Revue d'histoire des mathématiques
11 (2005), p. 257–313

LES RÈGLES DE COMPAGNIE, DANS LES PREMIÈRES ARITHMÉTIQUES IMPRIMÉES DES ESPAGNES : DE LA RÈGLE MARCHANDE À L'OUTIL MATHÉMATIQUE

Marie-Hélène Labarthe

Résumé. — Dans les arithmétiques commerciales du Moyen Âge et de la Renaissance, les « règles de compagnie » servent à résoudre les questions de partage des bénéfices ou pertes d'une société entre les différents partenaires. Le cas élémentaire est celui de la « règle de compagnie simple », où la répartition est proportionnelle aux investissements respectifs. Mais la règle de compagnie simple n'est pas seulement l'algorithme d'un problème commercial particulier. C'est aussi, plus largement, une technique mathématique de résolution de certains types d'équations. On étudie dans cet article tous les aspects de cette règle, dans le cadre des premières arithmétiques imprimées des Espagnes.

Texte reçu le 2 septembre 2003, révisé le 18 mars 2005.

M.-H. Labarthe, Université de Perpignan Via Domitia, Département de mathématiques, 66860 Perpignan Cedex (France).

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A40.

Mots clefs : Arithmétique, compagnie, commerce, équations linéaires, Espagne, Ortega, Santcliment, Ventallol.

Key words and phrases. — Arithmetics, company, commerce, linear equations, Spain, Ortega, Santcliment, Ventallol .

Le pluriel du mot « Espagne » est utilisé ici pour tenir compte de la situation historique et politique particulière à l'époque des traités de notre étude, où la Couronne d'Aragon et la Couronne de Castille avaient été réunies en 1469 par le mariage de Ferdinand d'Aragon et d'Isabelle de Castille, constituant ainsi l'union dynastique, mais non politique, des deux plus grandes puissances des Espagnes. Le Royaume de Grenade, quant à lui, ne fut intégré à la Monarchie hispanique qu'en 1492, après la prise de Grenade qui marquait la fin de la Reconquête. Ce pluriel « Espagnes » est employé par plusieurs historiens, dont Denis Menjot [1996], pour signifier cette diversité d'identités. En particulier, la première partie de [Benassar 1985] est intitulée « Dans les Espagnes médiévales : pluralité des destins ».

ABSTRACT (Company Rules in the First Arithmetics Printed in the Spanish Countries : From Merchant Rule to Mathematical Tool)

In medieval and Renaissance commercial arithmetics, "company rules" were used to determine how to share profit and loss among the different members of a partnership. The simplest case concerns the "simple company rule" which calls for a proportional division according to the respective investments. This rule, however, represents not only the algorithm for solving a specific commercial problem but also, more generally, a mathematical technique for solving certain types of equations. In this paper, we study the various aspects of this rule in the specific context of the first arithmetics printed in the Spanish Countries.

1. LES COMPAGNIES MARCHANDES AU MOYEN ÂGE ET LES RÈGLES MATHÉMATIQUES DES COMPAGNIES

Dans les arithmétiques de la fin du Moyen Âge, le chapitre des compagnies est très représentatif de l'activité marchande de cette époque, puisqu'il traite des sociétés commerciales qui s'étaient alors développées en Europe. Ces sociétés, pour faire face à l'augmentation du commerce international, ont vu leur structure se modifier profondément entre le X^{e} et le XV^{e} siècle, comme l'explique Charles-Emmanuel Dufourcq [1975]. En effet, du XI^{e} au XIII^{e} siècle, un milieu marchand a pris forme dans les villes portuaires comme dans les autres grandes cités d'Occident. L'homme d'affaires n'est plus le marchand itinérant des siècles antérieurs, mais est davantage un négociant qui mène plusieurs opérations à la fois. Il est devenu un sédentaire [Dufourcq 1975], tout en étant en rapports constants avec des pays plus ou moins lointains : des actes notariés du temps l'appellent le *societus stans* (l'associé stable), et les historiens le nomment souvent un « capitaliste ». La richesse des villes méditerranéennes provient essentiellement de leur commerce par mer, et c'est dans les ports que se développe une première forme d'association, appelée le *contrat de commande* : le « capitaliste » prête une certaine somme d'argent à un commerçant voyageur qui part avec cette somme acheter ou vendre outremer et ne la rembourse que s'il a pu réaliser les affaires prévues et revenir dans de bonnes conditions à son point de départ : c'est le *contrat de commande*. Le prêt à intérêt n'étant pas admis par l'Église, l'usure étant interdite par la loi canonique, cette sorte de prêt maritime prend la forme d'une association commerciale momentanée, qui dure le temps d'un seul voyage.

On passe très vite de cette association élémentaire et éphémère entre deux personnes à des sociétés plus évoluées, sans que disparaisse pour autant le système de la simple commande :

> « Ainsi, à côté des commandes multiples et simultanées qui continuent à être fréquentes, apparaissent des associations de capitaux à des fins commerciales générales. Tandis que subsistent des hommes d'affaires isolés, se constituent des groupes, dont chacun est pratiquement dirigé par celui qui a investi la plus grande somme : plus de la moitié du total, souvent. Dans le contrat constitutif d'une telle société, on stipule qu'à la fin de la durée prévue – deux ou trois ans, souvent – les comptes seront faits en partageant bénéfices ou pertes proportionnellement à l'apport de capital de chaque associé. Un négoce collectif se développe donc » [Dufourcq 1975, p. 41].

Pour la Catalogne en particulier, les sociétés nouvelles se nomment les *companyes de mercaderia* et sont ainsi décrites par Claude Carrère :

> « Mais, pour associer capital et travail dans le domaine commercial, la formule de prédilection, c'est la *companya de mercaderia.* Dans ce type d'association, les divers membres fournissent des capitaux selon leurs possibilités ou leurs intentions ; la gestion de ces fonds (le *cabal* de la compagnie) est confiée à un ou plusieurs directeurs, pas nécessairement confondus avec les bailleurs, et dont le travail est rémunéré par un salaire fixe, le plus souvent, ou par un pourcentage sur les bénéfices. Lorsqu'on a déduit ces salaires et les frais de gestion, les bailleurs se partagent les bénéfices proportionnellement à leur apport » [Carrère 1967, tome I, p. 158].

Un marchand avait souvent intérêt à investir dans plusieurs compagnies, car les risques de ruine étaient grands : insécurité des systèmes de communication et possibilité qu'un des associés, par une spéculation erronée, envoie à la ruine tous les autres [Carrère 1967].

Ce nouveau contexte, où l'augmentation du volume des affaires nécessite l'investissement de capitaux considérables et où les contrats d'association deviennent de plus en plus complexes, requiert des connaissances mathématiques spécifiques. Un premier objectif clairement perceptible du chapitre des compagnies qui apparaît dans les arithmétiques marchandes de l'époque est d'aider les hommes d'affaires à répartir les bénéfices ou les pertes de la société entre les différents partenaires, selon des règles mathématiques bien précises : les règles de compagnie apparaissent donc d'abord comme un outil mathématique donné aux marchands d'une *companya de mercaderia* afin qu'ils puissent se répartir équitablement bénéfices ou pertes. Ces règles de compagnie envisagent différents cas de répartition, qui tiennent compte de plusieurs paramètres :

– les sommes investies par les marchands ne sont pas toutes égales ;

– les temps qu'ils passent dans la société ne sont pas forcément les mêmes ;

– il y a des personnes qui ne font qu'investir de l'argent, alors que d'autres fournissent leur travail, comme par exemple les « facteurs » chargés d'effectuer les opérations marchandes dans les différents ports ou comptoirs, pour le compte de la société ;

– certaines sociétés établissent des contrats particuliers.

Il convient donc que ces outils mathématiques puissent s'adapter à diverses situations, dans un esprit de justice. En effet, comme le soulignent souvent les auteurs, un des objectifs des traités d'arithmétique marchande est le juste règlement des questions financières. Il faut « éviter toutes les fraudes et les tromperies qui se font dans le monde, au sujet des comptes[1] », dit en particulier le mathématicien Juan Ortega dans l'introduction générale de son ouvrage.

En ne considérant ce chapitre que sous cet aspect, les règles de compagnie apparaissent comme spécifiques aux marchands et ne devant intéresser que ceux-ci, au même titre que d'autres règles pratiques enseignées dans ces ouvrages, comme les règles de trocs ou les règles d'alliages.

Par opposition à ces chapitres qui semblent uniquement tournés vers la pratique commerciale, du moins dans une première approche, d'autres thèmes paraissent davantage concerner les mathématiques abstraites, comme par exemple les règles de fausses positions qui sont une technique mathématique de résolution de certains types d'équations. Mais ce que nous nous proposons de montrer, c'est que derrière l'apparence d'une règle spécifiquement marchande, la règle de compagnie est une technique mathématique permettant de résoudre, au même titre que les règles de fausses positions, certains types de systèmes linéaires. On observera donc, avec les exemples donnés, un certain procédé pédagogique qui permet de passer progressivement de l'exemple concret, modélisant une compagnie financière, à des questions où l'on s'éloigne des pratiques marchandes pour traiter des problèmes dits pseudo-concrets dont le but principal est finalement la résolution d'équations. Aucun

[1] « *Por que no pasasen tantos fraudes como pasan por el mundo acerca de las cuentas* » [Ortega 1512, fol. 1v].

symbolisme, aucune formule écrite de manière abstraite ne figurant dans les ouvrages cités, le modèle marchand et l'historiette constituant le problème permettent donc de décrire une structure mathématique. Cette situation confère au problème un rôle éminent. Une équation n'est jamais donnée de manière abstraite : elle est intégrée à une histoire, que cette histoire corresponde à une réalité pratique de partage de bénéfices ou bien qu'elle soit simplement inventée pour les visées mathématiques de l'auteur. En ce sens, l'habillage concret du problème apparaîtra alors comme un artifice pédagogique, adapté au public visé.

2. QUELQUES INDICATIONS SUR LES OUVRAGES ÉTUDIÉS

Le support de cette étude est principalement composé de trois arithmétiques marchandes des Espagnes, qui sont parmi les premiers ouvrages imprimés dans ce domaine[2]. Nous avons regroupé ces trois ouvrages pour leur proximité géographique et historique d'une part, mais surtout pour leur parenté mathématique : les thèmes et les méthodes de résolution qui y sont développés sont suffisamment proches pour pouvoir être comparés.

Il s'agit d'abord de la *Suma de la art de Arismetica*, traité de 136 feuillets, écrit en langue catalane et publié en 1482. Sur son auteur, Francesc Santcliment, nous savons peu de choses, hormis ce qu'il écrit lui-même : il enseignait, dit-il, « dans l'illustre ville de Barcelone[3] » et il a composé cet ouvrage pour ceux qui, « ignorants d'un tel art, ont le désir d'être instruits[4] ». Des quelques indices qu'il donne, nous pouvons penser qu'il exerçait le métier de *maître d'abaque*[5] et devait être chargé d'enseigner

[2] Le livre *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica* [Malet & Paradis 1984] fournit une première étude de ces arithmétiques marchandes. Les procédés de résolution comparés de ces trois ouvrages ont été étudiés dans [Labarthe 2004].

[3] « [...] *en la insigna ciutat de Barcelona aquella ensenyant* » [Santcliment 1482, fol. 135v].

[4] « [...] *qui de tal art ignorants tenen desig* » [*ibid.*].

[5] La profession de *maître d'abaque*, particulièrement développée en Italie à la fin du XV^e^ siècle, existait aussi dans la ville de Barcelone. Claude Carrère écrit : « le Pisan Cristoforo Grilli, *magister abbaque*, qui apparaît en 1442 comme témoin d'un acte avec la mention habitant de Barcelone, doit compter dans son auditoire de futurs marchands et changeurs » [Carrère 1967, p. 139].

le calcul aux futurs marchands de Barcelone. Cet ouvrage est l'une des toutes premières arithmétiques imprimées en Europe que l'on connaisse, la première connue étant le *Libro che tracta di mercatantie*, imprimé à Trévise en 1478. Un article consacré au traité de Santcliment fut tout d'abord publié en 1936 par Louis C. Karpinski. Une version castillane du traité, intitulée *Compilacion de arismetica*, conservée à la Bibliothèque universitaire de Cagliari et reliée à l'arithmétique commerciale du mathématicien italien Pietro Borghi, a été par la suite identifiée. Imprimée à Saragosse, celle-ci daterait selon les experts d'environ 1487. Un bibliothécaire, Franco Coni, est responsable de cette découverte [Coni 1951]. Enfin, une récente édition intitulée *Summa de l'art d'Aritmètica – Francesc Santcliment* a été réalisée par Antoni Malet en 1998. Cette édition du texte de 1482, précédée d'une introduction historique et accompagnée de notes, est doublée de sa transcription en catalan actuel. Dans l'introduction, A. Malet retrace en particulier la chronique des articles concernant la première édition, fait une description des différents chapitres de l'ouvrage et analyse sa filiation franco-provençale. Il lui revient aussi le mérite d'avoir fourni une première comparaison des textes catalan et castillan.

Le deuxième ouvrage, écrit par Juan Ortega et le plus souvent publié sous le titre de *Tratado subtilissimo de Arismetica y de geometria* (titre donné en particulier à l'édition de Séville de 1534), fut, si l'on en juge par le nombre d'éditions qui ont été réalisées (une dizaine répartie sur tout le XVI^{e} siècle), la plus populaire des arithmétiques espagnoles de l'époque. C'est aussi, de loin, la plus volumineuse. La première édition, qui comporte 203 feuillets, fut imprimée à Lyon en 1512 sous le titre *Siguese una compusicion de la arte de arismetica y juntamente de geometria, fecha y ordenada por fray Juan de Ortega de la Orden de Santo Domingo de los Predicadores* (« Voici une composition de l'art de l'arithmétique et aussi de géométrie, faite et ordonnée par Frère Juan de Ortega, de l'Ordre de Saint Dominique des Prêcheurs »). Juan Ortega, né aux environs de 1480 et originaire de Palencia, était en effet membre de l'Ordre des Prêcheurs dominicains, et était rattaché à la province d'Aragon. D'après Julio Rey Pastor [1926, p. 68], il enseigna l'arithmétique et la géométrie en Espagne mais aussi en Italie durant de nombreuses années, comme ceci est attesté dans la licence de l'une des éditions du traité : une traduction italienne fut en effet imprimée à Rome en 1515. Des premières éditions, on peut aussi relever en particulier une traduction française du traité par Frère Claude Platin, éditée à Lyon en 1515 et considérée comme la première arithmétique imprimée en langue française. Sur la page de garde de cet ouvrage, on peut lire le panégyrique suivant : « Œuvre très subtille et profitable de l'art de science de arisméticque et geometrie translaté nouvellement d'espaignol en francoys [de Frere Jehan de Lortie, de l'ordre de Sainct Dominique] [...] Ayez ce livre, n'y faillez nullement. Symon Vincent : si vous en fournira en rue merciere ou il est demeurant et bon marché ». C'est sur la première édition de 1512, dont un exemplaire est conservé à la Bibliothèque nationale de Madrid, que s'appuie cette étude.

Le dernier ouvrage est la *Pratica mercantil, arithmetica e geometria*, traité de 137 feuillets rédigés en catalan et dont l'auteur Joan Ventallol est natif de la ville de Majorque. Sur la page de garde le titre, *Pratica mercantivol composta e ordenada per en Joan Vantallol de la ciutat de Mallorques*, se trouve placé sous une gravure couvrant presque tout l'espace et représentant un écu couronné, dans lequel un aigle à deux têtes a les ailes déployées : sur une aile figurent les armes de la monarchie hispanique, sur l'autre celles de Majorque. On peut lire, à la fin de cette première édition : « *Composte e ordonade per en Joan Vantalol, natural de la Ciutat de Mallorques y a ses despeses, stampada en la Ciutat de Lyo per mestre Joan de la place e acabada a 23 de April, any 2521* » (« Composé et ordonné par Juan Ventallol, natif de la ville de Majorque, imprimé à ses frais dans la ville de Lyon par Maître Jean de la Place et achevé le 23 avril de l'année 2521 »). La date donnée est bien entendu erronée, l'ouvrage datant de 1521. Une version castillane fut également publiée en 1619 à Tarragone par Gabriel Roberto, sous le titre *La Aritmetica de Juan Ventallol traduzida de lengua catalana en castellana por el doctor Juan Batista Tolra*. Enfin, en 1985 un fac-similé de l'édition catalane a été édité à Palma de Majorque par la Chambre de commerce de cette ville. De la version originale catalane, l'Espagne compte plusieurs exemplaires dont un à la Bibliothèque de Catalogne à Barcelone (Fonds ancien, cote 15-II-47)[6].

[6] C'est sur une copie du fac-similé de 1985, gracieusement envoyée par la Chambre de commerce de Palma, que nous avons pu travailler.

Ces trois traités font partie d'un genre d'ouvrages qui s'est développé en Europe à la fin du Moyen Âge, pour les nécessités du commerce et sous l'influence des mathématiques arabes. Parmi les plus anciens, le *Liber Abaci* de Léonard de Pise (1202) joue un rôle fondamental pour son influence déterminante sur les écrits postérieurs. On peut noter en particulier, pour la partie qui nous intéresse ici, qu'il contient déjà un chapitre sur les règles de compagnie. Dans la péninsule ibérique, un autre écrit ayant pu inspirer les mathématiciens est le *Liber Mahameleth*, traduction latine du XII^e siècle d'un ouvrage arabe[7].

Lié au monde marchand et à l'essor du commerce international, ce nouveau genre d'arithmétique se répand à partir du XIV^e siècle, en Italie d'abord. Le *Liber Abaci* et le *Liber Mahameleth* étaient écrits en latin, mais ensuite l'usage du latin va être progressivement abandonné afin que les ouvrages s'adaptent à un public plus large, composé de professionnels pour qui les connaissances mathématiques deviennent de plus en plus une nécessité. Par exemple pour la péninsule ibérique, on trouve dès le XIV^e siècle des manuscrits rédigés en castillan, comme le *Manuscrit 46 de la Real Colegiata de San Isidoro de León*. Dans *Calcul, algèbre et marchandise*, Paul Benoit explique ainsi cette évolution :

> « Tous ces ouvrages sont écrits en langue vulgaire et non plus en latin comme l'essentiel de la littérature scientifique antérieure. Fait déterminant qui montre que ces traités s'adressent à un public différent, qui n'est pas celui de l'université, ni celui de l'humanisme naissant, mais un public pour qui le savoir ne se confond pas avec la culture héritée de l'antiquité » [Benoit 1997, p. 303].

On voit donc apparaître des ouvrages en langue vernaculaire (toscan, lombard, français, vénitien, castillan, catalan, occitan...), qui peuvent être considérés comme les premiers modèles de nos arithmétiques commerciales. Parmi ceux-là, on trouve :

– le *Compendi del art del algorisme*, dit *Manuscrit de Pamiers*, d'auteur inconnu, rédigé en occitan vers 1430 et ayant de fortes similitudes avec le traité de Santcliment ;

– le *Compendion de lo abaco* de Frances Pellos, écrit en occitan et édité à Turin en 1492, qui a certainement influencé Ortega ;

[7] Cet ouvrage a fait l'objet d'un premier commentaire par J. Sesiano [1988].

– la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, ouvrage encyclopédique rédigé en vénitien par Luca Pacioli et édité à Venise en 1494, qui regroupe les connaissances des traités italiens du XVe siècle[8] ;

– le *Triparty en la science des nombres* du mathématicien français Nicolas Chuquet, ouvrage savant très novateur datant de 1484, mais qui n'a malheureusement pas été imprimé à cette époque.

Le développement de l'imprimerie contribue à la diffusion de ce savoir mathématique. En particulier, la production italienne a une grande influence sur le reste de l'Europe. C'est en particulier le cas de la *Summa* de Pacioli pour la péninsule ibérique : cet ouvrage y semble bien connu et apprécié, et son auteur est souvent cité dans les premiers imprimés du XVIe siècle sous le nom de Lucas de Burgo, comme dans l'arithmétique de Juan Andrés éditée en castillan à Valence en 1515, où son auteur écrit : « Cet ouvrage a été compilé par moi selon la doctrine, les règles, les chapitres et articles de Lucas de Burgo, maître en théologie sacrée[9] ». Ortega et Ventallol ne citent pas la *Summa* de Pacioli, mais leurs écrits laissent apparaître l'influence de cette œuvre ou plus généralement celle de la littérature mathématique italienne[10]. Nous donnerons plus loin un exemple de cette influence pour le cas particulier des compagnies.

Tous ces traités abordent la règle de compagnie : c'est avec la règle de trois un des thèmes essentiels figurant dans les ouvrages les plus élémentaires. Mais le développement du chapitre dépend du niveau de l'ouvrage. Pour les trois arithmétiques que nous avons choisi d'étudier ici, le nombre de problèmes sur ce sujet est assez inégal :

– 3 pour Santcliment ;
– 47 pour Ortega ;
– 31 pour Ventallol.

---

[8] Pour l'étude particulière du développement de l'arithmétique marchande en Italie et le rôle joué par les écoles de ville, on peut par exemple se reporter aux travaux de R. Franci et L. Toti Rigatelli [Franci & Toti Rigatelli 1982].

[9] « *La qual obra fue por mi copilada segun la doctrina, reglas, capitulos y articulos de Lucas de Burgo, maestre en sacra theologia.* »

[10] Cette influence a été analysée et développée dans [Labarthe 2004]. Elle avait déjà été relevée par l'auteur, lors de la conférence « De la Chine à l'Occitanie, entre arithmétique et algèbre » (Toulouse, 22–24 septembre 2000) et par Xavier Docampo lors de la conférence « *The origins of algebra : From al-Khwarizmi to Descartes* » (Barcelone, 27–29 mars 2003), ainsi que dans [Labarthe 2003, p. 158].

L'ouvrage de Santcliment se borne aux questions les plus usuelles, restant dans un cadre très pratique. Mais aussi la règle de compagnie y est réinvestie dans le chapitre des alliages, et c'est ce qui en fait son intérêt : il apparaît en effet que même dans cet ouvrage plutôt élémentaire, la règle de compagnie dépasse le cadre spécifiquement marchand pour devenir une technique de résolution applicable à d'autres domaines des mathématiques.

Beaucoup plus riches sont les ouvrages d'Ortega et de Ventallol, où à travers des exemples très variés ces auteurs montrent parfaitement toutes les facettes de cette règle et tout l'usage que l'on peut en faire : le cadre spécifiquement marchand est ici largement dépassé et les auteurs se plaisent à multiplier les domaines d'application de la règle.

Nous allons donc examiner le développement de cette règle et voir comment s'articulent ces deux axes : outil spécifique destiné aux marchands d'une part, extension à des fins plus abstraites de résolution de certains types d'équations de l'autre.

3. PRINCIPE DE LA RÈGLE

Les problèmes se développent autour de la situation de base suivante : des personnes se regroupent pour former une *compagnie* et mettre ensemble leurs capitaux respectifs (les *mises*). Ces capitaux rapportent à la compagnie un *gain*, ou au contraire entraînent une *perte*. Il s'agit alors de partager de manière équitable ce gain ou cette perte entre les différents associés. On y distingue généralement trois sortes de règles :

– la règle de compagnie simple, lorsque le temps passé dans la compagnie est le même pour tous, mais les mises sont différentes ;

– la règle de compagnie avec le temps, lorsque en outre le temps passé dans la compagnie n'est pas le même pour tous ;

– la règle de compagnie avec pacte, lorsque par exemple il y a des « facteurs » à rémunérer ou bien lorsque certains contrats particuliers sont établis à l'avance.

Les différentes introductions précisent le sujet :

> « Dans la neuvième partie de ce livre qui se nomme compagnies se trouvent trois choses nécessaires qui tout bonnement ne peuvent pas être les unes sans les autres. Ces trois choses sont les suivantes. La première concerne les parts. La seconde est le temps. La troisième est le gain ou la perte. Car c'est parce

qu'ils se disent compagnies qu'ainsi ils se risquent à perdre comme à gagner. Et en gagnant chacun doit avoir telle part suivant ce qu'il a ou est dans la compagnie, et en perdant de la même façon[11] » [Santcliment 1482, fol. 83v].

« Si tu veux savoir ce qu'est la règle de compagnies, tu dois savoir que ce n'est pas autre chose qu'un regroupement d'argent qui est fait entre beaucoup ou peu de personnes pour gagner leur vie. Et ensuite, de ce qu'ils gagnent avec l'argent qu'ils ont mis, combien il reviendra à chacun selon ce qu'il a mis ou le temps qu'il est resté dans la compagnie, comme tu verras dans les exemples suivants[12] » [Ortega 1512, fol. 109v].

« Et si l'on ne fait pas de pacte, on doit partager le gain selon les mises de chacun, et qui met la moitié de tout le capital doit retirer la moitié de tout le gain, s'il n'y a pas des temps différents. Car sinon on a besoin de respecter et la mise et le temps. Et s'il y a des pactes entre les partenaires, on a besoin de connaître la forme et la manière de ces pactes comme tu pourras largement voir dans les exemples qui suivent[13] » [Ventallol 1521, fol. 62r].

Le mot « compagnie simple » ne figure pas dans les différentes introductions. Ortega dit « compagnie sans le temps », Santcliment ne lui donne pas de nom particulier, Ventallol l'appelle « la règle générale sans pacte », mais dans les résolutions des problèmes, Ventallol dit parfois « compagnie simple » (*compenya simple*) et lorsque les auteurs parlent de « compagnie » sans plus de précision, il s'agit toujours de cette première règle. Celle-ci est fondamentale, car les deux autres n'en sont que des prolongements et peuvent s'y ramener. Nous porterons donc toute notre attention sur cette première règle.

Pour une compagnie simple, les données sont :

– le nombre n des associés ;
– la mise m_i ou part de chaque associé ;

[11] « *E a la novena part de aquest libre ques nomena companyies se contenen 3 coses necessaries, que les unes sense les altres bonament no poden star. Les quals 3 coses son aquestes. La primera son les parts. La segona es lo temps. La terça es lo guany ho perdua. Car perço se dien companyes que axis passen arrisch de perdre com de guanyar e, guanyant, que quascu ne hage tal part, segons te ho estat en la companyia, e perdent per lo semblant.* »

[12] « *Si quisieres saber que cosa es regla de companias, as de saber que no es otro cosa sino una juntamiento de dinero que se faze entre muchas o pocas personas para ganar su vida. Y despues aquella que se gana con los dineros que udos an puesto saber quanto vendra a cada uno segun lo que puso o el tiempo que a estado en la compania, como veras en los enxemplos siguientes.* »

[13] « *E si no y san pactes se deu partir lo guany segons les meses de cascu, e qui met la mitat de tot lo cabal deu tirar la mitat de tot lo guany. E qui met lo terc de tot lo cabal deu tirar lo terc de tot lo guany si donchs no y a diversitat de temps. Car lavores es manaster haver respecte a la mesa y al temps. E si pactes hi a entre els lavores es manaster antendre la forma e manera dels pactes, axi com en los aximplis seguents porras largament veura.* »

– le gain total g réalisé par la compagnie, à répartir entre tous.

Les inconnues sont les gains respectifs des n associés $g_1, g_2, \dots, g_n$ qui doivent satisfaire aux conditions suivantes :

– leur somme doit être égale au gain total de la compagnie : $\sum_1^n g_i = g$;

– ils doivent être proportionnels aux mises respectives, ce que nous écrirons en général $(g_1, g_2, \dots, g_n) \sim (m_1, m_2, \dots, m_n)$ mais qui équivaut, lorsque mises et gains sont exprimés numériquement dans des unités convenables[14], à la propriété :

$$\frac{g_1}{m_1} = \frac{g_2}{m_2} = \cdots = \frac{g_n}{m_n}\cdot$$

On doit observer que cette proportionnalité n'est pas explicitement nommée dans les différentes introductions, mais seulement suggérée par les auteurs qui disent « que chacun doit avoir telle part suivant ce qu'il a ou est dans la compagnie », ou bien « qu'il reviendra à chacun selon ce qu'il a mis », ou encore que l'on doit « diviser le gain selon les mises de chacun, et qui met la moitié de tout le capital doit retirer la moitié de tout le gain, s'il n'y a pas des temps différents ». Le vocabulaire mathématique est ici inexistant, les auteurs utilisent le langage courant.

4. RÉSOLUTION ET PREMIER EXEMPLE

La résolution du problème de compagnie simple se fait, pour Santcliment, par un algorithme[15] particulier, énoncé sous forme de règle :

> « La règle des compagnies est celle qui dit : multiplie par chacune, divise par toutes ensemble.
>
> [...] Quand on dit multiplie par chacune, il te faut comprendre que le gain que toutes les parties auront fait doit être multiplié par chacune des parts. Et lorsqu'on dit : divise par toutes ensemble, il te faut comprendre : tu diviseras

[14] Dans l'énoncé « Le premier met 35 ducats et le second vingt livres de monnaie. À la fin du temps ils ont gagné 60 livres » (*El primero pone 35 ducados y el segundo veinte libras de moneda. En fin del tiempo ganaron 60 libras de moneda*) [Ortega 1512, fol. 120v], nous écrivons $m_1 = 25$ d., $m_2 = 20$ l., $(m_1, m_2) \sim (g_1, g_2)$ et $g_1 + g_2 = 60$ l., mais les unités de monnaie n'étant pas les mêmes, on ne peut écrire $g_1/m_1 = g_2/m_2$ sans conversion préalable.

[15] Nous utilisons ici le mot « algorithme » dans sa signification moderne de « suite finie d'opérations élémentaires constituant un schéma de calcul ou de résolution d'un problème » (définition du Petit Larousse). Les auteurs utilisent le mot « règle ». Il faut distinguer le mot « algorithme » du mot « algorisme » que nous expliquerons plus loin.

par toutes les parts ajoutées en une, et ce qui te viendra de la division sera la part que chacun gagnera ou perdra[16] » [Santcliment 1482, fol. 83v].

Le même algorithme est donné en introduction par Ventallol :

« La règle générale sans les pactes se dit : multiplie le gain par la mise de chacun, et divise ce qui viendra par toutes ensemble[17] » [Ventallol 1521, fol. 62r].

L'algorithme ordonne donc d'effectuer les opérations ci-dessous.

Pour chaque associé (le k-ième), on multiplie le gain total g par sa mise ou part m_k, puis l'on divise le résultat par la somme des mises ou parts, soit par $\sum_1^n m_i$. La « formule » résumant l'algorithme est donc

$$g_k = (g \times m_k) \div \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

que nous écrirons aussi

$$g_k = (g \times m_k)/(\sum_1^n m_i)^{18}.$$

.

Pour la même règle, Ortega ne fait pas appel à un algorithme particulier mais invoque la règle de trois :

« Tu dois savoir que presque toutes règles ou les règles de compagnies peuvent se faire par la règle de trois, comme tu verras plus loin[22] » [Ortega 1512, fol. 109v].

---

[16] « *La regla de les companyes es aquesta : ques diu per quascuna multiplica, per totes ensemps parteix. [...] que per quant diu per quascuna multiplica, se te de entendre per lo guany que totes les parts hauran fet, per quascuna de les parts deu esser multiplicat. E per lo que diu per totes ensemps partex se te de entendre per totes les parts sumades en una partiras, e lo que de la partio te vendra sera la part que quascu guanyara ho perdra.* »

[17] « *E diu la retgla general sens pactes : moltiplica lo guany per la mesa de quiscu, e lo quen vindra perteix per tots ensemps.* »

[21] Cet algorithme se justifie facilement par la propriété des proportions :

$$\left[\frac{g_1}{m_1} = \cdots = \frac{g_n}{m_n}\right] \Longrightarrow \left[\frac{g_1}{m_1} = \cdots = \frac{g_n}{m_n} = \frac{\sum_1^n g_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{g}{\sum_1^n m_i}\right].$$

Remarque sur nos notations : du point de vue de la représentation d'un algorithme, nous distinguons les « formules » $g_k = (g \times m_k)/(\sum_1^n m_i)$ et $g_k = g \times (m_k/\sum_1^n m_i)$. La première écriture résume l'algorithme qui calcule d'abord $g \times m_k$ et $\sum_1^n m_i$ puis fait la division. La deuxième résume l'algorithme qui calcule d'abord $\sum_1^n m_i$, fait la division de m_k par $\sum_1^n m_i$, puis multiplie g par $m_k/\sum_1^n m_i$. L'écriture que nous adoptons dans ces « formules » permet de résumer ainsi tous les algorithmes rencontrés et indique donc, de manière synthétique, l'ordre des opérations effectuées par un auteur. Cette méthode de représentation donne un outil de comparaison des algorithmes entre les différents auteurs, pour la résolution de problèmes identiques. Elle a été développée et appliquée dans [Labarthe 2004].

[22] « *As de saber que casi todas quales quier regla o reglas de compañias se pueden fazer por regla de tres como adelante veras.* »

« Quatre hommes font une compagnie pour un certain temps. Le premier met dans la compagnie 20 ducats et le second 12 ducats et le troisième met 24 ducats et le quatrième met 44 ducats. Ces quatre hommes ont gagné 300 ducats à la fin du temps qu'ils ont décidé de passer [ensemble]. Je demande quel gain revient à chacun selon ce qu'il a mis.

Tu feras ainsi : ajoute tous les ducats qu'ont mis les quatre hommes c'est-à-dire 20 et 12 et 24 et 44, et cela se montera à 100, qui sera toujours le diviseur. Puis tu diras par la règle de trois : si 100 ducats qu'ont mis les 4 hommes ont gagné 300 ducats, quel gain reviendra au premier qui a mis 20 ducats ? Et si 100 ont gagné 300, quel gain reviendra à celui qui a mis 12 ? Et si 100 ont gagné 300, quel gain reviendra à celui qui a mis 24 ? Et si 100 ont gagné 300, combien reviendra à celui qui a mis 44 ? Multiplie et divise n'importe laquelle de ces quatre règles de trois dites ci-dessus et tu trouveras qu'il revient à celui qui a mis 20 ducats un gain de 60, à celui qui a mis 12, trente-six, et à celui qui a mis vingt-quatre, 72, à celui qui a mis 44 ducats, 132. Si tu veux voir si c'est vrai, ajoute tous les quatre gains en un, c'est-à-dire 60 et 36 et 72 et 132, et tu trouveras que cela se monte à 300, comme on le voit par l'exemple figuré.

$$
\begin{array}{c|l c |l}
 & 20 & & 60 \\
 & 12 & & 36 \\
4 & 24 & \text{-------}\ 300\ \text{------} & 72 \\
 & 44 & & 132 \\
\hline
 & 100 & & 300
\end{array}
$$

Et tu feras ainsi pour les mêmes règles de compagnies[23] » [Ortega 1512, fol. 109v, exemple 1].

Énoncé :

$$
\begin{cases}
m_1 = 20,\ m_2 = 12,\ m_3 = 24,\ m_4 = 44; \\
g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 300; \\
(m_1, m_2, m_3, m_4) \sim (g_1, g_2, g_3, g_4); \\
g_1 = ?,\ g_2 = ?,\ g_3 = ?,\ g_4 = ?.
\end{cases}
$$

On observera que l'hypothèse de proportionnalité $(m_1, m_2, m_3, m_4) \sim (g_1, g_2, g_3, g_4)$ que nous avons incluse dans l'énoncé n'est que suggérée

[23] « *4 hombres fazen compañia por cierto tiempo. El primero pone en la compañia 20 ducados y el segundo 12 ducados y el tercero pone 24 ducados y el quarto pone 44 ducados. Estos quatro hombres, en fin del tiempo que puson de estar, ganaron 300 ducados. Demando que quanto verna a cada uno de ganancia segun lo que puso. Faras ansi : ajunta todos los ducados que puson los quatro hombres como son 20 y 12 y 24 y 44, y montaran 100, los quales seran siempre el partidor. Pues diras por regla de tres : si 100 ducados que puson los 4 hombres an ganado 300, quanto una al que puso 24, y si 100 an ganado 300, quanto vendra al que puso 44 ? Multiplica y parte qualquera de las quatro sobredichas reglas de tres y allaras que viene de ganancia al que puso 20 ducados 60 ; y al que puso 12, treinta y seis ; y al que puso veinte y quatro 72 ; y al que puso 44 ducados 132. Si quisieres ver si es verdad ayunta todas las quatro ganancias en uno como son 60 y 36 y 72 y 132, y allaras que montan los 300 ducados, como veis por enxemplo figurado. [...] Y ansi faras de las semeiantes reglas de compañias.* »

par la phrase « Je demande quel gain revient à chacun selon ce qu'il a mis ».

Résolution :

– on calcule la somme des mises : $\sum_1^4 m_i = 20 + 12 + 24 + 44 = 100$;

– on énonce alors la règle de trois : si $\sum_1^4 m_i = 100$ ont gagné $g = 300$, que gagnera $m_1 = 20$ (resp. $m_2 = 12$, $m_3 = 24$, $m_4 = 44$) ? Ces quatre règles de trois expriment, pour chaque k, la proportionnalité $(\sum_1^4 m_i, \sum_1^4 g_i) \sim (m_k, g_k)$;

– on applique successivement les quatre règles de trois (« Multiplie et divise n'importe laquelle de ces quatre règles de trois dites ci-dessus ») : $g_k = (g \times m_k)/\sum_1^4 m_i$ pour $k = 1, 2, 3, 4$;

– on a donc $g_1 = \frac{300\times 20}{100} = 60$, $g_2 = \frac{300\times 12}{100}$, $g_3 = \frac{300\times 24}{100}$, $g_4 = \frac{300\times 44}{100}$.

Pour calculer le gain de chacun, deux méthodes sont donc mises en évidence : algorithme spécifique pour Santcliment, utilisation de règles de trois successives pour Ortega. La deuxième méthode s'accompagne chez Ortega d'un schéma de compagnie, qui permet de mettre en place les différents éléments de la règle : données, calculs et résultats apparaissent ainsi de manière synthétique et ordonnée dans un tableau.

Pour Ventallol, les deux différentes méthodes sont présentées : donnant dans son introduction l'algorithme spécifique à la manière de Santcliment, il résout le premier problème d'application d'abord par cet algorithme, puis donne ensuite la résolution du même problème par les règles de trois successives, avec comme pour Ortega un schéma de compagnie. Pour les exemples qui suivent, il utilise plutôt la méthode des règles de trois successives, montrant par là que sa présentation de l'algorithme spécifique en début de chapitre était là plutôt pour satisfaire à une certaine tradition.

5. MISES OU PARTS : DIVERSES FAÇONS D'EXPRIMER LA PROPORTIONNALITÉ

Il peut y avoir, dans l'énoncé de base que nous venons de voir, des variations de forme, sans que le fond soit changé. Ces variations portent sur les différentes façons d'exprimer l'hypothèse de proportionnalité. Dans l'énoncé, les mises sont parfois remplacées par des parts (ou parties) de gain, fixées à l'avance par les associés : ces parts peuvent être données sous forme de nombres entiers, de fractions, ou de pourcentages. Il convient alors d'adapter la résolution à ces différentes formes d'énoncés, tout en respectant le principe de proportionnalité.

Parties entières

« Trois hommes font une compagnie pour un certain temps, avec cette condition que de ce qui sera gagné, le premier ait les deux parties, le second ait les 6 parties et le troisième ait les 8 parties. Ils ont gagné 480 ducats. Je demande quel gain reviendra à chacun.

Tu feras ainsi : ajoute toutes les sommes qu'ils doivent avoir tous les trois, c'est-à-dire 2, 6, 8 et cela se montera à 16, qui sera le diviseur. Puis tu diras par la règle de trois : si 16 rapportent 480, que rapporteront 2 ? Multiplie et divise comme tu sais par la règle de trois et tu trouveras qu'il revient au premier un gain de 60 ducats. Et de même tu diras par la règle de trois : si 16 rapportent 480, que rapporteront 6 ? Multiplie et divise comme je te l'ai enseigné par la règle de trois et tu trouveras qu'il revient au second un gain de 180 ducats. Et de même tu diras : si 16 ont rapporté 480, que rapporteront 8 ? Multiplie et divise comme je te l'ai enseigné par la règle de trois et tu trouveras qu'il revient au troisième un gain de 240, comme on le voit par l'exemple figuré[24] » [Ortega 1512, fol. 111r, exemple 5].

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 3 & 6 \\ & 8 \\ \hline & 16 \end{array} \quad \text{--------} \quad \begin{array}{r|l} & 60 \\ 48 & 180 \\ & 240 \\ \hline & 480 \end{array}$$

Énoncé :

$$\begin{cases} p_1 = 2,\ p_2 = 6,\ p_3 = 8; \\ g = g_1 + g_2 + g_3 = 480; \\ (p_1, p_2, p_3) \sim (g_1, g_2, g_3); \\ g_1 = ?,\ g_2 = ?,\ g_3 = ?. \end{cases}$$

Il y a peu de différence entre cet exemple et le précédent du point de vue mathématique, mais seulement une légère évolution de l'habillage du problème : les mises ne sont pas précisées et rien ne dit qu'elles soient

[24] « *Tres hombres fazen compañia por cierto tiempo, con esta condicion que de lo que se ganare el primo aya las dos partes, y el segundo aya las 6 partes, y el tercero aya las 8 partes. Ganaron 480 ducados. Demando que quanto vendra a cada uno de ganancia. Faras ansi : ajusta todas las sumas que an de aver todos tres como son 2, 6, 8, y montaran 16. Y estos seran el partidor. Pues diras por regla de tres : si 16 ganan 480, que ganaran 2 ? Multiplica y parte como sabes por regla de tres, y allaras que vendran de ganancia al primero 60 ducados. Ansi mesmo diras por regla de tres : si 16 ganan 480, que ganaran 6 ? Multiplica y parte como te he enseñado por regla de tres y allaras que viene de ganancia al segundo 180 ducados. Y ansi mesmo diras : si 16 ganan 480, que ganaran 8 ? Multiplica y parte como te he enseñado por regla de tres y allaras que viene de ganancia al tercero 240 como lo veis por enxemplo figurado.* »

proportionnelles aux parties. Ce sont ces parties qui indiquent la proportionnalité à considérer.

Parts fractionnaires

« [Trois hommes] ont acheté le chargement d'un navire, et le premier paie dudit chargement le $\frac{1}{2}$[25]. Et le second le $\frac{1}{3}$. Et le troisième paie le $\frac{1}{4}$. Et ils vendent ledit chargement et se trouvent avec un gain de 357 livres. Voyons ce que doit avoir chacun, selon la part que chacun a payé. Voici la règle : Lorsque les parts sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, tu dois chercher un nombre où lesdites fractions se trouvent entièrement. Et tu dois le trouver dans 12 par la règle de réduction, et ce nombre nous montrera le prix du navire. Maintenant pour le premier qui a payé le $\frac{1}{2}$ du chargement prends 6, qui est la moitié de 12. Maintenant pour le second qui a payé le $\frac{1}{3}$, prends le $\frac{1}{3}$ de 12 qui fait 4. Maintenant pour le troisième qui a payé le $\frac{1}{4}$ dudit chargement, prends le $\frac{1}{4}$ de 12, et cela fait 3. Maintenant ajoute 6 et 4 et 3, et cela fait 13, qui te feront le diviseur. Et tu multiplieras le gain par chacune des parts et tu diviseras par toutes ensemble, c'est-à-dire par 13[26] » [Santcliment 1482, fol. 85r].

Énoncé :

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{1}{4}; \\ g = g_1 + g_2 + g_3 = 357; \\ \left(\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \dfrac{p_3}{q_3}\right) \sim (g_1, g_2, g_3); \\ g_1 = ?, \ g_2 = ?, \ g_3 = ?. \end{cases}$$

Résolution :

– la proportionnalité étant exprimée à l'aide de parts fractionnaires, on se ramène à des parties entières tout en gardant les mêmes proportions en multipliant chaque fraction par « un nombre où lesdites fractions se trouvent entièrement », autrement dit un multiple commun des dénominateurs 2, 3, 4. Le nombre choisi est 12 :

---

[25] Dans les traductions, nous notons parfois les fractions sous la forme a/b, par souci de régularité des interlignes. Mais dans tous les ouvrages, elles se présentent en réalité sous la forme $\frac{a}{b}$.

[26] « [...] *han comprat lo carrech de una nau. E lo primer pague del dit carrech la* $\frac{1}{2}$. *E lo segon lo* $\frac{1}{3}$. *E lo terç pague lo* $\frac{1}{4}$. *E venen lo dit carrech, e troben se en guany 357 lliures. Veiam que te de haver quascu segon la part que quascu ha pagat. Aquest es la sua regla, que perquant les parts son* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{4}$ *has de cercar un nombre on los dits trencats se troben entegrament. E trobar los has per la regla de*

– en posant $m_1 = 12p_1/q_1 = 6$, $m_2 = 12p_2/q_2 = 4$, $m_3 = 12p_3/q_3 = 3$, on est donc ramené au problème de compagnie $m_1 = 6$, $m_2 = 4$, $m_3 = 3$, $g = g_1 + g_2 + g_3 = 357$, $(m_1, m_2, m_3) \sim (g_1, g_2, g_3)$;

– on calcule la somme $m_1 + m_2 + m_3 = 13$, qui « montre le prix du navire » ;

– on applique la règle « tu multiplieras le gain par chacune des parts et tu diviseras par toutes ensemble », soit $g_k = (g \times m_k)/(\sum_1^3 m_i)$, pour $k = 1, 2, 3$.

On peut observer que la somme des parts, qui sont ici $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, n'est pas égale à 1. Les parts doivent se comprendre au sens des parts dans les questions d'héritages arabes, c'est-à-dire qu'elles indiquent seulement, comme dans les parties entières du problème précédent, les coefficients de proportionnalité que l'on attribue à chacun des associés dans la répartition du gain : les gains sont donc ici simplement proportionnels aux nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Le procédé de répartition des héritages dans l'Espagne musulmane a été décrit par J.A. Sánchez Pérez [1949, p. 186–230]. Cette répartition s'effectue, dit-il, selon le Coran et la législation complémentaire du rite du malékisme. D'après le Coran, des fractions sont attribuées à chaque héritier, selon sa parenté avec le défunt. Trois cas peuvent alors se présenter : ou bien la somme des fractions est plus petite que l'unité, ou bien elle lui est égale, ou bien elle lui est supérieure.

J.A. Sánchez Pérez précise la règle appliquée à chaque cas. Pour le dernier cas, il donne l'exemple où le mari a $\frac{1}{2}$, la mère a $\frac{1}{3}$ et la sœur a $\frac{1}{2}$. La jurisprudence musulmane, dit-il, applique *el aul*, qui consiste d'abord à réduire les fractions à un dénominateur commun, soit $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, puis à remplacer ce dénominateur commun par la somme des numérateurs, soit $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$. Les trois fractions obtenues, proportionnelles aux parts attribuées initialement, ont cette fois pour somme 1 et donnent la répartition de l'héritage. Le procédé ainsi décrit montre bien que seule, finalement, la proportionnalité est prise en compte, et que le total des parts fractionnaires initiales attribuées aux héritiers n'est pas nécessairement égal à 1.

---

reduir en 12, lo qual nombre nos mostrara lo preu de la nau. Ara pren per lo primer qui ha pagat lo $\frac{1}{2}$ *del carrech 6 que es la mitat de 12. Ara per lo segon qui ha pagat lo* $\frac{1}{3}$ *pren lo* $\frac{1}{3}$ *de 12, son 4. Ara per lo terç qui ha pagat lo* $\frac{1}{4}$ *del dit carrech, pren lo* $\frac{1}{4}$ *de 12 e son 3. Ara ajusta 6 e 4 e 3, e fan 13, los quals te seran partidor. E per quascuna de les parts multiplicaras lo guany e per totes ensemps, ço es per les 13, partiras.* »

Le procédé décrit par J.A. Sánchez Pérez montre comment se ramener à des fractions de somme 1.

Concernant le choix de l'exemple de Santcliment, nous pouvons faire les observations suivantes :

– c'est, dans cet ouvrage, l'unique exemple de compagnie simple ; en particulier, l'auteur ne propose aucun problème où les données sont des mises entières, contrairement à Ortega et Ventallol qui commencent ainsi ;

– l'exemple est, du point de vue du calcul numérique, assez compliqué ; le calcul des gains de chacun fait intervenir les nombres complexes[27], avec les résultats suivants : le gain du premier est de 164 livres 15 sous 4 deniers et $\frac{8}{13}$ denier, le gain du second est de 109 livres 16 sous 11 deniers $\frac{1}{13}$ denier, le gain du troisième est de 82 livres 7 sous 8 deniers et $\frac{4}{13}$ denier ; cet accent mis sur le calcul où interviennent des conversions dans les monnaies contraste avec l'exemple précédent d'Ortega, où tout est fait pour que les calculs soient aisés et les résultats soient des nombres entiers (la somme des parts divise en effet le gain total) ; cette remarque se généralise à l'ensemble de l'ouvrage.

Parts sous forme de pourcentages

« Ce sont trois [hommes] qui font une compagnie. Le premier doit avoir un gain à raison de 12 pour 100 et le second doit avoir à raison de 18 pour 100 et le troisième doit avoir à raison de 25 pour 100, et ils ont gagné 225 livres. Je demande ce que touche chacun et ce qu'a mis chacun. Tu feras de cette manière la présente question. Puisque tu ne sais pas ce qu'a mis chacun, pour le premier qui gagne 12 pour 100 tu poseras 12 et pour le second qui gagne 18 pour 100 tu poseras 18 et pour le troisième qui gagne 25 pour 100 tu poseras 25. Et tu diras qu'ils ont gagné 225. Pose comme tu vois sur la figure.

$$55 \text{ ------- } 225 \text{ ------ } \left|\begin{array}{l} 12 \\ 18 \\ 25 \end{array}\right. \text{ ------- } \left|\begin{array}{l} 49\ \frac{1}{11} \\ 73\ \frac{7}{11} \\ 10\ \frac{3}{11} \end{array}\right.$$

Et la figure posée, tu suivras la méthode des autres compagnies. Et tu trouveras pour le premier 49 livres et $\frac{5}{55}$ qui simplifié fait $\frac{1}{11}$. Et pour le second

[27] Selon l'usage, nous appelons *nombre complexe* toute suite de nombres entiers associés chacun à une unité de mesure, où la première unité est l'unité principale et les autres, quand il y en a, sont successivement des sous-multiples des précédentes, comme par exemple : 164 livres 15 sous 4 deniers.

tu trouveras qu'il doit avoir 73 livres et $\frac{35}{55}$, qui simplifié fait $\frac{7}{11}$. Et pour le troisième tu trouveras 102 livres et $\frac{15}{55}$, qui simplifié fait $\frac{3}{11}$.

Et pour savoir ce qu'a mis chacun, tu diras par la règle de trois : si 12 me donnent 100, que me donneront 49 $\frac{1}{11}$? Multiplie et divise et tu trouveras 409 livres et $\frac{1}{11}$ d'une livre, et tu diras que chacun a mis autant[28] » [Ventallol 1521, 63v, règle 6].

Les pourcentages $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont remplacés par les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$ qui jouent alors le rôle des mises. Là encore, l'idée sous-jacente est la substitution d'une proportion par une autre : $(m_1/100, m_2/100, m_3/100) \sim (m_1, m_2, m_3)$, donc on remplace la proportion $(m_1/100, m_2/100, m_3/100) \sim (g_1, g_2, g_3)$ par la proportion équivalente $(m_1, m_2, m_3) \sim (g_1, g_2, g_3)$. Ici encore, l'expression est différente du langage actuel, puisque dans cet exemple $m_1 + m_2 + m_3$ n'est pas égal à 100. Les pourcentages donnés, n'ayant pas un total de « 100 pour 100 », n'auraient pas de sens dans un énoncé d'aujourd'hui.

Notons que même si Ventallol ne choisit pas un exemple où les résultats sont entiers, comme l'a fait Ortega, il ne convertit pas non plus les fractions de livres en utilisant les sous-multiples de la livre (sous et deniers), comme l'a fait Santcliment. Le résultat sous forme d'entier et fraction (exprimé en livres) est accepté par l'auteur, même si le problème posé semble « concret ».

Dans ces premiers exemples, nous avons donc rencontré plusieurs expressions de l'énoncé de base : les valeurs proportionnelles aux gains à déterminer qui constituent, avec le gain total, les données du problème, sont soit les mises des différents associés, soit les parts qui leur sont attribuées exprimées par des entiers ou par des fractions (de somme pas forcément égales à 1) ou par des pourcentages (de somme pas forcément égales à 100). Quelles que soient ces différentes formes, la méthode

---

[28] « *Son 3 qui fan compenya. Lo primer deu haver del guany a rao de 12 per 100, y lo segon deu haver a rao de 18 per 100, y lo 3 deu haver a rao de 25 per 100, an gonyat 225 liures. Jous deman que toca a cascu y ha posat cascu. La present questio foras de aquesta manera. Puys no sabes que ha mes cascu, per lo primer qui guanya 12 per 100, posaras 12. Y per lo segon qui guanya 18 per 100 posaras 18. Per lo terç qui guanya 25 per 100 posaras 25. E diras que an gonyat 225. Posau com veus a la figura. [...] E posade la figura, seguiras lo modo de les altres compenyaes. E trobaras per lo primer 49 liures y* $\frac{5}{55}$*, que diminuys son* $\frac{1}{11}$*. E per lo segon trobaras que deu haver 73 liures y* $\frac{35}{55}$ *que diminuys son* $\frac{7}{11}$*. E per lo terc trobaras 102 liures y* $\frac{15}{55}$ *que diminuys son* $\frac{3}{11}$*. E per a saber que ha posat cascu, diras per la retgla de tres : si 12 me donen 100, quan donaran* $49\frac{1}{11}$ *? Moltiplica e perteix, e trobaras 409 liures y* $\frac{1}{11}$ *de una liura, y tant diras que ha posat cascu.* »

consiste à se ramener à des valeurs entières, proportionnelles aux valeurs initiales. Ensuite on applique la règle de compagnie qui, selon les auteurs, est soit une règle spécifique, soit l'application successive de plusieurs règles de trois.

Dans cette première approche ne traitant que des compagnies simples, les notions de mises et de parts semblent se confondre. Mais dans les compagnies avec le temps et les compagnies avec pactes, ces deux notions se distinguent, et peuvent être combinées dans des énoncés plus complexes. Nous ne traiterons pas ici ces sujets[29].

6. ARTIFICES DE CALCUL ET UTILISATION IMPLICITE DE PROPRIÉTÉS DES PROPORTIONS

« Trois hommes ont fait une compagnie pour un an. Le premier a mis une certaine quantité de ducats et le second a mis autant de ducats que le premier, et 60 ducats en plus, et le troisième a mis autant de ducats que le second et 10 ducats en plus. A la fin de l'année ils ont gagné 60 ducats, desquels il revient au premier un gain de 12 ducats. Je demande combien de ducats a mis chacun et combien de ducats il reviendra en gain à chacun des deux derniers.

Réponse.

Pour savoir combien a mis chacun, tu feras ainsi : puisque tu sais que pour le premier on ne sait combien il a mis, ni non plus pour le second si ce n'est qu'il a mis autant que le premier et 60 en plus. Alors prends les 60 pour le second. De même puisque tu sais que le troisième a mis autant que le second et 10 en plus, alors puisque le second a 60, le troisième aura 60 et dix en plus qui feront 70. Puisque tu sais maintenant qu'artificiellement le second a 60 et le troisième 70, laisse-les à part ajoutés en un qui feront 130. Après, puisqu'ils sont trois hommes et que tu sais qu'ils ont gagné 60 ducats et qu'il revient au premier un gain de 12 ducats, multiplie les 12 qu'il lui revient en gain par les trois hommes, et cela se montera à 36. Enlève ces 36 des 60 ducats qu'ils ont gagnés et il restera 24. Ensuite dis par la règle de trois, si 24 me donnent 130 qu'ont mis les deux, que me donneront les 12 qui reviennent en gain au premier ? Multiplie 130 par 12 et cela fera 1560. Divise-les par 24 et il viendra à la division 65, et tu diras que le premier a bien mis autant de ducats. Alors, puisque le second marchand doit avoir autant que le premier et 60 ducats en plus, tu diras qu'il a mis 125 ducats. De même le troisième a mis comme le second et 10 ducats en plus qui font 135 ducats.

Pour savoir quel gain revient au second, tu feras ainsi. Tu diras, si 65 ducats qu'a mis le premier ont rapporté 12 ducats, que rapporteront 125 qu'a mis le second ? Multiplie 12 par 125, et cela fera 500. Divise-les par 65 et il viendra

---

29 Ces notions sont abordées dans [Labarthe 2004].

à la division 23 ducats et un treizième de ducat. Et autant de gain revient au second.

Pour savoir quel gain revient au troisième marchand, tu diras par la règle de trois, si pour 65 ducats qu'a mis le premier lui revient un gain de 12 ducats, combien reviendra au troisième qui a mis 135 ducats ? Multiplie 12 par 135 et cela fera 1620. Divise-les par 65 et il viendra à la division 24 ducats et soixante soixante-cinquièmes de ducat qui simplifié fait 12 treizièmes de ducats, et autant de gain revient au troisième. Et tu feras ainsi les mêmes[30] [questions] » [Ortega 1512, fol. 132r, exemple 18].

Énoncé :

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 60; \quad g_1 = 12; \\ m_2 = m_1 + 60, \quad m_3 = m_2 + 10, \\ (m_1, m_2, m_3) \sim (g_1, g_2, g_3) \\ m_1 = ?, \ m_2 = ?, \ m_3 = ?. \end{cases}$$

Résolution :

– pour le second, on prend « artificiellement » 60, et pour le troisième, $60 + 10 = 70$;

– soit en tout, $60 + 70 = 130$;

[30] « *Tres hombres fizieron compania por un año. El primero puso cierta cantidad de ducados y el segundo puso tantos ducados como lo primero y 60 ducados mas, y el tercero puso tantos ducados como el segundo y 10 ducados mas. En fin del año ganaron 60 ducados de los quales viene de ganancia al primero 12 ducados. Demando que quantos ducados puso cada uno y quantos ducados y vendra a cada uno de los dos postreros de ganancia.*
Para saber quanto puso a cada uno, faras ansi : ya sabes que el primero no se sabe quanto puso ni tanpoco del segundo mas de quanto dice que el segundo tiene o puso tanto como el primero y 60 mas. Pues toma los 60 por el segundo. Ansi mesmo ya sabes que el tercero puso tanto como el segundo y 10 mas, pues por quanto tiene el segundo tiene 60 tambien el tercero tendra 60 y diez mas que seran 70. Pues que ya has sabido fingidamente que el segundo tiene 60 y el tercero 70, deja los estar aparte ayuntados en uno que seran 130. Despues por que son tres hombres y sabes que ganaron 60 ducados y que viene de ganancia al primero 12 ducados, multiplica los 12 que le viene de ganancia por los tres hombres y montaran 36, los quales 36 quita de los 60 ducados que ganaron, y restaron 24. Despues di por regla de tres : si 24 me dan 130 que puson dos, que me daran los 12 que viene de ganancia al primero ? Multiplica 130 por 12 y seran 1560. Parte los 24 y vendra a la particion 65, y tantos ducados diras verdaderamente que puso el primero. Pues por quanto el segundo mercader ha de aver tanto quanto el primero y 60 ducados mas, diras que puso 125 ducados. Y ansi mesmo puso el tercero tanto como el segundo y 10 ducados mas, que son 135 ducados.
Para saber quanto viene al segundo de ganancia, faras ansi : que diras, si 65 ducados que puso el primero ganaron 12 ducados, que ganaran 125 que puso el segundo ?Multiplica 12 con 125 y seran 500. Partelos por 65 y vendra a la particion 23 ducados e un trezabo de ducado, y tanto viene de ganancia al segundo.
Para saber quanto viene de ganancia al tercero mercader, diras por regla de tres, si 65 ducados que puso el primero le vienen de ganancia 12 ducados, quanto vendra al tercero mercader que puso 135 ducados ? Multiplica 12 por 135 y seran 1620. Partelos por los 65 y verna a la particion 24 ducados y sesenta sesenta y cinco abos de ducado que desminuydos son 12 trezabos de ducado, y tantos ducados viene de ganancia al tercero. Y ansi faras las semeiantes. »

- $\left(\sum_1^3 g_i\right) - 3g_1 = 60 - (3 \times 12) = 60 - 36 = 24$;
- $130 \times 12 = 1560$;
- donc $m_1 = \frac{1560}{24} = 65$;
- donc $m_2 = m_1 + 60 = 125$;
- donc $m_3 = m_2 + 10 = 135$;
- $(m_1, g_1) \sim (m_2, g_2)$ donc $g_2 = g_1 m_2 / m_1 = \frac{12\times125}{65} = 23\frac{1}{13}$;
- $(m_1, g_1) \sim (m_3, g_3)$ donc $g_3 = g_1 m_3 / m_1 = \frac{12\times135}{65} = 24\frac{12}{13}$;

La difficulté se trouve ici dans le calcul de m_1. Nous avons $m_3 = m_2 + 10 = m_1 + 70$, donc

$$m_1 + m_2 + m_3 = m_1 + (m_1 + 60) + (m_1 + 60 + 10) = 3m_1 + 130.$$

Le nombre 130 calculé correspond à $\left(\sum_1^3 m_i\right) - 3m_1$. La méthode pour déterminer $\left(\sum_1^3 m_i\right) - 3m_1$ peut ainsi s'expliquer : on prend arbitrairement pour m_1 la valeur $m'_1 = 0$, d'où l'on déduit $m'_2 = m'_1 + 60 = 60$ et $m'_3 = m'_2 + 10 = 70$, donc $\left(\sum_1^3 m'_i\right) - 3m'_1 = 130$.

Or si l'on appelle k la différence entre la vraie valeur m_1 et la fausse valeur m'_1, on a $m_1 = m'_1 + k$, donc

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} m_i\Big) - 3m_1 = \Big(\sum_{i=1}^{3} (m'_i + k)\Big) - 3(m'_1 + k) = \Big(\sum_{i=1}^{3} m'_i\Big) - 3m'_1.$$

Ce résultat est indépendant de la valeur arbitraire prise pour m'_1, d'où l'intérêt de prendre la valeur la plus simple $m'_1 = 0$, qui donne « artificiellement » 60 pour m'_2. Ce procédé, que l'on vient ici de décrire, est courant dans les arithmétiques contemporaines de cet ouvrage : parmi les principaux outils de résolution d'équations se trouvent les méthodes de fausses positions, permettant de trouver, à l'aide de valeurs arbitraires fausses, les bons résultats. Le procédé employé ici rappelle la méthode d'une fausse position.

L'algorithme ensuite utilisé par Ortega se résume alors dans la formule

$$m_1 = \frac{\left(\left(\sum_1^3 m_i\right) - 3m_1\right) g_1}{\left(\sum_1^3 g_i\right) - 3g_1}.$$

Cette formule exprime la proportionnalité :

$$\Big(\big(\sum_{i=1}^{3} g_i\big) - 3g_1, \big(\sum_{i=1}^{3} m_i\big) - 3m_1)\Big) \sim (g_1, m_1).$$

Mais le langage de la règle de trois ne permet pas de mettre en évidence la propriété des proportions ici utilisée de manière implicite. Aussi l'auteur n'a-t-il pas les moyens rhétoriques, par le seul outil de la règle de trois, d'expliquer son algorithme de résolution. Cela rend cette résolution, par cette méthode, bien difficile à comprendre pour les lecteurs de l'ouvrage, et explique peut-être pourquoi, pour un problème du même genre, le mathématicien italien Pacioli [1494, fol. 150v] opte pour la méthode algébrique[31] :

> « Deux [hommes] font une compagnie. Le premier met une quantité. Le second deux fois autant que lui plus 5, et ils gagnent 120 lires. Le premier touche 30 lires de gain. Je demande quelle est la mise de chacun.
>
> Pose que le premier met 1 chose. Le second met 2 choses plus 5. Somme-les ensemble, cela fait 3 choses plus 5, et c'est le diviseur. Et tu diras : si 3 choses plus 5 gagnent 120, que gagne 1 chose ? Il viendra à gagner 120 choses de 3 choses plus 5, et cela sera égal à 30, que tu sais qu'il touche. Opère et tu trouveras que la chose vaut 5 lires. Le second met 15 lires[32] » [Pacioli 1494, fol. 150v, exemple 15].

Énoncé :

$$\begin{cases} g_1 + g_2 = 120; \quad g_1 = 30; \\ m_2 = 2m_1 + 5; \\ (m_1, m_2) \sim (g_1, g_2); \\ m_1 = ?, \; m_2 = ?. \end{cases}$$

Résolution :

Nous appelons x l'inconnue, désignée dans le texte par *co*, abréviation de *cosa*, la chose.

– soit x l'inconnue m_1 ;

---

[31] Nous appelons ici algèbre toute méthode utilisant des opérations sur des inconnues précisément nommées, issue des méthodes utilisées par les mathématiciens arabes et décrite dans le livre d'algèbre d'al-Khwārizmī. Dans l'ouvrage de Pacioli, elle est étudiée dans le chapitre *de algebra e almuchabala, cioe de le regole e capitoli de la cosa* (d'algèbre et *almuchabala*, c'est-à-dire de la règle et chapitre de la chose). On peut aussi lire dans le *Liber abaci* de Léonard de Pise (1202) : « Dans la résolution de problèmes il y a une certaine règle appelée directe qui est utilisée par les Arabes, et la méthode de cette règle est très louable, car par elle beaucoup de problèmes sont résolus ; si tu veux utiliser cette méthode dans ce problème, alors pose que le second homme a une chose et 7 deniers que le premier homme lui demande, et comprends pour la chose une somme inconnue que tu veux trouver [...] » [Leonard de Pise 1857, p. 191, selon notre traduction].

[32] « *Di fan compagnia. El primo mise una quantita. El secondo doi tanto de lui piu 5 e si guadagnano 120 lires. Al primo tocco 30 lires de guadagno. Dimando che mise per uno. Poni che al primo metesse 1 cosa, el secondo mise 2 cosas piu 5. Summa insiemi, fa 3 cosas piu 5, e questo e partitore. E dirai se 3 cosas piu 5 guadagna 120, che guadagna 1 cosa ? Che virra a guadagnare 120 cosas esi de 3 cosas piu 5, e questo sira equale a 30, que sai che li tocco. Opera e troverai la cosa valer 5 lires, lo secondo mise 15 lires.* »

– alors $m_2 = 2x + 5$ et $m_1 + m_2 = 3x + 5$;

– on a la proportion (implicite) $(m_1 + m_2, g_1 + g_2) \sim (m_1, g_1)$, soit $(3x + 5, 120) \sim (x, g_1)$;

– d'où l'on déduit la règle de trois : si $3x + 5$ - - 120 - - x - - g_1 ? donc $g_1 = 120x/(3x + 5)$;

– par ailleurs $g_1 = 30$; on résout donc l'équation $120x/(3x + 5) = 30$ et on trouve $m_1 = x = 5$;

– donc $m_2 = 15$.

On voit ici l'intérêt, pour Pacioli, d'utiliser l'algèbre : désigner l'inconnue m_1 par un nom (la *chose*) lui permet de se servir de la règle de trois usuelle appliquée aux problèmes de compagnie, alors que la méthode arithmétique d'Ortega utilise implicitement une propriété peu immédiate des proportions. Le résultat de cette règle de trois, donné en fonction de cette inconnue, est alors posé égal à la valeur connue 30, et c'est par la résolution de cette équation, obtenue que l'on peut calculer m_1.

Mais aucune des trois arithmétiques des Espagnes n'aborde les méthodes algébriques, alors que pour d'autres questions l'influence des traités italiens (principalement celui de Pacioli) sur ceux d'Ortega et de Ventallol est manifeste : similitudes dans la façon de rédiger les énoncés, similitudes dans les méthodes de résolution, contrastant avec le traité de Santcliment. Des problèmes identiques (énoncé et résolution) peuvent être même trouvés dans les ouvrages de Pacioli et de Ventallol. En voici un exemple, pris dans le chapitre des compagnies :

> « Quatre [hommes] ont à diviser 100 florins. Le premier doit avoir le $\frac{1}{2}$ des 3 autres. Le second doit avoir le $\frac{1}{3}$ des trois autres. Le troisième doit avoir le $\frac{1}{4}$ des 3 autres. Le quatrième doit avoir le reste. Je demande combien touche chacun[33] » [Pacioli 1494, fol. 157r, exemple 74].

> « Ils sont quatre [hommes] qui font une compagnie, et ont gagné 100. Le premier doit avoir le $\frac{1}{2}$ des trois autres, le second doit avoir le $\frac{1}{3}$ des 3 autres,

Nous avons, comme dans toutes les transcriptions, résolu les abréviations. Mais elles sont dans le texte très nombreuses, avec en particulier : co. pour cosa, p. pour piu, p^{o} pour primo, etc.

[33] « *Quatro hano a partire fiorins 100. El primo ne die haver la* $\frac{1}{2}$ *degli altri 3. El secondo el* $\frac{1}{3}$ *degli altri 3. El terço die haver el* $\frac{1}{4}$ *degli altri 3. El quarto die haver l'avanço. Dimando che ne tocca per uno.* »

[le troisième doit avoir le $\frac{1}{4}$ des 3 autres] et le quatrième doit avoir le reste. Je demande combien touche chacun[34] » [Ventallol 1521, fol. 66v, règle 5].

Il semble qu'il y ait donc, chez Ortega et Ventallol, un parti pris d'écarter tout ce qui concerne la « règle de la chose », et ce parti pris se manifeste aussi dans le chapitre des compagnies.

7. LA RÈGLE DE COMPAGNIE COMME OUTIL MATHÉMATIQUE DE RÉSOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES

Les énoncés présentés maintenant montrent comment, pour la résolution de problèmes qui sont l'expression de certains systèmes linéaires d'équations, la règle de compagnie va être utilisée.

Le gain du premier est inconnu, le gain des autres est une fraction du gain du précédent marchand

« Ce sont trois [hommes] qui ont à partager 650 livres. On ne sait combien doit avoir le premier. Le second doit avoir les $\frac{2}{3}$ du premier. Le troisième doit avoir les $\frac{3}{4}$ du second. Je demande combien touche chacun.

Dans ce [calcul] et dans tous les autres tu dois poser un nombre à ton gré, tel que tu le voudras. Mais pour éviter les fractions pose un nombre dans lequel il y a le tiers et le quart, et ce nombre sera 12. Donc tu poseras pour le premier 12. Et pour le second pose les $\frac{2}{3}$ de 12 qui font 8. Et pour le troisième pose les $\frac{3}{4}$ de 8 qui font 6. Maintenant poursuis comme [si c'était] une compagnie simple et pose ces 3 nombres, c'est-à-dire 12 pour le premier, 8 pour le second, 6 pour le troisième. Et pose la figure comme tu le vois figuré ci-dessous, et fais les multiplications et les divisions, et tu trouveras pour le premier 300 livres et pour le second 200 livres et pour le troisième 150 livres. Et autant doit avoir chacun[35].

---

[34] « *Son 3 qui fan compenya, y an gonyat 100. Lo primer deu haver la $\frac{1}{2}$ dels altres tres. Lo segon deu haver lo $\frac{1}{3}$ dels altres 3. Y lo quart deu haver lo restant. Jous deman quant toca acascu.* » On peut noter que le problème de Ventallol a été énoncé sans beaucoup de soins : il manque en effet la part du troisième, mais il est facile de déduire de la résolution que celle-ci est $\frac{1}{4}$, tout comme celle du problème de Pacioli. Les résolutions sont en effet identiques chez les deux auteurs.

[35] « *Son 3 qui fan a partir 650 liures. Lo primer deu haver no se quant. Lo segon deu haver los $\frac{2}{3}$ del primer. E lo terc deu haver los $\frac{3}{4}$ del segon. Jous deman quant toca acascu. En aquesta y en totes les altres deus posar un nombre a ton plaer tal com volras. Enpero per fogir a trencats pose un nombre en que a ia terc y quart, lo qual nombre sera 12. E perco posaras per lo primer 12. E per lo segon posa los $\frac{2}{3}$ de 12 que son 8. E per lo terc posa los $\frac{3}{4}$ de 8 que son 6. Are segueix com de una compenya simpla e posa aquests 3 nombres, coes 12 per lo prima e 8 per lo segon e 6 per lo terc. E posa la figura com veus*

$$\text{si} \;\text{-------}\; 26 \;\text{-------}\; 650 \;\text{-------}\; \left| \begin{array}{l} 12 \;\text{-----}\; 300 \\ 8 \;\text{-----}\; 200 \\ 6 \;\text{-----}\; 160 \end{array} \right.$$

[Le tableau comporte une erreur : il faut lire 150 au lieu de 160.]

Et ainsi tu vois que le second a les deux tiers du premier et le troisième a les trois quarts du second et qu'entre tous ils ont 650 livres[36] » [Ventallol 1521, fol. 64v, règle 11].

Énoncé :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 650, \quad x_2 = \frac{2}{3}x_1, \quad x_3 = \frac{3}{4}x_2.$$

Résolution :

– on choisit une position arbitraire pour la première inconnue x_1 ; pour « éviter les fractions », ce nombre doit être un multiple des dénominateurs 3 et 4 des fractions, on prend donc $x_1' = 12$;

– on a donc $x_2' = \frac{2}{3}x_1' = 8$ et $x_3' = \frac{3}{4}x_2' = 6$ où le triplet (x_1', x_2', x_3') obtenu est proportionnel au triplet inconnu (x_1, x_2, x_3) ;

– on est alors ramené au problème de compagnie $x_1 + x_2 + x_3 = 650$, $(x_1, x_2, x_3) \sim (12, 8, 6)$;

– on résout alors par la méthode des compagnies : on « fait les multiplications et les divisions », et les trois règles de trois, figurées sous le texte, permettent de trouver les valeurs de x_1, x_2, x_3.

On peut observer, à l'occasion de ce premier problème « pseudo-concret », les différences entre résolution par la règle de compagnie et résolution par l'algèbre. Par l'algèbre, une résolution possible aurait été la méthode par substitution :

– puisque $x_2 = \frac{2}{3}x_1$ et $x_3 = \frac{3}{4}x_2$, alors $x_3 = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}x_2) = \frac{1}{2}x_1$;
– on remplace alors la première équation par $x_1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_1 = 650$;
– d'où l'on déduit x_1, puis x_2, puis x_3.

Le procédé de résolution algébrique que nous venons de décrire est assez différent du procédé utilisé par Ventallol : dans le procédé algébrique

baix afigurat, e fes les moltiplicacions e particions, e trobaras per lo primer 300 liures e per lo segon 200 liures e per lo terc 150 liures. Y tant deu haver cascu. »

36 « *E axi veus que lo segon ha los dos tercos del primer, e lo terc ha los tres quarts del segon, y entre tots tenen 650 liures.* »

on a utilisé comme inconnue principale la première inconnue pour pouvoir se ramener à la résolution d'une équation à une seule inconnue. On en a déduit ensuite les deux autres inconnues. Dans le procédé de Ventallol, on donne une valeur arbitraire à la première inconnue, d'où l'on déduit les deux autres valeurs, formant ainsi un triplet proportionnel aux solutions cherchées. À l'aide de ce triplet, on forme ainsi une compagnie fictive que l'on peut alors résoudre. L'artifice consistant à choisir à la place d'une valeur inconnue une valeur arbitraire, pour en déduire ensuite les vraies solutions, a déjà été souligné dans le paragraphe 6, ainsi que la façon de faire ce choix arbitraire (multiple commun des dénominateurs) de manière à simplifier les calculs et éviter les fractions.

Inconnues auxiliaires : où le moins doit être ajouté et le plus doit être enlevé

« Ce sont deux [hommes] qui ont à partager 100. Le premier doit avoir le $\frac{1}{2}$ moins 7 et le second doit avoir le $\frac{1}{3}$ plus 5. Je vous demande combien touche chacun.

Bien que la présente règle ne soit pas très utile, je veux te donner une règle générale qui est : quand certains devront se répartir quelque quantité et que l'un devra avoir une part moins quelque chose, le moins doit être ajouté à la somme qui est à partager, et quand il y a plus, le plus doit être enlevé de la somme qui est à partager, et cela quand tous ont plus ou tous ont moins. Mais quand l'un a plus et l'autre moins, tu enlèveras le plus petit du plus grand et ce qui restera sera de la nature du plus grand. Et si le plus grand est plus, il faudra enlever ce qui restera de la somme que l'on doit partager, et si le plus grand est moins, il faudra ajouter ce qui restera avec la somme que l'on doit partager. Et quand les parts seront faites celui qui doit avoir plus devra l'ajouter à sa part et celui qui devra avoir moins doit l'enlever de sa part[37].

Et en revenant à la règle ci-dessus tu enlèveras 5 plus de 7 moins, et il reste 2 moins, que tu ajouteras à la somme qu'il faut partager, c'est-à-dire aux 100, et cela fera 102. Et cela étant fait, cherche un nombre dans lequel se trouve la moitié et le tiers, et cela fera 6. Prends la moitié de 6 qui est 3, et tu poseras autant pour celui qui doit avoir la moitié. Et après prends le tiers de 6 qui est 2, et tu poseras autant pour celui qui doit avoir le tiers. Maintenant pose la figure

[37] « *Son 2 qui fan a partir 100. Lo primer deu haver la* $\frac{1}{2}$ *menys 7. E lo segon deu haver lo* $\frac{1}{3}$ *mes 5. Jous deman que toca acascu. Der quant la present retgla no es molt utilo fa te vul dar una retgla general y es aquesta : que quant se hauren apertit alguna quantitat y la hun aura haver alguna part manco alguna cosa, lo manco fa justar ab la suma ques deven partir ya so es quan tots tenen mes ho tots tenen manco. Enpero quant la hun te haver mes he l'altre manco, levaras lo menor del major, e lo que restera sera de la natura del major. E si lo major sera mes, lo que restera fara a levevar de la suma ques deven pertir, e si lo major sera manco, lo que restera fara ajustar ab la suma ques deven pertir. E com seran fetes les parts, lo qui deu haver mes fara ajustar ab la sua part, e lo qui haura aver manco levar ho as de la sua part.* »

et fais les multiplications et les divisions et tu trouveras que celui qui doit avoir la moitié doit avoir $61\frac{1}{5}$, enlève 7 qu'il doit avoir en moins et il reste $54\frac{1}{5}$. Et pour le second tu trouveras qu'il doit avoir $40\frac{4}{5}$, ajoute 5 qu'il doit avoir en plus et cela fera $45\frac{4}{5}$. Et tu feras ainsi pour toutes les [règles] semblables[38]

$$\text{si} \text{ ------ } 5 \text{ ------ } 102 \text{ ------- } \left| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right. \text{ ------- } \left| \begin{array}{l} 54\ \frac{1}{5} \\ 45\ \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

100 la preuve

[Nous avons corrigé un défaut du tableau imprimé, le 2 de 102 ayant été mal placé.]

[Ventallol 1521, fol. 65r, règle 13].

Ventallol donne d'abord une méthode générale regroupant plusieurs types d'énoncés, puis traite l'exemple suivant :

$$x_1 + x_2 = 100, \quad x_1 = \frac{1}{2}k - 7, \quad x_2 = \frac{1}{3}k + 5, \quad x_1 = ?,\ x_2 = ?.$$

On peut d'abord remarquer que les expressions « avoir le $\frac{1}{2}$ moins 7 » et « avoir le $\frac{1}{3}$ plus 5 » sont difficiles à transcrire par le symbolisme algébrique, quand on veut garder au plus près l'esprit du texte[39]. Nous avions transcrit précédemment l'expression « Le premier paie dudit chargement le $\frac{1}{2}$. Et le second le $\frac{1}{3}$. Et le troisième paie le $\frac{1}{4}$ » [Santcliment 1482, fol. 85r] par la proportion $(x_1, x_2, x_3) \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$. Pour ce nouvel énoncé de Ventallol, il nous faudrait écrire $(x_1 + 7, x_2 - 5) \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, si l'on souhaite garder les mêmes notations. Mais nous lui préférons

---

38 « *E tornant a la demunt dita retgla levaras 5 mes de 7 manco e restaren 2 manco, losquals ajustaras ab la suma que san apertit co es ab los 100, e seran 102. E aso fet, sercaun nombre en lo qual se tropia mitat e terc, lo qual sera 6. Pren la mitat de 6 que es 3, e tant posaras per aquel qui deu haver la mitat. E apres pren lo terc de 6 que es 2, e tant posaras per aquel qui deu haver lo terc. Ara posa la figura e fes les moltiplicacions e particions, e trobaras que lo qui te haver la mitat deu haver* $61\frac{1}{5}$. *Leven 7 que deu haver manco, restan 54. E per lo segon trobaras que deu haver* $40\frac{4}{5}$. *Ajustey 5 que deu haver mes, seran* $45\frac{4}{5}$. *E axi faras de totes les semblants.* »

39 Le parti pris d'exprimer algébriquement énoncés et résolutions permet d'éclairer ces textes et d'expliciter dans leur généralité les algorithmes utilisés. Cette méthode d'analyse a été très utile dans la comparaison des méthodes de résolution de plusieurs auteurs étudiés, et l'étude comparée de ces algorithmes a été le thème principal développé dans notre thèse intitulée *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes : une hiérarchie des problèmes au service des procédés de résolution* [Labarthe 2004].

$x_1 = \frac{1}{2}k - 7$, $x_2 = \frac{1}{3}k + 5$ qui semble plus proche de la formulation de Ventallol : cette transcription a toutefois l'inconvénient d'introduire un nombre k qui n'est pas considéré par l'auteur. Cet exemple montre la difficulté que nous pouvons rencontrer pour représenter ces énoncés par des équations utilisant le symbolisme de l'algèbre, et la part arbitraire du choix de ces transcriptions algébriques. Mais si la méthode de transcription par l'algèbre a des inconvénients, elle présente aussi un avantage certain : quels que soient les choix de représentation que nous faisons, l'interprétation de l'énoncé doit être mathématiquement correcte, et sa transcription par l'algèbre ôte toute ambiguïté : une interprétation erronée, comme il s'en rencontre pour ce genre d'énoncé, aurait pu nous conduire à traduire le problème de Ventallol par le système

$$x_1 + x_2 = S = 100, \quad x_1 = \frac{1}{2}S - 7, \quad x_2 = \frac{1}{3}S + 5,$$

système qui bien sûr n'a pas de solution. Dans des énoncés qui peuvent parfois prêter à confusion, c'est aussi la solution de l'auteur qui doit guider notre interprétation.

Avant de résoudre l'exemple, Ventallol propose d'abord de donner une méthode générale de résolution de tous les systèmes pouvant s'écrire sous la forme

$$x_1 + x_2 = S, \quad x_1 = \frac{p_1}{q_1}k \pm r_1, \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}k \pm r_2.$$

Les différents cas $(\pm r_1, \pm r_2)$ sont dus au fait que les nombres r_1 et r_2 sont nécessairement positifs, comme dans tous les énoncés de cette période.

Dans le premier cas, quand les deux personnes ont « une part moins quelque chose », autrement dit quand le système est de la forme

$$x_1 + x_2 = S, \quad x_1 = \frac{p_1}{q_1}k - r_1, \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}k - r_2,$$

alors « le manque doit être ajouté à la somme à partager », soit $S + (r_1 + r_2)$; cela revient à remplacer le système par

$$(1) \qquad \begin{cases} (x_1 + r_1) + (x_2 + r_2) = S + r_1 + r_2, \\ x_1 + r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}k, \quad x_2 + r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}k. \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, « quand il y a plus », autrement dit quand le système est de la forme

$$x_1 + x_2 = S, \quad x_1 = \frac{p_1}{q_1}k + r_1, \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}k + r_2,$$

« le plus doit être enlevé de la somme qui est à partager », soit $S-(r_1+r_2)$; cela revient à remplacer le système par

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} (x_1 - r_1) + (x_2 - r_2) = S - (r_1 + r_2), \\ x_1 - r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}k, \quad x_2 - r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}k. \end{cases}$$

Dans le troisième cas, « quand l'un a plus et l'autre moins », autrement dit quand le système est par exemple de la forme

$$x_1 + x_2 = S, \quad x_1 = \frac{p_1}{q_1}k + r_1, \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2}k - r_2,$$

« tu enlèveras le plus petit du plus grand et ce qui restera sera de la nature du plus grand », autrement dit : « Si le plus grand est plus », donc si $r_1 > r_2$, « il faudra enlever ce qui restera de la somme que l'on doit partager, soit $S - (r_1 - r_2)$; cela revient à remplacer le système par

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} (x_1 - r_1) + (x_2 + r_2) = S - (r_1 - r_2), \\ x_1 - r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}k, \quad x_2 + r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}k. \end{cases}$$

« Si le plus grand est moins », donc si $r_2 > r_1$ « il faudra ajouter ce qui restera avec la somme que l'on doit partager, soit $S+(r_2-r_1)$; cela revient à remplacer le système par

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} (x_1 - r_1) + (x_2 + r_2) = S + (r_2 - r_1), \\ x_1 - r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}k, \quad x_2 + r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}k. \end{cases}$$

Les systèmes (1), (2), (3) ou (4) sont tous de la forme

$$y_1 + y_2 = S', \quad (y_1, y_2) \sim \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right),$$

d'inconnues $y_i = x_i \pm r_i$ $(i = 1, 2)$. On est ainsi ramené à un problème de compagnie simple. La dernière étape consiste alors, après la détermination de y_1 et y_2 par la règle usuelle, à calculer x_1 et x_2 : « celui qui doit avoir plus devra l'ajouter avec sa part et celui qui devra avoir moins l'enlèvera de sa part », c'est-à-dire $x_i = y_i + r_i$ ou $x_i = y_i - r_i$ selon les cas.

Ventallol résout ensuite l'exemple par la méthode qu'il a d'abord décrite dans sa généralité : on a $r_1 = 7$ moins et $r_2 = 5$ plus. Comme $7 > 5$, on calcule donc (7 moins) – (5 plus) = (2 moins). Donc $S + 2 = 102$. Ces opérations reviennent à remplacer le système initial par le système

$$(x_1 + 7) + (x_2 - 5) = 102, \quad x_1 + 7 = \frac{1}{2}k, \quad x_2 - 5 = \frac{1}{3}k$$

ou la compagnie

$$(x_1 + 7) + (x_2 - 5) = 102, \quad (x_1 + 7, x_2 - 5) \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

D'où l'on déduit $x_1 + 7 = 61\frac{1}{5}$ et $x_2 - 5 = 40\frac{4}{5}$, puis $x_1 = 54\frac{1}{5}$ et $x_2 = 45\frac{4}{5}$.

On peut remarquer que Ventallol ne fait pas explicitement référence à la règle de compagnie. Mais sa démarche est clairement celle du retour à cette règle, puisqu'il précise : « Maintenant pose la figure et fais les multiplications et les divisions ». Cette « figure » qu'il désigne est en effet le schéma caractéristique de la règle de compagnie, et cette règle s'applique ici au calcul des nombres auxiliaires qui ne sont pas les inconnues directes du problème. Cet artifice est nécessaire, il correspond chez l'auteur à la recherche de la situation de proportionnalité qui permettra d'appliquer la règle élémentaire.

8. RÉINVESTISSEMENT DE LA RÈGLE DE COMPAGNIE DANS D'AUTRES THÈMES MATHÉMATIQUES

Nous venons de voir que la règle de compagnie était utilisée dans des problèmes relativement abstraits de somme à partager, selon certaines conditions. Mais on la retrouve aussi dans des questions autres que la compagnie marchande, en tant qu'outil mathématique de résolution : les problèmes de vitesse, de testament ou d'alliage sont les exemples les plus fréquemment rencontrés.

Problèmes de vitesse

Vitesse d'exécution d'un ouvrage en cumulant le travail de plusieurs ouvriers, vitesse d'un navire en cumulant le déploiement de plusieurs voiles, débit d'un réservoir d'eau lorsqu'on ouvre plusieurs vannes à la fois, vitesse de mouture d'une certaine quantité de blé lorsqu'on actionne conjointement les deux roues d'un moulin, tels sont les thèmes originaux que l'on rencontre dans l'utilisation d'une règle de compagnie « fictive ».

« Un maître tailleur de pierre a fait une fontaine de pierre pour contenir l'eau, et l'a faite avec cinq conduits de telle manière que si l'on ouvre le conduit le plus grand toute l'eau qui est dedans s'écoulera en un jour. Et si l'on ouvre le second, elle s'écoulera en deux jours. Et si l'on ouvre le troisième elle s'écoulera en trois jours. Et si l'on ouvre le quatrième, elle s'écoulera en quatre jours. Et si l'on ouvre le cinquième, elle s'écoulera en 6 jours. La fontaine fait 400 *cantaros*[40] d'eau. Je demande en combien de temps s'écoulera toute l'eau de la fontaine en ouvrant tous les cinq [conduits] ensemble. Note que pour le jour tu dois compter 24 heures, à savoir entre le jour et la nuit[41].

Tu feras ainsi : cherche un nombre où peuvent être contenus ces cinq nombres 1, 2, 3, 4, 6, et tu trouveras qu'un tel nombre est 12. Puis divise ces 12 par chacun des cinq nombres, et tu trouveras qu'en divisant 12 par un il vient 12, et en divisant 12 par 2, il vient 6, et en divisant par 3 il vient 4, et en divisant par 4 il vient 3, et en divisant par 6 il vient 2. Puis pose une règle de compagnies en disant : ce sont 5 hommes qui ont fait une compagnie. Le premier a mis 12 et le second 6 et le troisième 4 et le quatrième 3 et le cinquième 2. Et ils ont gagné 400 ducats. Je demande quel gain revient à chacun.

Tu feras ainsi : ajoute les cinq sommes qu'ils ont mises, c'est-à-dire 12, 6, 4, 3, 2 et cela fera 27, qui sera toujours le diviseur. Ensuite dis par la règle de trois : si 27 qu'ont mis les 5 hommes ont gagné 400 ducats, que reviendra à celui qui a mis 12, et que reviendra à celui a mis 6, et que reviendra à celui qui a mis 4, et que reviendra à celui qui a mis 3, et que reviendra à celui qui a mis 2 ? Multiplie et divise ces 5 règles de trois comme je te l'ai enseigné par la règle de trois, et tu trouveras qu'il revient au premier 177 et 21 vingt-septièmes d'entier, et tu trouveras qu'il revient au second 88 entiers et vingt-quatre vingt- septièmes d'entier, et tu trouveras qu'il revient au troisième 59 entiers et 7 vingt-septièmes d'entier, et tu trouveras qu'il revient au quatrième 44 entiers et 12 vingt-septièmes d'entier. Et tu trouveras qu'il revient au cinquième 29 entiers et 17 vingt-septièmes d'entier. D'où tu dois noter qu'autant de gain il revient à chacun, autant de *cantaros* d'eau couleront par chaque conduit, et cela en commençant ensemble et finissant ensemble, comme on le voit figuré[42].

---

40 Le mot *cantaro* désigne généralement une « cruche ». Mais dans le texte, il s'agit d'une unité de mesure de liquides. L'*arroba* était une unité de mesure des liquides qui dans certains pays s'appelait *cantara* ou *cantaro*, contenant habituellement huit *azumbres* (d'après le *Diccionari de Autoridades*, édition facsimilée de 1969, tome 1, p. 571).

41 « *Un maestro de picar piedra a fecho una fuente de piedra para tener agua, ya la fecho con cinco caños en tal manera que si abren el un caño que es el major, que toda el agua que estuviere dentro saldra en un dia. Y si abren el segundo saldra en dos dias. Y si abren el tercero saldra en tres dias. Y si abren el quarto, saldra en quatro dias. E si abren el quinto, saldra en 6 dias. La fuente faze 400 cantaros de agua. Demando que abriendo los todos cinco juntamente, en quanto tiempo saldra toda ellaga de la fuente.Nota que por el dia has de contar 24 oras, conviene a saber entre dia y noche.* »

42 « *Faras ansi : busca un nombre donde puedan caber todos estos 5 nombres 1, 2, 3, 4, 6, y hallaras que el tal nombre sera 12. Pues parte estos 12 por cada uno de los 5 nombres, y hallaras que partiendo 12 por uno verna a la particion 12, y partiendo por 2 vernan 6, y partiendo por 3 vernan 4, y*

1 ---- 12		$177\frac{21}{27}$		
2 ---- 6		$88\frac{24}{27}$		
3 ---- 4	---- 400 ----	$59\frac{7}{27}$		Toutes ces fractions font trois entiers
4 ---- 3		$44\frac{12}{27}$		
6 ---- 2		$29\frac{17}{27}$		
12 27		400		

Maintenant, puisque tu sais qu'en ouvrant ces 5 conduits ensemble combien de *cantaros* d'eau couleront par chaque conduit, il te reste à savoir en combien de temps, ce que tu feras par la règle de trois de cette manière : prends les *cantaros* d'eau qui coulent par n'importe lequel des conduits, et alors prends 44 et 12 vingt-septièmes, et de même convertis les 4 jours en heures, et ensuite tu diras : si 400 *cantaros* d'eau s'écoulent en 96 heures, par le quatrième conduit en combien de temps s'écouleront 44 *cantaros* et 12 vingt-septièmes de *cantara*? Multiplie et divise comme je te l'ai enseigné par la règle de trois pour les nombres fractionnaires, et tu trouveras qu'en ouvrant tous les conduits, l'eau commençant à s'écouler ensemble et finissant ensemble s'écoulera toute en 10 heures et deux tiers d'heure, et que dans ces 10 heures et deux tiers d'heures il s'écoulera autant de *cantaros* d'eau par chaque conduit comme on le voit figuré dans la règle de compagnies ci-dessous écrite[43] » [Ortega 1512, fol. 128v, exemple 11].

Énoncé :

$$t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3,\ t_4 = 4,\ t_5 = 6; \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 400.$$

On demande le temps t.

partiendo por 4 vernan 3, y partiendo por 6 vernan 2. Pues pona una regla de compañias, diziendo : son 5 hombres que fizieron compañia. El primero puso 12 y el segundo 6 y el tercero 4 y el quarto 3 y el quinto 6. Ganaron 400 ducados. Demando que verna a cada uno de ganancia. Faras ansi : ayunta todas las 5 sumas de lo que pusieron como son 12, 6, 4, 3, 2, y montaran 27, los quales seran siempre el partidor. Despues dy por regla de tres : sy 27 que pusieron los hombres an ganado 400 ducados, que verna al que puso 12 y que verna al que puso 6, y que verna al que puso 4, y que verna al que puso 3, y que verna al que puso 2 ? Multiplica y parte todas 5 reglas de tres como te ha enseñado por regla de 3 y hallaras que viene al primero 177 y 21 veinte siete abos de entero, y hallaras que viene al segundo 88 enteros y veinte y quatro 27 abos de un entero, y hallaras que viene al quarto 44 enteros y 12 veinte y siete abos de un entero, y hallaras que viene al quinto 29 enteros y 17 veinte y siete abos de entero. Donde has de notar que tanto quanto viene a cada uno de ganancia, tantos cantaros de agua saldra por cada un caño, escomencando justamente y acabado juntamente, como lo veis figura. »

43 « *Agora pues has sabido que abriendo todos 5 caños juntamente quantos cantaros saldra de agua por cada caño, resta te saber en quanto tiempo, lo qual faras por regla de tres en esta manera : que tomaras los cantaros de agua que salen por qualquiera de los caños y por el presente toma los 44 y 12 veinte y siete abos y ansi mesmo torna los 4 dias en oras. Y despues diras : si 400 cantaros de agua salen en 96 oras, por el quarto caño 44 cantaras y 12 veinte y siete abos de cantara en quanto tiempo saldran ? Multiplica y parte como te he enseñado por regla de tres por nombre roto, y allaras que saldran en 10 oras y dos tercios de ora. Y ansi responderas o sabras que abriendo todos los 5 caños, escomenzado a salir juntamente el agua y acabando juntamente que saldra toda el agua en 10 oras y dos tercios de ora y que en estas 10 oras y dos tercios de ora saldran tantos cantaros de agua por cada un caño, quantos veis figurados en la regla de compañias suso escrita.* »

Résolution :

– on cherche un multiple commun des nombres 1, 2, 3, 4, 6, soit 12 ;

– on divise 12 par chacun de ces nombres et on trouve 12, 6, 4, 3, 2 ;

– on fait une règle de compagnie

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = c = 400, \quad (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \sim (12, 6, 4, 3, 2);$$

– on en déduit $c_1 = 177\frac{21}{27}$, $c_2 = 88\frac{24}{27}$, $c_3 = 59\frac{7}{27}$, $c_4 = 44\frac{12}{27}$, $c_5 = 29\frac{17}{27}$;

– pour calculer t, on utilise la règle de trois c - - t_4 - - c_4 - - t ?, qui est l'expression de la proportionnalité $(c, t_4) \sim (c_4, t)$; donc

$$t = \frac{t_4 c_4}{c} = \frac{96 \times 44\frac{12}{27}}{400} = 10\frac{2}{3}\cdot$$

On utilise ici une compagnie fictive. La règle de compagnie met en évidence la proportionnalité

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \sim \left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3}, \frac{1}{t_4}, \frac{1}{t_5}\right).$$

Le quintuplet $(1/t_1, 1/t_2, 1/t_3, 1/t_4, 1/t_5)$ est en effet proportionnel au quintuplet $(c/t_1, c/t_2, c/t_3, c/t_4, c/t_5)$ formé de chacune des vitesses d'écoulement ou débits des conduits. On peut toutefois remarquer que si le seul but est le calcul de t, la méthode est longue et utilise le nombre c qu'il n'était pas utile de connaître. Ortega est probablement conscient de cela, comme le montre l'exemple qui suit :

> « Un chevalier demande à quatre orfèvres en combien de temps ils lui feront une chaîne d'or qui pèse 200 ducats. L'un répond qu'il la fera en 12 jours, le second répond qu'il la fera en 8 jours, le troisième répond qu'il le fera en 6 jours, le quatrième répond qu'il la fera en 4 jours. Le chevalier demande qu'ils y travaillent tous. Je demande en combien de temps sera faite la chaîne d'or si les quatre maîtres y travaillent tous.
>
> Réponse.
>
> Tu feras ainsi : cherche un nombre où puissent être contenus ces quatre nombres, 12, 8, 6, 4, et tu trouveras que le nombre le plus proche sera 24. Puis divise par 12 ces vingt-quatre et il viendra à la division 2. De même divise les 24 par 8 et il viendra à la division 3. De même divise les 24 par 6 et il viendra à la division 4. De même divise les 24 par 4 et il viendra à la division 6. Et ainsi pour celui qui a dit qu'il la ferait en 12 jours tu diras qu'il la fera deux fois en 24 jours. Et pour celui qui a dit qu'il la ferait en 8 jours, tu diras qu'il la fera 3 fois en 24 jours. Et pour celui qui a dit qu'il la ferait en 6 jours, tu diras qu'il la fera 4 fois en 24 jours. Et pour celui qui a dit qu'il la ferait en 4 jours, tu diras qu'il la fera 6 fois en 24 jours. Alors ajoute ces quatre nombres, c'est-à-dire 2, 3, 4, 6, et cela se montera à 15, qui est le diviseur. Et le résultat de la

division sera ces 24. Donc divise 24 par 15, et il viendra à la division un entier et trois cinquièmes d'entier. Et ainsi tu diras que les quatre maîtres feront la chaîne d'or en un jour et trois cinquièmes de jour qui font 7 heures et un peu moins d'un quart d'heure[44], comme on le voit figuré[45] » [Ortega 1512, fol. 129v, exemple 12].

Énoncé :

$$t_1 = 12,\ t_2 = 8,\ t_3 = 6,\ t_4 = 4; \qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p = 200.$$

On demande le temps t.

Résolution :

– on cherche un multiple commun des nombres 12, 8, 6, 4, soit 24 qui est « le plus proche » ;

– on divise 24 par chacun de ces nombres et on trouve 2, 3, 4, 6 ;

– on fait la somme de ces nombres $2 + 3 + 4 + 6 = 15$, qui est le diviseur ;

– le nombre 24 est le dividende ;

– on en déduit $t = \frac{24}{15} = 1\frac{3}{15}$.

---

[44] 1 jour = 12 heures. Le mot « jour » est ambigu. Il peut désigner le laps de temps moyen entre deux culminations du soleil (soit 24 heures), soit le laps de temps qui sépare le lever et le coucher du soleil (12 heures). Ce n'est qu'au XVIe siècle que l'heure est définie comme la 24e partie du temps séparant deux passages du soleil au zénith. Dans les problèmes rencontrés, le mot « jour » correspond généralement à la première division (24 heures), comme par exemple dans le problème du maître tailleur de pierre : l'eau s'écoulant « jour et nuit » sans interruption, Ortega utilise la conversion 1 jour = 24 heures. Il prend toutefois la peine de préciser alors : « Note que pour le jour tu dois compter 24 heures, à savoir le jour et la nuit ». Mais dans le problème des quatre orfèvres, un « jour » est égal à 12 heures, probablement parce qu'il s'agit ici de la journée de travail.

[45] « *Un cavallero pescuda a quatro argenteros que en quanto tiempo le faran una cadena de oro que pese 200 ducados. El uno responde que la fara en 12 dias, el segundo responde que la fara en 8 dias, el tercero responde que la fara en 6 dias, el quarto responde que la fara en 4 dias. El cavallero dice que travajen todos en ella. Demando en quanto tiempo sera fecha la cadena de oro, travajando todos quatro maestros en ella.*
Respuesta.
Faras ansi : busca un nombre donde puedan entrar estos quatro nombres 12, 8, 6, 4, y allaras que el mas cercano nombre sera 24. Pues parte por 12 estos veynte y quatro, y vendra a la particion 2. Ansi mesmo parte los 24 por 8, y vendra a la particion 3. Ansi mesmo parte los 24 por 6 y vendra a la particion 4. Ansi mesmo parte los 24 por 4 y vendra a la particion 6. Y ansi diras que el que dixo que la faria en 12 dias, diras que la fara dos vezes en 24 dias. Y el que dixo que la faria en 8 dias, diras que la fara 3 vezes en 24 dias. Y el que dixo que la faria en 6 dias, diras que la fara 4 vezes en 24 dias. Y el que dixo que la faria en 4 dias, diras que la fara en 24 dias 6 vezes. Pues ajunta todos quatro nombres como son 2, 3, 4, 6, y montaran 15, los quales son el partidor. Y la particion seran los 24. Pues parte 24 por 15, y vendra a la particio un entero y tres quintos de entero. Y ansi diras que los 4 maestros faran la cadena de oro en un dia y tres quintos de dia, que son 7 oras e un quarto de ora escasa, como lo veis figurado. »

Plus généralement, si m est un multiple commun quelconque de t_1, t_2, t_3, t_4, en posant $m = k_1 t_1$, $m = k_2 t_2$, $m = k_3 t_3$, $m = k_4 t_4$, la formule de calcul utilisée par Ortega est $t = m/(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$, où les nombres k_1, k_2, k_3, k_4 ont l'avantage d'être entiers. Mais c'est aussi

$$t = \frac{m}{\frac{m}{t_1} + \frac{m}{t_2} + \frac{m}{t_3} + \frac{m}{t_4}} = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4}}.$$

Cette nouvelle méthode, plus rapide que la précédente, n'utilise pas la donnée inutile de $p = 400$. Dans deux autres énoncés que nous ne donnons pas ici (navire et moulin), Ortega a encore varié les méthodes de résolution, montrant ainsi les différentes facettes de ce genre de problème.

Les alliages

Les questions d'alliages forment un chapitre à part et ne sont donc pas exposées dans le chapitre des compagnies. Mais la méthode des compagnies fictives, pour résoudre certaines équations, apparaît dans les résolutions des problèmes d'alliages, et ce sont ces méthodes que nous voulons étudier.

Généralement, le sujet abordé dans ce chapitre est l'alliage de plusieurs billons d'argent (ou d'or) à des lois différentes (ici la loi ou titre est, pour l'argent, le nombre $\ell = 12f/p$, où p désigne le poids du billon et f le poids de l'argent pur ou *fin* contenu dans le billon). Mais, par extension, on trouve aussi sous cette rubrique des questions de mélanges de produits du commerce de même genre mais de qualités différentes, comme par exemple différentes sortes d'épices à des prix différents, ou différentes céréales, ou différentes sortes de draps, etc.

Pour donner un exemple, dans un certain problème de Santcliment et sans entrer dans les détails d'un chapitre qui n'est pas notre sujet, on est amené au cours d'une question d'alliage à rechercher quatre nombres p_1, p_2, p_3, p_4 désignant les poids respectifs des quatre billons d'argent composant cet alliage et devant vérifier ce que nous pouvons traduire par le système

$$\text{(S)} \qquad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 30, \quad 3p_1 + 4p_2 = 2p_3 + 5p_4.$$

Le système linéaire possède ici quatre inconnues et seulement deux équations : il admet donc, dans la mesure où il est compatible, une infinité de solutions et entre dans la catégorie des systèmes linéaires indéterminés.

Dans le cadre des questions d'alliage, trouver une solution suffit à l'auteur, qui propose la méthode suivante :

> « On sommera 2 et 5 et 3 et 4 qui feront 14, et cela sera ton diviseur. Et tu suivras la règle générale des compagnies qui dit : multiplie par chacune et divise par tous ensemble. Exemple. Tu veux allier 30 marcs. Donc multiplie le premier qui est 2 par 30, cela fait 60. Divise par 14, il vient 4 et $\frac{2}{7}$. Également, pour le second multiplie 5 fois 30 qui valent 150. Divise par 14, il vient 10 et $\frac{5}{7}$. Également, multiplie par le troisième, 3 fois 30 valent 90. Divise par 14. Il en résulte 6 et $\frac{3}{7}$. Également, pour le quatrième multiplie 4 fois 30 qui font 120. Divise par 14, il vient 8 et $\frac{4}{7}$, et c'est fait. Également, pour voir si cela fait 30 juste : ajoute ces 4 parties, c'est-à-dire 4 et $\frac{2}{7}$, et 10 et $\frac{5}{7}$, et 6 et $\frac{3}{7}$, et 8 et $\frac{4}{7}$. Et tu trouveras que cela fait 30 marcs juste[46] » [Santcliment 1482, fol. 128r].

On peut remarquer que toute solution du système $p_1+p_2+p_3+p_4 = 30$, $3p_1 = 2p_3$, $4p_2 = 5p_4$ est solution du système (S). Une solution particulière de l'équation $3p_1 = 2p_3$ est le couple $(2, 3)$ et une solution particulière de l'équation $4p_2 = 5p_4$ est le couple $(5, 4)$. Le quadruplet $(2, 5, 3, 4)$ est donc une solution particulière de l'équation $3p_1 + 4p_2 = 2p_3 + 5p_4$, de même que tout quadruplet proportionnel à celui-ci. Il en résulte que l'unique solution du système $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 30$, $(p_1, p_2, p_3, p_4) \sim (2, 3, 5, 4)$ est une solution du système (S), et c'est cette solution que Santcliment va déterminer.

Ce dernier système est assimilable à une compagnie. Donc, dit Santcliment, « tu suivras la règle générale des compagnies qui dit : multiplie par chacun et divise par tous ensemble ». On calcule donc la somme $2 + 3 + 5 + 4 = 14$, qui est « le diviseur ». On applique alors la règle spécifique des compagnies, d'où l'on déduit

$$p_1 = \tfrac{2\times30}{14} = 4\tfrac{2}{7}, \quad p_2 = \tfrac{5\times30}{14} = 10\tfrac{5}{7},$$
$$p_3 = \tfrac{3\times30}{14} = 6\tfrac{3}{7}, \quad p_4 = \tfrac{4\times30}{14} = 8\tfrac{4}{7}.$$

46 « *Qui sumaran 2 e 5 e 3 e 4 qui seran 14, e aquests seran ton partidor. E seguiras la regla general de les companyes dient : que per quascu multipliques e per tots ensemps parteix. Exemple. Tu vols ligar 30 marchs. Perço multiplica lo primer qui es 2 per 30, fan 60. Parteix per 14 e velin 4 e* $\frac{2}{7}$. *Item per lo segon multiplica 5 vegades 30, valen 350* (sic), *parteix per 14, velin 10 e* $\frac{5}{7}$. *Item multiplica per lo terç, 3 vegades 30 valen 90, parteix per 14, ix ne 6 e* $\frac{3}{7}$. *Item per lo quart multiplica 4 vegades 30, fan 120. Parteix per 14, velin 8 e* $\frac{4}{7}$ *e es feta. Item per veure si son 30 justs, ajusta totes aquestes 4 partides, ço es 4 e* $\frac{2}{7}$, *e 10* $\frac{5}{7}$ *e, e 6 e* $\frac{3}{7}$, *e 8 e* $\frac{4}{7}$, *e trobaras que son 30 marchs justs.* »

Les testaments

Comme pour les alliages, les problèmes de testaments font en général l'objet d'un chapitre particulier. Certains de ces problèmes ne relèvent pas de la règle de compagnie. D'autres, tels celui-ci, relèvent de cette règle :

> « Un homme mande dans son testament que l'on donne après sa mort, aux trois fils qu'il a, 200 ducats d'or qu'ils doivent répartir de telle manière que le fils plus âgé ait la moitié, le moyen le sixième et le plus jeune le huitième, cela s'entend desdits 200 ducats. Je demande combien de ducats reviendront à chacun sans qu'aucun ne soit lésé.
>
> Tu feras ainsi : cherche un nombre où seront tous contenus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, et tu trouveras qu'ils contiennent tous dans 24. La moitié de 24 fait 12 et le sixième de 24 fait 4 et le huitième de 24 fait 3. Puis ajoute les trois nombres ci-dessus c'est-à-dire 12 et 4 et 3, et cela fera 19, que tu poses à la manière d'une règle de compagnies. Et ensuite tu diras par la règle de trois : si 19 ont gagné 200, que gagneront 12 et que gagneront 4 et que gagneront 3 ? Multiplie et divise comme je te l'ai enseigné par la règle de trois et tu trouveras qu'il revient à celui qui doit avoir la moitié un gain de 126 ducats et 3 réaux et 26 deniers. De même tu trouveras pour celui qui doit avoir la sixième partie 42 ducats et un réal 8 deniers et trois pougeoises. De même tu trouveras qu'il revient à celui qui doit avoir la huitième partie un gain de 31 ducats et 6 réaux et 31 deniers et une pougeoise, comme on le voit par l'exemple figuré[47] » [Ortega 1512, fol. 116r, exemple 16].

Les compagnies avec le temps

Les compagnies avec le temps sont elles-mêmes ramenées à des compagnies simples. On observe donc, dans ce genre de problème, deux compagnies successives :

– Une compagnie réelle (avec le temps), qui modélise une certaine situation concrète que peuvent rencontrer les marchands se regroupant pour former une compagnie marchande, lorsque les différents associés ne restent pas le même temps. Cette compagnie est celle qui est citée dans l'énoncé.

– Une compagnie fictive (simple) qui est posée dans la résolution, exprimant une certaine proportion.

> « Trois hommes ont fait une compagnie. Le premier a mis 20 ducats et demi dans la compagnie et est resté 2 ans et quatre mois dans la compagnie. Le

[47] « *Un hombre manda en su testamento que a tres fijos que tiene, que despues de su muerte que de 200 ducados de oro que les deja que los repartan en tal manera que el fijo mayor aya por mitad, y el mediano por sexto, y el mas menor por ochabo, esto se entiende de los dichos 200 ducados. Demando que*

second a mis 10 ducats et est resté trois ans et quinze jours dans la compagnie. Le troisième a mis 50 ducats et est resté un an et 5 jours dans la compagnie. Ils ont gagné 300 ducats. Je demande quel gain reviendra à chacun selon ce qu'il a mis et selon [le temps] qu'il est resté dans la compagnie. [...] Puisque tu as multiplié les ducats qu'a mis chacun par le temps qu'il est resté dans la compagnie, dresse ta règle de compagnies et tu diras que ce sont 3 hommes qui ont fait une compagnie. Le premier a mis 34400, et le second 19900 et le troisième 36500. Ils ont gagné 300 ducats. Je demande quel gain reviendra à chacun[48]. [...] » [Ortega 1512, fol. 124r, exemple 3].

Données et inconnues du problème sont ici :

$$\begin{cases} m_1 = 20\tfrac{1}{2}d, \quad t_1 = 2a \cdot 4m, \\ m_2 = 10d, \quad t_2 = 3a \cdot 15j, \\ m_3 = 50d, \quad t_3 = 1a \cdot 5j, \\ g = g_1 + g_2 + g_3 = 300d, \\ g_1 = ?,\ g_2 = ?,\ g_3 = ?. \end{cases}$$

En convertissant les mises en demi-deniers et les temps en jours (1 an = 12 mois et 1 mois = 30 jours), Ortega calcule

$$\begin{aligned} &m_1 = 41,\ t_1 = 840, \\ &m_2 = 20,\ t_2 = 995, \\ &m_3 = 100,\ t_3 = 365, \\ &g = g_1 + g_2 + g_3 = 300d, \\ &g_1 = ?,\ g_2 = ?,\ g_3 = ?. \end{aligned}$$

puis $m_1 t_1 = 41 \times 840 = 34440$, $m_2 t_2 = 20 \times 995 = 19900$, $m_3 t_3 = 100 \times 365 = 36500$.

---

quantos ducados vendra a cada uno sin que nenguno vaya enganado. Faras ansi : busca un numero o nombre donde puedan caber $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ *y allaras que cabran todos en 24. Por la mitad de 24 son 12 y el sexto de 24 son 4 y el 8 de 24 son 3. Pues ajunta estos tres nombres sobredichos como son 12 y 4 y 3, y seran 19, los quales pon en manera de regla de compañias. Y despues diras por regla de tres : si 19 an ganado 200, que ganaran 12, y que ganaran 4, y que ganaran 3 ? Multiplica y parte como te he enseñado por regla de tres, y allaras que viene de ganancia al que de averpor mitad 126 ducados y 3 reales y 26 dineros. Ansi mesmo fallaras al que de aver la sexta parte 42 ducados e un real 8 dineros y tres pujeses. Ansi mesmo fallaras que viene de ganancia al que ha de aver la ochava parte 31 ducados y 6 reales y 31 dineros e una pujesa, como lo veis por enxemplo figurado.* »

48 « *Tres hombres fizieron compañia. El primero puso en la compañia 20 ducados y medio, y estuvo en la compañia 2 años y quatro meses. El segundo puso 10 ducados y estuvo en la compañia tres años y quinze dias. El tercero puso 50 ducados y estuvo en la compañia ung año u 5 dias. Ganaron 300 ducados. Demando que quanto vendra a cada uno de ganancia segun lo que puso y segun lo que estuvo en la compañia. [...] Pues que ya has multiplicado los ducados que puso cada uno con el tiempo que estuvo en la compañia, arma tu regla de compañias y diras son 3 hombres que fizieron compañia. El primero puso 34440, y el segundo 19900, y el tercero 36500. Ganaron 300 ducados. Demando que vendra a cada uno de ganancia. [...]* »

Le fait que pour les produits m_it_i l'unité des mises soit le demi-denier alors que le gain reste exprimé en deniers n'est pas un obstacle pour Ortega, puisque seule la proportionnalité de ces trois valeurs compte, et l'utilisation des demi-deniers comme unité de conversion permet ici d'éviter l'utilisation des fractions. La méthode consiste maintenant à considérer une compagnie simple fictive, où les mises virtuelles sont maintenant ces trois nombres m_it_i, autrement dit à considérer le système

$$\begin{cases} m_1t_1 = 34400, \quad m_2t_2 = 19900, \quad m_3t_3 = 36500, \\ g = g_1 + g_2 + g_3 = 300, \quad (m_1t_1, m_2t_2, m_3t_3) \sim (g_1, g_2, g_3). \end{cases}$$

On résout cette compagnie simple fictive par le procédé habituel : calcul de la somme des mises virtuelles $\sum_1^3 m_it_i = 90840$, puis application des trois règles de trois. Il y a donc, dans ce problème et sa résolution, deux compagnies : la compagnie réelle avec le temps comme modèle d'une situation concrète, et la compagnie virtuelle simple comme outil de résolution de la compagnie réelle avec le temps.

9. LE CAS PLUS GÉNÉRAL DE LA DIVISION PROPORTIONNELLE

Les exemples que nous avons décrits montrent que la règle de compagnie dépasse le cadre de la modélisation mathématique d'une situation commerciale déterminée. Elle apparaît aussi comme un habillage, destiné à un public composé principalement de marchands, d'une situation mathématique abstraite qui est la division proportionnelle (ou partage proportionnel). L'historien des mathématiques Jens Høyrup souligne cette particularité à propos du *Tractatus algorismi* (1307) de Jacopo da Firenze quand il écrit : « *The role of the company as a functionally abstract representation of the mathematical structure of proportional division is therefore subject to no doubt* » [Høyrup 2000, p. 27]. Il appuie sa thèse sur trois exemples de l'ouvrage où, dit-il, l'on peut distinguer une compagnie réelle (« *a real compagny* ») d'une compagnie fictive (« *a fictive compagny* ») : un problème d'héritage, un problème d'alliage et un problème de compagnie avec le temps, où l'on se ramène chaque fois à une compagnie simple fictive.

Cette notion de compagnie fictive est présente dans un ouvrage encore plus ancien : on la trouve déjà dans le *Liber abaci* (1202) de Léonard de Pise, dans le chapitre des alliages :

> « Et si tu veux faire 20 livres de cet alliage, alors réduis ce problème à la méthode des compagnies dans laquelle le premier met 2, le second met 5, et le troisième met 9, et le bénéfice est 20 livres. Tu multiplieras donc 20 par 2, et 20 par 5, et tu divises chaque produit par 16, et donc tu trouves ce que tu dois mettre de la monnaie qui est avec 3, c'est-à-dire 2 livres, et 6 livres de la monnaie qui est avec 4. Le reste des 20 livres, c'est-à-dire 11 livres, tu le mets dans la monnaie qui est avec 6 que tu auras aussi si tu multiplies 20 par 9 et que tu divises par 16[49] » [Leonard de Pise 1857, p. 153].

Dans *Le partage proportionnel dans la tradition maghrébine*, Ezzaïm Laabid [2001] explique que le partage proportionnel était considéré comme un type de division spécifique. Celle-ci était désignée par le mot Al-Muhāsāt et avait un algorithme de résolution spécial. Cette technique était employée dans différents types de problèmes, comme les transactions commerciales ou les problèmes d'héritage ou les problèmes de testaments. Le mathématicien Ibn al-Bannā[50] décrit ainsi l'algorithme d'Al-Muhāsāt :

– « tu fais la somme des parties d'Al-Muhāsāt ;
– tu considères le résultat comme un dénominateur ;
– tu multiplies chaque partie d'Al-Muhāsāt par le dividende ;
– tu divises le résultat par le dénominateur ;
– il en résulte ce qui est demandé. »

Un parallèle exact peut être établi entre le vocabulaire du partage proportionnel et celui des compagnies : les « parties d'Al-Muhāsāt » correspondent aux mises (ou parts) $m_1, \ldots, m_n$ de la compagnie simple, que l'on somme pour obtenir le « dénominateur » correspondant au diviseur, et le « dividende » est le nombre à partager, correspondant au gain g de la compagnie. On fait donc la somme des parties $\sum_1^n m_i$, dont le résultat est le « dénominateur ». On multiplie chaque partie m_k par le « dividende » g, soit $m_k g$, que l'on divise par le « dénominateur » $\sum_1^n m_i$. Le

[49] « *Et si ex hoc consolamine libras 20 facere volueris, rediges hanc questionem ad modum societatis, in qua primus misit 2, secundus 5, tertius 9 ; et lucrati sunt libras 20. Multiplicabis ergo 20 per 2, et 20 per 5, et divides unamquamque multiplicationem per 16 ; et sic invenies te mittere debere de moneta que est [ad] 3, libras 2, et libras 6 de moneta, que est ad 4. Residuum quod est usque in 20, scilicet libras 11, mittes de moneta, que est ad 6 ; que etiam habebis, si multiplicaveris 20 per 9, et diviseris per 16.* »

[50] Le mathématicien maghrébin Ibn al-Bannā se rattache d'une certaine manière à la tradition d'al-Andalus. L'historien des mathématiques arabes A. Djebbar, parlant de la tradition des Anwā', précise : « Au XIII[e] siècle, Ibn al-Bannā (m. 1321) a écrit un livre à ce sujet, livre qui nous est d'ailleurs parvenu et dans lequel il a repris des éléments importants de la tradition de l'Espagne musulmane » [Djebbar 2001, p. 155].

résultat demandé est donc $m_k g/(\sum_1^n m_i)$. La règle d'Al-Muhāsāt est donc l'équivalent de l'algorithme spécifique de la règle de compagnie donnée par Santcliment et par Ventallol, bien que les termes et le cadre soient différents. Dans l'algorithme d'Al-Muhāsāt, le partage proportionnel ne se place pas dans le cadre marchand et il est décrit de manière abstraite. Le vocabulaire utilisé est scientifique.

La division proportionnelle apparaît sous une autre forme dans certains manuscrits des Espagnes, antérieurs aux ouvrages que nous avons décrits. Donnons deux exemples.

Le premier est issu du *Libro de Arismética que es dicho alguarismo* (« Livre d'arithmétique qui se nomme algorisme »), qui compose le *Manuscrit 46* conservé dans le fonds de la Real Colegiata de San Isidoro et est une copie du XVIe siècle d'un écrit datant de 1393 [Caunedo del Potro & Cordoba de la Llave 2000]. Le titre *Libro de Arismética que es dicho alguarismo* renseigne sur la nature des connaissances dispensées dans cet ouvrage : les premières traductions latines du livre *Kitāb al-hisābal-hindī* (Livre du calcul indien) [Allard 1992] du mathématicien arabe Al-Khwārizmī ont en effet été à l'origine de l'éclosion de ce genre nouveau de littérature mathématique où l'on a intégré, à côté de l'arithmétique traditionnelle d'inspiration grecque, des procédés de calcul basés sur la numération positionnelle décimale. Les titres de ces ouvrages incluent le plus souvent la forme latinisée *algorismus* du nom d'Al-Khwārizmī, qui selon les cas peut prendre la forme *algorismo* ou *algorisme*, ou encore ici la forme castillane *alguarismo*[51]. Le thème du partage proportionnel est présenté comme la cinquième espèce de sept espèces fondamentales : additionner, soustraire, multiplier, diviser, diviser quelque compte par moitié et 3o et 4o et 5o et par quelque autre partie[52], espèce qui commence par si tant

[51] La définition que donne Smith dans *Rara arithmetica*, est « *The algorisms (algorismi) : These were practical arithmetics, written to supply the mathematical knowledge, and using the Hindu-Arabic numerals* » [Smith 1970, p. 5]. Et dans *Abacus, Algorism, Abbacus*, Van Egmond écrit : « *The most important new methods was that which we call the 'Algorism'. It appeared in Islam soon after the Muslims made intellectual contact with India towards the end of the eighth century A.D. and eventually spread not only encompass all of Islam but the entire Mediterranean world. This was, of course, the method that made use of that are now called the Hindu-Arabic numerals, which had first appeared in India some four centuries earlier* » [Van Egmond 2001, p. 25].

[52] Nous avons ici gardé la graphie telle qu'elle est donnée dans l'édition moderne [Caunedo del Potro & Cordoba de la Llave 2000, p. 144]. Il faut comprendre « diviser quelque compte par moitié, et tiers et quart et cinquième, [...] ».

vaut tant[53], *espedaçados* et *menudos*[54]. La cinquième espèce ne s'appelle donc ni partage proportionnel ni règle de compagnie, mais est présentée comme une division particulière :

> « Ceci est la cinquième espèce qui est : diviser quelque compte par moitié ou 3^o ou 4^o ou cinquième ou sixième ou septième ou huitième ou par quelque autre partie qui soit[55] » [Caunedo del Potro & Cordoba de la Llave 2000, p. 144].

L'algorithme est ainsi décrit :

> « Si tu veux diviser 12 par moitié et 3^o et 4^o, sache que tu dois chercher un nombre dans lequel se trouve moitié et 3^o et 4^o, comme dans 12, et tu diras que le 3^o de 12 est 4 et le 4^o de 12 est 3 et la moitié de 12 est 6, et ensuite tu ajouteras ces parts que tu as obtenues en une, ce qui fait 13. Et tantôt ces parts que tu as obtenues en une font 13, et tantôt ces parts que l'on disait ne pas connaître étaient divisées en 12. Mais on ne doit pas faire ainsi, et pour que cela aille bien fais-le par cette règle qui est la bonne méthode, selon ce qu'ordonne la règle d'algorisme. Tu le feras donc de cette façon : tu mettras donc le 12 à sa part comme ici il est dit, et ensuite multiplie-le par le même 6 qui est la moitié, ce qui fait 72 que tu dois mettre à part. Et ensuite tu multiplieras le 4 par ce même 12, cela fera 48. Mets ce 48 à part et ensuite tu multiplieras le 3 qui est le quatrième [nombre] par ce même 12, cela fera 36, et mets ce 36 à part. D'autre part, sache que ces 13 sont le diviseur, et il viendra à la division $5\frac{7}{13}$, et cela vient à la moitié des 12. Et ensuite divise les 48 qui est le 3^o par ce même 13 qui est le diviseur, et il viendra à la division $3\frac{9}{13}$, et ce [résultat] est le tiers des 12. Et ensuite divise les trente-six qui est [le résultat] de la multiplication par le 3 qui était le 4^o par ces mêmes 12, et il viendra à la division $2\frac{10}{13}$, et c'est le 4^o de ces 12, et ainsi ces 12 sont bien divisés par moitié et 3^o et 4^o » [56].

---

[53] Il s'agit de la règle de trois, mais ce nom n'apparaît pas dans l'ouvrage.

[54] Ces deux mots désignent les fractions.

[55] « *Esta es la 5 espeçia que es partir qualquier cuenta por meytad e 3^o y 4^o e quinto e seysmo e seteno e otano e por otros qualesquier partes que sean.* »

[56] « *Sy quieres partir 12 por mitad y 3^o y 4^o, save que as de buscar número en que falles meytad y 3^o y 4^o, asy como en 12 que lo ay e dirás el 3^o de 12 son 4 y el 4 de 12 son 3 e la mitad de 12 son 6 e después ajuntarás estas partes que sacaste en uno, que son 13, e segund es por estas partes que sacaste en uno que son 13 e segund es por estas partes quien no lo supiese diría que heran partidos estos 12, pero non se debe asy faser, mas para yr bien, faslo por esta regla que es su arte derecha segund lo manda la regla del alguarismo, faraslo luego en esta guisa, pornás luego el 12 a su parte, asy como aquí dise e después multiplicarlo as con el 6 mismo, que es la mitad, que son 72 e ponerlo as aparte e después multiplicarás el 4 con este 12 mismo que serán 48, este 48 ponlo aparte e después multiplicarás el 3 que es el quarto con este 12 mismo e serán 36, este 36 ponlo aparte. Otrosy, sabe que estos 13, éste es el partidor e primeramente parte el 72 que multiplicaste primero por este 13 que es el partidor e verná a la parte* $5\frac{7}{13}$ *y esto viene a la mytad de los 12 y después parte los 48 que es el 3^o por este mismo 13, que es el partidor e verná a la parte* $3\frac{9}{13}$, *y éstos son el terçio de los 12 e después parte los treynta e seys que multiplicaste por el 3 que hera el 4^o por este 12 mismo e verná a la parte* $2\frac{10}{13}$ *y éstos son el 4^o destos 12, e asy que son bien partidos estos 12 por mitad e 3^o y 4^o.* »

La « bonne méthode », selon l'auteur, est celle « qu'ordonne la règle d'algorisme », et fait donc référence aux enseignements d'Al-Khwārizmī. Comme dans les exemples que nous avons déjà étudiés lorsque les parts sont données par des fractions, on détermine le triplet $(6, 4, 3)$ proportionnel au triplet donné $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$. La résolution s'effectue alors par l'algorithme du partage proportionnel, en effectuant d'abord la somme des trois nombres entiers, où le nombre 13 obtenu est « le diviseur ». On multiplie alors 6, 4 et 3 par 12, pour obtenir 72, 48, 36 que l'on divise successivement par 13, d'où l'on déduit les trois valeurs cherchées. La méthode est très proche de la règle d'Al-Muhāsāt, aucune référence à la règle de trois n'étant faite. La règle du partage proportionnel « diviser quelque compte [...] » et la règle de trois (règle du « si tant vaut tant [...] ») sont présentées indépendamment l'une de l'autre, d'autant plus que dans cet ouvrage la règle de trois (sixième *espèce*) est placée après le partage proportionnel (cinquième *espèce*), ne mettant pas en évidence (comme nous avons pu l'observer chez Ortega et Ventallol) que le partage proportionnel peut être effectué à l'aide de règles de trois successives. On note ici, comme dans les ouvrages arabes, le caractère abstrait de la règle, celle-ci n'étant pas énoncée comme le modèle de résolution d'une situation marchande : cette caractéristique est due à la structure même de l'ouvrage, où les sept espèces sont exposées au tout début et où les problèmes sont donnés en vrac après la description des sept espèces.

On peut aussi observer que la résolution de cette « division » est en deux parties : l'auteur montre d'abord l'absurdité d'un premier raisonnement où la somme des solutions trouvées fait 13 au lieu de 12 et il explique que l'erreur provient du fait que la somme des fractions n'est pas égale à 1 ; puis l'auteur donne la résolution correcte, selon ce « qu'ordonne l'algorisme ». Léonard de Pise, dans le *Liber abaci*, procède de la même façon dans un énoncé similaire, où il s'agit de diviser 60 sous en parties valant $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$[57]. Dans la première méthode (erronée) qu'il propose il obtient des parts dont la somme fait 57 au lieu de 60. Il détaille alors dans un deuxième temps la bonne méthode, montrant que l'erreur provenait, là encore, du fait que la somme des fractions n'est pas égale à 1. Puis Léonard de Pise donne un deuxième exemple numérique, où

[57] Folio 142–143 : « *Quattuor homines fuerunt, ex-quibus [...] Verbi gratia.* »

la somme à partager est toujours 60 et où les parts sont maintenant $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$: c'est le même exemple numérique que celui de l'ouvrage castillan. Ce genre d'explications un peu embarrassées concernant la somme des fractions, de la part des deux auteurs, montre qu'il n'était peut-être pas évident, pour ces mathématiciens, de concevoir que le partage proportionnel pouvait être donné sous forme de fractions dont la somme était différente de 1, et que les auteurs se sentaient obligés de s'expliquer sur les erreurs fréquemment commises à propos de ce type de problème. On trouve d'ailleurs, dans certains ouvrages de l'époque, des erreurs manifestes dues à cette formulation ambiguë de la question du partage proportionnel.

Un autre exemple où l'on retrouve la méthode du *Libro de Arismética que es dicho alguarismo* décrite presque à l'identique est issu d'un manuel catalan à l'usage des marchands datant d'environ 1390, dont le titre est *Libre de conexenses de spícies, e de drogues e de avissaments de pessos, canes e massures de diverses terres* (« Livre pour la connaissance des épices et des drogues et pour l'information des poids, cannes[58] et mesures des diverses contrées »). Le paragraphe est intitulé *Pertir C sous per maytat, terç e quart* (« diviser cinq sous par moitié, tiers et quart ») [Gual Camarena 1981, p. 146]. Comme 5 sous valent 60 deniers, l'exemple numérique est exactement le même que celui du manuscrit castillan, et c'est aussi le deuxième exemple de Léonard de Pise. La difficulté pour les commentateurs de comprendre cette division selon des parts de somme non égale à un persiste encore aujourd'hui, puisque Gual Camarena écrit en note de texte : « *No comprendemos estos complicados calculos para secar la mitad, tercio y cuarto de 5 sueldos* » (Nous ne comprenons pas ces calculs compliqués pour prendre la moitié, le tiers et le quart de 5 sous), et qu'il termine en proposant lui-même la solution erronée de somme 65 au lieu de 60, méthode contre laquelle Léonard de Pise avait déjà mis en garde ses lecteurs huit siècles auparavant !

10. LE SUPPORT THÉORIQUE DE LA DIVISION PROPORTIONNELLE

La règle de compagnie est, si l'on peut dire, le modèle particulier concret de la règle d'Al-Muhāsāt décrite dans les ouvrages arabes. Mais

---

[58] La canne est une unité de longueur.

les auteurs de ces ouvrages ont eux-mêmes puisé dans les mathématiques grecques et leurs écrits sur les proportions pour justifier l'algorithme du partage proportionnel. Le lien entre la règle d'Al-Muhāsāt et la proportion *ex aequali* décrite dans les *Éléments* d'Euclide est établi par plusieurs auteurs maghrébins, comme le souligne Ezzaïm Laabid [2001, p. 319]. En particulier, E. Laabid rapporte les trois passages suivants, extraits du *Rafᶜ al-hijāb* d'Ibn al-Bannā :

> 1) « Quant à la division par partage proportionnel, elle fait partie du chapitre des proportions [...] car le rapport de chacune des parties d'Al-Muhāsāt à leur somme est comme le rapport de chacune des parties du dividende au dividende, et le nombre des parties d'Al-Muhāsāt est égal au nombre des parties du dividende. »
>
> 2) « Quant à la proportion *ex aequali*, elle est semblable à celle utilisée dans le partage proportionnel, car le nombre des parties d'Al-Muhāsāt est égal au nombre de parties du dividende. Et deux nombres des parties d'Al-Muhāsāt sont dans le même rapport que leurs homologues dans les parties du dividende. C'est une proportion [d'égalité] ordonnée. »
>
> 3) « [On a] une proportion *ex aequali* lorsqu'on a plusieurs nombres et d'autres nombres égaux en nombre aux premiers de sorte que deux nombres des premiers et deux nombres des seconds sont proportionnels. Si la proportionnalité a lieu en respectant l'ordre [des termes] la proportion est dite ordonnée, [mais] si l'ordre n'est pas respecté, elle est dite perturbée. »

E. Laabid fait le rapprochement entre ces différents écrits d'Ibn al-Bannā et la définition de la proportion *ex aequali* telle qu'elle est donnée dans les *Éléments* d'Euclide et dont il donne en annexe la traduction de Bernard Vitrac [Laabid 2001, p. 326] et [Vitrac 1994, p. 52] :

> « Il y a rapport à égalité de rang quand, étant [données] plusieurs grandeurs et d'autres qui leur soient égales en multitude, lesquelles prises deux par deux soient dans le même rapport, comme la première est relativement à la dernière dans les premières grandeurs, ainsi est la première relativement à la dernière dans les deuxièmes grandeurs ; ou, autrement : quand on prend les extrêmes avec mise à l'écart des moyennes. »

Nous pouvons ainsi formaliser la définition d'Euclide : on appelle proportion à égalité de rang (en latin : *proportion ex aequali*) deux suites finies de grandeurs $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ayant le même nombre de termes (« égales en multitude ») telles que pour tous i, j où $1 \leq i < j \leq n$ les couples (a_i, a_j) et (b_i, b_j) soient dans le même rapport. Avec nos notations, nous avons $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ si, et seulement si, $(a_i, a_j) \sim (b_i, b_j)$ pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$.

Dans le cas de la division par partage proportionnel, Ibn al-Bannā dit dans l'énoncé 2) cité par E. Laabid que « deux nombres des parties d'Al-Muhāsāt sont dans le même rapport que leurs homologues dans les parties du dividende ». Nous pouvons ainsi formaliser ce propos : en désignant par $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la suite des parties d'Al-Muhāsāt et par $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ la suite des parties du dividende, pour tous i, j où i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, nous avons $(a_i, a_j) \sim (b_i, b_j)$. Même si la terminologie de la proportion *ex aequali* et celle du partage proportionnel sont distinctes, le fondement mathématique est le même et c'est ce qu'Ibn al-Bannā exprime en disant que la proportion *ex aequali* est « semblable à celle utilisée dans le partage proportionnel ». Il en résulte donc, selon l'énoncé 1) d'Ibn al-Bannā cité par E. Laabid, que « le rapport de chacune des parties d'Al-Muhāsāt à leur somme est comme le rapport de chacune des parties du dividende au diviseur », autrement dit que $\left(a_k, \sum_1^n a_i\right) \sim \left(b_k, \sum_1^n b_i\right)$. On déduit facilement de cette dernière proportion l'algorithme du partage proportionnel, que nous avons représenté par la formule $b_k = (a_k \sum_1^n b_i)/(\sum_1^n a_i)$.

Ibn al-Bannā, pour décrire la division d'Al-Muhāsāt, s'est donc appuyé sur la proportion *ex aequali* grecque telle qu'on peut la trouver dans les écrits d'Euclide. Ce lien entre l'algorithme du partage proportionnel et la proportion *ex aequali* ne se retrouve pas dans les arithmétiques de notre étude à propos de la règle de compagnie : celle-ci n'est présentée que comme un algorithme d'abord spécifique au partage des bénéfices d'une compagnie marchande, pour être ensuite étendu à un domaine d'application plus large.

11. CONCLUSION

Caractéristiques communes des chapitres des compagnies

Nous avons dégagé quelques caractéristiques générales sur les méthodes de résolution utilisées dans le chapitre des compagnies de ces trois ouvrages ibériques. Ces caractéristiques ne sont pas spécifiques de ces trois arithmétiques et peuvent s'étendre au « genre » d'arithmétiques que nous avons précisé dans le paragraphe II :

– Le problème de base (compagnie simple) est celui du partage des bénéfices ou pertes d'une compagnie marchande entre les différents investisseurs, proportionnellement à des nombres respectivement attribués à chacun des associés, ces nombres pouvant désigner les mises respectives des associés, ou bien des « parts » entières ou fractionnaires attribuées à ces associés ; ces parts ou mises indiquent la proportionnalité et, dans le cas des parts fractionnaires, il n'est pas nécessaire que leur somme soit égale à 1 ; il s'agit, dans ces premiers exemples, d'une modélisation mathématique d'un problème marchand concret.

– Dans un deuxième temps, la règle marchande de compagnie simple sert de support linguistique pour résoudre des problèmes variés que l'on peut plus généralement appeler de partage proportionnel, thème fréquemment rencontré dans les ouvrages arabes ; la compagnie « réelle » se distingue alors de la compagnie « fictive » dans les expressions employées par les auteurs : pour la compagnie réelle, les énoncés disent par exemple « trois marchands font une compagnie », alors que la compagnie fictive, qui n'intervient que dans les résolutions, est annoncée par les auteurs par des expressions telles que « dresse une règle de compagnie » ou « pose une règle de compagnie » ou « fais comme [la règle] d'une compagnie simple », ou encore « pose la figure et fais les multiplications et les divisions ».

– La justification théorique de la règle de compagnie n'est pas développée dans les ouvrages de notre étude, mais la règle correspondante d'Al-Muhāsāt est parfois expliquée dans les ouvrages arabes par la référence à la notion grecque de proportion *ex-aequali*.

– La méthode générale de résolution des problèmes consiste à se ramener au cadre mathématique établi par la règle pratique des compagnies simples. On peut à ce sujet penser à ce que dit E. Laabid [2003, p. 111], à propos des mathématiques arabes : « La démarche algébrique consiste à ramener le problème étudié en un modèle canonique préétabli et puis à appliquer à ce dernier un algorithme standard ». Si nous nous accordons sur cette définition posée par E. Laabid, nous pouvons alors considérer que les méthodes mises en évidence dans les ouvrages étudiés procèdent d'une démarche algébrique, consciente ou non.

– Pour se ramener à ce cadre, les résolutions font parfois appel à des artifices de calcul : fausses valeurs arbitrairement prises pour en déduire le bon résultat ou utilisation d'inconnues auxiliaires montrent que les mécanismes de résolution des équations sont basés sur des méthodes arithmétiques ayant pour fondement essentiel la règle de trois et son prolongement que constitue la règle de compagnie. Ces artifices se retrouvent dans d'autres chapitres : on peut par exemple rapprocher la méthode qui consiste à prendre à la place d'une inconnue une fausse valeur des méthodes dites de « fausses positions », exposées dans d'autres chapitres de ces ouvrages.

– Les règles de trois et règles de compagnie appliquées dans les résolutions sont justifiables par des propriétés parfois peu immédiates des proportions, mais ces propriétés ne figurent pas dans les ouvrages : elles sont toutefois pour nous identifiables par la forme de la règle de trois utilisée ; ces propriétés des proportions apparaissent donc de manière implicite dans les algorithmes utilisés.

– La règle de compagnie elle-même se justifie par une propriété importante des proportions, qui n'est pas clairement explicitée mais est ainsi suggérée par Ventallol : « On doit partager le gain selon les mises de chacun, et qui met la moitié de tout le capital doit retirer la moitié de tout le gain ».

– Les énoncés et leurs solutions montrent donc des connaissances sous-jacentes des proportions, non explicitées dans ces arithmétiques, tant du point de vue des énoncés (hypothèses implicites) que du point de vue des algorithmes de résolution (utilisation de propriétés implicites) ; la richesse des problèmes résolus démontre chez les utilisateurs de telles méthodes une habileté certaine dans le maniement des questions de proportionnalité, même si ces questions ne sont jamais exprimées de manière théorique.

– Les problèmes ne sont pas exposés en vrac, comme dans les arithmétiques plus anciennes (comme par exemple dans le manuscrit castillan *El arte del alguarismo*), mais ils sont classés de manière à permettre une construction relativement ordonnée du savoir ; on trouve là une caractéristique du modèle d'exposition mathématique que constitue le *Liber abaci* de Léonard de Pise. Cet ouvrage contient déjà, en particulier, la méthode qui consiste à se ramener à une compagnie simple pour résoudre les questions d'alliage [Sigler 2002, p. 244–245]. Cette méthode d'exposition est générale : c'est un procédé qui se retrouve dans tous les chapitres du *Liber abaci*.

– L'habillage des questions de partage proportionnel par la modélisation d'une compagnie financière n'a pas toujours été utilisé, comme le montrent le manuscrit castillan et le manuel de commerce catalan du XIV^e siècle déjà cités, où l'algorithme est présenté comme une division particulière, comme dans les écrits arabes.

Le chapitre des compagnies apparaît donc, dans ces trois ouvrages, comme le modèle d'une forme de pédagogie où les mathématiques se montrent par les exemples au lieu de se démontrer. Les problèmes, présentés dans un ordre réfléchi et progressif, sont comme des scénettes destinées à illustrer les procédés de résolution et à pallier les carences d'un vocabulaire scientifique très réduit. Comme nous l'avons dit en introduction, l'habillage concret du partage proportionnel sous la forme de compagnie financière se révèle donc comme un artifice pédagogique adapté au public visé : le passage de la « compagnie réelle » à la « compagnie fictive » se fait naturellement et la séparation entre « problèmes concrets » et « problèmes pseudo-concrets » reste floue.

Traits particuliers de la règle de compagnie

Nous avons relevé, à l'aide des exemples donnés, quelques différences dans la résolution de la compagnie simple.

Pour Santcliment, la règle de compagnie est un algorithme spécifique qui se distingue de la règle de trois. Cet algorithme a un énoncé propre, posé dès le début du chapitre. Dans chaque résolution de problème, c'est cet algorithme spécifique que l'on applique, en le citant : « Et nous ferons cela selon la règle générale des compagnies qui s'énonce : multiplie par chacune, divise par toutes ensemble[59] ». Aucun schéma de règle de compagnie n'accompagne la résolution.

Pour Ortega, il n'y a pas d'algorithme spécifique de règle de compagnie, la résolution se fait par application de plusieurs règles de trois successives : « Puis tu diras par la règle de trois : si 100 ducats qu'ont mis les 4 hommes ont gagné 300 ducats, quel gain reviendra au premier qui

[59] « *E aço farem segons la regla general de les companyes ques diu : per quascuna multiplica, per totes ensemps parteix* » [Santcliment 1482, fol. 89r].

a mis 20 ducats ? Et si 100 ont gagné 300, quel gain reviendra à celui qui a mis 12 ? [...][60] ». La résolution s'accompagne d'un schéma de la forme suivante, où la somme des résultats trouvés dans la colonne de droite, $\sum_1^n g_i$, doit coïncider avec le gain g disposé au centre :

$$
\begin{array}{c|c c c|c}
 & m_1 & & & g_1 \\
 & m_2 & & & g_2 \\
n & \vdots & \text{------}\ g\ \text{-------} & & \vdots \\
 & m_n & & & g_n \\
\cline{2-2}\cline{5-5}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\displaystyle\sum_1^n m_i} & \multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\displaystyle\sum_1^n g_i}
\end{array}
$$

Une vérification du calcul est incluse dans le schéma. L'algorithme spécifique n'est jamais cité, ni en introduction, ni dans les résolutions.

Pour Ventallol, un compromis entre les deux positions précédentes peut être observé. Ventallol présente en effet, dans son introduction, l'algorithme spécifique de la règle de compagnie, mais dans le premier exemple il donne les deux méthodes de résolution, appliquant d'abord la règle spécifique, puis présentant un schéma de résolution. Il met alors en évidence la règle de trois à partir du schéma de résolution. Ce schéma se présente ainsi :

$$
\text{si ------} \sum_1^n m_i \text{ ------ } g \text{ ------ }
\left|\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{array}\right. \text{ ------- }
\left|\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{array}\right.
$$

Il est, dans sa forme, légèrement différent de celui d'Ortega : l'ordre des éléments de chaque règle de trois y est ici respecté. Cet ordre permet de faire une lecture du schéma de Ventallol de la manière suivante : si la somme des mises $\sum_1^n m_i$ donne ce gain total g, alors cette mise individuelle m_k rapportera ce gain particulier g_k. Le lien entre l'algorithme spécifique des compagnies et la règle de trois est ainsi clairement établi. Dans la pratique des problèmes, Ventallol répète ce schéma, en énonçant de manière rituelle cette directive : « Et pose la figure comme tu le vois figuré ci-dessous, et fais les multiplications et les divisions[61]. »

[60] Extrait déjà cité, fol. 109v, exemple 1.

[61] Extrait déjà cité, fol. 64v, règle 11.

Ces différences observées semblent être le signe d'une certaine évolution : si dans le chapitre des compagnies, pour Santcliment l'algorithme standard est la règle de compagnie, cette règle n'apparaît plus nécessaire à Ortega, qui lui préfère l'algorithme standard de la règle de trois, d'usage plus général. Et si Ventallol rappelle l'algorithme de la règle de compagnie, c'est essentiellement pour montrer le lien avec la règle de trois qu'il utilise ensuite systématiquement sous forme de schéma à branches multiples. Cette évolution que l'on remarque ici localement peut être étendue à d'autres arithmétiques de l'Europe méditerranéenne, où l'on peut noter une disparition progressive de l'algorithme spécifique : celui-ci est très présent dans les premiers écrits comme dans le *Tractatus algorismi* de Jacopo da Firenze (1307, toscan), le *Manuscrit 46* de la Real Colegiata de San Isidoro de León, le manuel de commerce catalan du XIV^e^ siècle *Libre de conexenses de spícies, e de drogues e de avissaments de pessos, canes e massures de diverses terres* ou encore le *Manuscrit de Pamiers* (environ 1430, occitan) ; dans les ouvrages ultérieurs cet algorithme spécifique est parfois cité en introduction mais n'est pas utilisé dans la pratique où il est remplacé par la règle de trois, et il finit par disparaître complètement. Si les Italiens de la fin du XV^e^ siècle semblent avoir abandonné cette règle spécifique qu'ils ne citent même pas (*Arte de labbacho* dit « Arithmétique de Trévise », *Nobel opera de aritmeticha* de Borghi, *Summa de arithmetica, geometria, proportionalita* de Pacioli), il faut noter qu'elle est encore utilisée à l'époque de Santcliment dans le Maghreb sous la forme du « partage proportionnel », comme le montre l'étude de E. Laabid qui cite en particulier les savants al-Qalasādī (v. 1486) et Ibn Ghāzī (v. 1513) [Laabid 2001, p. 315–326]. À titre de témoin tardif d'une évolution, on peut citer l'*Arithmétique en sa perfection* de F. Legendre (1781), où l'algorithme spécifique est absent du chapitre des compagnies.

Le fait d'utiliser la règle de trois dans le chapitre des compagnies au lieu d'énoncer et d'appliquer la règle spécifique des compagnies est une caractéristique commune des ouvrages d'Ortega et de Ventallol d'une part, et des ouvrages italiens du XV^e^ siècle d'autre part. Cette observation que nous faisons dans le cas particulier de ce chapitre peut être étendue aux autres chapitres de ces ouvrages : il y a un lien évident entre les arithmétiques italiennes du XV^e^ siècle et les arithmétiques ibériques du début du XVI^e^ siècle (Ortega, Ventallol mais aussi Andrés)[62], alors que l'ouvrage de Santcliment est à rapprocher des ouvrages du sud de la France, comme nous l'avons souligné en particulier à propos du *Manuscrit de Pamiers*.

Le chapitre des compagnies est donc une bonne introduction à l'étude plus complète de ces premiers ouvrages ibériques d'arithmétique, car il met en évidence un procédé original d'exposition des questions mathématiques : utilisation d'une règle marchande particulière présentée comme un algorithme applicable à une situation concrète élémentaire et servant de référence, puis extension de la règle à des fins plus abstraites que sont les résolutions de certains types d'équations. Ces équations sont présentées à l'aide de problèmes pseudo-concrets servant de support linguistique. La méthode consiste alors à se ramener, par certains artifices, à la situation de base. Ce procédé est déjà présent dans le traité très élémentaire de Santcliment, mais il est plus visible dans les arithmétiques d'Ortega et Ventallol, plus tardives.

BIBLIOGRAPHIE

ALLARD (André)
[1992] *Muhammad ibn Mūsāt al-Khwārizmī, Le calcul Indien (algorismus) : versions latines du XII^e^ siècle*, Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1992.

BENASSAR (Bartolomé)
[1985] *Histoire des espagnols*, Paris : Armand Colin, 1985.

BENOIT (Paul)
[1997] Calcul, algèbre et marchandise, dans *Éléments d'histoire des sciences,* sous la direction de Michel Serres, Paris : Larousse, 1997, p. 196–211.

CARRÈRE (Claude)
[1967] *Barcelone, centre économique 1380–1462,* Paris, La Haye : Mouton & Co., 1967.

CAUNEDO DEL POTRO (Betsabé) & CORDOBA DE LA LLAVE (Ricardo)
[2000] *El arte del alguarismo. Un libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*, Estudios de historia de la ciencia y de la técnica, Junta de Castilla y León, 2000.

CONI (Franco)
[1951] *Un incunabolo spagnolo sinora sconosciuto*, Cagliari : Sezione regionale sarda dell'Associazione italiana per le Biblioteche Cagliari, 1951.

[62] Une étude de ces liens a été développée dans notre thèse [Labarthe 2004].

DJEBBAR (Ahmed)

[2001] Les transactions dans les mathématiques arabes : classification, résolution et circulation, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2001, p. 327–344.

DUFOURCQ (Charles-Emmanuel)

[1975] *La vie quotidienne dans les ports méditerranéens au Moyen Âge, Provence-Languedoc-Catalogne*, Paris : Hachette, 1975.

FRANCI (Raffaela) & TOTI RIGATELLI (Laura)

[1982] *Introduzione all'aritmetica mercantile del medievo e del rinascimento*, Sienne : Quatro venti, Servicio editoriale dell'Università di Sienna, 1982.

GUAL CAMARENA (Miguel)

[1981] *El primer manual hispanico de mercaderia (siglo XIV)*, Barcelone : Consejo superior de investigaciones cientificas, Instituto de geografia, etnologia e historia, 1981.

HØYRUP (Jens)

[2000] Jacobus de Florentia, Tractatus algorismi (1307), *Centaurus*, 42 (2000), p. 21–69.

KARPINSKI (Louis C.)

[1936] The first printed arithmetic of Spain : Francesc Santcliment, Suma de la art de Arismetica, *Osiris*, I (1936), p. 411–420.

LAABID (Ezzaïm)

[2001] Le partage proportionnel dans la tradition mathématique maghrébine, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2001, p. 315–326.

[2003] Procédés arithmétiques pouvant remplacer l'algèbre : exemples de la tradition des héritages au Maghreb médiéval, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2003, p. 111–134.

LABARTHE (Marie-Hélène)

[1999] *Suma de la art de Arismetica de F. Sanct Climent*, Mémoire de DEA, Université Paris I, 1999.

[2001] Suma de la art de Arismetica de Francesch Sanct Climent, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2001, p. 157–184.

[2003] Les problèmes de trocs, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2003, p. 135–159.

[2004] *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes : une hiérarchie des problèmes au service des procédés de résolution*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse III, 2004.

LAFONT (R.) & TOURNERIE (G.)
[1967] *Frances Pellos, Compendion de l'abaco*, Montpellier : Édition de la Revue des Langues romanes, 1967.

LEONARD DE PISE
[1857] *Liber Abbaci*, éd. par Boncompagni (Baldassare), Rome : Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.

MALET (Antoni) & PARADIS (Jaume)
[1984] *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica (1485–1545),* deux vol., Barcelone : Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona, 1984.

MALET (Antoni), éd.
[1998] *Summa de l'art d'Aritmètica, Francesc Santcliment*, Vic : Eumo, 1998.

MARRE (Aristide)
[1880] Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres, dans Boncompagni (Baldassare), éd., *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, vol. XIII, Rome, 1880, p. 555–814.

MENJOT (Denis)
[1996] *Les Espagnes médiévales 409–1474*, Paris : Hachette, 1996.

ORTEGA (Juan)
[1512] *Siguese una compusicion de la arte de arismetica y juntamente de geometria*, Lyon : Maître Nicolau de Benedictis, 1512.

PACIOLI (Luca)
[1494] *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Venise, 1494.

PITACOSTE Y RODRIGUEZ (Felipe)
[1999] *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI*, Madrid : Ollero et Ramos, 1999, première éd. 1891.

REY PASTOR (Julio)
[1926] *Los Matematicos españoles del siglo XVI*, Madrid : Bibliotheca Scientia, 1926.

DEL POTRO (Caunedo)
[2000] *Cordoba de la Llave*, 2000.

SANCHEZ PEREZ (José Augusto)
[1949] *La arithmetica en Roma, en India y en Arabia*, Madrid, Granada : CSIC, 1949.

SANTCLIMENT (Francesc)
[1482] *Suma de la art de Arismetica*, Barcelone : Pere Posa, 1482.

SESIANO (Jacques)
[1988] Le Liber Mahameleth, un traité mathématique latin composé au XII^e^ siècle en Espagne, dans *Premier colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes*, Alger : La Maison des livres, 1988, p. 69–98.

SIGLER (Laurence E.)
[2002] *Fibonacci's Liber Abaci, A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*, New York : Springer, 2002.

SIMI (Annalisa)
[2001] La compagnia mercantile negli abacisti italiani del '300, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2001, p. 75–104.

SMITH (David Eugene)
[1970] *Rara arithmetica*, New York : Chelsea Publishing Co., 1970.

SPIESSER (Maryvonne)
[2003] *Une arithmétique commerciale du XV^e siècle : Le Compendy de la praticque des nombres de Barthélemy de Romans*, Turnhout : Brepols publishers, 2003.

TROPFKE (Johannes)
[1980] *Geschichte der Elementar-Mathematik, I – Arithmetik und Algebra*, Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1980, 4^e éd. revue par Vogel (K.), Reich (K.) & Gericke (H.).

VAN EGMOND (Warren)
[1980] *Practical Mathematics in the Italian Renaissance : a Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and printed books to 1600*, Florence : Instituto e Museo di storia della Scienza, 1980 ; Monografia N. 4.
[2001] Abacus, algorism, abbacus : Methods of reckoning in the merchant cultures of the Mediterranean, dans *Actes du Colloque international du CIHSO : Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée*, Toulouse : Éditions du CIHSO, 2001, p. 21–54.

VENTALLOL (Joan)
[1521] *Pratica mercantil, arithmetica e geometria*, Lyon : Maître Jean de la Place, 1521.

VERNET (Juan)
[1985] *Ce que la culture doit aux Arabes d'Espagne*, Arles : Sinbad, Actes Sud, 1985.

VITRAC (Bernard), éd. & trad.
[1994] *Euclide d'Alexandrie, Les éléments*, vol. 2 : Livre 5, Paris : PUF, 1994.