ainsi un triangle et un cercle de même aire, sur des plans parallèles, et parcourus dans le même sens sont les représentants d'un même bivecteur. Le raisonnement peanien repose alors sur un théorème, démontré

---

[21] [Peano 1890, p. 55] : « *Si può ottenere ad un tempo il rigore e l'analogia fra le definizioni relative all'arco et all'area, ove si faccia uso, oltrechè del concetto di retta limitata considerata in grandezza e in direzione (segmento, vettore), anche del concetto dualitico di area piana conciderata in grandezza e giacitura. Questi enti furono introdotti in geometria specialmente per opera di Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann e Hamilton. Un'area piana cosÃň considerata, o meglio la linea suo contorno, si può chiamare bivettore, essendo essa il prodotto, secondo Grassmann, di due vettori.* »

[22] [Peano 1890, p. 56] : « *Lunghezza d'un arco di curva è il limite superiore della somma delle grandezze dei vettori delle sue parti. [...] Area d'un porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti.* ».

[23] Lebesgue critique la théorie de Peano dans sa thèse [Lebesgue 1902], puis dans *La mesure des grandeurs* [Lebesgue 1975]. Outre le fait que les conditions que doit satisfaire la surface pour avoir une aire (au sens de Peano) ne sont pas clairement précisées, Lebesgue critique la conception peanienne de la limite supérieure [Lebesgue 1902, p. 271–272], et trouve imprécise la notion de parties d'une surface : quelles sont les conditions que doivent satifaire les courbes subdivisant la surface ?

dans le *Calcolo* [Peano 1888, p. 58 *sq.*] : à tout polygone, plan ou gauche, et partant, par un passage à la limite[24], à toute courbe close, plane ou gauche, il est possible d'associer un et un seul bivecteur. Peano donne à ce résultat un tour moins algébrique et plus géométrique dans *Sulla definizione dell'area d'una superficie* [Peano 1890, p. 56] :

> « Une courbe close (non-planaire) $\ell$ étant donnée, une courbe close plane ou bivecteur $\ell'$ peut toujours être déterminée de façon à ce que, si les deux courbes $\ell$ et $\ell'$ sont projetées sur un plan arbitraire, à l'aide de rayons parallèles de direction arbitraire, alors les aires limitées de leurs projections soient toujours égales[25]. »

Les représentants du bivecteur associé à une courbe close gauche $\ell$ sont les portions de surface plane telles que, projetées sur un plan arbitraire dans une direction arbitraire, l'aire (algébrique[26]) de leur projection est égale à l'aire de la projection de la courbe originale. Quelques lignes plus loin, Peano présente sa définition autrement, en considérant le plan de projection pour lequel l'aire de la projection orthogonale de $\ell$ est maximale : le bivecteur $\ell'$ a pour grandeur cette aire maximale, pour direction celle du plan de projection, pour sens celui de la projection de $\ell$[27].

Ce sont ces entités, les bivecteurs associés aux parties de la surface, dont Peano se sert dans la définition de l'aire. Décrivons rapidement comment. Peano considère une partition quelconque d'une surface, et associe un bivecteur à chaque courbe close délimitant une cellule de la partition. Il considère alors la somme (algébrique) des grandeurs des bivecteurs. Il y a une infinité non dénombrable de telles partitions, donc une infinité non dénombrable de résultats possibles pour la somme. Peano définit alors l'aire cherchée comme « la plus grande limite » (c'est-à-dire, semble-t-il, le plus grand point d'accumulation) de cette infinité non dénombrable de nombres. Bien entendu, plusieurs choses seraient ici à

---

[24] Sur la notion de limite chez Peano, et les questions qu'elle pose, voir l'analyse de D. Palladino dans [Borga *et al.* 1985, p. 145–149], et [Lebesgue 1902, p. 272] pour une appréciation critique.

[25] [Peano 1890, p. 56] : « *Data une linea chiusa (non piana)* $\ell$, *si può sempre determinare una linea piana chiusa o bivettore* $\ell'$, *in guisa che, proiettando le due linee* $\ell$ *e* $\ell'$ *su d'un piano arbitrario, con raggi paralleli di direzione arbitraria, le aree limitate dalle loro proiezeioni risultino sempre eguali.* »

[26] Les bivecteurs ayant un sens, l'aire est comptée positivement ou négativement selon le sens dans lequel le bord est parcouru.

[27] Remarquons que, contrairement à ce qui se passe chez Hermite, nul plan n'est ici privilégié – au contraire, tous les plans de projection sont considérés dans la définition. La notion de bivecteur associé est donc intrinsèque, au sens où il n'est pas fait appel dans sa définition à un système de coordonnées qui serait donné par avance : le bivecteur est associé à la courbe close $\ell$, et uniquement à elle.

éclaircir : qu'est-ce que Peano entend exactement par subdivision d'une surface ? Quel sens donne-t-il à la limite ? En quoi exactement sa nouvelle définition permet-elle d'éviter les contre-exemples opposés à Serret ? Mais conformément à ce que nous avons annoncé, nous laisserons ces questions en suspens[28], car nous en savons à présent suffisamment pour déterminer quel rôle jouent les concepts du calcul géométrique dans la définition de l'aire.

L'idée reste bien, en un sens, toujours la même : il s'agit « d'approcher » une surface gauche, à l'aide de surfaces planes, liées d'une façon particulière à la surface-cible. De ce point de vue, Peano reprend les stratégies archimédiennes d'inscription ou de circonscription d'un polyèdre dans, ou autour de, la surface. Mais la comparaison s'arrête là, car si dans le dernier cas, on peut très facilement visualiser quel ensemble d'éléments plans on associe à la surface considérée, il n'en va absolument pas de même dans le premier : le bivecteur associé à la courbe close est une entité très abstraite, qui ne se réduit ni à une surface inscrite, ni à une surface circonscrite. Le calcul géométrique prouve l'existence et l'unicité d'un tel objet (il donne même, dans certains cas, une procédure de construction), mais l'être géométrique considéré est intuitivement beaucoup plus difficile à saisir que le concept de surface inscrite ou circonscrite.

Dit autrement, tout se passe comme si le maintien de l'analogie archimédienne exigeait une reconfiguration des concepts fondamentaux de la géométrie. Peano ne propose rien de moins que d'abandonner l'antique concept de figure, et de lui substituer la notion de forme géométrique, plus apte à supporter les analogies naturelles que les anciens géomètres avaient eux-mêmes forgées. Pour éviter l'erreur de Serret, tout en conservant l'articulation entre problèmes de rectification et de quadrature, il faut abandonner les notions familières de segments ou de triangles inscrits ou circonscrits, au profit d'une autre « ontologie », celle des vecteurs et bivecteurs associés aux courbes closes. L'algèbre grassmannienne (revue par Peano) intervient donc ici comme un outil permettant de redessiner les contours des concepts géométriques fondamentaux, de substituer aux objets spatiaux intuitionnables, d'autres entités plus abstraites, mais mieux à même d'exprimer les propriétés des grandeurs géométriques. Du point de vue de Peano, Serret et Hermite partagent la même cécité « ontologique » : ils pensent en termes de figures (polygones ou polyèdres inscrits ou circonscrits), là où il faudrait penser en termes de grandeurs orientées, telles que définies dans le *Calcolo*.

---

[28] Lebesgue les soulève dans sa thèse ; voir *supra* note 23.

Il n'est pas certain que l'idée de convoquer l'algèbre géométrique dans la définition de l'aire ait été couronnée de succès. Ainsi, Lebesgue, malgré l'intérêt qu'il portait au traitement peanien, considérait que l'approche de Peano était imprécise et d'un usage très limité – il a, on le sait, développé sa théorie selon d'autres voies. Mais la question est pour nous ailleurs : la façon dont Peano utilise le calcul géométrique, à l'occasion d'une réflexion sur des problèmes d'analyse, confirme ce que nous avancions dans la section précédente : il y a une différence essentielle entre la méthode axiomatique et l'algèbre géométrique. En un sens, les deux approches sont bien également « abstraites » : l'accent est chaque fois mis sur des règles de transformations ou de déductions, l'intuition étant repoussée à l'arrière-plan. Mais précisément, « abstraction » n'a, ici et là, pas le même sens. Dans un système axiomatique, la référence des symboles (non logiques) n'est pas fixée (et Peano, dès *I principii*, fait varier l'interprétation des indéfinissables, qui peuvent désigner indifféremment des relations numériques ou des relations géométriques). Tout au contraire, dans *Sulla definizione dell'area di una superficie*, l'algèbre géométrique joue comme un instrument permettant de mettre à jour de nouveaux objets, les formes géométriques, censés remplacer les anciennes figures euclidiennes. Loin de « neutraliser » toute investigation ontologique (une axiomatique est ontologiquement « neutre » au sens où elle s'applique à tout domaine d'objets satisfaisant les relations énoncées dans les axiomes), le calcul géométrique est un dispositif faisant apparaître, sous les figures, une nouvelle couche, plus fondamentale, de la réalité géométrique. L'usage du calcul est bien « ontologique » : Peano tente de saisir un nouveau type d'êtres, à la fois spatiaux et formels, permettant une articulation plus fine du calcul différentiel et intégral à la géométrie[29].

[29] Signalons que cette relation entre calcul géométrique et calcul différentiel est développée dans l'ouvrage de Burali-Forti [1897], qui écrit dans sa préface : « Le but que nous nous sommes proposé est de donner aux jeunes étudiants le moyen d'apprendre aisément ce puissant instrument de calcul [qu'est le calcul géométrique de Peano], et de leur donner, en même temps, le moyen de l'appliquer aux questions de la Géométrie différentielle supérieure. [On] obtient, dans la Géométrie différentielle ordinaire, des propriétés bien simples avec des développements très compliqués. Cette complication est due, en général, à l'emploi des coordonnées, car avec les coordonnées nous faisons des transformations algébriques sur des nombres pour obtenir, d'après des calculs bien souvent fort compliqués, une petite formule, une *invariante*, qui est susceptible d'une interprétation géométrique. Le calcul géométrique ne fait point usage des coordonnées ; il opère directement sur les éléments géométriques, et chaque formule, qui est par elle-même une invariante, a une signification géométrique bien simple qui conduit très aisément à la présentation graphique de l'élément considéré. »

En 1888, la différence entre nombres et grandeurs spatiales fonde la distinction entre deux types de calculs, l'algèbre ordinaire et l'algèbre géométrique. En 1889, une telle dualité d'approche n'est plus de mise – c'est une même méthode logique qui est utilisée dans *Arithmetices principia* et *I principii*. La méthodologie n'est plus à la remorque de l'ontologie, mais est commune à des disciplines aussi différentes que l'arithmétique et la géométrie. Il y a donc bien une forme d'inversion entre le *Calcolo* et les articles de 1889, et on peut comprendre pourquoi Peano a tant voulu insister sur la nouveauté de sa démarche[30]. Mais précisément : d'où vient la nouvelle approche ?

### 3. LA REPRISE PAR PEANO DES *VORLESUNGEN* DE PASCH

Les *Vorlesungen* [Pasch 1822a] ont vraisemblablement joué, dans le brusque changement que subit la pensée de Peano, un rôle fondamental[31]. Dans *I principii di geometria*, Peano [1889b] suit en effet de très près, comme nous allons le voir, l'exposition de Pasch. Qu'est-ce que Peano retire exactement des *Vorlesungen* ? Que laisse-t-il de côté ? Quelles modifications apporte-t-il à la construction de son prédécesseur ?

L'ouvrage de Pasch[32] se divise en deux grandes parties. La première (§§ 1–15) porte sur la géométrie projective ; la seconde est consacrée à la définition du birapport (§§ 16–20) et à l'étude des relations entre géométrie et analyse (§§ 21–23). Seule la première partie nous intéresse ici.

---

[30] Un des éléments qui contribue à masquer la profonde différence entre les approches algébriques et axiomatiques est la présence, dans le dernier chapitre du *Calcolo* [Peano 1888], de ce que l'on considère comme la première définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel (que le mathématicien nomme « espace linéaire ») ; voir [Moore 1995]. Il faut cependant prendre garde au fait que le calcul géométrique, notamment la théorie des formes de première espèce et la théorie des vecteurs, n'est absolument pas, en 1888, fondée sur le concept d'« espace linéaire » et n'est pas présenté sous forme axiomatique (le *Calcolo geometrico* présuppose le cadre euclidien). De surcroît, lorsqu'en 1898, dans *Analisi della teoria dei vettori*, Peano [1888] revient sur sa première présentation et fonde la géométrie sur une axiomatisation de la théorie des vecteurs, il ne fait pas référence à son concept d'« espace linéaire ». De façon plus générale, il nous semble qu'il faut distinguer, lorsque l'on cherche à retracer les origines de la notion moderne d'espace vectoriel, entre le concept de vecteur dont la théorie est, chez Peano, développée dans le cadre d'une doctrine générale des formes, et le concept d'espace linéaire qui n'est pas, lui, spécifiquement géométrique.

[31] Ceci ne veut pas dire que Peano ait lu Pasch entre 1888 et 1889, mais simplement que *I principii* [Peano 1889b] est une reprise critique de [Pasch 1822a]. Kennedy [2002] rapporte que Peano mentionne Pasch dans la controverse qu'il a eue avec Gilbert à propos du théorème de la moyenne en 1884. Mais aucune référence n'est alors spécifiquement faite à la géométrie.

[32] Sur Pasch, voir [Contro 1976], [Torretti 1978] et [Nabonnand 2002].

Pasch y développe une démarche très originale : la géométrie projective, loin d'être considérée, à la manière de v. Staudt et Klein, comme un point de départ, est engendrée à partir d'une théorie considérée comme plus fondamentale, non métrique, la géométrie élémentaire, qui décrit les propriétés les plus simples de notre espace empirique.

Les axiomes [*Grundsätze*] de cette géométrie première sont présentés dans les deux premiers paragraphes (§§ 1–2). Dans les sept paragraphes suivants (§§ 3–9), certainement les plus novateurs, Pasch définit, à partir des concepts élémentaires, les notions projectives fondamentales, à savoir les concepts de point, de droite et de plan projectifs, ainsi que la relation ordinale de séparation. Après avoir examiné (§§ 10–12) la structure de ces concepts, Pasch introduit un nouvel indéfinissable, la congruence, dont il développe, toujours sous forme axiomatique, la théorie (§§ 13–14). C'est au paragraphe quinze que le géomètre, en combinant les deux doctrines, celle purement projective des paragraphes un à douze, et celle fondée sur la congruence des paragraphes treize et quatorze, prouve le théorème fondamental de la géométrie projective (c'est-à-dire qu'une transformation projective entre deux droites est univoquement définie par la donnée des images de trois points distincts). Ce théorème ne peut pas, selon Pasch, être démontré sans recourir à la congruence.

La structure de la première partie des *Vorlesungen* est relativement complexe. Retenons trois éléments. Pasch présente, sous forme axiomatisée, deux doctrines différentes : la géométrie élémentaire (§§ 1–2) et la théorie de la congruence (§§ 13–14). À chaque fois, il énumère l'ensemble des *Grundsätze* et présente les dérivations de quelques théorèmes, sans toutefois adopter une notation spécifique. Pasch axiomatise, en second lieu, une troisième théorie, dont il liste également, au paragraphe neuf, l'ensemble des postulats – il s'agit de la partie de la géométrie projective qui ne repose par sur le théorème fondamental. Toutefois ce système ne jouit pas, dans les *Vorlesungen*, du même statut que les deux autres : les postulats ne sont pas des *Grundsätze*, fondés sur l'observation directe des propriétés des corps, mais des *Stammsätze*, c'est-à-dire des théorèmes de géométrie élémentaire reformulés dans une langue qui est celle de la géométrie projective – les axiomes ainsi que les concepts projectifs sont, selon Pasch, dérivés de la géométrie élémentaire. Troisième et dernier point : si le mathématicien axiomatise des théories jusqu'à lui non complètement formalisées, il accorde au moins autant d'importance aux procédures de construction des concepts projectifs à partir des notions élémentaires. Ce mouvement « vertical » de redéfinition progressive de tous les termes fondamentaux, qui conduit de l'élémentaire au projectif et qui occupe une place centrale, doit être soigneusement distingué de l'entreprise « horizontale » d'axiomatisation[33].

Que retient Peano des *Vorlesungen* ? Il ne s'intéresse, en 1889 comme en 1894, qu'à l'entreprise d'axiomatisation des deux théories fondamentales que sont la géométrie élémentaire et la géométrie de la congruence. Il n'évoque qu'à peine, dans [Peano 1894], la géométrie projective, et néglige complètement le contenu des paragraphes trois à neuf des *Vorlesungen*, c'est-à-dire la construction du projectif à partir de l'élémentaire[34]. *I principii di geometria* [Peano 1889b] se présente comme une réécriture des deux premières sections du traité de Pasch ; dans *Sui fondamenti di geometria*, Peano [1894] ajoute une partie sur la congruence, qui reprend le propos des paragraphes treize et quatorze des *Vorlesungen*. La lecture de Peano est donc très sélective ; il ne retient que les axiomatiques fondamentales, qu'il isole du reste de l'ouvrage.

Son but est, officiellement, le suivant : montrer comment l'usage d'une notation logique artificielle permet, non seulement d'exprimer un contenu mathématique complexe, mais encore d'améliorer les présentations classiques. De ce point de vue, les *Vorlesungen* sont une occasion sans pareille : si la langue de Pasch reste l'allemand ordinaire, le géomètre est suffisamment précis pour rendre possible une enrégimentation logique. Le double pari que fait Peano semble donc être le suivant : montrer en premier lieu qu'une traduction en « peanien » de tous les postulats des *Vorlesungen* est réalisable – c'est l'objet de la première partie de son texte (voir l'appendice à la fin de notre article) ; montrer en second lieu qu'une telle reformulation n'est pas inutile et permet d'améliorer la présentation de Pasch. C'est dans la seconde partie de *I principii di geometria* que Peano commente ses différentes traductions, et s'emploie à souligner l'apport scientifique de l'entreprise.

Trois types d'avancées sont indiqués. L'usage de la notation logique permet, tout d'abord, de critiquer [Peano 1889b, p. 32–33] certaines formulations de Pasch, notamment celle de son premier axiome : « entre deux points, on peut toujours tracer un segment de droite, et seulement un » [Pasch 1822a, p. 5]. Le mathématicien italien demande si deux

---

[33] Ce mouvement de reformulation progressif est ce qui explique la différence entre *Grundsatz* et *Stammsatz* : les *Stammsätze* sont à la fois une réécriture de théorèmes de géométrie élémentaire (théorèmes portant la plupart du temps sur des relations entre gerbes de droites ou de plans), et en même temps un socle permettant de développer axiomatiquement, de façon autonome par rapport à l'expérience, la géométrie projective. Je ne développe pas car Peano laisse ce point de côté ; voir cependant, *infra* et [Nabonnand 2002] pour une présentation plus complète.

[34] Il y fait seulement une allusion à la fin de la première partie de *Sui fondamenti di geometria* [Peano 1894].

points identiques déterminent un segment – il soulève également la question de l'ordre des points : $AB$ est-il ou non le même que $BA$ ? L'abandon de la langue usuelle au profit du « peanien » oblige à fixer de façon précise le sens des concepts, et à ne plus laisser dans l'ombre des indéterminations susceptibles de poser problème par la suite. Plus intéressante est la seconde avancée soulignée par Peano : le traitement de la question de l'indépendance des axiomes. Pasch ne s'intéresse pas à ce problème, car il s'agit simplement pour lui de formuler un ensemble de postulats suffisamment puissant pour ne plus revenir, au cours des démonstrations, à l'intuition ; la question n'est pas de fixer les conditions nécessaires à l'élaboration de la science géométrique. Transcrire dans une langue artificielle les axiomes contribue à les couper de leur ancrage naturel, et permet d'étudier les relations que ces axiomes ont les uns avec les autres. Si Peano ne systématise pas, en 1889, ses analyses, une section entière est par contre spécifiquement consacrée, en 1894, à l'examen systématique de l'indépendance relative des postulats concernant la droite [Peano 1894, p. 61–64]. La troisième modification accomplie dans *I principii,* la plus importante aux yeux de Peano, est la diminution du nombre de termes primitifs. Pasch fonde son développement sur trois indéfinissables : les points, les segments, les surfaces planes. Peano définit le plan à partir des segments et des points[35]. Nous reviendrons bientôt sur la construction, mais l'essentiel, pour l'instant, est de comprendre que cette avancée est liée à l'usage de la langue logique. La transcription en « peanien » des définitions de la droite à partir de deux points (présente chez Pasch) :

$$\mathbf{2} = [x \in](a, b \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!= b \,.\, x = (ab) :\ -\!\!=_{a,b} \Lambda),$$

et du plan à partir d'un triangle (absente chez Pasch) :

$$\mathbf{3} = [x \in](a, b, c \in 1 \,.\, a, b, c -\!\!\in \mathrm{Cl} \,.\, x = (abc) :\ -\!\!=_{a,b,c} \Lambda)^{36},$$

manifeste qu'ici et là, une même procédure est appliquée. La possibilité de définir l'une des notions porte en elle la possibilité de définir l'autre, de sorte qu'admettre l'une c'est de facto admettre l'autre. La diminution du nombre d'indéfinissables constitue, pour Peano, une avancée mathématique importante ; pour la première fois, s'exprime ici une exigence qui caractérisera plus tard l'école peanienne dans son ensemble.

Reprenons le fil de notre propos. La reformulation dans une langue artificielle des axiomes de Pasch ne constitue pas, aux yeux de Peano, une simple redite. Outre le fait qu'il exemplifie une méthode générale, le travail entrepris par Peano contribue à des avancées non négligeables :

[35] Voir [Peano 1889b, p. 33] où Peano établit lui-même la comparaison avec Pasch.

à l'introduction systématique des preuves d'indépendance, à la diminution du nombre des termes primitifs. Mais la moisson n'est-elle pas un peu maigre, finalement ? Ces avancées sont-elles si importantes que cela ? Et Peano est-il vraiment à son avantage lorsqu'il critique si sévèrement celui à qui il doit le contenu des deux articles [Peano 1889b] et [Peano 1894] ? Ces questions posent un problème de fond, que les nombreuses polémiques qui opposeront Peano à ses contemporains ne feront que souligner[37] : suffit-il de traduire dans une nouvelle langue « logique » des axiomatiques déjà constituées pour faire œuvre mathématique ?

Mais ces questions mettent également en lumière un manque dans l'analyse que nous venons de conduire. Nous avons présenté *I principii* [Peano 1889b] comme étant essentiellement une traduction, dans une « nouvelle langue », du contenu des deux premières sections des *Vorlesungen* [Pasch 1822a]. Nous n'avons cependant rien dit sur cette langue elle-même, sur sa syntaxe, sur son vocabulaire. Nous avons fait comme si le seul acte, purement négatif, d'abandonner le langage usuel était par lui-même important. Il n'est dès lors pas étonnant que nous soyons amené à mettre en doute la valeur des avancées peaniennes : si, de l'aveu même de l'auteur, l'essentiel consiste à traduire, il faut se pencher sur la structure de la langue employée avant de se risquer à une évaluation. C'est à quoi nous allons maintenant nous consacrer.

Il faut distinguer deux niveaux dans la notation proposée dans *I principii*. Le premier, que l'on peut qualifier de « logique », est commun à toutes les disciplines mathématiques ; il comprend les symboles fondamentaux de ce qui deviendra plus tard le calcul des propositions, la logique des prédicats avec identité et la théorie des ensembles. Les commentateurs de Peano, même lorsqu'ils se penchent sur sa pensée géométrique, se concentrent généralement sur ce premier niveau, « logique », du langage peanien[38]. Mais il y a un second niveau de langue dans *I principii*, proprement géométrique, que l'auteur présente, juste avant d'énoncer ses axiomes, dans les paragraphes deux et trois de son texte. C'est cette partie qui, selon nous, joue un rôle fondamental dans son raisonnement et qui explique le décalage entre Peano et Pasch.

Dans le paragraphe deux, Peano étend la notation du segment et explique l'usage du signe d'apostrophe « $'$ ». Il définit d'abord le symbole $hk$, $h$ et $k$ étant des figures (des classes de points), à partir de $ak$ (avec $a$ un point). Le signe $ak$ désigne l'ensemble des points des

[37] Sur ces polémiques, voir [Borga *et al.* 1985, p. 244–255] et [Avellone *et al.* 2002].

[38] Voir par exemple [Bottazzini 1895].

segments reliant $a$ à un point de $k$ :

$$a \in \mathbf{1} \,.\, k \in K\mathbf{1} \,.\!\supset\!:.\, ak =: \mathbf{1} \,.\, [x \in](y \in k \,.\, x \in ay : -=_y \Lambda).$$

Le symbole $hk$ dénote l'ensemble des points des segments reliant les points de $h$ aux points de $k$ :

$$h, k \in K\mathbf{1} \,.\!\supset\!:.\, hk =: \mathbf{1} \,.\, [x \in](y \in h \,.\, x \in yk : -=_y \Lambda).$$

La zone ombrée de la figure 1 représente $hk$ lorsque $h$ et $k$ sont deux segments :

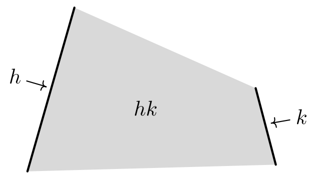


FIGURE 1. $hk$ est le quadrilatère ombré.

Peano définit ensuite $a'b$ ($a$ et $b$ étant des points) ou, comme il l'appelle plaisamment dans [Peano 1894, p. 120], « l'ombre de $b$ éclairé par $a$ », c'est-à-dire la demi-droite d'extrémité $b$ ne contenant pas $a$ :

$$a, b \in \mathbf{1} \,.\!\supset\!:.\, a'b =: \mathbf{1} \,.\, [x \in](b \in ax).$$

Il poursuit en définissant, $k$ étant une figure (un ensemble de points), $a'k$, « l'ombre de $k$ éclairé par $a$ », et $ak'$, « l'ombre de $a$ éclairé par $k$ » :

$$a \in \mathbf{1} \,.\, k \in K\mathbf{1} \,.\!\supset\!:.\, a'k =: \mathbf{1} \,.\, [x \in](y \in k \,.\, x \in ay : -=_y \Lambda),$$

$$a \in \mathbf{1} \,.\, k \in K\mathbf{1} \,.\!\supset\!:.\, ak' =: \mathbf{1} \,.\, [x \in](y \in k \,.\, x \in ay : -=_y \Lambda).$$

Puis $k$ et $h$ étant deux figures, il introduit $h'k$, « l'ombre de $k$ éclairé par $h$ », et $hk'$, « l'ombre de $h$ éclairé par $k$ ». La figure 2 représente les deux régions du plan $hk'$ et $h'k$ :

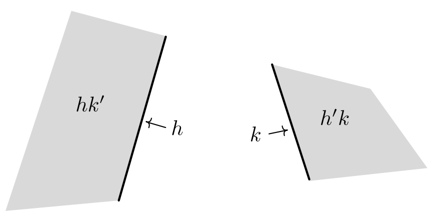


FIGURE 2. $hk'$ est la région ombrée à gauche de $h$ ; $h'k$ la région ombrée à droite de $k$.

Enfin, Peano définit $h''$, « l'ombre de la figure $h$ éclairée par elle-même » :

$$h \in K\mathbf{1} \,.\!\supset\!.\, h'' = hh;$$

le mathématicien précise également que $abc$ signifie $a(bc)$, c'est-à-dire « l'ensemble des points entre $a$ et le segment $bc$ », et que $abcd$ désigne $a(bcd)$ (et ainsi de suite).

Ces différentes règles donnent un sens au signe « $'$ ». Pour le dire de façon imagée, le fait qu'une lettre soit suivie d'une apostrophe indique que l'objet désigné par cette lettre (que ce soit un point ou une figure) est considéré comme un lieu d'émission de la lumière ; l'expression dans son ensemble désigne alors l'ombre produite par cette lumière sur les objets nommés par les autres lettres de la formule. Une des subtilités du dispositif est qu'une même figure peut à la fois émettre et faire obstacle à la lumière. Peano utilise cette ressource notamment dans la définition très élégante qu'il donne du plan. Un plan contenant trois points non alignés $a$, $b$, $c$ n'est rien d'autre que le triangle $abc$ éclairé par lui-même, c'est-à-dire $(abc)''$. La figure 3, extraite d'un traité de Whitehead [1907], dans laquelle les différentes régions planaires découpées par un triangle sont désignées à l'aide du symbolisme peanien, illustre la démarche du mathématicien italien.

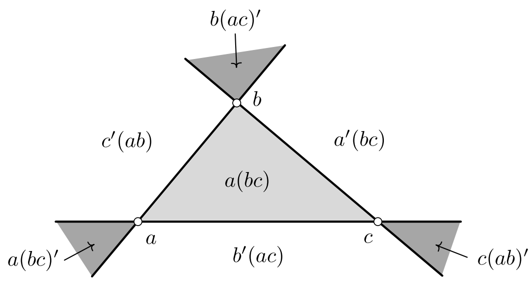


FIGURE 3. Nous aurions pu exprimer de la même façon les segments et demi-droites de la figure.

Dans [Peano 1889b, § 3], de notre point de vue le paragraphe le plus intéressant, Peano étudie les propriétés formelles des notations introduites. En particulier, il examine comment ces dispositifs interagissent avec l'inclusion et l'union ensembliste. Peano établit d'abord que, si la figure $h$ est une partie de la figure $k$, alors, $a$ étant un point :

$$ah \subset ak, \quad a'h \subset a'k, \quad ah' \subset ak'.$$

Introduisant la somme logique, il montre ensuite que

$$a(h \cup k) = ah \cup ak, \quad a'(h \cup k) = a'h \cup a'k, \quad a(h \cup k)' = ah' \cup ak'.$$

Qu'enfin, si $k$ est la classe vide, alors

$$ak = a'k = ak' = \Lambda.$$

Il généralise ces résultats aux relations entre trois figures quelconques $h$, $\ell$ et $k$ :

- ▷ si $h \subset k$, alors $\ell h \subset \ell k$, $\ell' h \subset \ell' k$, $\ell h' \subset \ell k'$ ;
- ▷ $\ell(h \cup k) = \ell h \cup \ell k$, $\ell'(h \cup k) = \ell' h \cup \ell' k$, $\ell(h \cup k)' = \ell h' \cup \ell k'$ ;
- ▷ enfin, si $k$ est la classe vide, $hk = h'k = hk' = \Lambda$.

La façon dont Peano conduit son analyse ne laisse aucun doute sur la nature de sa démarche : le mathématicien étudie les propriétés formelles de ce qu'il considère comme trois opérations : $hk$, $h'k$ et $hk'$. Plus précisément, Peano montre que ces opérations sont toutes des produits, c'est-à-dire, selon le critère grassmannien, des opérations distributives sur une opération d'addition, ici l'union ensembliste[39]. Ces produits, de surcroît, sont compatibles avec la structure d'ordre partielle fournie par l'inclusion, et admettent tous le même élément neutre, l'ensemble vide. La démarche développée dans ce § 3 reprend donc celle déjà mis en œuvre un an avant dans le *Calcolo*. Peano déploie, ici comme là, une théorie générale, formelle, de certaines opérations géométriques.

Cette façon de lire les *Vorlesungen* est extrêmement étonnante. Pasch [1822a] ne considère lui-même à aucun moment la formation d'un segment, ou de son prolongement, comme un produit de deux points – un segment est pour lui un objet observable, et son prolongement jusqu'à un autre point, une construction géométrique particulière. La perspective algébrique, complètement absente des *Vorlesungen*, est propre à *I principii* et provient directement, nous semble-t-il, de l'engagement de Peano dans la tradition du calcul géométrique. Tout se passe comme si la formation grassmannienne du mathématicien turinois le conduisait à lire spontanément, et sans même prendre la mesure ni de la violence faite au texte ni de l'originalité de l'interprétation, les deux premières sections des *Vorlesungen* comme la mise au point d'un nouveau calcul, comparable à celui de Grassmann, fondée sur la définition d'un triple produit géométrique : $hk$, $h'k$ et $hk'$.

Vu dans cette perspective, le traité de Pasch ne manque d'ailleurs pas d'intérêt. Les trois produits sont expressivement plus riches que le produit progressif grassmannien, repris dans le *Calcolo geometrico* [Peano 1888], qui n'est que la mise en forme algébrique de l'opération, symétrique, de projection. Ce qu'introduit l'usage de l'apostrophe, et son

---

[39] Sur la définition du produit par la distributivité, voir [Peano 1888, p. 30].

commentaire en termes d'ombre et d'éclairage, c'est en effet une asymétrie dans les opérations, asymétrie qui reflète, au niveau des notations, l'orientation de la droite euclidienne ou affine. Ainsi $a'b$ est la demi-droite d'extrémité $b$ ne contenant pas $a$ ; $ab'$, la demi-droite d'extrémité $a$ ne contenant pas $b$ ; $ab$ le segment d'extrémités $a$ et $b$. Aucun de ces produits n'est identifiable au produit progressif $ab$ ou $ba$, dont l'interprétation géométrique est la droite projective $(ab)$ non orientée. Les nouveaux « produits » de Pasch sont mathématiquement féconds, car ils permettent une prise en compte, au niveau des calculs, des relations d'ordre sur la droite ou dans le plan affine qui échappaient au produit grassmannien[40].

L'étude de [Peano 1889b, §§ 2–3] suggère donc une nouvelle interprétation, plus prometteuse que la précédente. Même si Peano ne caractérise pas explicitement les combinaisons $hk$, $h'k$, $hk'$ comme des produits, son texte[41] doit se lire, non pas simplement comme une reprise plus économe et rigoureuse des *Vorlesungen*, mais comme la définition d'un nouveau calcul géométrique. *I principii di geometria* constituerait ainsi, selon nous, une rencontre de deux traditions fort différentes, celle de l'exposé euclidien adoptée par Pasch, et celle de l'algèbre géométrique développée, un an auparavant, par l'auteur du *Calcolo*. C'est cette piste interprétative que nous allons suivre, dans la dernière section, pour tenter de réévaluer les rapports entre les deux mathématiciens.

---

[40] Dans le *Calcolo*, Peano avait besoin de construire des notions qui se définissent de façon très naturelle dans le cadre du nouveau calcul inspiré de Pasch. Il en va ainsi du concept d'enveloppe convexe. Peano [1888, chap. 8], lorsqu'il développe le calcul différentiel sur les formes géométriques doit (pour généraliser le théorème de Rolle) définir les formations « médiales » d'un ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de formations de même degré [Peano 1888, p. 132–133]. Si par exemple les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des points, « les formations médiales [...] sont les points simples appartenant au plus petit sous-espace convexe clos qui les contient » [*Ibid.* p. 132]. Une telle définition, pourtant requise, est compliquée à obtenir dans le cadre du calcul grassmannien : elle exige que l'on pose des conditions sur les coefficients numériques. Au contraire, dans *I principii*, la construction de l'enveloppe convexe d'un ensemble quelconque de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est très simple : elle est le résultat du « produit » $A_1 A_2 \cdots A_n$. Peano [1889b, p. 11] montre en effet, après avoir défini la notion d'ensemble convexe ($\mathrm{Cnv} \mathrel{.=.} [x \in](x \in K\mathbf{1} : a, b \in x \mathrel{.\supset_{a,b}.} ab \supset x))$, que $k \in \mathrm{Cnv} \,.\, a, b, c, d \in k \mathrel{:\supset.} abcd \supset k$.

[41] Le fait que la reprise de Pasch par Peano s'inscrive dans la tradition grassmannienne est plus visible dans *I principii*, que dans l'article plus tardif de 1894. Dans le second texte, Peano [1894] ne développe pas systématiquement son étude comme il le fait dans [Peano 1889b, § 3]. De façon plus générale, Peano n'élaborera pas de calcul fondé sur les *Vorlesungen*. Cette absence ne remet pas en question notre thèse : nous n'affirmons pas que Peano construit une nouvelle algèbre à partir du texte de Pasch, mais que son interprétation des *Vorlesungen* est surdéterminée par son engagement antérieur dans la tradition du calcul géométrique.

## 4. LE POIDS DU *CALCOLO* DANS LA LECTURE QUE PEANO FAIT DE PASCH[42]

La confrontation entre les *Vorlesungen* et *I principii* vient de nous conduire à souligner l'importance de certains passages, habituellement passés sous silence, du texte de Peano. Mais la comparaison nous oblige également à revenir sur le traité de Pasch. Le survol des *Vorlesungen* auquel nous nous sommes livré laisse en effet des points décisifs dans l'ombre. Nous avons ainsi affirmé que, dans les deux premières sections, Pasch présente une axiomatisation (au sens moderne du terme) de la géométrie élémentaire. Ce jugement, s'il n'est pas complètement faux[43], minore fortement certains aspects du livre et contribue à masquer l'écart entre les travaux de Pasch et de Peano.

Le géomètre allemand, nous l'avons dit, considère que les indéfinissables (points, segments droits et surfaces planes) ont un contenu empirique et que les *Grundsätze*, loin d'être des conventions ou des définitions implicites, sont des descriptions de faits perceptifs. L'axiomatique de la géométrie porte, selon Pasch, sur des figures[44] données dans l'intuition et ne définit pas abstraitement, comme c'est le cas aujourd'hui, un ensemble de modèles. Cette différence entre Pasch et le point de vue moderne pourrait être considérée comme importante, mais non essentielle dans la mesure où l'expérience n'intervient, dans les *Vorlesungen* qu'au niveau de la justification des axiomes, et nulle part ensuite. Au lieu d'appliquer le système à n'importe quel domaine satisfaisant les postulats, le géomètre privilégierait, pour des raisons philosophiques, une interprétation particulière, sans que ce biais affecte de quelque façon le développement axiomatique. Mais à la fin de la première section de son traité, juste après avoir affirmé que « les propositions fondamentales doivent contenir complètement le matériau empirique traité par les mathématiques de façon à ce que l'on n'ait plus besoin après leur établissement d'en revenir à la perception sensible » [Pasch 1822a, p. 17], Pasch affirme :

> « Mais par précaution, des restrictions [*Einschränkungen*] doivent être posées dès le début, auxquelles est sujette l'application de quelques théorèmes fondamentaux[45]. »

---

[42] La première partie de cette section reprend partiellement le contenu de [Gandon 2005].

[43] C'est par exemple le jugement de Enriques [1991, p. 22–23].

[44] Sur ce concept de figure, voir [Pasch 1822a, p. 25].

[45] [Pasch 1822a, p. 17] : « *Um so vorsichtiger müssen von vornherein etwaige Einschränkungen festgestellt werden, denen die Anwendung einzelner Grundsätze unterliegt.* »

Quelques lignes plus loin, il continue :

> « Nous apprenons les concepts fondamentaux et les propositions fondamentales de la géométrie à l'aide d'objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ; leur application n'est pas forcément justifiée au-delà[46]. »

Autrement dit, les axiomes de la géométrie élémentaire ne valent pas inconditionnellement, ils ne s'appliquent qu'aux « objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ». Et Pasch précise immédiatement son propos en donnant trois exemples. Le premier traite d'une situation où la figure est excessivement éloignée, et où sa taille est donc très petite. Le second *Grundsatz*, stipulant que l'on « peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment droit donné » n'est alors plus valide. Si le segment est trop petit, il n'est plus possible de distinguer, entre $A$ et $B$, un point $C$ [Pasch 1822a, p. 17–18]. La seconde limitation concerne, au contraire, une situation de « proximité excessive ». Imaginons qu'une courbe close soit si grande que l'on ne puisse en percevoir qu'une partie ; si, sur cette partie, $C$ est entre $A$ et $B$, un observateur imprudent en conclura par l'axiome III (« si le point $C$ se trouve à l'intérieur du segment $AB$, alors le point $A$ se trouve à l'extérieur du segment $BC$ »), que $A$ n'est pas entre $C$ et $B$ – ce qui est faux [*Ibid.*, p. 18–19]. Le troisième exemple, plus complexe parce qu'il combine des considérations ordinales à des considérations relatives à la congruence, reprend une démonstration, courante à l'époque, de « géométrie absolue » [47], établissant l'existence d'au moins une droite parallèle passant par un point extérieur à une droite donnée ; Pasch refuse ce résultat, arguant du fait qu'il dépend de l'application illégitime des axiomes d'ordre à des figures trop « grandes », et se ramène ainsi au second cas[48].

Il est donc faux de dire que, pour Pasch, une fois consigné dans les axiomes, le contenu théorique de la géométrie élémentaire (cadre dans lequel, rappelons-le, se place Peano) peut être développé sans que l'on n'ait jamais plus besoin de recourir à l'expérience. L'application des postulats est toujours soumise à une vérification préalable concernant la

---

[46] [Pasch 1822a, p. 18] : « *Die geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze erlernt man an Objecten, von denen man verhältnissmässig nur wenig entfernt ist ; über ein solches Gebiet hinaus ist also ihre Anwendung nicht ohne Weiteres berechtigt.* »

[47] On trouve la même démonstration chez [Houël 1867, p. 50–51]. La géométrie absolue est définie alors comme celle qui peut se déduire des quatre premiers axiomes d'Euclide, indépendamment de l'axiome des parallèles.

[48] [Pasch 1822a, p. 19–20]. Ce résultat a une grande importance, car il revient à reconnaître une compatibilité entre la géométrie absolue et la géométrie riemannienne, ou elliptique. Comme nous le verrons, le même argument permet de rejeter le théorème proposé par Peano, selon lequel dans un plan de la géométrie « élémentaire » (au sens de Pasch), il existe des droites qui ne se coupent pas. Cf. note *infra.*

« taille » et l'« éloignement » des figures. Cette exigence est très étrange. Dans une perspective post-hilbertienne, un système d'axiomes s'applique inconditionnellement à la totalité des modèles qu'il définit. Ces modèles peuvent être extrêmement différents les uns par rapport aux autres, mais tous ont en commun, par définition, de satisfaire l'ensemble des postulats. Dans une telle approche, prétendre que les axiomes ne sont pas toujours vrais sur leurs modèles est donc tout simplement dénué de sens. Dans une perspective plus traditionnelle, euclidienne, où les postulats géométriques décrivent les propriétés de certains objets distingués dans l'intuition (les figures), les axiomes s'appliquent aussi inconditionnellement. Toute construction faite en conformité aux principes est permise, dans les *Éléments* d'Euclide, et toute déduction établie à partir des axiomes est valide. Une fois énoncés, les postulats sont les seuls critères de vérité. Il est possible de remettre en cause la vérité d'un ou de plusieurs axiomes. Mais il est impossible, à moins de renoncer à la systématicité de la théorie elle-même, de restreindre arbitrairement, à la manière de Pasch, le champ d'application des principes et des procédures de construction.

L'étrangeté des propos tenus à la fin de la première section est accrue par le fait que l'auteur des *Vorlesungen* ne donne aucune caractérisation du « bon » éloignement des figures. Non seulement Pasch restreint la validité de certains postulats, mais pire encore, il ne détermine même pas les seuils à partir desquels ses axiomes deviennent inapplicables. Une telle attitude est cohérente : pour délimiter précisément le champ d'application des postulats, il faudrait pouvoir s'abstraire de l'espace empirique environnant et le caractériser de « l'extérieur », ce qui est bien entendu impossible aux yeux de l'empiriste qu'est Pasch [49]. La seule chose que l'on puisse faire, c'est de mettre en garde contre l'extension, dans un sens ou dans un autre, du champ de validité des axiomes.

Tout ceci rend le statut de la géométrie élémentaire dans les *Vorlesungen* extrêmement difficile à comprendre. Sur quoi porte réellement la géométrie élémentaire ? Que sont ces points, ces segments, ces surfaces planes, solidaires du regard qui les observe ? Une théorie géométrique a-t-elle à prendre en compte le fait, totalement contingent, de la taille de la feuille sur laquelle les figures sont couchées, de la position du géomètre qui les étudie ? Devant les conséquences, semble-t-il incontrôlables, qui paraissent découler des affirmations de Pasch, le plus raisonnable ne

[49] Cette posture radicale de Pasch doit être mise en relation avec la stratégie adoptée par Klein [1873] pour rendre les construction de von Staudt libres de tout présupposé métrique. Klein cherche à prouver l'ensemble des résultats de von Staudt en se plaçant à l'intérieur d'une région convexe limitée de l'espace euclidien ; sur ce point, voir [Gandon 2005, p. 656–668].

serait-il pas de reculer, c'est-à-dire de reverser les propos du mathématicien au compte d'un bavardage empiriste, à la mode alors dans la tradition post-kantienne, sans conséquence sur la pratique scientifique elle-même ? Ce serait trahir le génie de Pasch que de s'engager dans cette voie. Nous allons montrer, en prenant deux exemples, qu'il y a, chez le géomètre de Giessen, une véritable prise en compte des réquisits empiristes dans les structures formelles qu'il introduit.

Le premier exemple est celui de la définition que Pasch donne de la droite. On adopterait, aujourd'hui, assez naturellement, la définition nominale proposée par Peano : la droite $(AB)$ est l'ensemble des points $X$ entre $A$ et $B$, ou tel que $A$ est entre $X$ et $B$, ou tel que $B$ est entre $X$ et $A$ :

$$\mathbf{2} = [x \in](a, b \in \mathbf{1} \,.\, a - = b \,.\, x = (ab)'' : - =_{a,b} \Lambda).$$

Or, dans les *Vorlesungen*, Pasch ne définit pas nominalement le symbole « la droite $(AB)$ ». Il emploie à la place une procédure plus complexe, qu'il nomme, dans la seconde édition du traité, « définition implicite »[50]. Pourquoi ce détour ?

Dans la définition de Peano, la droite est caractérisée comme un segment illimité : elle est le prolongement à « l'infini », des deux côtés, du segment $AB$. La belle image d'un segment éclairé par lui-même le dit assez : une ombre n'a pas de fin. Or en raison de la validité « géographiquement » limitée des *Grundsätze*, Pasch ne peut pas, dans le cadre de la géométrie élémentaire, admettre ce genre d'objet. Il ne peut pas suivre Peano dans l'usage qu'il fait de la variable $X$. Pasch accepterait sans doute de parler d'un point variable entre des points donnés $A$ et $B$ ; mais pour lui, parler de l'ensemble des points $X$, tels que $B$ est entre $A$ et eux, ou tels que $A$ est entre $B$ et eux, est, dans le contexte très contraignant des deux premières sections de son livre, absurde : il n'y a pas, au début des *Vorlesungen*, d'ensemble de ce type, tout simplement parce que, par définition, l'espace considéré est un espace accessible, donc qui se situe toujours, lorsqu'on parle d'un segment droit, entre deux points donnés. Mais en même temps, Pasch a besoin, en plus du concept de segment, de la notion de droite. Comment alors introduire une droite sans violer les contraintes imposées par l'empirisme ?

[50] Il s'agit là d'une reprise de la terminologie hilbertienne. Mais Pasch distingue clairement ses définitions implicites, qui sont substantielles, des définitions purement formelles de Hilbert ; voir sur ce point [Pasch 1921].

Pasch explique que le symbole « droite » exprime non pas l'idée d'illimitation, mais celle d'indétermination[51]. La référence à un contexte implicite est précisément ce qui permet d'obtenir l'indétermination sans présupposer l'illimitation. En effet, définir « la droite $(AB)$ », c'est, selon Pasch, trouver un équivalent à un énoncé dans lequel le symbole « droite $(AB)$ » apparaît : par exemple, « $C$ est sur la droite $(AB)$ » ($C$ étant un point propre quelconque) équivaut à « $C$ est entre $A$ et $B$, ou $B$ est entre $A$ et $C$, ou $C$ est entre $A$ et $B$ ». Ici, aucun prolongement à l'infini n'apparaît : au contraire, le point $C$ jusqu'auquel le segment $AB$ doit être prolongé est fourni avec le contexte. En même temps, à la différence d'un segment, les extrémités d'une droite ne sont pas fixées car le contexte propositionnel varie, et avec lui le point $C$ auquel il est fait référence. C'est donc le contexte, chez Pasch, qui est variable – non le point, comme chez Peano ; et c'est ce renvoi à un énoncé variable, se réfèrant lui-même à un point, qui permet, dans la définition des *Vorlesungen*, d'introduire une indétermination sans en appeler à une illimitation. La droite n'est pas un segment illimité, mais un segment dont on ne peut pas dire où il s'arrête. En employant une terminologie anachronique, on pourrait affirmer que la variable, donnant à la différence entre segment et droite une existence formelle, n'appartient pas chez Pasch au langage-objet, mais au métalangage, au discours du géomètre sur les objets perceptifs[52].

Pasch cherche, dans l'élaboration des procédures de définition, à respecter la caractérisation qu'il donne de l'objet de la géométrie élémentaire. La notion de droite comme segment prolongé à l'infini ne peut être

[51] [Pasch 1822a, p. 4] : « On dit : par deux points, on peut tracer une ligne droite. Mais la ligne peut être limitée de façon diverse ; l'indétermination de la délimitation a ainsi conduit à dire de la ligne droite qu'elle n'est pas limitée, qu'on doit se la « représenter » comme illimitée dans l'étendue infinie. Cette exigence n'est satisfaite par aucun objet de perception ; bien plus, dans la perception, n'est saisi immédiatement que la ligne droite bien délimitée, que le chemin droit entre deux points, que le segment droit. » [*Man sagt : durch zwei Punkte kann man eine gerade Linie ziehen. Die Linie kann aber verschieden begrenzt werden ; die Unbestimmtheit der Begrenzung hat dahin geführt, dass von der geraden Linie gesagt wird, sie sei nicht begrenzt, sie müsse unbegrenzt, in unendlicher Ausdehnung "vorgestellt werden". Diese Forderung entspricht keinem wahrnehmbaren Object ; vielmehr wird unmittelbar aus den Wahrnehmungen nur die wohlbegrenzte gerade Linie, der gerade Weg zwischen zwei Punkten, die gerade Strecke aufgefasst.*] ; voir aussi [Pasch 1822a, p. 8–9 et 20].

[52] Même si le problème est moins évident que dans le cas de la définition de la droite, Pasch aurait, nous semble-t-il, objecté à la définition du plan donné par Peano. « $D$ appartient au plan $ABC$ » pourrait être « implicitement » défini comme signifiant « $D$ appartient au prolongement d'un segment de la surface limitée contenant $A, B, C$ ». Mais le problème, pour Pasch, serait alors qu'une telle définition ne précise pas quel segment de la surface limitée donnée doit être prolongé. C'est peut-être pour cette raison que Pasch préfère introduire la notion de surface plane limitée comme une notion première.

développée dans le cadre d'une théorie qui porte sur les figures « peu éloignées ». Par contre, le concept de segment aux limites indéterminées est tout à fait intelligible. Pasch fait ici montre d'une grande maîtrise et d'une belle lucidité dans l'usage des procédures logiques et de leurs implications philosophiques. Le mathématicien n'a par exemple pas les mêmes scrupules en analyse. Dans son *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* [Pasch 1882b], les réels sont d'emblée définis en termes de coupure, c'est-à-dire en termes d'ensembles infinis de nombres rationnels – ceci prouve que, si Pasch n'emploie pas les définitions aujourd'hui classiques, ce n'est pas par ignorance, mais parce qu'il considère que la nature empirique de sa géométrie première le contraint à maintenir une différence entre l'indétermination et l'illimitation.

Autre exemple d'« effet formel » induit par l'empirisme : la façon dont Pasch traite de la question du parallélisme et de la relation entre géométrie élémentaire et projective. Pasch n'oppose pas, comme le font aujourd'hui les manuels classiques[53], les points propres (ceux de l'espace « affine »), aux points impropres (ceux qu'il faut « ajouter » au premier espace pour obtenir l'espace projectif). La notion de point impropre [*uneigentlich*], seulement idéal, n'est pas une catégorie des *Vorlesungen*. Pasch [1822a, §6], après avoir redéfini les points généralisés [*beliebig*] en termes de gerbe de droites[54], se contente de dire qu'un sous-ensemble de ces points est constitué des éléments propres, en refusant soigneusement de se prononcer sur la nature des autres entités. Et ce n'est qu'au paragraphe quatorze[55], dans un contexte extrêmement particulier, que Pasch

[53] Voir [Coxeter 1947] ou [Whitehead 1907].

[54] « *Beliebig* » signifie « arbitraire ». Pasch redéfinit d'abord, au § 5, la notion de gerbe de droites de façon à la rendre indépendante de l'existence d'un sommet. Une droite $c$ appartient à la gerbe définie par les droites $a, b$ si, et seulement si, $c$ est coplanaire à $a$ et à $b$ (que $a$ et $b$ aient ou non une intersection). Il introduit ensuite, toujours au § 5, la notion de gerbe propre, c'est-à-dire de gerbe qui a un sommet (dont le sommet est un point au sens de la géométrie élémentaire) ; lorsque Pasch veut parler de gerbe au sens général, il utilise le terme « *beliebig* » ; il ne parle pas de gerbe impropre. Enfin, au § 6, est défini un usage étendu du concept de point, dans lequel le mot « point » a le même sens que le mot « gerbe ». Un point « *beliebig* » est une gerbe ; un point propre, une gerbe qui a un sommet.

[55] Comme le fait remarquer Nabonnand [2002, p. 159], le terme apparaît dans une note de la première édition [Pasch 1822a, p. 40], où Pasch compare sa « généralisation » avec celle de von Staudt et de Klein. Mais comme le commentateur le note également, « chez von Staudt et Klein, ce sont les points impropres qui sont qualifiés alors que Pasch qualifie les points propres. » Pour plus d'informations sur les rapports entre Klein et Pasch, nous nous permettons de renvoyer à [Gandon 2005].

emploie, pour la première fois, le terme de point impropre ou idéal[56]. Pourquoi une telle prudence ?

Parler de points impropres suppose que l'on puisse avoir accès à la totalité des points « propres », c'est-à-dire que l'on puisse délimiter l'espace dans lequel sont plongées les figures analysées dans la géométrie élémentaire. Or une telle opération, dans le contexte encore une fois très particulier de cette géométrie originelle qu'est la géométrie élémentaire, n'est pas possible pour Pasch. Nous l'avons vu, les *Grundsätze* s'appliquent à des figures « peu éloignées », sans que l'on puisse déterminer avec précision les limites de ce champ d'application. Pour parler de points ou de gerbes impropres, il faut admettre que l'on peut faire le départ entre les droites qui, prolongées se couperont, et celles qui, même prolongées indéfiniment, ne se couperont jamais. Or, une telle distinction n'est empiriquement pas possible ; on ne peut, pour l'empiriste qu'est Pasch, s'abstraire de l'espace physique et le caractériser de l'extérieur. Celui qui élabore une géométrie élémentaire travaille donc essentiellement sur des figures-dans-un-espace ; il n'étudie pas un espace conçu comme une totalité de points – encore moins un sous-espace d'un espace plus englobant, comme c'est le cas aujourd'hui des mathématiciens présentant l'espace affine comme un sous-espace propre de l'espace projectif. Ces contraintes posées sur la géométrie élémentaire disparaissent dans la géométrie projective : l'avantage de redéfinir, aux sections 6, 7 et 8, les points et les droites en termes de gerbes, est entre autres de pouvoir démontrer que toute paire de droites (au sens généralisé) coplanaires se coupent en un point (au sens généralisé), et donc de ne plus avoir à distinguer entre droites parallèles et sécantes[57].

Là encore, la perspective de Pasch est très différente de celle de Peano. À la fin de *I principii*, Peano [1889b] affirme (sans démonstration) que,

[56] L'auteur vient d'énumérer les axiomes de congruence, qui portent tous sur des entités géométriques propres. Un des postulats (le huitième) stipule que si, deux figures étant congruentes, on ajoute à l'une des éléments propres, alors il est toujours possible de compléter l'autre afin d'obtenir deux nouvelles figures congruentes. L'objet du paragraphe quatorze est de montrer que, l'homologie entre figures étant une relation qui préserve les propriétés projectives, il est possible d'étendre cette relation aux points génériques définis dans le paragraphe six. C'est dans ce contexte, celui d'une généralisation des relations de congruence, qu'il revient sur la « démonstration », présentée à la fin du premier paragraphe, selon laquelle il y a toujours au moins une droite parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite. L'argument, explique Pasch, ne prouve pas l'inexistence du point d'intersection, mais seulement le caractère *uneigentlich*, impropre, du point construit. Voir [Pasch 1822a, p. 115–116], où le point « *uneigentlich* » est désigné par une minuscule, pour le distinguer des autres points « *beliebig* » en majuscule.

[57] [Pasch 1822a, p. 60] : « Deux droites dans un plan ont toujours un point commun. » [*Zwei Geraden in einer Ebene haben stets einen Punkt gemein.*]

si l'on ajoute un axiome de continuité aux postulats de la géométrie élémentaire de Pasch, alors l'existence de droites coplanaires qui ne se coupent pas peut être prouvée[58]. Ce résultat constitue plus qu'une avancée mathématique par rapport aux *Vorlesungen* ; il signale un décrochage épistémologique fondamental. S'interroger, dans le cadre de la géométrie élémentaire, sur l'existence de droites coplanaires non sécantes suppose en effet que l'on accepte de considérer la totalité des points propres d'un plan « élémentaire », ce qui est absurde chez Pasch puisque les surfaces planes considérées sont par essence limitées. L'ensemble des points propres n'est, dans le cadre de la géométrie empirique, que vaguement défini, et la possibilité de parler de deux droites coplanaires infiniment prolongées n'existe pas. Le système de Pasch ne décrit pas un espace ; il porte essentiellement sur un environnement[59]. Le fait que Pasch laisse ouverte la question des parallèles n'est donc pas dû à un manque d'habileté logique, mais découle directement de sa conception du rôle attribué à la théorie élémentaire – elle est une géométrie dont les conditions d'application sont essentiellement indéterminées, qui est valide seulement sur un espace « proche » (sans que cette « proximité » fasse l'objet d'une reprise théorique). Se poser des questions portant sur « l'espace élémentaire » en tant que telle, se demander par exemple, avec Peano, si les segments de droites coplanaires, indéfiniment prolongées, se croisent toujours, manifestent une incompréhension totale du statut qu'ont les objets de cette géométrie première.

Nous en avons dit assez sur Pasch pour montrer que l'idée générale selon laquelle la géométrie élémentaire est une géométrie essentiellement vague, approximative n'est pas seulement une posture, une prose, « philosophique » extérieure à un développement mathématique supposé « rigoureux ». Pasch adapte sa pratique au statut (empirique) de son objet : les propriétés grossières des figures perceptibles de taille moyenne. La reprise que propose Peano évacue complètement cette dimension. Pour le mathématicien italien, le système « élémentaire »

---

[58] Voir [Peano 1889b, p. 38–39] ; plus précisément, Peano parle de l'existence dans un plan d'une demi-droite, passant par un point donné, parallèle à une demi-droite donnée. Ce résultat sera repris par Veblen, qui s'en sert pour construire un modèle de géométrie élémentaire plane (non continue) dans lequel toutes les droites se coupent ; voir [Veblen 1904, p. 347–349] et [Whitehead 1907, p. 10–11].

[59] Il en va tout autrement de la géométrie projective, engendrée par les reformulations et extensions successives mises en place dans les paragraphes 6 à 9. C'est que les concepts projectifs primitifs, ceux que Pasch nomme « *Stammbegriffe* », ne renvoient pas, eux, directement à un contenu empirique. Mais c'est toujours à la géométrie élémentaire que Peano, dans *I principii* comme dans *Sui fondamenti*, se réfère, et c'est donc à cette théorie que nous nous limitons.

présenté par Pasch n'est, dans son application, limité par aucune clause. Peano n'éprouve ainsi aucun scrupule à définir la droite comme un segment prolongé à l'infini et à formuler des théorèmes portant sur la totalité du plan ou de l'espace « élémentaire ». L'ironie est que l'auteur de *I principii* reprend l'empirisme du géomètre : l'axiomatique présentée en 1889 porte officiellement sur l'espace empirique[60]. Mais Peano, en dotant son objet d'étude de propriétés trop « robustes » (les segments sont prolongeables à l'infini, les considérations ordinales ne sont pas seulement locales), ne respecte pas ses déclarations liminaires : il transgresse sans cesse les limites de l'expérience qu'il prétend décrire. L'empirisme est, chez Peano, complètement vidé de sa substance – il ne devient qu'une coquille vide, dont les disciples se débarrasseront bien vite (voir [Pieri 1901]).

La précédente analyse accroît donc l'écart entre les projets de Peano et de Pasch, et suscite immédiatement deux questions : Peano, en présentant Pasch comme un simple prédécesseur peu rigoureux, rend-il véritablement justice à l'auteur des *Vorlesungen* ? Et en plaçant sa réflexion dans le sillage de celle de Pasch, le mathématicien italien ne manque-t-il pas la véritable originalité de son propre travail ?

Peano est injuste envers Pasch car il ne voit pas à quel point la démarche de ce dernier intègre dans ses procédures « techniques » la philosophie empiriste dont il se réclame. La « traduction » peanienne, en modifiant les dispositifs mis au point par Pasch, ne « corrige » pas certaines « imperfections », mais transforme complètement le sens et la portée de l'analyse. Il s'agissait pour Pasch de montrer comment, à partir d'un noyau empirique minimum la totalité de la géométrie, de ses concepts et de ses théorèmes, pouvait être développée. La question de l'assise empirique de la science géométrique est complètement évacuée chez Peano, et ce quoi qu'il en dise – la définition de la droite et le théorème sur l'existence des droites parallèles en attestent.

Mais Peano est également injuste envers lui-même car il ne souligne pas à quel point son élaboration d'une langue géométrique est un geste mathématique majeur. Si Peano peut se libérer aussi facilement (au point de ne même pas voir l'existence du problème) des très fortes contraintes pesant sur l'axiomatique de la géométrie élémentaire, c'est parce qu'il interprète spontanément le début des *Vorlesungen* comme la mise au point d'un nouveau produit. Pasch est lu par Peano comme un continuateur de la tradition de l'algèbre géométrique. Un segment n'est ainsi pas conçu dans *I principii* comme une entité observable, mais comme un produit particulier de points – le prolongement n'est

[60] Voir notre section 1, *supra*.

pas défini comme une construction géométrique problématique, mais comme le résultat d'un nouveau type de multiplication. C'est ce premier décalage, silencieux car syntaxique, qui permet à Peano d'ignorer tout ce qui relève chez Pasch des limites de l'expérience. Lire le début des *Vorlesungen* comme une contribution aux recherches portant sur le calcul géométrique dégage le texte de Pasch de son socle problématique et l'installe dans une perspective radicalement différente.

Il y a donc un gouffre entre les *Vorlesungen* et *I principii* ; cet écart manifeste, selon nous, l'emprise que conserve le paradigme du calcul géométrique sur la pensée de Peano. Le mode de questionnement du mathématicien italien n'a rien à voir avec celui de Pasch : au lieu de se demander comment concevoir le rapport entre la géométrie et l'expérience, Peano explore les possibilités offertes par les combinaisons des apostrophes et des lettres dans l'élaboration de nouveaux produits. Il se demande par exemple comment exprimer un plan à partir de trois points non colinéaires, comment écrire une enveloppe convexe sous la forme d'un produit de $n$ points[61], comment représenter le parallélisme entre demi-droites en termes de ces produits[62]. C'est dans l'exploitation des ressources expressives de ce qui est d'emblée conçu comme un calcul que se révèle le génie de Peano.

* — * — *

Résumons le cheminement qui a été le nôtre. Nous avons distingué trois paradigmes : celui du calcul géométrique (le Peano du *Calcolo*), celui de l'axiomatique conçu comme un moyen de développer une théorie à partir d'une base empirique restreinte (Pasch), celui de l'axiomatique conçu comme un système autonome définissant librement une famille de modèles (Hilbert). Nous avons, en premier lieu, opposé le premier canevas, qui présuppose une distinction ontologique entre différentes sortes d'entités, au troisième. Mais nous avons montré, dans un second temps, que la transition du second au troisième modèle (de l'axiomatisation « à la Pasch » à l'axiomatisation « à la Hilbert » ou « à la Pieri ») s'effectue, chez Peano, via un détour par le calcul : le point de vue algébrique qui guide la pensée du maître italien lui permet d'arracher les liens qui reliaient encore chez Pasch les symboles à l'intuition empirique. Dit autrement, s'il faut distinguer le modèle de l'algèbre géométrique de celui de l'axiomatique, on ne saurait surestimer le rôle joué par la tradition du calcul dans la lecture que Peano fait des *Vorlesungen*. *I principii di*

[61] Voir note *supra*.

[62] Voir [Peano 1889a, p. 38–39], la très belle définition du parallélisme : $a'b$ est parallèle à $c'd$ si $bc'd = da'b$.

*geometria* est un texte dans lequel se juxtapose sans se fondre deux types de référence très hétérogène, la référence à Grassmann et celle à Pasch[63].

Chez Peano, un thème dissimule la diversité des sources : celui de la langue artificielle. En algèbre, la langue ordinaire est remplacée par la notation littérale. Mais Pasch, comme Hilbert plus tard, insiste également sur la nécessité, dans un système axiomatique, de mettre à distance le langage usuel. La dénonciation de l'ambiguïté des langues vernaculaires représente ainsi une vaste plate-forme commune autorisant la juxtaposition de divers paradigmes. Rappelons le passage cité dans notre introduction :

> « Chaque proposition [du système] possède la forme et la précision dont les équations jouissent en algèbre, et de ces propositions ainsi écrites d'autres peuvent être déduites, par un processus qui ressemble à celui de la résolution des équations algébriques. » [Peano 1894, p. iii]

C'est parce qu'ils peuvent être tous couchés dans une même langue précise et artificielle que les théorèmes ressemblent à des équations, et la déduction à la résolution d'équations. La critique du langage usuel est ainsi suffisamment indéterminée pour permettre la combinaison lâche et non complètement réfléchie de pratiques distinctes. D'un point purement négatif (la critique du langage ordinaire), Peano conclut à une « ressemblance » entre des méthodes profondément différentes.

Nous avions évoqué, dans l'introduction, la célèbre distinction, proposée par van Heijenoort [1967], entre la logique comme calcul et la logique comme langage. En un sens, l'analyse des textes de Peano, en révélant à quel point la référence au langage recouvre alors des pratiques extrêmement diverses, justifie l'effort de discernement initié par van Heijenoort. Mais en même temps, elle révèle, nous semble-t-il, les limites de

[63] Avelonne *et al.* [2002, p. 391] situent la différence entre l'approche axiomatique de l'école peanienne et celle de Hilbert dans le fait que les géométries « bizarres » ne sont, pour les Italiens, que de « simples contre-exemples, destinés à montrer l'indépendance des axiomes et ne deviennent jamais des points de départ pour le développement de nouvelles recherches géomériques » (voir également [Avellone *et al.* 2002, p. 373–380, 385–391 et 419–420]), comme ce sera le cas dans l'école hilbertienne. Il nous semble que ce que nous avançons va tout à fait dans ce sens. En effet, comme nous l'avons montré, le premier engagement de Peano dans la tradition du calcul grassmannien était lié à une approche « géographique » et « statique » des mathématiques, dans laquelle il est crucial de distinguer divers domaines d'objets intrinsèquement différents – les nombreux contre-exemples découverts par Peano n'étant que des manifestations de ces différences ontologiques fondamentales, toujours déjà données (voir notre section 2). Une telle conception rend difficile tout usage créateur de l'axiomatisation et des preuves d'indépendance : il s'agit là moins de développer et de décrire de nouvelles possibilités, que de constater l'existence d'une différence dans la nature des concepts ou des axiomes considérés. Cette forme de conservatisme, bien décrit par Avelonne et al., pourrait donc ainsi être conçu comme un écho de la tradition du calcul géométrique, dans la méthode axiomatique elle-même.

ce type d'approche. À cette époque, peut-être surtout chez Peano, c'est aussi dans ce qu'elle a de vague et d'indéterminée que la référence au langage joue un rôle scientifiquement important. C'est ainsi la thématique, purement négative, de la critique de la langue ordinaire qui permet à Peano de greffer de façon très opportune[64] ses recherches sur le calcul géométrique à sa lecture des *Vorlesungen.* Il convient, certes, de distinguer les divers étages conceptuels recouverts par l'usage d'une même terminologie. Mais il convient également de ne pas figer ces modèles sur eux-mêmes, et, pour cela, de reconnaître le rôle scientifiquement fécond que revêtent les modes de présentation vagues mais commodes, rhétoriques mais souples utilisés par Peano : ce sont ces « slogans », dans ce qu'ils ont d'indéterminé et d'accueillant qui permettent de faire coexister, au sein d'une même pensée, différentes traditions mathématiques, et d'ouvrir ainsi vers de nouvelles pratiques.

***Remerciements***

J'aimerais remercier les rapporteurs dont les remarques, critiques et suggestions ont permis de remanier une première version de ce texte. L'article a fait l'objet de deux présentations orales, l'une dans le cadre d'un colloque à Luminy (CIRM) sur la géométrie, organisé par P. Nabonnand et K. Volkert en septembre 2005 ; l'autre dans le cadre d'un atelier de travail organisé par E. Audureau à Aix (CEPERC-PHIER) en octobre 2006. Je remercie les organisateurs et les institutions qui ont permis l'organisation de ces manifestations.

Les discussions que j'ai avec Yvette Perrin depuis maintenant quatre ans constituent un élément important de ma recherche. Même si j'assume la totalité du contenu présenté ici, bien des passages de ce texte lui doivent beaucoup. Je profite également de l'occasion pour la remercier d'allier aussi heureusement disponibilité, ouverture d'esprit et rigueur.

[64] Grattan-Guinness [2000] qualifie, dans le portrait qu'il fait de Peano, celui-ci d'opportuniste. Toutefois, comme nous l'a fait remarquer l'un des rapporteurs, nous n'avons pas tenu compte dans notre analyse d'une autre source d'inspiration de Peano, qui est la tradition de l'algèbre de la logique (Boole, de Morgan, etc.). La prise en considération de cet élément pourrait peut-être conduire à une forme de synthèse entre les traditions très hétérogènes que nous avons évoquées dans cet article. Cela semble être la piste qu'emprunte U. Bottazzini [1895]. Voir notre note 12.

## APPENDICE
## COMPARAISON DE L'AXIOMATIQUE DE PEANO (*I PRINCIPII DI GEOMETRIA*) ET DE PASCH (*VORLESUNGEN ÜBER NEUERE GEOMETRIE*, §§ 1–2)[65]

### *1. Peano :* I principii di geometria

▷ *Axiomes préliminaires concernant l'identité et le segment*

1) $a = a$

2) $a = b \mathrel{.{=}.} b = a$

3) $a = b \;.\; b = c \mathrel{:\supset.} a = c$

4) $a, b \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset.} ab \in K\mathbf{1}$

5) $a, b, c, d \in \mathbf{1} \;.\; a = b \;.\; c = d \mathrel{.\supset.} ac = bd$

▷ *Axiomes*

I) $1 -\!= \Lambda$
traduction : $\exists x\,(x \in \mathbf{1})$

II) $a \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset\!:.} x \in \mathbf{1} \;.\; x -\!= a : -\!=_x \Lambda$
traduction : $\forall x \exists y\,(x \neq y)$

III) $a \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset.} aa = \Lambda$
traduction : $\forall x \sim\exists y\,(y \in xx)$

IV) $a, b \in \mathbf{1} \;.\; a -\!= b \mathrel{:\supset.} ab -\!= \Lambda$
traduction : $\forall x \forall y\,(x \neq y \Rightarrow \exists z\,(z \in xy))$

V) $a, b \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset.} ab = ba$
traduction : $\forall x \forall y\,(xy = yx)$

VI) $a, b \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset.} a -\!\in ab$
traduction : $\forall x \forall y\,(x \notin xy)$

▷ *Définition*

$a, b \in \mathbf{1} \mathrel{.\supset\!:.} ab =\colon \mathbf{1} \;.\; [x \in](b \in ax)$
traduction : $xy = \{z : x, y, z \in \mathbf{1} \wedge y \in xz\}$

VII) $a, b \in \mathbf{1} \;.\; a -\!= b \mathrel{:\supset.} ab -\!= \Lambda$
traduction : $\forall x \forall y\,(x \neq y \Rightarrow \exists z\,(z \in xy))$

VIII) $a, b, c, d \in \mathbf{1} \;.\; c \in ad \;.\; b \in ac \mathrel{::\supset.} b \in ad$
traduction : $\forall x \forall y \forall z \exists w\,((z \in xy \wedge w \in xz) \Rightarrow w \in xy)$

[65] Nous avons ici repris [Freguglia 1985, p. 206–211].

IX) $a, d \in \mathbf{1} \,.\, b, c \in ad :\supset: b = c \,.\!\cup\!.\, b \in ac \,.\!\cup\!.\, b \in cd$
traduction : $\forall x \forall y \exists z \exists w ((z \in xy \wedge w \in xz)$
$\Rightarrow (z \in xw \vee z = w \vee z \in wy))$

X) $a, b \in \mathbf{1} \,.\, c, d \in ab :\supset: c = d \,.\!\cup\!.\, d \in bc \,.\!\cup\!.\, c \in bd$
traduction : $\forall x \forall y \exists z \exists w ((z \in xy \wedge w \in xz)$
$\Rightarrow (z \in yw \vee z = w \vee z \in yz))$

XI) $a, b, c, d \in \mathbf{1} \,.\, b \in ac \,.\, c \in bd :\supset.\, c \in ad$
traduction : $\forall x \forall y \forall z \forall w ((y \in xz \wedge z \in yw) \Rightarrow z \in xw)$

▷ *Définitions*

*Droite*

$\mathbf{2} = [x \in](a, b \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!= b \,.\, x :=:$
$ba \,.\!\cup\!.\, a \,.\!\cup\!.\, ab \,.\!\cup\!.\, b \,.\!\cup\!.\, ab :\; -\!\!=_{a,b} \Lambda)$

$\mathbf{2} = [x \in](a, b \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!= b \,.\, x = (ab) :\; -\!\!=_{a,b} \Lambda)$
traduction : $\mathbf{2} = \{r : \exists x \exists y (x, y \in 1 \wedge x \neq y$
$\wedge r = yx \cup \{x\} \cup xy \cup \{y\} \cup xy\}$

*Colinéarité*

$a, b, c \in \mathbf{1} ::\supset:: a, b, c \in \mathrm{Cl} \,.:=:.\, x \in \mathbf{2} \,.\, a, b, c \in x :\; -\!\!=_x \Lambda$
traduction : $a, b, c \in \mathrm{Cl} = a, b, c \in \mathbf{1} \wedge \exists x (x \in \mathbf{2} \wedge a, b, c \in x)$

XII) $r \in 2 \,.\supset: x \in \mathbf{1} \,.\, x -\!\!\in r \,.\, -\!\!=_x \Lambda$
traduction : $\forall x (x \in \mathbf{2} \Rightarrow y (y \in 1 \wedge y \notin x))$

XIII) $a, b, c \in \mathbf{1} \,.\, a, b, c -\!\!\in \mathrm{Cl} \,.\, d \in bc \,.\, e \in ad \,.\supset:.\, f \in ac \,.\, e \in bf :\; -\!\!=_f \Lambda$

XIV) $a, b, c \in \mathbf{1} \,.\, a, b, c -\!\!\in \mathrm{Cl} \,.\, d \in bc \,.\, f \in ac :\supset:.\, e \in ad \,.\, e \in bf :\; -\!\!=_e \Lambda$

▷ *Définition*

*Plan*

$\mathbf{3} = [x \in](a, b, c \in \mathbf{1} \,.\, a, b, c -\!\!\in \mathrm{Cl} \,.\, x = (abc) :\; -\!\!=_{a,b,c} \Lambda)$

XV) $p \in \mathbf{3} \,.\supset:.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!\in p :\; -\!\!=_a \Lambda$

XVI) $p \in \mathbf{3} \,.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!\in p \,.\, b \in ap \,.\, x \in \mathbf{1}$
$:\supset: x \in p \,.\!\cup\!.\, ax \cap p -\!\!= \Lambda \,.\!\cup\!.\, bx \cap p -\!\!= \Lambda$

***Pasch :* Vorlesungen über neuere Geometrie*, §§ 1–2***

▷ *Axiomes du segment* (traduction tirée de [Nabonnand 2002]) :

1) Entre deux points, on peut toujours tracer un segment de droite, et seulement un.

2) On peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment de droite donné.

3) Si le point $C$ se trouve à l'intérieur du segment $AB$, alors le point $A$ se trouve à l'extérieur du segment $BC$.

4) Si le point $C$ se trouve à l'intérieur du segment $AB$, alors tous les points du segment $AC$ sont en même temps des points du segment $AB$.

5) Si le point $C$ se trouve à l'intérieur du segment $AB$, alors un point $D$ qui n'appartient à aucun des segments $AC$ et $BC$ ne peut pas appartenir au segment $AB$.

6) Soient $A$ et $B$ deux points ; alors on peut choisir le point $C$ de telle manière que $B$ se trouve à l'intérieur du segment $AC$.

7) Si le point $B$ se trouve à l'intérieur du segment $AC$ et du segment $AD$, alors soit le point $C$ se trouve à l'intérieur du segment $AD$, soit le point $D$ se trouve à l'intérieur du segment $AC$.

8) Si le point $B$ se trouve à l'intérieur du segment $AC$ et le point $A$ à l'intérieur du segment $BD$, alors $A$ se trouve également à l'intérieur du segment $CD$.

9) Étant donnés deux points $A$ et $B$ quelconque, alors on peut choisir un troisième point tel que aucun des trois points $A$, $B$, $C$ ne se trouve à l'intérieur du segment joignant les deux autres.

▷ *Définitions*

– Si $B$ est un point du segment $AC$, le segment $BC$ est un prolongement du segment $AB$.

– $A$, $B$, $C$ forment une série linéaire si l'un des points appartient au segment joignant les deux autres.

– Si $A$, $B$, $C$ constituent une série linéaire, on dit que $C$ se trouve sur la droite $AB$.

▷ *Axiomes de la surface plane*

10) Par trois points quelconques, on peut poser une surface plane.

11) Si un segment est tracé entre deux points d'une surface plane, alors il y a une surface plane qui contient tous les points de la surface originale et tous ceux du segment.

12) Si deux surfaces planes $P$, $P'$ ont un point commun, on peut désigner un autre point qui est contenu aussi bien dans une surface plane contenant tous les points de $P$ que dans une surface plane contenant ceux de $P'$.

13) Soient trois points $A$, $B$, $C$ d'une surface plane reliés deux à deux par les segments $AB$, $AC$, $BC$ et dans la même surface une droite $DE$ passant par un point situé à l'intérieur du segment $AB$, alors le segment $DE$

ou un prolongement de celui-ci passe soit par un point du segment $AC$, soit par un point du segment $BC$.

▹ *Définition*

$D$ est dans le plan $ABC$ s'il existe une surface plane dans laquelle sont $A$, $B$, $C$, $D$.

On démontre que si $D$ et $E$ sont dans le plan $ABC$, alors $A$ et $B$ sont dans le plan $CDE$.

### *3. Comparaison Pasch/Peano*

▹ *Axiomes de la droite* (selon [Peano 1889, p. 84–85])

| *Pasch* | *Peano* |
|---|---|
| 1) (existence et unicité du segment) | 4, 5, V |
| 2) (un segment n'est pas vide) | II |
| 3) (ordre) | III, VI, P18 (th.) |
| 4) (ordre) | VIII |
| 5) (ordre) | IX |
| 6) (ordre) | VII |
| 7) (ordre) | X |
| 8) (ordre) | XI |

▹ *Axiomes du plan*

| *Pasch* | *Peano* |
|---|---|
| 9) (existence de trois points non colinéaires) | XII |
| 10) (surface plane et trio de points) | déf. |
| 11) (prolongement d'une surface plane et segment) | déf. |
| 12) (relation entre plans dans l'espace) | XV, XVI |
| 13) (relation d'ordre dans le plan) | XIII, XIV |

## BIBLIOGRAPHIE

AVELLONE (M.), BRIGAGLIA (Aldo) & ZAPULLA (C.)
[2002] The foundations of projective geometry in Italy from De Paolis to Pieri, *Arch. History Exact Sci.*, 56 (2002), p. 363–425.

BORGA (M.), FREGUGLIA (Paolo) & PALLADINO (D.)
[1985] *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano : Franco Angeli, 1985.

BOTTAZZINI (Umberto)
[1895] Dall'analisi matematica al calcolo geometrico : origini delle prime ricerche di logica di Peano, *Hist. Philos. Logic*, 6 (1895), p. 25–52.

BURALI-FORTI (Cesare)

[1897] *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris : Gauthier-Villars, 1897.

BURALI-FORTI (Cesare) & MARCOLONGO (R.)

[1910] *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, Paris : Hermann, 1910.

CARNOT (Lazare)

[1804] *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1804.

CONTRO (Walter S.)

[1976] Von Pasch zu Hilbert, *Arch. History Exact Sci.*, 15 (1976), p. 283–295.

COXETER (Harold S.M.)

[1947] *Non-Euclidean Geometry*, Toronto : Toronto University Press, 1947.

DEDEKIND (Richard)

[1888] *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Braunschweig : Vieweg, 1888.

ENRIQUES (Federigo)

[1991] Fondements de la géométrie. Géométrie générale, Molk (Jules), éd., dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome III*, vol. 1, Paris : Gabay, 1991.

FREGUGLIA (Paolo)

[1985] *Il calcolo geometrico ed i fondamenti della geometria*, 1985 ; dans [Borga et al. 1985, p. 174–236].

[1992] *Dalle equipollenze ai sistemi lineai – Il contributo italiano al calcolo geometrico*, Urbino : QuattroVenti, 1992.

FREUDENTHAL (Hans)

[1974] The impact of von Staudt's foundation of geometry, dans *R. S. Cohen et al., For Dirk Struik*, Dordrecht : D. Reidel, 1974.

GANDON (Sébastien)

[2005] Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie, *Dialogue*, XLIV (2005), p. 653–92.

GRATTAN-GUINNESS (Ivor)

[2000] *The Search for Mathematical Roots 1870-1940 – Logic, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel*, Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2000.

HERMITE (Charles)

[1882] *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer, 4e éd.*, Paris : Hermann, 1882.

HOUËL (Jules)

[1867] *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur XXXII premières propositions d'Euclide*, Paris : Gauthier-Villars, 2e éd., 1883, 1867.

KENNEDY (H. C. éd.)

[1973] *Selected Works of Giuseppe Peano*, Toronto : University of Toronto Press, 1973.

[2002] *Life and Works of Giuseppe Peano*, 2002 ; http://home.att.net/~clair norman/Peano2002.pdf.

KLEIN (Felix)
[1922–1923] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. I–III, Berlin : Springer, 1922–1923.
[1873] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, 4 (1873).
LEBESGUE (Henri)
[1902] Intégrale, longueur, aire, dans *Œuvres scientifiques*, vol. 1, Genève : Kundig, 1972–1973, 1902.
[1975] *La mesure des grandeurs*, Paris : Blanchard, 1975.
MICHEL (Alain)
[1992] *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris : Vrin, 1992.
MOORE (Gregory H.)
[1995] The axiomatization of linear algebra : 1875–1940, *Historia Math.*, 22 (1995), p. 262–303.
NABONNAND (Philippe)
[2002] Des « Grundbegriffe » aux « Stammbegriffe », dans *Histoires de géométries*, Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 2002 ; textes du séminaire de l'année 2002.
PASCH (Moritz)
[1822a] *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig : Teubner, 1882 ; 2$^{e}$ édition avec un supplément de Max Dehn : Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung, Berlin : Springer, 1926.
[1882b] *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Leipzig : Teubner, 1882.
[1921] Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition, *Annalen der Philosophie*, 2 (1921), p. 144–162.
PEANO (Giuseppe)
[1887] *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino : Bocca, 1887.
[1888] *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Bocca, 1888 ; trad. anglaise de L. C. Kannenberg, Boston : Birkhäuser, 2000.
[1889a] *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino : Bocca, 1889 ; trad. anglaise dans [Kennedy 1973, p. 101–134].
[1889b] *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino : Bocca, 1889.
[1890] Sulla definizione dell'area d'una superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.*, 4 (1890), p. 54–57 ; trad. anglaise dans [Kennedy 1973, p. 137–142].
[1894] Sui fondamenti della geometria, *Rivista di Matematica*, (1894), p. 51–94.
[1896] Saggio di calcolo geometrico, *Atti Accad. sci. Torino,* 31 (1896), p. 952–975 ; trad. anglaise dans [Kennedy 1973, p. 169–188].
[1898] Analisi della teoria dei vettori, *Atti Accad. sci. Torino*, 33 (1898), p. 513–534.

PIERI (Mario)

[1901] *Sur la géométrie envisagé comme un système purement logique, Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, vol. 3, Paris : Colin, 1967, 1901.

RODRIGUEZ-CONSUEGRA (F.)

[1991] *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell : Origins and Development*, Basel, Boston and Berlin : Birkhäuser, 1991.

ROTA (Gian-Carlo), BARNABEI (Marinela) & BRINI (Andrea)

[1985] On the exterior calculus of invariant theory, *J. Algebra*, 96 (1985), p. 120–160.

RUSSELL (Bertrand)

[1903] *The Principles of Mathematics* (1937), Londres : Routledge, 1903.

SERRET (Joseph-Alfred)

[1879] *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris : Gauthiers-Villars (1900), 1879.

TORRETTI (Roberto)

[1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.

VAN DER WAERDEN (Bartel)

[1986] Les contributions de Peano aux théories axiomatiques de la géométrie, dans *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano*, Turin, 1986.

VAN HEIJENOORT (Jean)

[1967] Logic as calculus and logic as language, *Synthese*, 17 (1967), p. 324–330.

VEBLEN (Otto)

[1904] A system of axioms for geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5 (1904), p. 343–384.

WHITEHEAD (Alfred North)

[1898] *A Treatise on Universal Algebra With Applications*, Cambridge : Cambridge University Press, 1898 ; rééd. New York : Hafner, 1960.

[1906] *The Axioms of Projective Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906 ; rééd. New York : Hafner, 1971.

[1907] *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1907 ; rééd. New York : Hafner, 1971.