Revue d'histoire des mathématiques
24 (2018), p. 107–206

UNE THÉORIE DE LA MESURE DES RAPPORTS DANS LE *CHILIAS LOGARITHMORUM* DE KEPLER (1624)

Sabine Rommevaux-Tani

Résumé. — Johannes Kepler publie en 1624 un traité sur les Logarithmes, intitulé *Chilias Logarithmorum*. Il se propose dans ce traité de donner une démonstration légitime de la construction des Logarithmes, celle de Neper étant à ses yeux entachée par l'usage qui y est fait du mouvement. Kepler fonde sa construction sur une théorie générale de la mesure des rapports, dont les Logarithmes sont un cas particulier. Nous proposons ici une analyse du traité de Kepler, en montrant comment sa théorie de la mesure des rapports trouve ses racines dans une théorie médiévale des rapports mise en place par Thomas Bradwardine et à sa suite, Nicole Oresme. Et nous donnons en annexe la traduction française de la partie théorique du *Chilias Logarithmorum*.

Abstract (A Theory for the Measure of Ratios in Kepler's Chilias Logarithmorum (1624))

Johannes Kepler published in 1624 a treatise on logarithms, the *Chilias Logarithmorum*. In this treatise, he intended to give a legitimate proof of the construction of logarithms, that of Neper being, in its opinion, tainted by the use made of movement. Kepler based his construction on a general theory of the measurement of ratios, of which Logarithms are a special case. We propose here an analysis of Kepler's treatise, showing how his theory of the measurement of ratios finds its roots in a medieval theory of ratios established by Thomas Bradwardine and, after him, Nicole Oresme. We give in appendix the French translation of the theoretical part of the *Chilias Logarithmorum*.

Texte reçu le 9 mai 2017, accepté le 3 octobre 2017, révisé le 24 octobre 2017.

S. Rommevaux-Tani, CNRS, Sphere, UMR 7219, Univ. Paris Diderot, Bâtiment Condorcet, Case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13, France.
Courrier électronique : `sabine.rommevaux@univ-paris-diderot.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A45, 01A35.

Mots clefs : Kepler, Bradwardine, Oresme, logarithme, théorie des rapports et proportions, xviie siècle.

Key words and phrases. — Kepler, Bradwardine, Oresme, logarithm, theory of ratios and proportions, seventeenth century.

À la mémoire de Gérard Simon,
mon maître et ami[1].

INTRODUCTION

Johannes Kepler publie en 1624, à Marburg, chez l'éditeur Kaspar Chemlin, un traité sur les Logarithmes, intitulé *Chilias Logarithmorum* (*La chiliade des Logarithmes*)[2] [Kepler 1960, p. 317–345]. Nous ne nous attarderons pas ici sur les circonstances de la publication de ce texte, que Kepler relate dans son adresse aux lecteurs, en introduction au *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens præcepta de eorum usu* (*Supplément à La chiliade des Logarithmes, contenant les règles de leur usage*), qu'il publie l'année suivante chez le même éditeur [Kepler 1960, p. 355–358] et dont on trouve aussi certains éléments dans sa correspondance [Naux 1966, p. 128–138]. Nous ne reviendrons pas non plus sur la place des travaux de Kepler dans l'histoire de la construction des tables de Logarithmes[3], ni sur les différences avec ce qu'ont fait avant lui Jost Bürgi (ou Juste Byrge), collègue de Kepler à Prague, John Napier (ou Neper) et Henry Briggs [Hutton 1791, vol. I, p. xxxiv-xxxvii; Delambre 1821, p. 506–513; Belyi 1975, p. 654–657; Clark & Montelle 2012; Clark 2015, p. 9–12]. Nous voudrions nous arrêter sur la construction des Logarithmes de Kepler et plus généralement sur sa théorie des mesures des rapports, dont les Logarithmes dérivent. Nous souhaitons montrer comment cette construction s'ancre dans une théorie des rapports, qui n'est pas seulement celle

[1] C'est Gérard Simon qui m'a suggéré, il y a plusieurs années de cela, de m'intéresser au traité sur les logarithmes de Kepler, après qu'il m'a entendu lui présenter mon travail sur les rapports de rapports de Nicole Oresme.

[2] Le titre complet de l'ouvrage est : *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, præmissa demonstratione legitima ortus Logarithmorum eorumque usus, quibus nova traditur arithmetica, seu compendium, quo post numerorum notitiam nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraque Problemata Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra Multiplicationis, Divisionis, Radicumque extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos* (La chiliade des Logarithmes d'autant de nombres ronds, précédée d'une démonstration légitime de l'origine des Logarithmes et de leur usage, pour lesquels est présentée une nouvelle arithmétique ou un Compendium, dont, après la connaissance des nombres, rien n'est plus parfait ni plus utile pour résoudre la plupart des problèmes de calcul, surtout en ce qui concerne la théorie des triangles, sans les opérations de multiplication, de division et d'extraction de racines très pénibles pour les nombres étendus).

[3] Il faut ajouter aux deux traités déjà cités les *Tabulæ Rudolphinæ*, que Kepler publie à Ulm en 1627 et dans lesquelles il utilise les Logarithmes pour l'établissement de tables astronomiques, qui s'appuient sur les nouvelles observations de Tycho Brahé.

du livre V des *Éléments* d'Euclide, contrairement à ce que dit Kepler[4], mais reprend aussi certains éléments d'une théorie mise en place au XIVe siècle par Thomas Bradwardine à Oxford et Nicole Oresme à Paris et qui dépasse la théorie euclidienne. Ce lien avait déjà été souligné par Benjamin Wardhaugh [2008, p. 40–41], mais sans que l'auteur entre dans les détails de la théorie keplérienne. Or, il nous semble que la démarche de Kepler n'a pas reçu toute l'attention qu'elle méritait et que son projet, en particulier son usage de la théorie des rapports, n'a pas toujours été bien compris par les historiens des mathématiques, même si d'aucuns reconnaissent l'excellence de son travail[5].

Ainsi, Charles Hutton [1791, p. lii] salue la démarche de Kepler et la rigueur de ses démonstrations :

> Kepler here, first of any, treats of logarithms in the true and genuine way of the measures of ratios, or proportions, as he calls them, and that in a very full and scientific manner [...]. Kepler first erects a regular and purely mathematical system of proportions, and the measures of proportions, treated at considerable length in a number of propositions, which are fully and chastely demonstrated by genuine mathematical reasoning, and illustrated by numerical examples. This part contains and demonstrates both the nature and the principles of the structure of logarithms.

Jean-Baptiste Delambre [1821, p. 509] juge quant à lui que les démonstrations de Kepler sont « souvent longues et obscures ». Mais c'est Charles Naux [1966, p. 129] qui est le plus sévère à l'encontre de Kepler :

---

4 Dans l'adresse au lecteur qui ouvre le *Supplementum*, Kepler [1625 ; 1960, p. 356] écrit : « Simul autem fuit ipso opere monendus Lector meus, Logarithmos non primum nasci cum Sinubus, seu rectis in Circulo, quod Neperiana descriptio incautius inspecta præ se ferre videtur, sed foris extra Geometriam Circuli constitui, tanquam intra metas libri Quinti Euclidis [...] » (En même temps mon Lecteur doit se souvenir que, dans cet ouvrage, les Logarithmes ne trouvent pas leur origine d'abord dans les sinus ou dans les droites des cercles — ce que la description népérienne considérée imprudemment semble indiquer —, mais qu'il sont construits indépendamment, en dehors de la géométrie du cercle, dans les limites du livre V d'Euclide [...]). La traduction est mienne, mais je remercie Marie-Hélène Depardon qui a bien voulu la réviser.

5 Ainsi, Joseph Ehrenfried Hofmann [1975, p. 688] écrit : « His work on logarithms (1625) is, however, excellent. Napier's original formulation (1619) made use of the concept of motion, and in adapting Napier's work for practical applications, Kepler reduces it to pure arithmetic. His process of taking successive square roots foreshadowed natural logarithms. Among the applications we find the inequality which was later (though without reference to Kepler) to become the starting point for an improved and shorter method of obtaining natural logarithms ».

> Pour céder à la séduction de retrouver les Logarithmes de Neper par une voie irréprochable, il a conçu une théorie qui nous est conservée dans ses « Chiliades logarithmorum ». Cette œuvre blesse par endroits le sens de la parfaite logique, tout en échappant à la condamnation sans appel ; un réalisme curieux et bien soutenu lui permet de ne pas tomber dans l'ornière, tout en la côtoyant sans cesse et finalement, ses calculs lui donnent les Logarithmes des tables du « Logarithmorum... descriptio » de 1614 [c'est l'ouvrage de Neper]. Mais leur logique fait la grimace, elle se tient à grands coups de conventions, de principes arbitraires qui la ramènent dans la bonne voie dès qu'elle défaille ; le moins que l'on puisse dire, c'est que les axiomes fondamentaux assurant la réussite finale sont tirés par les cheveux [...]. La théorie est de caractère insolite ; plus d'une fois elle heurte le simple bon sens.

Et plus loin, à propos de la théorie des rapports qui est au cœur de la théorie káplérienne, Naux [1966, p. 156] ajoute :

> Cette mesure des proportions, qui a de quoi intriguer la pensée moderne, était donc considérée par Kepler comme une démarche normale de la pensée mathématique, il lui a fait confiance contre le vent, les marées de certaines situations délicates où elle l'a placé, et finalement c'est elle qui a gâté son œuvre.

C'est donc cette théorie de la mesure des proportions (nous, nous parlons plutôt de mesure des rapports[6]) que nous souhaitons exposer ici en détail, en la replaçant dans le contexte des mathématiques de l'époque, même si nous ne nous interdirons pas l'usage de notations modernes pour rendre notre propos plus accessible au lecteur d'aujourd'hui. Mais on pourra se reporter au traité original de Kepler ou à notre traduction, en annexe, pour retrouver la manière dont les mathématiques étaient écrites au XVIIe siècle, dans un style euclidien, sans écriture symbolique.

1. UNE THÉORIE DES RAPPORTS QUI DÉPASSE CELLE D'EUCLIDE

La construction des Logarithmes décrite par Kepler lui-même

Dans l'adresse au lecteur du *Supplementum*, Kepler [1960, p. 355–356] revient sur la construction qu'il a exposée dans le *Chilias Logarithmorum* :

> J'ai décrit quel est le véritable sujet de cette spéculation et j'ai établi par des énoncés évidents tout ce qui ne serait pas en vérité sous le genre des lignes ou du mouvement et du flux, ou, dirais-je, de n'importe quelle autre

6 Nous entendons par rapport la relation quantitative à deux termes définie par Euclide au livre V. Nous réservons le terme proportion ou proportionnalité à l'identité des rapports, soit à une relation à plus de trois termes.

> quantité sensible[7], mais sous le genre des relations et de la quantité mentale. Ensuite, puisque cette quantité mentale (dite λόγος par les grecs et que les latins traduisent rarement par « ratio » et plus souvent par « proportio ») est, comme toutes les autres, susceptible de division à l'infini, j'ai établi les termes convenables de cette division, à partir, précisément, du même genre de choses ; on a coutume en effet de diviser les lignes par des points et les mouvements par des degrés des temps, mais les termes moyens entre les extrêmes divisent le rapport en grandeur. Cela étant établi avec succès, la démonstration faisait son chemin : pour tous les rapports commensurables a été établie la véritable mesure commune dans le genre des rapports ; une place a été faite à l'arbitraire dans le choix de l'élément du rapport que l'on doit prendre pour minimum et pour mesure ; il a aussi été démontré que les rapports sont presque toujours incommensurables et que l'élément minimum qu'on se serait plu à prendre pour l'un ne peut pas être la véritable mesure d'un autre rapport quelconque, car il pèche toujours par excès ou par défaut. Pour cette raison, on a recours à un autre élément arbitraire, de sorte que soit établi quelle est l'erreur et quelle différence entre les plus petits éléments des rapports incommensurables peut être dissimulée et engloutie dans la profondeur de l'imperceptible ; par conséquent, la mesure des rapports incommensurables, dite Logarithme, resurgit dans l'usage même des nombres, certes inapte pour la démonstration, mais très utile pour le calcul[8].

Kepler résume ici parfaitement sa démarche, mais cette description est bien obscure pour qui n'a pas lu le *Chilias Logarithmorum.* Nous espérons que l'analyse qui suit permettra de rendre ce passage plus clair. Mais, sans

---

7 Kepler vient de reprocher à Neper l'usage du mouvement géométrique dans sa construction des Logarithmes.

8 « [...] subjectum hujus speculationis, quodnam esset genuinum, descripsi ; quodque id non esset verè sub genere vel linearum, vel motus fluxusque, aut cujusquàm alterius quantitatis sensilis, ut sic dicam, sed sub genere Relationum, quantitatisque mentalis, evidentibus enunciationibus constitui : deinde, cùm, ut omnes cæteræ, sic etiam mentalis ista quantitas (λόγος Græcis dicta, quod Latini Rationem minus usitatè, crebrius Proportionem transferunt) divisionem in infinitum recipiat : metas etiam hujus divisionis congruas, ex eodem scilicet genere rerum constitui : Lineæ enim punctis, motus articulis temporum dividi solet ; at Proportionem dispescunt termini inter extremos magnitudine medii. Hisce sic constitutis feliciter, procedebat demonstratio : vera proportionum omnium communicantium communisque mensura facta est & ipsa de genere proportionum : locus est factus Arbitrio, in eligendo proportionis Elemento, quodnam deberet haberi pro minimo, proque mensura : demonstratum etiam est plerunque esse proportiones inter se incommunicabiles ; eoque minimum unius Elementum quod placuisset, non posse esse mensuram genuinam proportionis cujuscunque alterius : semper enim peccari vel excessu, vel defectu. Ea de causa factus jam est hic alter locus Arbitrio, ut quinam defectus, quæ minimorum Elementorum incommunicabilium differentia dissimulari posset, inque profundum insensibilitatis demergi, constitueretur, ut sic tandem in usum ipsum numerorum redundaret, absurda quidem demonstranti, sed utilissima computanti, incommunicabilium proportionum communis mensura, Logarithmus dicta. » (Là encore je remercie Marie-Hélène Depardon pour avoir révisé ma traduction).

entrer pour le moment dans le détail, nous souhaitons souligner dès à présent l'usage d'un certain nombre de notions qui renvoient à une théorie des rapports qui dépasse celle d'Euclide. Kepler explique tout d'abord qu'il considère les rapports comme des quantités mentales (*quantitates mentales*), même s'ils se trouvent sous le genre de la relation (rappelons que, selon Euclide, le rapport est une relation quantitative entre deux grandeurs[9]; Kepler dit qu'on peut considérer cette relation comme une quantité, même si c'est uniquement dans l'intellect). Kepler remarque alors que, considéré comme une quantité, le rapport est divisible à l'infini et cette division est effectuée grâce à l'insertion de termes moyens entre les termes extrêmes du rapport; nous verrons plus loin comment. Enfin, cette division permet de déterminer, pour chaque rapport, ce que Kepler nomme un élément minimum, rapport choisi arbitrairement dont la mesure est au fondement du calcul des Logarithmes; là encore, nous verrons plus loin le détail de la construction. Toujours dans ce texte, on remarque les notions de rapports commensurables et incommensurables, qui ne sont pas euclidiennes. Nous allons donc montrer maintenant comment toutes ces notions ont été mises en place au XIVe siècle, par Thomas Bradwardine et Nicole Oresme.

Une théorie médiévale des rapports de rapports

Au XIVe siècle, Thomas Bradwardine, dans son *Tractatus de proportionibus* [Crosby 1955; Rommevaux 2010] et à sa suite Nicole Oresme, dans son *De proportionibus proportionum* [Oresme 1966; Rommevaux 2010] mettent en place les éléments d'une théorie des rapports qui sera largement diffusée jusqu'au XVIIe siècle. Cette théorie a été développée afin de donner un cadre mathématique à la règle du mouvement énoncée par Thomas Bradwardine dans son traité, qui établit une proportionnalité géométrique entre les rapidités des mouvements d'une part et les rapports des puissances motrices aux résistances d'autre part[10] [Crosby 1955, p. 112; Rommevaux 2010, p. 49], ou, selon la formulation de Nicole Oresme [1966, p. 262; Rommevaux 2010, p. 149] :

---

9 Selon la définition 3 du livre V d'Euclide [1994, p. 36], « Un rapport est une relation, telle ou telle selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs de même genre ».

10 « [...] proportiones potentiarum moventium ad potentias resistivas, et velocitates in motibus, eodem ordine proportionales existunt, et similiter econtrario. Et hoc de geometrica proportionalitate intelligas » (les rapports des puissances motrices aux puissances résistives et les rapidités dans les mouvements sont proportionnels dans le même ordre, et de même inversement. Et on doit comprendre ici qu'il s'agit d'une proportionnalité géométrique).

> le rapport d'une rapidité à une autre est comme le rapport du rapport de la puissance de l'un des moteurs à son mobile[11] au rapport de la puissance de l'autre moteur à son mobile[12].

La difficulté de cette formulation vient de ce que la proportionnalité géométrique n'est définie par Euclide que pour les grandeurs, au livre V des *Éléments*, et pour les nombres, au livre VII, soit pour ce que les médiévaux appellent les quantités. Or, nous sommes en présence ici, d'un côté, des rapidités, que l'on peut supposer quantifiables, et de l'autre côté, des rapports, qui sont des relations. Il s'agit donc d'expliquer comment les relations que sont les rapports peuvent être considérées comme des quantités auxquelles on peut appliquer la théorie euclidienne, de sorte à pouvoir parler de rapports entre des rapports. C'est ce que propose Oresme en s'appuyant sur les prémisses de la théorie des rapports présentée par Bradwardine dans la première partie de son traité [Rommevaux 2010, « Introduction » ; Rommevaux 2014]. Nous donnons ici les grandes lignes de la construction.

Au fondement de la construction se trouve la composition des rapports selon laquelle, si l'on a trois quantités a, b et c, avec $a > c > b$ (nous ne nous intéressons ici qu'au cas des rapports de plus grande inégalité, entre a et b, avec $a > b$, qui sont ceux que considère Kepler), on dit que le rapport de a à b est composé du rapport de a à c et du rapport de c à b. En notant $(a:b)$ le rapport de a à b (afin de le distinguer de la fraction de ses termes, a/b) et en signifiant la composition par le symbole « $*$ », nous pouvons transcrire la propriété précédente de la manière suivante : $(a : b) = (a : c) * (c : b)$. Ainsi, le rapport de a à b est divisé en les deux autres rapports qu'Oresme désigne comme ses parties. En outre, par l'insertion d'autant de quantités que l'on veut entre les termes a et b du rapport, on peut diviser celui-ci en autant de parties que l'on veut : si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont n termes entre a et b, on a

$$(a : b) = (a : c_1) * (c_1 : c_2) * \cdots * (c_n : b).$$

Le rapport $(a:b)$ est divisé en $n+1$ parties. Ces parties sont égales si les c_i sont des moyens proportionnels.

On peut alors parler de la moitié d'un rapport, du tiers, ou encore des trois quarts, etc. Ainsi, R est la n-ième partie du rapport S, si R composé avec lui-même $n-1$ fois donne S. Par exemple, le rapport double est le

---

11 Soit la résistance de ce qui est mû par le moteur.

12 « proportio unius velocitatis ad alteram est sicut proportio proportionis potentie unius motoris ad suum mobile ad proportionem potentie [*corr.* proportionis] alterius motoris ad suum mobile ».

tiers du rapport octuple. En effet,

$$(8:4) * (4:2) * (2:1) = (8:1)$$

et les rapports $(8 : 4)$, $(4 : 2)$ et $(2 : 1)$ sont tous égaux au rapport double $(2:1)$.

Par ailleurs, le rapport quadruple est les deux tiers du rapport octuple, car le rapport quadruple est composé de deux rapports doubles et le rapport octuple est composé de trois rapports doubles

$$(4:2) * (2:1) = (4:1)$$
$$(8:4) * (4:2) * (2:1) = (8:1).$$

Dans ce cas, on dit que le rapport double est une mesure commune aux rapports quadruple et octuple.

Ce faisant, Oresme remarque que tout rapport peut être divisé à l'infini en autant de rapports que l'on veut par l'insertion de médians, entiers ou non, entre ses termes. Le rapport se comporte alors comme une quantité continue[13]. Il faut bien faire attention ici qu'il ne s'agit pas de confondre le rapport, qui reste une relation, avec par exemple la fraction qu'on peut lui associer. Il s'agit seulement de dire que les rapports, associés à l'opération de composition, se comportent comme des quantités. Et l'on doit noter que la composition des rapports est ici vue sur le modèle d'une addition, d'où le vocabulaire de « partie » et « parties », de « double », « triple », etc. Nous y reviendrons, car ce point est essentiel pour comprendre la théorie oresmienne, puis celle de Kepler.

Que les rapports se comportent comme des quantités continues ne suffit pas à en faire des objets auxquels on puisse appliquer la théorie du livre V des *Éléments* d'Euclide. Il faut encore vérifier que les rapports, ainsi considérés comme des quantités, vérifient ce qu'on nomme communément l'axiome d'Archimède (si a et b sont deux quantités telles que $a < b$, il existe n entier tel que $na > b$). Il faut donc qu'il existe une relation d'ordre sur les rapports qui soit telle que si l'on se donne deux rapports, le plus petit peut être augmenté, par composition, jusqu'à devenir plus

13 « Proportionem maioris inequalitatis dividere est inter aliquos terminos medium seu media assignare » (Diviser un rapport de plus grande inégalité, c'est placer entre ses termes un médian ou des médians) [Oresme 1966, p. 138; Rommevaux 2010, p. 79] ; « quelibet proportio est sicut quantitas continua in hoc, quod in infinitum est divisibilis sicut quantitas continua » (n'importe quel rapport est comme une quantité continue du fait qu'il est divisible à l'infini, comme la quantité continue) [Oresme 1966, p. 158; Rommevaux 2010, p. 90].

grand que le plus grand[14]. On peut choisir comme relation d'ordre sur les rapports celle induite par les fractions correspondantes, en disant que $(a:b) < (c:d)$ si et seulement si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. On peut alors remarquer que les rapports de plus grande inégalité, munis de cette relation d'ordre et de l'opération de composition remplissent bien la condition énoncée dans l'axiome d'Archimède. Par exemple, si l'on considère le rapport double et le rapport quintuple, on a :

$$(8:4) * (4:2) * (2:1) = (8:1) > (5:1),$$

c'est-à-dire que le rapport double composé trois fois, que l'on notera $3(2:1)$, est plus grand que le rapport quintuple.

On a maintenant tous les éléments en main pour pouvoir appliquer la théorie euclidienne aux rapports et parler de proportionnalité entre quantités et rapports ou de rapport entre des rapports. En reprenant les exemples précédents, on peut dire que le rapport entre le rapport octuple et le rapport double est le rapport triple ou que le rapport octuple est le triple du rapport double. Et on peut dire que le rapport entre le rapport octuple et le rapport quadruple est le rapport de 3 à 2, soit le rapport sesquialtère, ou que le rapport octuple est sesquialtère du rapport quadruple ou trois demis de ce rapport. Notons que l'on trouve cette dernière expression dans l'énoncé de la fameuse troisième loi de Kepler [1981, p. 302] :

> [...] proportio quæ est inter binorum quorumcumque Planetarum tempora periodica, sit praecisè *sesquialtera* proportionis mediarum distantiarum [c'est moi qui souligne].
>
> le rapport qui est entre les temps périodiques de deux planètes quelconques est précisément sesquialtère du rapport entre les distances médianes.

C'est-à-dire que le rapport entre les périodes est trois demis du rapport entre les distances, au sens où nous l'avons vu plus haut.

Poursuivant l'analogie entre rapports et quantités, Oresme introduit aussi les notions de rapports commensurables et incommensurables : deux rapports sont commensurables entre eux s'ils ont une partie aliquote commune (c'est-à-dire un rapport contenu un nombre entier de fois dans chacun d'eux) et ils sont incommensurables dans le cas contraire. Par exemple, le rapport octuple et le rapport quadruple sont commensurables, puisque le rapport double est une partie commune aux deux

---

[14] En effet, selon la définition 4 du livre V des *Éléments* d'Euclide [1994, p. 38] : « Deux grandeurs sont dites avoir entre elles un rapport quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre ».

rapports, mais le rapport quadruple et le rapport triple sont incommensurables. Oresme donne alors le critère suivant pour déterminer si deux rapports rationnels donnés, A et B, sont commensurables ou non :

> Étant donnés deux rapports, savoir s'ils sont commensurables.
>
> Soit, comme auparavant, A un rapport plus grand et B un plus petit. Exprimons chacun d'eux sous sa forme première, en ses premiers nombres. [...].
>
> Je dis alors, premièrement, que si, entre les premiers nombres de A, le plus grand, il n'y a pas un nombre médian ou des nombres médians, les rapports donnés sont incommensurables, d'après la cinquième conclusion.
>
> Deuxièmement, si, entre les premiers nombres de A, il y a un nombre médian ou des nombres médians selon le plus petit rapport B, alors A sera commensurable à B et il est un multiple de B, d'après la huitième conclusion.
>
> Troisièmement, si, entre les nombres de A, il y a un nombre, etc., mais pas selon le rapport B, alors A ne sera pas un multiple de B, d'après la sixième conclusion.
>
> Quatrièmement, si, entre les nombres de A, il y a un nombre etc., pas selon le rapport B, mais selon un autre rapport selon lequel, entre les premiers nombres de B, il y a un nombre médian etc., A et B seront commensurables, d'après la huitième conclusion.
>
> Cinquièmement, si, entre les nombres de A, il y a un nombre médian etc., pas selon B, ni selon un autre rapport selon lequel il y aurait, entre les premiers nombres de B, un nombre etc., ces rapports seront incommensurables [...][15].

En d'autres termes, les rapports A et B sont commensurables (avec $A > B$), si B est une partie de A ou si B est des parties de A. Dans ce dernier cas, il existe un rapport C qui est une partie commune de A et B. Et on peut le vérifier sur les médians. C est une partie commune de A et B si et seulement si :

$$A = (x : y) = (x : p_1) * (p_1 : p_2) * \cdots * (p_m : y),$$

15 « Nona conclusio. Datis duabus proportionibus si sint commensurabiles invenire. Sit ut prius A proportio maior, B minor, tunc utraque earum primitus in primis numeris eius statuere [...] Dico, igitur, primo quod si inter primos numeros A maioris nullus fuerit numerus medius seu numeri, proportiones date sunt incommensurabiles per quintam conclusionem. Secundo, si inter primos numeros A sit numerus medius seu numeri secundum B proportionem minorem, tunc A erit commensurabilis B et multiplex ad B per octavam. Tertio, si inter numeros A fuerit numerus, et cetera, non tamen secundum B, tunc A non erit multiplex ad B per sextam. Quarto, si inter numeros A fuerit numerus, et cetera, non tamen secundum B proportionem sed secundum aliquam aliam proportionem secundum quam inter primos numeros B est numerus medius, et cetera, A et B erunt commensurabiles per octavam. Quinto, si inter numeros A fuerit numerus medius non tamen secundum B, nec secundum aliam proportionem secundum quam inter primos numeros B sit numerus, et cetera, ille erunt incommensurabiles per septimam conclusionem » [Oresme 1966, p. 200 et 202 ; Rommevaux 2010, p. 115].

où les $(p_i)_{1<i<m}$ sont des médians proportionnels entiers entre x et y,

$$B = (u : v) = (u : q_1) * (q_1 : q_2) * \cdots * (q_n : v),$$

où les $(q_i)_{1<i<n}$ sont des médians proportionnels entiers entre u et v, avec $(x : p_1) = (p_1 : p_2) = \cdots = (p_m : y) = C$ et $(u : q_1) = (q_1 : q_2) = \cdots = (q_n : v) = C$.

Le traitement mathématique que Thomas Bradwardine propose pour l'étude du mouvement dans son *Tractatus proportionum* fut immédiatement repris par d'autres membres de l'université d'Oxford, que l'on nomme parfois les « calculateurs » et dont font partie William Heytesbury, John Dumbleton, ou Richard Swineshead [Clagett 1959, p. 440–441]. Comme on l'a vu, les idées de Bradwardine sur le mouvement se diffusent aussi en France ; avant Nicole Oresme, Jean Buridan avait fait état de la règle du mouvement dans un commentaire au livre VII de la *Physique*. Très vite, dès le milieu du XIV^e^ siècle, la règle du mouvement est aussi discutée dans les universités du nord de l'Italie [Clagett 1959, p. 442–443]. Ainsi, les études sur le mouvement initiées à Oxford et poursuivies à Paris essaiment dans toute l'Europe, aux XV^e^ et XVI^e^ siècles [Clagett 1959, p. 629–671]. C'est parfois l'occasion de revenir sur la théorie des rapports qui les sous-tend. Ainsi, Alvarus Thomas, mathématicien portugais, y consacre une partie de son *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Thome Ulixbonensis philosophicas Suiset Calculationes ex parte declarans* [Thomas 1509], afin de rendre plus clair les calculs sur les rapports nécessaires à l'étude du mouvement que propose Swineshead (ou Suiset) dans son *Liber calculationum* [Sylla 2005 ; Rommevaux 2014, p. 46-50]. Mais la théorie médiévale des rapports est parfois exposée indépendamment du contexte de l'étude du mouvement qui l'a vu naître. Ainsi, Jean Fernel, qui fut mathématicien avant de devenir le célèbre médecin que l'on connaît, lui consacre un traité, le *De proportionibus libri duo* (Paris, 1528) [Rommevaux 2013]. On la trouve aussi, dans un tout autre cadre, celui de l'algèbre, dans le *Libro de algebra en arithmetica y geometria* de Pedro Nuñez (Anvers, 1567) [Rommevaux 2014, p. 51–55 et p. 131–135]. Aucun de ces deux auteurs ne fait référence à Nicole Oresme ou aux « calculateurs » d'Oxford, mais on retrouve bien dans leurs traités tous les éléments de la théorie médiévale.

Si cette théorie des rapports est en général bien acceptée, elle est parfois critiquée, dans le sillage de Blaise de Parme. Ce dernier enseigne, dans plusieurs universités du Nord de l'Italie, la théorie des rapports à partir du traité de Thomas Bradwardine, comme en témoignent les deux versions de ses *Questiones circa tractatum proportionum magistri Thome Braduardini* [Blaise de Parme 2005]. Blaise récuse en particulier l'usage, par Bradwardine, d'un vocabulaire additif pour rendre compte de la composition des rapports ; Blaise demande ainsi que l'on ne parle pas du « double » (*dupla*) d'un rapport mais de ce rapport « doublé » (*duplicata*) [Rommevaux 2014, p. 111–142]. Ces critiques seront reprises en Italie par Giovanni Marliani [Biard 2008] et Alessandro Achillini, mais aussi par Volumnius Rodulphus [Rommevaux 2014, p. 126–131]. Et Pedro Nuñez est au fait de ces critiques, qu'il récuse dans son *Libro de algebra* [Rommevaux 2014, p. 131–135].

Ces quelques exemples, parmi d'autres, montrent la diffusion de la théorie médiévale des rapports, jusqu'au XVIe siècle. Au vu de ce qu'on peut lire dans le *Chilias Logarithmorum*, Kepler est au fait de cette théorie, mais nous n'avons pas pu trouver d'informations décisives sur ses sources. Il n'est pas impossible qu'il ait eu un accès direct au traité de Nicole Oresme, publié à Venise en 1505, avec le traité de Thomas Bradwardine sur le mouvement [Oresme 1966, p. 130–132]. Mais il est plus probable qu'il en ait eu connaissance à partir d'un traité sur les rapports publié au XVIe siècle ou au tout début du XVIIe siècle, sur le modèle de celui de Jean Fernel[16], ou à partir d'exposés sur les rapports en introduction à des considérations sur le mouvement. Il est aussi tout à fait possible que cette théorie ait fait l'objet d'un enseignement qu'il aurait suivi à l'université de Tübingen.

2. LE CADRE GÉNÉRAL DE LA THÉORIE KÉPLÉRIENNE DE LA MESURE DES RAPPORTS

Nous avons maintenant en main tous les éléments pour pouvoir étudier en détail la théorie képlérienne de la mesure des rapports. Le postulat qui ouvre le *Chilias Logarithmorum* joue un rôle crucial dans cette théorie. Son énoncé est le suivant [Kepler 1960, p. 280] :

> Mesurer ou exprimer par la même quantité tous les rapports égaux entre eux, quelle que soit la diversité des deux termes de l'un ou l'autre[17].

C'est-à-dire qu'à chaque type de rapports est associée une quantité qui l'exprime ou qui le mesure. On peut penser immédiatement à associer au rapport le quotient de ses termes et dans ce cas, tous les rapports égaux sont

16 Kepler connaissait les travaux de Fernel en médecine [Regier 2014], mais nous ne savons pas s'il a lu son traité sur les rapports.

17 « Omnes proportiones inter se æquales, quacunque varietate binorum unius, & binorum alterius terminorum, eadem quantitate metiri seu exprimere ».

bien exprimés par la même quantité. Par exemple, on peut poser que les rapports doubles, comme celui de 2 à 1, ou de 4 à 2 ou de 48 à 24 sont mesurés par le nombre 2 ; tous les rapports triples par le nombre 3, etc. C'est ainsi que Jean-Baptiste Delambre[18] et à sa suite Charles Naux[19] interprètent ce postulat. Or, ce n'est pas exactement ce que dit Kepler ici et ce n'est d'ailleurs pas ce choix de mesure d'un rapport qu'il fera dans la suite, comme nous le verrons. Kepler demande seulement que si quelque quantité est associée à un rapport, la même quantité soit associée à tous les rapports qui lui sont égaux. En termes modernes, Kepler demande que la mesure d'un rapport soit définie sur ce que nous appelons aujourd'hui la classe d'équivalence des rapports. Par exemple, on pourrait choisir d'associer au rapport entre 2 et 1 la différence des termes, $2 - 1 = 1$, de sorte que la mesure de tous les rapports doubles serait l'unité. Ou encore, on pourrait choisir d'associer arbitrairement le nombre 5 au rapport de 2 à 1 et tous les rapports doubles auraient la même mesure 5. Nous verrons plus loin quel sera finalement le choix de Kepler, qui conditionnera sa théorie des Logarithmes.

À la suite de ce postulat, Kepler [1960, p. 280] présente, sous forme d'un axiome, l'opération de composition des rapports qui est au cœur de sa théorie :

> Si on a autant de quantités de même genre que l'on veut se succédant l'une l'autre selon n'importe quel ordre, par exemple si elles se succèdent l'une l'autre selon l'ordre de la grandeur, le rapport des extrêmes doit être compris comme composé de tous les rapports intermédiaires de deux quantités voisines entre elles[20].

---

18 J.-B. Delambre [1821, p. 507], après avoir donné une version française de l'énoncé du postulat (« Qu'il soit permis d'exprimer par une même quantité toutes les proportions égales entre elles, quels que soient les deux termes sous lesquels elles se présentent ») ajoute : « ainsi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = n$. »

19 Ch. Naux [1966, p. 141] écrit ceci : « Le postulat I exprime la manière archaïque de penser ce que nous écrivons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = m$ ».

20 « Si fuerint quantitates quotcunque ejusdem generis, in quocunque ordine sibi invicem succedentes, ut si ordine magnitudinis sibi invicem succedant : proportio extremarum composita esse intelligitur ex omnibus proportionibus intermediis binarum, & binarum inter se vicinarum. » Reprenant une définition de Jordanus, qu'il cite, Jean Fernel [1528, f° 18r] a l'énoncé suivant : « [...] omnem proportionem extremi ad extremum ex proportionibus extremorum ad media & mediorum inter se in unguem constari. Idque ab Iordano inter definitiones secundi ad hunc modum traditum est. Quum continuatæ fuerint eædem vel diuersæ proportiones dicetur primi ad ultimum proportio ex omnibus composita. » (tout rapport d'un extrême à un extrême résulte parfaitement des rapports entre les extrêmes et des médians et entre les médians. C'est énoncé de cette manière par Jordanus [Busard 1991, p. 74–75] dans les définitions du deuxième livre : lorsque des rapports, semblables ou différents, sont

C'est-à-dire que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des quantités quelconques, et telles que, par exemple, $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$, alors

$$(A_1 : A_n) = (A_1{:}A_2) * (A_2 : A_3) * \cdots * (A_{n-1} : A_n).$$

Et il ajoute [Kepler 1960, p. 280] :

> Ou, ce qui revient au même, le rapport est diminué par l'augmentation du plus petit terme ou la diminution du plus grand, et il est augmenté par les procédés inverses[21].

En effet, Kepler postule que, étant donné un rapport $(A{:}C)$, avec $A > C$, si on diminue le plus grand terme A de sorte qu'il devienne B, avec toutefois $B > C$, on obtient le rapport $(B : C)$ plus petit que $(A : C)$ et l'excès entre les deux rapports vaut $(A{:}B)$, puisque $(A{:}C) = (A{:}B) * (B{:}C)$[22]. De même, si, dans le rapport $(A{:}C)$, on augmente le plus petit terme C de sorte qu'il devienne B, on obtient le rapport $(A{:}B)$ plus petit que $(A{:}C)$ selon l'excès $(B : C)$, pour la même raison que précédemment. Si maintenant on augmente le plus grand terme A de sorte qu'il devienne D, le rapport obtenu $(D : C)$ est plus grand que le rapport initial $(A : C)$ selon l'excès $(D : A)$, puisque $(D : C) = (D : A) * (A : C)$. Et si on diminue le plus petit terme C de sorte qu'il devienne E, le rapport obtenu $(A : E)$ est plus grand que le rapport $(A : C)$ selon l'excès $(C : E)$, puisque $(A : E) = (A : C) * (C : E)$.

La proposition I ajoute une précision supplémentaire, puisqu'elle explique qu'un rapport donné est bien séparé ou divisé en deux rapports par

---

mis en continuité, on dit que le rapport du premier du dernier est composé de tous.). Nicole Oresme [Oresme 1966, p. 138–140 ; Rommevaux 2010, p. 80] ne donne pas de définition générale de ce type, mais renvoie à Jordanus.

21 « Seu, quod eodem redit, proportio minuitur aucto minori termino, vel diminuto majori ; augetur rationibus contrariis ». On peut rapprocher cet énoncé de ce qu'écrit Nicole Oresme [1966, p. 144 ; Rommevaux 2010, p. 82–83] : « [...] signatis duobus terminis, sicut verbi gratia A maiore, B vero minore, et sit C differentia unius ad alterum vel excessus, dico quod proportio maioris inequalitatis que est proportio A ad B augetur per augmentum differentie que est C et per diminutionem diminuitur. [...] C, vero, differentia potest dupliciter augeri. Uno modo per augmentatum A maioris termini. [...] Alio modo augetur C per diminutionem B minoris termini. » (deux termes étant donnés, par exemple A le plus grand et B le plus petit, et C étant la différence ou l'excès de l'un sur l'autre, je dis que le rapport de plus grande inégalité qui est le rapport de A à B est augmenté par l'accroissement de la différence C et est diminué par sa diminution. [...] Et C, la différence, peut être augmentée de deux manières : premièrement, par l'augmentation du plus grand terme A. [...] Deuxièmement, C augmente par la diminution du plus petit terme B.)

22 Là encore, il faut comprendre que la composition est envisagée sur le modèle d'une addition. Ainsi, dans les nombres, p est plus grand que q selon l'excès r, si $p = q + r$.

l'insertion d'un moyen terme entre les deux termes du rapport et que ces rapports sont égaux si le moyen est proportionnel [Kepler 1960, p. 280] :

> Un moyen proportionnel entre deux termes divise le rapport des termes en deux rapports égaux entre eux[23].

Dans l'explication qui suit Kepler [1960, p. 280] qualifie ces deux rapports de « parties » du rapport initial :

> En effet, si on se donne deux termes et leur moyen proportionnel, alors on a une *Analogia* ou proportionnalité entre ces trois quantités. Mais l'*Analogia* est définie comme l'égalité des rapports (τῶν λόγων), donc les rapports obtenus par la division en parties du rapport total proposé sont égaux entre eux[24].

On retrouve cette notion de partie d'un rapport dans l'axiome II [Kepler 1960, p. 280] :

> Si on a autant de quantités que l'on veut en ordre croissant, le rapport des extrêmes est divisé par les quantités intermédiaires en parties plus nombreuses d'une unité que sont les quantités intermédiaires produisant la division[25].

C'est-à-dire que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des quantités quelconques, telles que $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$, alors le rapport $(A_1 : A_n)$ est divisé en parties grâce à l'insertion entre ses termes des quantités intermédiaires $A_2, \ldots, A_{n-1}$. Notons que ces parties ne sont pas nécessairement égales si les $(A_i)_{2<i<n-1}$ ne sont pas des moyens proportionnels.

---

23 « Medium proportionale inter duos terminos dividit proportionem terminorum in duas proportiones inter se æquales ».

24 « Nam si sunt duo termini, eorumque medium proportionale : est ergò inter tres quantitates Analogia seu Proportionalitas. At Analogia definitur æqualitate τῶν λόγων, proportionum, quare proportiones sectione constitutæ, utpote partes proportionis totius propositæ, sunt inter se æquales. »

25 « Si fuerint quantitates quotcunque crescentes ordine, proportio extremarum divisa est per intermedias in partes una plures quàm sunt intermediæ, divisionem facientes. » On peut rapprocher cet énoncé de ce que dit Nicole Oresme [1966, p. 140 ; Rommevaux 2010, p. 80] : « [...] patet quod *A* proportio dividitur in duas proportiones per *D* medium assignatum. Quod si inter *B* et *C* duo media assignarentur tunc *A* proportio esset divisa in tres partes vel in tres proportiones et si tria media assignarentur tunc esset divisa in quatuor et si quatuor in quinque et sic in infinitum semper in tot partes dividitur quot media assignantur addita unitate [...] » (il est clair que le rapport A est divisé en deux rapports par *d*, le médian choisi. Et si, entre *b* et *c* [les deux termes du rapport A], sont placés deux médians, alors le rapport A est divisé en trois parties ou en trois rapports, et si sont placés trois médians, il est alors divisé en quatre, si quatre, en cinq, et il est ainsi toujours divisé indéfiniment en autant de parties que sont placés de médians plus une unité).

Nous avons vu avec Nicole Oresme que, grâce à cette division du rapport en parties en nombre quelconque par l'insertion de moyens proportionnels ou non, le rapport pouvait être considéré comme une quantité continue, c'est-à-dire divisible à l'infini. On retrouve cette même idée lorsque Kepler [1960, p. 280] justifie l'énoncé du postulat II, qui demande de diviser tout rapport en parties aussi petites que l'on veut :

> Diviser un rapport entre deux termes donnés quelconques en autant de parties que l'on veut (par exemple en parties en nombre continûment multiple selon la progression double) jusqu'à ce que les parties deviennent plus petites qu'une quantité donnée.
>
> En effet le rapport appartient aussi aux quantités continues divisibles à l'infini[26].

Dans la première partie de l'énoncé, Kepler demande que « les parties deviennent plus petites qu'une quantité donnée ». Il faut comprendre que la mesure de ces parties (qui sont des rapports obtenus par l'insertion de moyens, aussi nombreux que nécessaire, entre les termes du rapport donné) doit être plus petite qu'une quantité donnée. Notons qu'à ce stade, la mesure de ces parties n'est pas encore définie.

Notons par ailleurs qu'il ne faut pas conclure trop hâtivement de la dernière sentence que Kepler identifie le rapport à une quantité. En effet, même s'il ne précise pas ici ce qu'il entend par « rapport », nous avons vu que dans le *Supplementum* il fait sienne la définition euclidienne du rapport

---

26 « Proportionem inter datos duos terminos quoscunque dividere in partes quotcunque (ut in partes numero continuè multiplici progressionis binariæ) & eousque donec partes oriantur minores quantitate proposita. Proportio enim est etiam una ex quantitatibus continuis in infinitum dividuis. » Nicole Oresme [1966, p. 158 ; Rommevaux 2010, p. 90] écrit : « [...] quelibet proportio est sicut quantitas continua in hoc, quod in infinitum est divisibilis sicut quantitas continua, et in 2 equalia, et in 3, et in 4, et cetera, et per inequalia quomodolibet, et in partes commensurabiles et similiter in partes sibi invicem incommensurabiles, et cetera et quolibet alio modo [...] » (n'importe quel rapport est comme une quantité continue du fait qu'il est divisible à l'infini, comme la quantité continue, en deux parties égales, en trois, en quatre, etc., en parties inégales de quelque manière que ce soit, en parties commensurables et de même en parties incommensurables entre elles etc., et ainsi de n'importe quelle autre manière). Jean Fernel [1528, f° 18r] note quant à lui : « Hac igitur arte cuiusque proportionis componentes partes disquiri queunt, si inter eius terminos medium aliquod decidere donetur. [...] Est itaque proportio omnis vt continua quantitas, cuius minimam partem signare non est ; & ex infinitis proportionibus, vt proprijs partibus componitur. » (De cette manière peuvent être cherchées les parties composant n'importe quel rapport, si on se donne quelque médian qui tombe entre ses termes. [...] C'est pourquoi tout rapport est comme une quantité continue, dont une partie minimum ne peut pas être donnée ; il est composé d'une infinité de rapports, en tant que parties propres).

comme relation quantitative entre deux quantités[27]. Ce que veut dire Kepler ici est que les rapports, munis de l'opération de composition, se comportent comme des quantités continues, c'est-à-dire qu'on peut les diviser à l'infini.

Finalement, Kepler [1960, p. 282] demande, au postulat III, que l'une de ces parties ainsi obtenues soit appelée « élément minimum » du rapport initial et qu'on lui associe comme mesure la différence de ses termes :

> Mesurer ou désigner l'élément minimum d'un rapport (aussi petit qu'on se plaise à le prendre pour minimum) par une quantité quelconque, comme par la différence des termes de cet élément[28].

On comprend maintenant que ce n'est pas le quotient des termes qui est pris comme mesure du petit rapport, élément minimum du rapport donné, mais la différence de ses termes[29]. Nous verrons plus loin comment est déterminé cet élément minimum dans le cas de la recherche des Logarithmes.

À ces axiomes et postulats, on peut ajouter le postulat suivant, que Kepler utilise sans l'avoir énoncé : si on a trois quantités A, B, C avec $A > B > C$, alors

$$\mathrm{mes}(A : C) = \mathrm{mes}(A : B) + \mathrm{mes}(B : C).$$

Si B est un moyen proportionnel entre A et C, on voit comment la progression géométrique A, B, C est transformée en une progression arithmétique, puisque $\mathrm{mes}(A : B) = \mathrm{mes}(B : C)$ dans ce cas.

---

27 Voir plus haut p. 110–111. On peut noter par ailleurs que, tout au long du traité, Kepler parle indifféremment du rapport entre A et B et du rapport entre B et A, comme étant le rapport de plus grande inégalité de A à B (voir dans notre traduction du traité, la note 60). On comprend que c'est la relation quantitative entre les deux termes qui l'intéresse, quel que soit l'ordre de ces termes. De fait, il cherche la mesure des rapports de 1000 aux entiers plus petits.

28 « Minimum proportionis elementum quantulum pro minimo placuerit, metiri seu signare per quantitatem quamcunque, ut per excessum terminorum hujus Elementi. »

29 À ce propos, C. Naux [1966, tome 1, p. 145–146] fait une remarque, qui explique la grande réticence qu'il a à accepter le projet de Kepler, qu'il juge à l'aune des mathématiques de son temps : « La convention selon laquelle mesure $\frac{a}{b} = |a - b|$ n'a rien de répréhensible en elle-même. Le mathématicien a toujours eu le droit de formuler des hypothèses ou de composer des définitions, pour en tirer parti, et rien n'interdisait à Kepler ce choix auquel il s'est rallié pourvu qu'il sache en faire bon usage. Cette mesure nous semble aujourd'hui factice, osée et même mal venue ; parce qu'elle heurte le courant de confiance créé dans notre algèbre par le succès durable et sans tache de notre convention mesure $\frac{a}{b}$ égale quotient de a par b. ».

Ce postulat est utilisé par Kepler dans la démonstration de la proposition V, nous y reviendrons. Il est aussi clairement mis en œuvre dans l'exemple numérique qui illustre cette proposition. Kepler [1960, p. 283] explique en effet :

> Soient les nombres 1000, 900, 810, 729 continûment proportionnels. Les plus grands sont 1000 et 900. Leur différence est 100. Que ce soit la mesure arbitraire du rapport 1000, 900[30]. Ce sera alors la mesure du rapport 900, 810 et du rapport 810, 729. Donc, la mesure du rapport composé entre 1000 et 729 sera 300, car on a trois éléments égaux du rapport grâce à deux moyens proportionnels, d'après l'axiome II[31].

La mesure du rapport $(1000:729)$ est la somme des mesures des rapports intermédiaires $(1000 : 900)$, $(900 : 810)$ et $(810 : 729)$, qui toutes valent 100, par hypothèse. Donc, la mesure du rapport composé vaut 300.

Dans la proposition VI, Kepler applique cette même propriété sur un autre exemple, celui des nombres proportionnels 100000, 90000, 81000, 72900, 65610, 59049. Cette fois, il pose arbitrairement que c'est le rapport $(100000:72900)$ qui a pour mesure la différence de ses termes, soit 27100. Il remarque alors que les mesures des rapports $(100000:90000)$, $(90000:81000)$ et $(81000:72900)$ sont toutes égales au tiers de 27100, soit $9033+\frac{1}{3}$, car :

$$(100000:72900) = (100000:90000) * (90000:81000) * (81000:72900).$$

Il remarque aussi que la mesure du rapport $(100000:81000)$ est le double de $9033+\frac{1}{3}$, soit $18066+\frac{2}{3}$, car ce rapport est composé des deux rapports $(100000:90000)$ et $(90000:81000)$ de mesures égales à $9033+\frac{1}{3}$. Enfin, le rapport $(100000 : 59049)$ étant composé de cinq rapports de mesures égales à $9033+\frac{1}{3}$ a pour mesure cinq fois celle-ci, soit $45166+\frac{2}{3}$.

Tous ces exemples montrent bien que la mesure d'un rapport composé est la somme des mesures des rapports qui le composent.

Il nous faut aussi ajouter une dernière propriété, là encore utilisée par Kepler, mais non explicitée : si A, B, C, D sont quatre quantités telles

---

30 Pour les notations utilisées par Kepler, voir notre note, à cet endroit, dans notre traduction.

31 « Sint numeri 1000. 900. 810. 729. continuè proportionales. Maximi sunt 1000. 900. Eorum differentia est 100. Sit hæc mensura arbitraria proportionis 1000. 900. Erit igitur etiam mensura hæc proportionis 900. 810. & proportionis 810. 729. Compositæ [composita *in* Hammer] igitur proportionis inter 1000. & 729. mensura erit 300. quia elementa æqualia proportionis tria sunt, per duos medios [duas medias *in* Hammer] proportionales per Axioma 2. »

que $A > B$ et $C > D$, on a :

$$(A : B) > (C : D) \text{ si et seulement si } \mathrm{mes}(A : B) > \mathrm{mes}(C : D).$$

On peut la démontrer facilement. Il suffit de déterminer E telle que

$$(A : B) = (C : D) * (D : E),$$

et de remarquer que

$$\mathrm{mes}(A : B) = \mathrm{mes}(C : D) + \mathrm{mes}(D : E).$$

Kepler [1960, p. 288] utilise explicitement ce résultat en particulier dans la preuve de la proposition XI. On peut y lire :

> [...] le rapport 8, 13 est plus grand que 8, 12 et 13, 18 est plus petit que 12, 18, l'un et l'autre selon la quantité du petit rapport entre les termes 12, 13[32].

Il faut comprendre que $(13 : 8) = (13 : 12) * (12 : 8)$, donc $(13 : 8)$ est plus grand que $(12 : 8)$ selon la quantité ou la mesure de $(13 : 12)$. De même, $(18 : 12) = (18 : 13) * (13 : 12)$, donc $(18 : 13)$ est plus petit que $(18 : 12)$ selon la quantité de $(13 : 12)$.

Ces postulats, axiomes et propriétés forment le cadre de la théorie képlérienne de la mesure des rapports. Nous pouvons le résumer ainsi :

1) Les rapports sont bien des relations mais l'ensemble des rapports muni de l'opération de composition se comporte comme l'ensemble des quantités continues (c'est-à-dire divisibles à l'infini) muni de l'addition. En particulier, tout rapport est indéfiniment divisible par l'insertion de moyens (proportionnels ou non) entre ses termes.

2) À tout rapport est associée une quantité qui en est sa mesure et deux rapports égaux ont des mesures égales.

3) La mesure d'un rapport composé est la somme des mesures des rapports qui le composent.

4) Un rapport est plus grand qu'un autre rapport, si et seulement si sa mesure est plus grande que la mesure de l'autre rapport.

Ces quatre premiers points définissent les principes généraux d'une théorie de la mesure des rapports. Kepler ne donne pas à proprement parler de définition de cette mesure, mais à partir des axiomes et des propositions qui suivent on peut comprendre qu'il l'envisage de la manière suivante : Kepler choisit un rapport de référence, notons-le $(\alpha : \beta)$, pour lequel il pose que, par définition, la mesure est la différence de ses

---

32 « proportio 8. 13. major est quàm 8. 12, & 13. 18 minor, quàm 12. 18, quantitate utrinque parvæ proportionis inter terminos 12. 13. »

termes : $\text{mes}(\alpha:\beta) = \alpha - \beta$. Dans la suite du traité, ce rapport de référence est choisi en fonction des données du problème et peut donc changer selon les cas envisagés, ce qui rend parfois la lecture du texte malaisée. Ce rapport de référence est appelé « élément minimum » quand il est déterminé comme partie d'un rapport donné et tel que sa mesure est plus petite qu'un nombre donné (ce sera le cas dans la construction des Logarithmes, comme nous le verrons). Théoriquement, la mesure de tous les rapports est alors définie à partir ce rapport de référence : étant donné un rapport $(A:B)$, on détermine x tel que $(A:B) = x.(\alpha:\beta) = (\alpha^x:\beta^x)$, alors $\text{mes}(A:B) = x.\text{mes}(\alpha:\beta) = x.(\alpha-\beta)$. Notons que si $(A:B)$ et $(\alpha:\beta)$ ne sont pas commensurables, x ne sera pas rationnel, de sorte qu'il est impossible de donner une valeur exacte de la mesure, même si A, B, α et β sont des entiers. C'est à ce cas que Kepler sera confronté dans sa construction du Logarithme des nombres de la chiliade, défini comme la mesure du rapport $(1000 : n)$ pour tout n entre 1 et 999. Nous verrons comment il résout cette difficulté pour donner une valeur approchée des Logarithmes.

Le cadre étant ainsi fixé, voyons maintenant quelles sont les propriétés de cette mesure des rapports.

3. PROPRIÉTÉS DE LA MESURE DES RAPPORTS

Comparaison de la mesure d'un rapport et de la différence de ses termes dans le cas où ce rapport est commensurable au rapport de référence

Kepler commence par proposer une série de propositions dans lesquelles il compare la mesure d'un rapport avec la différence de ses termes, après qu'un rapport de référence a été fixé. Il a besoin pour ce faire de deux lemmes, soit la proposition II qui explique que si l'on a trois quantités A, B, C continûment proportionnelles, avec $A > B > C$, alors

$$(A:B) = (B:C) = (A-B:B-C),$$

et la proposition III selon laquelle, si on a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des quantités continûment proportionnelles, telles que

$$A_1 > A_2 > \cdots > A_i > A_{i+1} > \cdots > A_{n-1} > A_n,$$

alors

$$A_1 - A_2 > \cdots > A_i - A_{i+1} > \cdots > A_{n-1} - A_n.$$

Maintenant, si l'on doit déterminer la mesure d'un rapport à partir de celle, donnée, d'un autre rapport, le cas le plus simple est lorsque le rapport dont on cherche la mesure est égal au rapport dont la mesure a été choisie ; d'après le postulat I leurs mesures sont égales.

C'est le cas dans la proposition IV, dans laquelle, si l'on se donne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des quantités continûment proportionnelles, avec $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$, et si l'on prend comme rapport de référence $(A_1 : A_2)$, le rapport entre les plus grandes (sa mesure est alors la différence de ses termes $A_1 - A_2$), on cherche à comparer la mesure du rapport entre deux quantités qui se suivent, A_i, A_{i+1} et leur différence.

On a par hypothèse :

$$(A_i : A_{i+1}) = (A_1 : A_2).$$

Donc

$$\operatorname{mes}(A_i : A_{i+1}) = \operatorname{mes}(A_1 : A_2) = A_1 - A_2.$$

Par ailleurs, on a vu que $A_i - A_{i+1} < A_1 - A_2$, donc

$$A_i - A_{i+1} < \operatorname{mes}(A_i : A_{i+1}).$$

Bien évidemment, dans le texte de Kepler, l'énoncé et la preuve sont rhétoriques et Kepler n'utilise pas un système de lettres indiciées comme nous l'avons fait, mais la preuve suit le schéma décrit précédemment.

La détermination de la mesure d'un rapport est à peine plus compliquée si le rapport de référence est une partie de ce rapport, cas examiné dans la proposition V. Dans celle-ci, en reprenant les notations précédentes et en choisissant toujours comme rapport de référence le rapport entre les plus grandes $(A_1 : A_2)$, on cherche cette fois à déterminer la mesure du rapport entre la plus grande A_1 et n'importe quelle autre quantité A_j $(3 < j < n)$.

On remarque que :

$$(A_1 : A_j) = (A_1 : A_2) * (A_2 : A_3) * \cdots * (A_{j-1} : A_j).$$

Donc

$$\operatorname{mes}(A_1 : A_j) = \operatorname{mes}(A_1 : A_2) + \operatorname{mes}(A_2 : A_3) + \cdots + \operatorname{mes}(A_{j-1} : A_j).$$

Mais tous ces rapports sont égaux entre eux et valent $(A_1 : A_2)$, dont la mesure a été posée égale à $A_1 - A_2$. Alors

$$\operatorname{mes}(A_1 : A_j) = (j-1)(A_1 - A_2).$$

Par ailleurs, on a vu que pour tout i, $2 < i < n$, on a $A_1 - A_2 > A_i - A_{i+1}$, donc

$$A_1 - A_j = A_1 - A_2 + A_2 - A_3 + \cdots + A_{j-1} - A_j < (j-1)(A_1 - A_2).$$

Et par conséquent

$$A_1 - A_j < \text{mes}(A_1 : A_j).$$

L'écriture formelle actuelle rend la démonstration aisée à comprendre et, là encore, au fondement de la preuve est la propriété selon laquelle, si un rapport est décomposé en parties, sa mesure est la somme des mesures de ses parties. Il est sans doute moins aisé pour un lecteur moderne de suivre la preuve de Kepler.

Enfin, la proposition VI présente le cas plus complexe où le rapport dont on cherche la mesure est des parties du rapport de référence. On se donne là encore $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des quantités continûment proportionnelles, telles que $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$, mais on prend comme rapport de référence le rapport entre la plus grande A_1 et une autre A_k qui ne la suit pas immédiatement $(2 < k < n-1)$; donc $\text{mes}(A_1 : A_k) = A_1 - A_k$. On cherche à déterminer la mesure du rapport $(A_1 : A_i)$ avec $A_i > A_k$ (donc $i < k$) et la mesure du rapport $(A_1 : A_j)$ avec $A_j < A_k$ (donc $j > k$).

Commençons par $(A_1 : A_i)$. On a :

$$(A_1 : A_i) = (A_1 : A_2) * (A_2 : A_3) * \cdots * (A_{i-1} : A_i),$$

et tous les rapports sont égaux à $(A_1 : A_2)$.

Donc

$$(A_1 : A_i) = (i-1)(A_1 : A_2).$$[33]

De même

$$(A_1 : A_k) = (k-1)(A_1 : A_2).$$

Ainsi, $(A_1 : A_i)$ est une $k-1$-ième partie de $(A_1 : A_k)$ et il y en a $i-1$. Par conséquent :

$$\text{mes}(A_1 : A_i) = (i - 1/k - 1)(A_1 - A_k).$$

Et on a

$$(i - 1/k - 1)(A_1 - A_k) < (A_1 - A_i).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(i-1)(A_1 - A_k) &= (i-1)[(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{k-1} - A_k)] \\
&= [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{k-1} - A_k)] \\
&\quad + [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{k-1} - A_k)] \qquad (1) \\
&\quad + \cdots + [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{k-1} - A_k)].
\end{aligned}$$

[33] Comme nous l'avons expliqué plus haut, à propos de la théorie oresmienne, nous notons $n.(A:B)$ le composé de n rapports égaux à $(A:B)$, afin de garder le parallèle fait, dans cette théorie des rapports, entre la composition des rapports et l'addition des nombres.

On répète $i-1$ fois la somme $[(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{k-1} - A_k)]$.

De même,

$$\begin{aligned}(k-1)(A_1 - A_i) &= (k-1)[(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{i-1} - A_i)] \\ &= [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{i-1} - A_i)] \\ &\quad + [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{i-1} - A_i)] \\ &\quad + \cdots + [(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{i-1} - A_i)].\end{aligned} \tag{2}$$

On répète $k-1$ fois la somme $[(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \cdots + (A_{i-1} - A_i)]$.

On remarque qu'on a le même nombre de termes dans les deux sommes (1) et (2), soit $(i-1)(k-1)$, et que chaque terme de la somme (2) est plus grand ou égal à chaque terme de la somme (1), puisque $A_i > A_{i-1} > \cdots > A_{k+1} > A_k$.

Donc

$$(i-1)(A_1 - A_k) < (k-1)(A_1 - A_i).$$

Le raisonnement est le même pour $(A_1 : A_j)$ avec $A_j < A_k$.

Kepler mène la démonstration en prenant quatre quantités. Son raisonnement n'est pas immédiatement transposable au cas général, comme nous venons de le faire. Notamment, on n'y trouve pas la dernière étape de la preuve donnée précédemment, dans laquelle on décompose $(i-1)(A_1 - A_k)$ et $(k-1)(A_1 - A_i)$ en sommes de termes en nombres égaux[34].

Ces trois propositions montrent qu'il est possible de déterminer la mesure d'un rapport et de comparer sa mesure à la différence de ses termes, si ce rapport est soit égal, soit une partie, soit des parties du rapport de référence, en d'autres termes, si le rapport est commensurable au rapport de référence. Il s'agit maintenant de voir ce qu'il advient dans le cas général. Kepler poursuit son exposé avec une série de propositions sur la commensurabilité et l'incommensurabilité des rapports entre eux.

Critère de commensurabilité des rapports entre eux

Pour commencer, Kepler [1960, p. 286] remarque, à la proposition VIII, que :

> Si sont mises à la suite selon l'ordre de la grandeur des quantités quelconques dont les intermédiaires ne sont pas parmi les moyennes proportionnelles selon un rapport quelconque, [...] de telles intermédiaires ne divisent pas le rapport des extrêmes en rapports commensurables[35].

---

34 Je remercie André Warusfel qui m'en a fait la remarque.

35 « Si quantitates quæcunque deinceps collocentur, ordine magnitudinis, quarum quæ intermediæ, non sint inter proportionales medias, proportionis cujuscunque,

Kepler définit alors les rapports commensurables : ce sont ceux qui « ont une mesure commune que n'importe lequel contient exactement un certain nombre de fois selon un certain nombre ». Et il précise que « la mesure commune des rapports est quelque rapport plus petit que chacun des rapports à mesurer ». Il faut faire attention que le terme « mesure » a deux sens dans le texte de Kepler : il s'agit soit d'une quantité que l'on associe à un rapport, comme cela a été postulé dès le début du traité, soit d'un rapport dans le cas où on parle de mesure commune à deux rapports. Kepler [1960, p. 286] explique alors que :

> Et un rapport mesurant, par sa répétition, un autre rapport commence à l'un des termes du rapport à mesurer et lui en associe un autre, en tant que quantité plus petite, puis celui-ci étant pris pour antécédent, un autre est posé comme conséquent, et cela à plusieurs reprises, jusqu'à ce qu'on épuise la quantité du rapport à mesurer[36].

En d'autres termes, si $(A{:}B)$ mesure le rapport $(A{:}C)$, avec $A > B > C$, alors il existe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tels que

$$(A : C) = (A : C_1) * (C_1 : C_2) * \cdots * (C_{n-1} : C_n) * (C_n : C)$$

avec

$$(A : C_1) = (C_1 : C_2) = \cdots = (C_n : C) = (A : B).$$

Et Kepler [1960, p. 286] remarque que les quantités $A, C_1, C_2, \ldots, C_n, C$ sont continûment proportionnelles :

> Et un rapport est dit mesurer exactement un rapport, quand dans cette interposition continue et cet ajustement des termes, le dernier terme du rapport mesurant coïncide à la fin avec le second terme du rapport mesuré en quantité. C'est pourquoi cette identité du rapport servant à mesurer, répété continûment, produit des termes continûment proportionnels, d'après la proposition VII[37].

Kepler [1960, p. 286] en déduit un critère de commensurabilité de deux rapports donnés :

[...] : intermediæ tales, proportionem extremarum non dividunt in commensurabilia ».

36 « 4. & Proportio repetitione sui, mensurans aliam proportionem, incipit ab uno mensurandæ termino, eique sociat alium, pro ratione quantitatis suæ minoris : tum illo jam pro antecedenti sumpto, statuit alium consequentem, hoc identidem, quoadusque permeatur proportionis mensurandæ quantitas ».

37 « 5. Et proportio proportionem exactè mensurare dicitur, quando in hâc continuâ terminorum interpositione & coaptatione tandem ultimus terminus proportionis mensurantis, cum secundo termino mensuratæ coincidit in quantitate. Igitur identitas illa proportionis mensurantis continuè repetitæ efficit, terminos continuè proportionales per 7. Prop. »

> Donc, si quelque rapport mesure exactement deux rapports, il est nécessaire que les termes, que le rapport mesurant interpose, soient continûment proportionnels avec les termes des rapports à mesurer[38].

En d'autres termes, soient $(A:C)$ et $(A:D)$ deux rapports, avec $A > C$ et $A > D$. Supposons que $(A:B)$ mesure l'un et l'autre (de sorte que les rapports sont commensurables), alors, d'après ce qui précède, il existe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tels que

$$(A:C) = (A:C_1) * (C_1:C_2) * \cdots * (C_n:C)$$

avec

$$(A:C_1) = (C_1:C_2) = \cdots = (C_n:C) = (A:B)$$

et $D_1, D_2, \ldots, D_n$, tels que

$$(A:D) = (A:D_1) * (D_1:D_2) * \cdots * (D_n:D)$$

avec

$$(A:D_1) = (D_1:D_2) = \cdots = (D_n:D) = (A:B).$$

C'est-à-dire que les quantités $A, C_1, C_2, \ldots, C_n, C$ d'une part et $A, D_1, D_2, \ldots, D_n, D$ d'autre part sont proportionnelles[39]. Si ce n'est pas le cas, les rapports initiaux sont incommensurables [Kepler 1960, p. 286] :

> Si, donc, aucun rapport, aussi petit soit-il, ne peut être trouvé, qui, par sa répétition, atteigne les derniers termes des rapports à mesurer, de sorte que aussi bien le plus grand terme de la mesure commune que les deux plus petits termes des rapports à mesurer soient continûment proportionnels avec les termes interposés du rapport mesurant, ces rapports sont entre eux incommensurables[40].

---

38 « Ergò si proportio aliqua duas proportiones exactè metitur, necesse est, ut termini, quos ipsa mensurans interponit, sint cum ipsius mensurandæ terminis continuè proportionales. ».

39 On peut rapprocher cet énoncé du critère donné par Nicole Oresme (voir plus haut). Jean Fernel, quant à lui, propose, dans un premier temps, d'appliquer l'algorithme d'Euclide afin de rechercher un plus petit diviseur commun aux deux rapports donnés afin de déterminer s'ils sont commensurables ou non [Rommevaux 2013, p. 178]. Mais il ajoute aussi le critère avec les médians [Fernel 1528, f° 19r] : « omnes duae proportiones commensurabiles sunt, si inter primos terminos maioris illarum unus vel plures cadunt medij proportionales proportione altera minori vel eius parte aliquota : quod si nulli medij hoc modo proportionales inter primos terminos ceciderint, datae proportiones incommensurabiles erunt. » (deux rapports quelconques sont commensurables, si entre les premiers termes du plus grand d'entre eux tombent un ou plusieurs médians proportionnels selon l'autre rapport plus petit, ou selon une partie aliquote. Et si on ne trouve aucuns médians proportionnels de cette manière entre les premiers termes, les rapports donnés seront incommensurables.)

40 « Si ergò nulla unquam, quantumvis parva proportio potest inveniri, quæ repetitione sui, terminos ultimos assequatur proportionum mensurandarum, sic ut tam major communis terminus, quàm duo minores proportionum mensurandarum sint cum

La proposition IX propose finalement un critère simple pour déterminer si entre deux longueurs exprimables (ou rationnelles) tombent $n-1$ moyennes proportionnelles exprimables : il faut que ces longueurs soient dans le même rapport que deux nombres x et y tels que $x = a^n$ et $y = b^n$ (où a et b sont des entiers). Kepler ne précise pas que les moyens proportionnels entre x et y sont alors tous les $(a^i b^{n-i})_{(1<i<n-1)}$.

De la proposition précédente, Kepler déduit immédiatement la proposition X qui offre un critère de division d'un rapport en rapports commensurables ; il faut que les termes de ce rapport soient la même puissance de deux entiers.

Finalement, la proposition XI explique que si l'on a trois quantités $A > B > C$ en progression arithmétique ($A - B = B - C$), les rapports $(A : B)$ et $(B : C)$ sont incommensurables entre eux. Kepler ne mène pas la démonstration dans le cas général, mais se contente de l'exemple des nombres 8, 13 et 18. Nous ne reprenons pas ici cette démonstration, qui est simple mais laborieuse.

Comparaison des mesures des rapports entre des quantités quelconques

Ces prémisses étant établies, la proposition XII revient sur la comparaison entre mesure d'un rapport et différence des termes de ce rapport, lorsque ces termes appartiennent à une série de quantités qui ne sont plus nécessairement proportionnelles, comme dans les propositions IV à VI, mais quelconques.

Considérons des quantités quelconques $B_1, B_2, \dots, B_n$, telles que $B_1 > B_2 > \cdots > B_n$. Si l'on prend comme rapport de référence le rapport entre les plus grandes $(B_1 : B_2)$ (sa mesure est $B_1 - B_2$), on démontre que, pour deux autres quantités B_i et B_j (avec $B_i > B_j$), on a $B_i - B_j < \text{mes}(B_i : B_j)$. Mais si on prend comme rapport de référence le rapport entre les plus petites $(B_{n-1} : B_n)$ (sa mesure est $B_{n-1} - B_n$), alors, pour deux autres quantités B_k et B_ℓ (avec $B_k > B_\ell$), on a $B_k - B_\ell > \text{mes}(B_k : B_\ell)$.

Deux cas se présentent : soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont continûment proportionnelles, soit non. Pour le premier cas, Kepler [1960, p. 288] précise que si, dans la suite des $(B_i)_{(1>i>n)}$, il manque des quantités de la progression géométrique, on peut les ajouter et ce cas se démontre immédiatement en appliquant les propositions III et IV.

---

mensurantis terminis interpositis continuè proportionales : proportiones illæ sunt inter se incommensurabiles. »

Par contre, dans le second cas, où les quantités $(B_i)_{(1>i>n)}$ ne sont pas proportionnelles, Kepler [1960, p. 288] a recours à un argument très expéditif :

> Ou bien elles ne sont pas continûment proportionnelles, de sorte qu'elles produisent des parties incommensurables, et alors, par une conception de l'esprit, elles semblent être divisées en une infinité de petites parties égales grâce à une infinité de moyennes proportionnelles interposées. Elles sont ainsi ramenées à celles qui sont continûment proportionnelles en acte par la même force de démonstration[41].

Ici, Kepler est confronté au problème des rapports incommensurables. On a vu plus haut que si deux rapports sont commensurables, l'un est une partie ou des parties de l'autre et par conséquent la mesure de l'un est la même partie ou les mêmes parties de la mesure de l'autre. Mais que se passe-t-il si les deux rapports sont incommensurables, notamment si, pour les fractions correspondantes à ces rapports, on a $\frac{A}{B} = \left(\frac{C}{D}\right)^x$, avec x irrationnel ?[42] On souhaiterait avoir aussi

$$\mathrm{mes}(A : B) = x.\mathrm{mes}(C : D).$$

C'est ce cas que Kepler envisage ici. Il suggère alors que l'on peut se ramener au cas des quantités continûment proportionnelles par une division infinie. Le développement du calcul infinitésimal à son époque lui aurait sans doute permis de produire une démonstration plus détaillée, mais il est bien optimiste lorsqu'il prétend que ce serait avec la même force de conviction que dans le cas des rapports commensurables.

Pour les propositions XIII à XV, Kepler considère trois quantités quelconques (notons-les A, B et C, avec $A > B > C$[43]) et il compare les mesures de leurs rapports. Ainsi, dans la proposition XIII, il démontre que le rapport entre les plus petites, $(B{:}C)$, est contenu moins de fois dans le rapport entre les extrêmes, $(A : C)$, que la différence entre les plus petites, $B - C$, est contenue dans la différence entre les extrêmes, $A - C$.

---

41 « Aut non sunt in proportione continua, sic ut partes constituant incommensurabiles : & tunc conceptione mentis in infinitas particulas æquales secari intelligerentur per interpositas infinitas medias proportionales : ita redigentur cum iis, quæ actu sunt continuè proportionales ad eandem vim demonstrationis. »

42 Nicole Oresme avait eu l'intuition que tous les rapports irrationnels n'étaient pas nécessairement une partie ou des parties d'un rapport rationnel. Mais il avouait son impuissance à le démontrer correctement [Rommevaux 2010, p. xxxv-xxxvi].

43 Kepler représente les quantités en question par des lignes. Pour ne pas alourdir le propos et pour le rendre plus immédiatement compréhensible, nous désignerons les trois quantités par A, B et C.

Dans cette proposition, il est donc question d'un rapport contenu un certain nombre de fois dans un autre rapport. Rappelons que si l'on a trois quantités quelconques, $A > B > C$, $(B : C)$ est contenu exactement k fois dans $(A : C)$, si

$$(A : C) = k(B : C) * (E : F)$$

avec $(E : F) < (B : C)$ et où $k(B : C)$ est le rapport $(B : C)$ composé par lui-même $k - 1$ fois, soit $(B^k : C^k)$. On remarque que l'on a aussi :

$$\mathrm{mes}(A : C) = k\mathrm{mes}(B : C) + \mathrm{mes}(E : F),$$

avec $\mathrm{mes}(E : F) < \mathrm{mes}(B : C)$, de sorte que $\mathrm{mes}(B : C)$ est lui aussi compris exactement k fois dans $\mathrm{mes}(A : C)$. Ainsi, comparer les rapports revient à comparer leurs mesures.

Dans la proposition XIII, le rapport de référence est celui entre les plus petites, $(B : C)$, de sorte que :

$$\mathrm{mes}(B : C) = B - C.$$

D'après la proposition XII, on a :

$$\mathrm{mes}(A : C) < A - C.$$

Par conséquent $\mathrm{mes}(B : C)$ est contenu moins de fois dans $\mathrm{mes}(A : C)$ que dans $A - C$. Ou encore, puisque $\mathrm{mes}(B : C) = B - C$, $\mathrm{mes}(B : C)$ est contenu moins de fois dans $\mathrm{mes}(A : C)$, que $B - C$ dans $A - C$. Donc, le rapport $(B : C)$ est contenu moins de fois dans le rapport $(A : C)$ que $B - C$ dans $A - C$, ce qu'il fallait démontrer[44].

Par ailleurs, toujours d'après la proposition XII, on a :

$$\mathrm{mes}(A : B) < A - B.$$

Si l'on suppose de plus que $A - B = B - C$, on a alors :

$$\mathrm{mes}(A : B) < B - C.$$

Mais $B - C$ est la mesure de $(B : C)$ par hypothèse, donc :

$$\mathrm{mes}(A : B) < \mathrm{mes}(B : C)$$
$$\text{ou} \quad (A : B) < (B : C).$$

C'est ce qu'énonce le corollaire à la proposition XIII.

---

44 Hammer, l'éditeur des *Œuvres complètes* de Kepler, explique que ce dernier déduit, de manière erronée, la propriété sur les rapports à partir de la propriété sur les mesures [Kepler 1960, p. 477] : « Nach Lehrsatz 13 bestehen zwischen den drei Größen $a > u > b$ die Ungleichungen $\{\frac{a}{b}\} : \{\frac{u}{b}\} < \frac{a-b}{u-b}$ und $\{\frac{a}{b}\} : \{\frac{a}{u}\} < \frac{a-b}{a-u}$ [Hammer note $\{\frac{a}{b}\}$ la mesure du rapport entre a et b], woraus Kepler irrtümlich schließt, daß dieselben Ungleichungen auch für die Verhälnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{u}$ und $\frac{a}{b}$ gelten »). Mais,

Pour la proposition XIV, on se place toujours dans l'hypothèse $A - B = B - C$. D'après le corollaire précédent, on a :

$$(A:B) < (B:C).$$

$$\text{Or} \quad (A:C) = (A:B) * (B:C),$$

$$\text{donc} \quad (A:C) > 2(A:B).$$

On déduit immédiatement du résultat précédent le corollaire :

$$(A:B) < \tfrac{1}{2}(A:C) < (B:C).$$

On rappelle qu'un rapport S est la moitié d'un rapport R, si S composé avec lui-même donne R, de sorte que $1/2(A{:}C) = (\sqrt{AC}{:}C) = (A{:}\sqrt{AC}) = (\sqrt{A} : \sqrt{C})$.

La proposition XV est une application directe de la proposition précédente aux trois quantités $A, B, 2B - A$, qui forment une progression arithmétique. On a ainsi :

$$(\tfrac{A}{2} : B - \tfrac{A}{2}) > 2(A:B).^{45}$$

Kepler se contente de le montrer sur un exemple numérique.

---

lorsqu'il analyse cette proposition [Kepler 1960, p. 543–544], on remarque qu'il identifie les rapports à des fractions. Ainsi, il transcrit l'énoncé de la proposition de cette manière : « Sind $a < b < c$ die drei Größen, dann behauptet Kepler

$$1. \quad \frac{c}{a} : \frac{b}{a} < \frac{c-a}{b-a} \qquad 2. \quad \frac{c}{a} : \frac{c}{b} < \frac{c-a}{c-b}. »$$

Et ce qu'il note $\frac{c}{a} : \frac{b}{a}$ est le quotient entre les fractions, comme on peut le voir un peu plus loin lorsqu'il prend pour a, b et c les termes de la série géométrie, a, $a.q^m$ et $a.q^n$. Alors, $\frac{c}{a} : \frac{b}{a}$ devient $\frac{q^n}{q^m}$. Or, pour déterminer combien de fois un rapport $(B{:}C)$ est contenu dans un rapport $(A:C)$, il ne convient pas de diviser la fraction $\frac{A}{C}$ par la fraction $\frac{B}{C}$. Prenons un exemple. Soient les nombres 1, 9 et 87. On a $(87:1) = (87{:}81)*(81{:}1)$ avec $(81{:}1) = 2.(9{:}1)$ et $(87{:}81) < (9{:}1)$. Donc, le rapport $(87{:}1)$ contient deux fois le rapport $(9{:}1)$. Par contre, si l'on considère les fractions correspondantes, on a : $\frac{87}{1} = 9 \times \frac{9}{1} + 6$. La fraction $\frac{87}{1}$ contient la fraction $\frac{9}{1}$ neuf fois.

45 Hammer [Kepler 1960, p. 544] reproche à Ch. Frish, l'éditeur des *Opera omnia* de Kepler [1868], d'avoir mal compris les énoncés des propositions XIV et XV lorsque ce dernier les transcrit, selon Hammer, de la manière suivante $\frac{a}{c} > 2(\frac{a}{b})$ et $\frac{a}{2} : (b - \frac{a}{2}) > 2(\frac{b}{a})$, alors que Hammer écrit quant à lui : $\frac{a}{c} > (\frac{a}{b})^2$ et $\frac{a/2}{b-a/2} > (\frac{b}{a})^2$. Bien évidemment, les deux premières inégalités, attribuées à Frisch par Hammer, sont fausses. Mais Hammer n'a pas repris fidèlement les notations de Frisch. Ce dernier écrit en effet [Kepler 1868, p. 312] : « prop. 14 demonstratur, si $a - b = b - c$, esse $a{:}c > 2(a{:}b)$, prop. 15 : data ratione $a{:}b$, erit $\frac{a}{2} : b - \frac{a}{2} > 2(a{:}b)$. » Il note $a{:}b$ le rapport de a à b. Ce ne sont donc pas les fractions qu'il considère ici, comme le fait Hammer, mais bien les rapports, pour lesquels la notation $2(a{:}b)$ peut se justifier, comme nous l'avons vu (Frisch ne le fait pas), et n'est pas équivalente à $2(\frac{a}{b})$.

4. CONSTRUCTION DES LOGARITHMES DES NOMBRES DE LA CHILIADE

Détermination de la mesure du rapport de 1000 aux entiers supérieurs à 500

Kepler a maintenant tous les éléments en main pour construire les Logarithmes des nombres n de la chiliade, qu'il va définir à partir de la mesure des rapports $(1000 : n)$. Le principe de la construction est le suivant : Kepler commence par déterminer la mesure de $(1000 : 999)$. Pour cela il lui faut choisir un rapport de référence, notons-le $(\alpha_1 : \beta_1)$, dont la mesure est alors, par définition, égale à $\alpha_1 - \beta_1$. Kepler construit ce rapport comme partie de $(1000 : 999)$, telle que sa mesure soit plus petite qu'une quantité donnée k ; c'est donc un élément minimum. Kepler remarque alors que le rapport $(1000 : 998)$ est incommensurable au rapport $(1000 : 999)$ de sorte qu'il ne peut calculer sa mesure à partir de l'élément minimum de celui-ci. Il construit alors un deuxième élément minimum, $(\alpha_2 : \beta_2)$, partie de $(1000 : 998)$, tel que là encore sa mesure, $\alpha_2 - \beta_2$, soit plus petite que k. Et ainsi de suite pour tous les entiers jusqu'à 500 (Kepler remarque qu'on peut déduire facilement les mesures des rapports $(1000 : m)$, avec $m < 500$ à partir des autres).

Très tôt dans le traité, en illustration du postulat II présentant la mesure de l'élément minimum, Kepler propose l'exemple du calcul de la mesure du rapport de 10 à 7 (ou de 1000 à 700)[46]. N'ayant pas recours à l'écriture décimale, il déroule l'exemple sur ce qu'il appelle des nombres étendus (*numeri prolongati*), soit les nombres qu'il note 100000.00000.00000.00000 (ou, en écriture moderne, 10^{20}) et 70000.00000.00000.00000 (ou $7 \cdot 10^{19}$) ; la mesure du rapport entre ces deux grands nombres est par hypothèse la même que la mesure du rapport entre 10 et 7. Kepler détermine le moyen proportionnel entre les deux nombres étendus, soit $a_1 = 83666.00265.34075.54820$ (il arrondit à l'unité la plus proche et par conséquent le fait de prendre des nombres étendus lui permet une précision plus grande dans les calculs). Il calcule ensuite le moyen proportionnel entre 100000.00000.00000.00000 et ce premier moyen a_1, soit $a_2 = 91469.12192.28694.43920$, puis entre 100000.00000.00000.00000 et a_2, et ainsi de suite, trente fois. Il obtient à la trentième étape le nombre $a_{30} = 99999.99996.67820.56900$ $(= \sqrt[2^{30}]{0{,}7} \cdot 10^{20})$. Alors, le rapport de 100000.00000.00000.00000 à a_{30} est la 2^{30}-ième partie du rapport initial entre 100000.00000.00000.00000 et 70000.00000.00000.00000. Kepler décide de s'arrêter ici et prend comme

46 La description de l'exemple et le tableau se trouvent insérés entre les pages 4 et 5 de l'édition de 1624. Voir notre traduction p. 157.

rapport de référence ce dernier petit rapport, qu'il nomme élément minimum, dont la mesure est alors, par définition, la différence entre ses termes, soit 00000.00003.32179.43100. La mesure du rapport entre 100000.00000.00000.00000 et 70000.00000.00000.00000 vaut 2^{30} fois la différence 00000.00003.32179.43100, soit 35667.49481.37222.14400. Kepler précise que ce dernier nombre est le Logarithme du nombre 70000.00000.00000.00000 (Logarithme qu'il n'a pas encore défini à ce stade). On remarque que la détermination du Logarithme nécessite ici l'extraction successive de 30 racines carrées[47].

Suivant ce même schéma, Kepler explique à la proposition XVII, comment déterminer les mesures des rapports pour les nombres de 999 à 500. Le procédé a l'avantage d'être systématique, mais il est laborieux puisqu'il oblige à déterminer autant d'éléments minimaux que de rapports et à calculer un nombre très important de moyens proportionnels. D'ailleurs, à ce stade, Kepler ne donne pas la valeur approchée des Logarithmes ; il se contente d'expliquer quels calculs il faudrait faire pour déterminer la mesure des rapports.

Dans les propositions suivantes, Kepler va affiner sa construction en remarquant que parmi les mille rapports dont il cherche à déterminer la mesure, certains sont commensurables entre eux, de sorte qu'à partir du calcul laborieux d'un seul, on peut déduire facilement la mesure de plusieurs autres. Il réduit ainsi le nombre de rapports pour lesquels il est nécessaire de déterminer un élément minimum et faire de longs calculs.

Après avoir ainsi expliquer comment déterminer la mesure de tous ces rapports, Kepler peut définir le Logarithme, à la suite de la proposition XX [Kepler 1960, p. 297] :

> Que la mesure de n'importe quel rapport entre 1000 et un nombre qui lui est plus petit, telle qu'elle a été définie dans les propositions précédentes et exprimée par un nombre, soit associée à ce nombre plus petit dans la chiliade et qu'elle soit dite son LOGARITHME, c'est-à-dire le nombre (ἀριθμός) indiquant le rapport (λόγον) qu'a à 1000 ce nombre auquel le Logarithme est associé[48].

---

[47] J.-B. Delambre [1821, tome 1, p. 508] note à propos de cet exemple : « Tel est le Logarithme de 7 dans le système qui donne 0 pour Logarithme de 10 et qui fait augmenter les Logarithmes à mesure que les nombres diminuent. Ce système est celui de Neper ; mais voilà une base mesurée avec beaucoup plus de soin, par un calcul plus pénible, puisqu'il a employé 30 extractions de racine carrée à 20 chiffres. »

[48] « Mensura cujuslibet proportionis inter 1000. & numerum eo minorem, ut est definita in superioribus, expressa numero, apponatur ad hunc numerum minorem in Chiliade, dicatur LOGARITHMUS ejus, hoc est numerus (ἀριθμός) indicans proportionem (λόγον) quàm habet ad 1000. Numerus ille, cui Logarithmus apponitur. »

Voyons donc maintenant en détail comment Kepler procède pour aboutir à cette définition.

La première étape de la construction se trouve donc dans la très longue et fastidieuse proposition XVII, dans laquelle Kepler explique comment calculer successivement les mesures des rapports de 1000 à n, pour n allant de 999 à 500. Il va pour cela déterminer un élément minimum pour chacun de ces rapports. Par conséquent il doit commencer par choisir une quantité, notons-la k, telle que les mesures de ces éléments minimaux soient inférieures à k.

Pour ce faire, Kepler commence par remarquer que les rapports s'ordonnent de la manière suivante, d'après le corollaire à la proposition XIII[49] :

$$(1000:999) < (999:998) < (998:887) < \cdots < (500:499)$$

et d'après la proposition XV :

$$(500:499) > 2(1000:999).$$

Kepler note ensuite que les excès entre les rapports augmentent :

$$\begin{aligned}(999:998) - (1000:999) < (998:997) - (999:998) < \cdots\\ < (500:499) - (501:500)\end{aligned}$$

où

$$(999:998) - (1000:999) = (999:998) * (999:1000), \text{ etc.}$$

Il remarque aussi que l'écart entre les rapports et le premier rapport est plus que doublé à chaque fois qu'on s'éloigne d'un cran du premier rapport :

$$(998:997) - (1000:999) > 2((999:998) - (1000:999)),$$
$$(997:996) - (1000:999) > 2((998:997) - (1000:999)),$$

et ainsi de suite[50].

Il justifie ces inégalités par le calcul. C'est un peu laborieux, mais ça ne pose pas de difficultés.

---

49 Dans l'édition de 1624 la référence est à la proposition XIV, mais il s'agit clairement d'une application du corollaire à la proposition XIII. Nous avons fait la correction dans notre traduction.

50 Nous adoptons ici une écriture additive, pour rendre compte, au plus près, du texte de Kepler. Si nous remplaçons les rapports par les fractions de leurs termes, les inégalités ci-dessus deviennent $\frac{998}{997} \times \frac{999}{1000} > (\frac{999}{998} \times \frac{999}{1000})^2$, $\frac{997}{996} \times \frac{999}{1000} > (\frac{998}{997} \times \frac{999}{1000})^2$, etc.

Le plus petit excès est donc celui entre les premiers rapports (999 : 998) − (1000 : 999). C'est lui que Kepler va prendre pour ce que nous avons noté plus haut k et qui détermine la précision des calculs. Ainsi, pour le calcul de la mesure du rapport (1000 : 999), Kepler va déterminer un élément minimum du rapport qui soit plus petit que cet excès. Pour ce faire, il donne une approximation de cet excès, sous la forme du rapport (999001002004 : 999000000000). On se trouve donc avec les nombres 1000000000000, 999001002004 et 999000000000. La différence entre les plus petits (qui forment l'excès) vaut 1002004, qui est un peu plus que la millième partie de la différence entre les extrêmes, soit 1000000000. Grâce à la proposition XII, Kepler en déduit qu'une partie moindre que la millième partie du rapport (1000 : 999) est plus petite que l'excès (999 : 998) − (1000 : 999).

Kepler remarque alors qu'une première section du rapport (1000 : 999) par l'insertion d'un moyen proportionnel entre 1000 et 999 le divise en deux parties, une deuxième section de ces parties le divise en quatre parties, une troisième en seize, etc., jusqu'à la dixième qui le divise en mille vingt-quatre parties. Il lui faut donc effectuer dix sections pour trouver des parties du rapport (1000 : 999) qui soit plus petites que l'excès (999 : 998) − (1000 : 999). Appelons a_{10} le moyen proportionnel le plus proche de 1000,[51] alors

$$\mathrm{mes}(1000:999) = 1024.(1000 - a_{10}).$$

Passons à la mesure du rapport (1000 : 998). Kepler commence par remarquer que ce rapport est incommensurable au rapport précédent, de sorte qu'on ne peut pas facilement calculer sa mesure à partir de la mesure précédente. Il va donc déterminer un élément minimum pour ce rapport, comme il l'a fait pour le rapport précédent, avec la même précision.

Pour cela, il fait la remarque suivante :

$$(1000:998) > 2(1000:999),$$

d'où

$$\frac{1}{1024}(1000:998) > \frac{2}{1024}(1000:999),$$

et

$$\frac{1}{2048}(1000:998) > \frac{1}{1024}(1000:999).$$

51 Ce moyen est $1000 \times \sqrt[1024]{0{,}999}$.

Kepler précise que ces deux rapports sont presque égaux[52]. Il faut donc effectuer onze sections successives du rapport (1000 : 998), afin de déterminer le moyen proportionnel, b_{11},[53] le plus proche de 1000, tel que $(1000 : b_{11})$ soit une partie de (1000 : 998) plus petite que l'excès qu'on s'était donné comme quantité de référence.

Kepler compare alors $1000 - b_{11}$ avec la mesure du rapport $(1000 : b_{11})$, plus exacte, qu'on aurait obtenue à partir de la mesure du rapport $(1000 : a_{11})$ (cette mesure reste théorique et ne peut être calculée, puisque les deux rapports sont incommensurables). Pour cela, il applique la proposition XII aux nombres 1000, a_{10} et b_{11}. Selon cette proposition, si l'on pose que

$$\text{mes}(1000 : a_{10}) = 1000 - a_{10},$$

alors

$$\text{mes}(1000 : b_{11}) > 1000 - b_{11}.$$

On en déduit que

$$\text{mes}(1000 : 998) > 2048.(1000 - b_{11}),$$

où mes(1000 : 998) doit s'entendre comme étant la mesure exacte du rapport (1000 : 998) si l'on prenait comme rapport de référence $(1000 : a_{10})$.

Ainsi, la mesure du rapport (1000 : 998) obtenue à partir du calcul de onze moyens proportionnels est plus petite que la mesure, plus exacte, que l'on obtiendrait si l'on avait pu prendre comme rapport de référence l'élément minimum de (1000:999). Toutefois, Kepler précise que l'écart entre ces deux mesures est « tout à fait minuscule et n'est décelable par aucun calcul, même zélé » ; il l'estime à « mille fois la millième partie de la millième partie du premier élément ».

Le procédé est le même pour la détermination de la mesure du rapport (1000 : 997). On remarque cette fois que :

$$(1000 : 997) > 3(1000 : 999),$$

de sorte que :

$$\frac{1}{4096}(1000 : 997) > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1024}(1000 : 999).$$

Kepler précise même que la quatre mille quatre-vingt seizième partie de (1000 : 997) est à peine plus grande que les trois quarts de l'élément

[52] Si l'on préfère la notation multiplicative, on écrira : $\frac{1000}{998} > (\frac{1000}{999})^2$, d'où $(\frac{1000}{998})^{\frac{1}{1024}} > [(\frac{1000}{999})^{\frac{1}{1024}}]^2$ et $(\frac{1000}{998})^{\frac{1}{1024}} > (\frac{1000}{999})^{\frac{1}{1024}}$.

[53] Ce moyen vaut $1000 \times \sqrt[2048]{0{,}998}$.

minimum de $(1000 : 999)$. Il faudra donc effectuer douze sections pour déterminer l'élément minimum du rapport $(1000 : 997)$.

On poursuit de même pour les autres nombres jusqu'à 500. En effet, pour ceux plus petits que 500, il n'est pas nécessaire d'effectuer de laborieux calculs.

Soit $n < 500$, on a :

$$(1000 : n) = (1000 : 500) * (500 : n) = (1000 : 500) * (1000 : 2n).$$

Ainsi, la mesure du rapport $(1000 : n)$ est déterminée à partir de celles de $(1000 : 500)$ et de $(1000 : 2n)$.

Moyen plus simple de déterminer la mesure des rapports précédents dans certains cas

On vient de décrire le principe général de la détermination de la mesure des rapports entre 1000 et un nombre qui lui est plus petit. Toutefois, il y a de nombreux cas où il n'est pas nécessaire d'avoir recours au calcul fastidieux de moyens proportionnels. En effet, si on connait la mesure du rapport $(1000 : n)$, on connaît toutes les mesures des rapports $(1000 : m)$, si 1000, n et m appartiennent à la même progression géométrique, ce qu'explique la proposition XVIII. Kepler fait la démonstration dans un cas particulier, mais on peut la généraliser facilement. En effet, si on note q la raison de la progression géométrique à laquelle appartiennent 1000, n et m, il existe k tel que $(1000/m) = q^k$. D'où

$$\begin{aligned}(1000 : m) &= (q^k : 1) = (q^k : q^{k-1}) * (q^{k-1} : q^{k-2}) * \cdots * (q : 1)\\ &= k.(q : 1) = k.(1000 : n).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{mes}(1000 : m) = k.\mathrm{mes}(1000 : n) \text{ ou } \mathrm{Log}_K(m) = k.\mathrm{Log}_K(n).^{54}$$

Ainsi, de la connaissance du Logarithme de 900, on déduit le Logarithme de 810 (c'est le double), et le Logarithme de 729 (c'est le triple). En effet,

$$(1000 : 810) = (1000 : 900) * (900 : 810) = 2.(1000 : 900)\,;$$

$$\text{et } (1000 : 729) = (1000 : 900) * (900 : 810) * (810 : 729) = 3.(1000 : 900).$$

De même, de la connaissance du Logarithme de 800, on déduit ceux de 640 et de 512 ; à partir du Logarithme de 700, ceux de 490 et de 343 ; à

54 On note $\mathrm{Log}_K(n)$, le Logarithme construit ici par Kepler.

partir du Logarithme de 600, ceux de 360 et 216 et à partir du Logarithme de 500, ceux de 250 et 125.

La proposition XIX énonce par ailleurs que, si le Logarithme de p est connu, si celui de q est aussi connu et si on a un troisième nombre r, tel que $(1000 : p) = (q : r)$, alors on connaît le Logarithme de r.

En effet,

$$(1000 : r) = (1000 : q) * (q : r) = (1000 : q) * (1000 : p).$$

Donc

$$\mathrm{Log}_K(r) = \mathrm{Log}_K(p) + \mathrm{Log}_K(q).$$

On en déduit (Corollaire I) que, si parmi les quinze nombres de la proposition précédente (900, 810, 729, 800, etc.), on en prend deux, p et q, tels que $p.q = 1000.k$, on connaît le Logarithme de k. Kepler précise qu'on trouve ainsi 120 Logarithmes en plus des 15 déjà trouvés par le procédé précédent.

Par ailleurs, si on connaît les Logarithmes de p, q et r, on trouve facilement celui de x tel que $(p{:}q) = (r{:}x)$, comme le montre la proposition XX.

En effet,

$$\mathrm{mes}(p : q) = \mathrm{mes}(r : x),$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}_K(q) - \mathrm{Log}_K(p) &= \mathrm{Log}_K(x) - \mathrm{Log}_K(r)\\ \mathrm{Log}_K(x) &= \mathrm{Log}_K(q) + \mathrm{Log}_K(r) - \mathrm{Log}_K(p).\end{aligned}$$

Kepler utilisera les règles précédentes pour déterminer les Logarithmes des entiers inférieurs à 1000 dans son appendice, intitulé « Méthode la plus courte pour construire la Chiliade des Logarithmes ». Il donne ainsi l'exemple de la recherche du Logarithme de 11 à partir des Logarithmes de 990, de 10 et de 3 :

Le Logarithme de 990 doublé sera celui de 98010.00	2010.0675.
Celui-ci est ajouté au quadruple du tripliquant [soit la mesure du rapport de 3 à 1 déterminée auparavant]	439444.9256.
et fait le Logarithme de 1210.00	441454.9931.
Retranche-le du Logarithme de 10.00	921034.0563.
Il reste	479579.0632.
Sa moitié, le onze-upliquant [soit la mesure du rapport de 11 à 1],	239789.5316.
retranche-la de Logarithme de 1,	690775.5422.
il reste le Logarithme de 1100.00.	450986.0100.

En effet, on a $98010 = 3^4 \times 1210$.

Donc, $(100000 : 98010) = (100000 : 1210) * (1 : 3^4)$.

D'où, $\mathrm{Log}_K(98010) = 4.\mathrm{mes}(1:3) + \mathrm{Log}_K(1210)$.

Et on peut remarquer que $100000/98010$ vaut à peu près $(100000/99000)^2$, donc $\mathrm{Log}_K(98010)$ fait à peu près $2\mathrm{Log}_K(990)$.

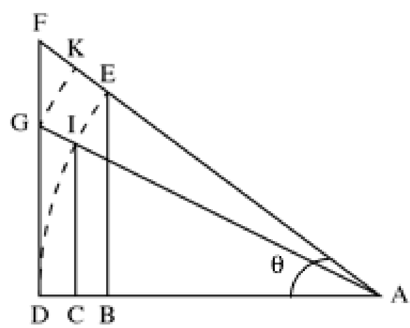
Par ailleurs, $1210 = 10 \times 11^2$. Donc, $(100000:1210) = (100000:10) * (1:11^2)$.

D'où, $\mathrm{Log}_K(1210) = \mathrm{Log}_K(10) - 2\mathrm{mes}(11:1)$, avec $\mathrm{mes}(11:1) = \mathrm{Log}_K(1) - \mathrm{Log}_K(11)$.

Donc, $\mathrm{Log}_K(11) = \mathrm{Log}_K(1) + 1/2(\mathrm{Log}_K(1210) - \mathrm{Log}_K(10))$.

5. ENCADREMENT DU LOGARITHME GRÂCE À LA TABLE DES SINUS

Ayant construit les Logarithmes de la Chiliade, Kepler revient à sa théorie générale de la mesure des rapports et en montre une application à la géométrie du triangle, comme il l'a annoncé dans le titre de son traité (voir note 2). Ainsi, les propositions XXI et XXII proposent un encadrement de la mesure du rapport de AD à AB, où AD est le rayon d'un cercle et AB le sinus d'un angle donné. Ce faisant, Kepler retrouve un résultat démontré par Neper.



Dans la figure ci-dessus, le segment AB est donné. Sur le cercle centré en A et de rayon AD (plus grand que AB), l'arc DE est déterminé de telle sorte que le sinus de l'arc complémentaire soit AB. Le sinus de l'arc est alors BE et la flèche de l'arc, BD. Par ailleurs, on note AF la sécante de l'angle. Et AD est appelé le sinus total, puisque c'est le sinus de l'angle droit.

Kepler se propose de déterminer un encadrement de la mesure du rapport $(AD : AB)$, qu'il nomme le Logarithme de AB. Ici, il s'écarte de la construction précédente des Logarithmes des nombres entiers de la chiliade pour revenir à une définition générale du Logarithme conçu comme mesure du rapport entre une quantité donnée, ici AD, dont le Logarithme est posé égal à 0, et une quantité plus petite. Pour définir ce Logarithme ou cette mesure, Kepler doit donc se donner un élément arbitraire, qui sert de rapport de référence. Il choisit pour cela un arc DI, dont le sinus est IC et la flèche CD et tel que le sinus de l'arc complémentaire, CA, est le moyen proportionnel entre AD et AB. Le rapport entre AD et AC est le rapport de référence dans cette proposition. Kepler pose donc :

$$\mathrm{mes}(AD : AC) = \mathrm{Log}_K(AC) = AD - AC = CD.$$

Kepler se propose alors de démontrer que :

$$BD < \mathrm{Log}_K(AB) < EF$$
$$\text{et } 2.\mathrm{Log}_K(AB) < BD + EF.$$

On remarque que $BD + EF < 2.EF$ de sorte que la seconde inégalité permet de donner une borne supérieure plus petite pour le Logarithme du sinus.

Si on suppose que le rayon du cercle vaut 1 et si on note θ l'angle entre AD et AF, les deux inégalités précédentes peuvent s'écrire :

$$1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) < \mathrm{Log}_K \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) < \sec\theta - 1$$
$$\mathrm{Log}_K \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) < \frac{[1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)] + \sec\theta - 1}{2}$$

ou

$$1 - \cos\theta < \mathrm{Log}_K \cos\theta < \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}$$
$$\mathrm{Log}_K \cos\theta < \frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{2\cos\theta}.$$

On peut rapprocher le premier encadrement du résultat obtenu par Neper à la proposition 29 de la *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructrio* [Hutton 1791, p. lvi; Delambre 1821, p. 510], que l'on peut écrire en termes modernes ainsi, en notant $\mathrm{Log}_N X$ le Logarithme de X construit par Neper dans ce traité [Friedelmeyer 2006, p. 68] :

$$10^7 - X < \mathrm{Log}_N X < \frac{10^7(10^7 - X)}{X}.$$

Pour arriver à cet encadrement, Neper s'appuie sur des considérations cinématiques, alors que Kepler, fidèle à ce qu'il s'est proposé, ancre son raisonnement dans la théorie des proportions et la géométrie.

Voyons maintenant comment Kepler démontre les inégalités précédentes. On a vu qu'il a posé :

$$\mathrm{mes}(AD : AC) = \mathrm{Log}_K(AC) = AD - AC = CD.$$

Par conséquent d'après la proposition I :

$$\mathrm{mes}(AD : AB) = \mathrm{Log}_K(AB) = 2.CD,$$

car $(AD : AB) = (AD : AC) * (AC : AB) = 2.(AD : AC)$. En effet, AC a été posé moyen proportionnel entre AD et AB.

La première inégalité,

$$\begin{aligned} & BD < \mathrm{Log}_K(AB) \\ \text{ou}\quad & BD < \mathrm{mes}(AD : AB) \end{aligned}$$

se déduit immédiatement de la proposition XII.

Kepler démontre la seconde inégalité en deux temps, d'abord pour l'arc DI, puis pour l'arc DE. Il s'agit donc, dans un premier temps, de démontrer :

$$\begin{gathered} \mathrm{Log}_K(AC) < IG \\ \text{ou } \mathrm{mes}(AD : AC) < IG. \end{gathered}$$

Mais

$$\mathrm{mes}(AD : AC) = CD.$$

Une application simple du théorème de Thalès et les propriétés élémentaires des proportions permettent de voir immédiatement que $CD < IG$.

Dans un second temps, il s'agit de montrer que $\mathrm{Log}_K(AB) < EF$. Partant de l'hypothèse que AC est le moyen proportionnel entre AB et AD et remarquant que AD est le moyen proportionnel entre BA et AF (il suffit de remarquer que $AD = AE$ et d'appliquer le théorème de Thalès), Kepler en déduit abruptement que AG, ou AK, est le moyen proportionnel entre AE et AF[55]. Ainsi, AB, AC, AD (ou AE), AK et AF sont continûment proportionnelles. D'où, en appliquant la proposition II, BC, CD, EK (ou IG), KF sont continûment proportionnelles.

---

55 On le démontre ainsi : on a $(AE : AG) = (AI : AG)$, car $AE = AI$ (c'est le rayon du cercle). Et $(AI : AG) = (AC : AD)$, d'après le théorème de Thalès. Donc, $(AE : AG) = (AC : AD)$. Par ailleurs, $(AG : AF) = (AG.AB : AF.AB) = (AG.AB : AD^2)$ car AD est le moyen proportionnel entre AB et AF. Ainsi, on a $(AG : AF) = (AG : AD) * (AB : AD)$. Or $(AG : AD) = (AG : AI) = (AD : AC)$, d'après le théorème de Thalès. Donc, $(AG : AF) = (AD : AC) * (AB : AD) = (AB : AC)$. Par conséquent on a démontré d'une part $(AE : AG) = (AC : AD)$ et d'autre part $(AG : AF) = (AB : AC)$, mais $(AC : AD) = (AB : AC)$, par hypothèse, donc $(AE : AG) = (AG : AF)$. CQFD.

Donc

$$(CD : IG) = (IG : KF),$$

avec $CD < IG$. Donc

$$IG < KF.$$

D'où

$$EF > 2.IG > 2.CD.$$

Mais $2.CD = \mathrm{Log}_K(AB)$, de sorte qu'on a ce qu'il fallait démontrer :

$$\mathrm{Log}_K(AB) < EF.$$

La démonstration de la proposition XXII est du même type.

Kepler illustre ces deux propositions par deux règles. La première montre l'utilisation de la table des sinus pour encadrer le Logarithme d'un sinus donné. Il propose ainsi l'exemple du sinus 99970.1490, dont on peut trouver une valeur approchée de la sécante dans une table, de sorte que l'excès de la sécante sur le sinus total (soit 100000.000) fasse 29.8599 et dont la flèche vaut $100000.000 - 99970.1490 = 29.8510$. Le Logarithme du sinus se trouve alors entre 29.8510 et $\frac{29.8510+29.8599}{2} \approx 29.855$. Donc, le Logarithme du sinus vaut à peu près 29.854.

Ce calcul lui permet dans un second temps de déterminer le Logarithme de l'entier le plus proche du sinus, 99970.000. En partant du fait que la mesure d'un rapport est à peu près égal à la différence des termes du rapport, il trouve que :

$$\mathrm{Log}_K 99970.000 \approx \mathrm{Log}_K 99970.149 + 0.149 \approx 29.854 + 0.149 \approx 30.003.$$

6. ENCADREMENT DE LA MESURE D'UN RAPPORT DONNÉ OU DE LA DIFFÉRENCE DE DEUX LOGARITHMES

Dans les propositions XXIII à XXIV, Kepler revient sur des considérations générales sur les mesures et compare les mesures des rapports à ces mêmes rapports, ce qui conduira aux propositions XXV et XXVI qui proposent des encadrements de la différence entre les Logarithmes de deux entiers successifs.

Ainsi, la proposition XXIII explique que, si on a trois quantités X, Y et Z telles que $X > Y > Z$ et $X - Y = Y - Z$, alors

$$(X : Y) < (\mathrm{mes}(Y : Z) : \mathrm{mes}(X : Y)) < (Y : Z).$$

Le principe de la démonstration est le suivant : on détermine T tel que

$$(X : Y) = (Y : T).$$

On démontre facilement que $Y > T > Z$. On applique alors le corollaire à la proposition XII à Y, Z et T, ce qui nécessite que l'on ait $\mathrm{mes}(Y : T) > (Y - T)$. Ceci est vrai si l'on suppose que le rapport de référence est celui entre deux quantités plus grandes que X et Y, d'après la proposition IV (Kepler ne fait pas explicitement cette hypothèse).

Le corollaire à la proposition XII donne donc :

$$(\mathrm{mes}(Y : T) : Y - T) < (\mathrm{mes}(T : Z) : T - Z)$$
$$(\mathrm{mes}(T : Z) : \mathrm{mes}(Y : T)) > (T - Z : Y - T).$$

D'où, selon la proposition 17 du livre V d'Euclide :

$$(\mathrm{mes}(T : Z) + \mathrm{mes}(Y : T) : \mathrm{mes}(Y : T)) > (T - Z + Y - T : Y - T),$$
$$(\mathrm{mes}(Y : Z) : \mathrm{mes}(Y : T)) > (Y - Z : Y - T).$$

Mais $Y - Z = X - Y$ et $(Y : T) = (X : Y)$ par hypothèse, donc :

$$(\mathrm{mes}(Y : Z) : \mathrm{mes}(X : Y)) > (X - Y : Y - T).$$

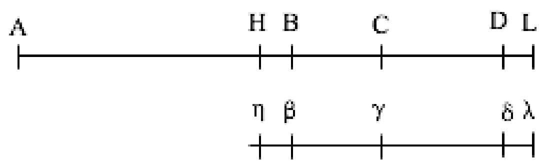
Et finalement, $(X - Y : Y - T) = (X : Y)$ car $(Y : T) = (X : Y)$.

Donc, on a bien :

$$(\mathrm{mes}(Y : Z) : \mathrm{mes}(X : Y)) > (X : Y).$$

L'autre inégalité se démontre de manière semblable.

Nous avons mené la démonstration sur des quantités X, Y et Z abstraites, alors que Kepler choisit de représenter ces trois quantités par des lignes, AD, AC et AH. Par ailleurs, il appelle $\delta\gamma$ la mesure du rapport DA à AC et $\gamma\eta$ la mesure du rapport CA à AH, etc.



Les notations introduites par Kepler rendent la démonstration difficile à suivre pour un lecteur moderne, mais son schéma est exactement celui que nous venons de donner. Il faut toutefois faire attention que Képler, comme nous l'avons déjà remarqué, confond bien souvent le rapport de plus grande inégalité entre X et Y $(X > Y)$ et celui de plus petite inégalité correspondant, entre Y et X. Il semble concevoir que ces deux rapports ont la même mesure, de la même manière qu'un segment AB a la même longeur que le segment BA. Kepler semble aussi jouer sur l'ordre des lettres. Ainsi, il introduit $\gamma\eta$ comme étant la mesure du rapport CA à AH (et non de AC à AH), comme s'il imaginait un sens de parcours sur la ligne des mesures de γ vers η et sur la ligne des grandeurs, de C vers A puis de A vers H, ce qui rend immédiatement visible la différence CH.

Les remarques précédentes valent tout autant pour la proposition XXIV qui énonce, en reprenant les notations précédentes, que

$$(\text{mes}(Y : Z) : \text{mes}(X : Y)) < 1/2(X : Z),$$

où $1/2(X:Z)$ est le rappport qui composé avec lui-même donne le rapport $(X : Z)$; c'est le rapport $(X : \sqrt{XZ})$. On doit noter que la démonstration est erronée en plusieurs endroits, signalés dans ma traduction.

Dans les exemples qui suivent ces deux propositions, Kepler montre comment utiliser ces encadrements afin de déterminer des valeurs approchées de Logarithmes. Il détermine ainsi un encadrement de $\text{Log}_K(800)$, connaissant une valeur approchée de $\text{Log}_K(900)$, soit 10536.05. D'après la proposition XXIII, on a

$$(\text{mes}(900 : 800) : \text{mes}(1000 : 900)) > (1000 : 900).$$

Mais $(1000 : 900)$ vaut à peu près $(11706.72 : 10536.05)$. Donc

$$(\text{mes}(900 : 800) : \text{mes}(1000 : 900)) > (11706.72 : 10536.05).$$

Soit

$$(\text{mes}(900 : 800) : \text{mes}(1000 : 900)) > (11706.72 : \text{mes}(1000 : 900)),$$

donc

$$\text{mes}(900 : 800) > 11706.72.$$

Par ailleurs, d'après la proposition XXIV, on a :

$$(\text{mes}(900{:}800){:}\text{mes}(1000{:}900)) < 1/2(1000{:}800) = (1000{:}\sqrt{1000 \times 800}).$$

On détermine le nombre n tel que

$$(1000 : \sqrt{1000 \times 800}) = (n : \text{mes}(1000 : 900)) = (n : 10536.05).$$

On a

$$n = 11779.66.$$

Alors

$$\text{mes}(900 : 800) < 11779.66.$$

Notons que $\text{mes}(900 : 800) = \text{Log}_K(800) - \text{Log}_K(900)$. On trouve ainsi un encadrement de $\text{Log}_K(800)$.

Les propositions XXIII et XXIV conduisent à la proposition XXV, qui donne un encadrement de la mesure du rapport entre deux nombres consécutifs de la chiliade, A et $A+1$, à partir de la mesure du rapport (1000 : 999) :

$$(1000{:}A) > (1000{:}B) > (\mathrm{mes}(A+1{:}A){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) > (1000{:}A+1),$$

où B est le moyen proportionnel entre A et $A+1$.

On peut aussi écrire cet encadrement ainsi (ce que ne fait pas Kepler) :

$$\begin{aligned}(1000 : A) &> (1000 : B) > (\mathrm{Log}_K(A) - \mathrm{Log}_K(A+1) : \mathrm{Log}_K(999))\\ &> (1000 : A+1).\end{aligned}$$

Dans un corollaire, Kepler en déduit que l'on peut déterminer tous les Logarithmes des nombres de la chiliade qui n'avaient pas encore été calculés avec les règles précédentes.

La proposition XXVI propose un autre encadrement de la différence des Logarithmes de deux nombres A+1 et A :

$$(1000 : A) > (\mathrm{Log}_K(A) - \mathrm{Log}_K(A+1) : 1) > (1000 : A+1).$$

On peut rapprocher cet encadrement de celui que l'on trouve dans la proposition 40 de la *Mirifici Logarihmorum Canonis Constructio* de Neper [Hutton 1791, p. lviii; Delambre 1821, p. 510], que l'on peut transcrire ainsi [Friedelmeyer 2006, p. 69] :

$$10^7\left(\frac{b-a}{a}\right) < \mathrm{Log}_N(b) - \mathrm{Log}_N(a) < 10^7\left(\frac{b-a}{b}\right).$$

Finalement, dans la proposition XXVII, Kepler revient à la figure envisagée dans les propositions XXI et XXII et il propose un autre encadrement pour la différence entre les Logarithmes de deux nombres $A+1$ et A qui se suivent dans la chiliade :

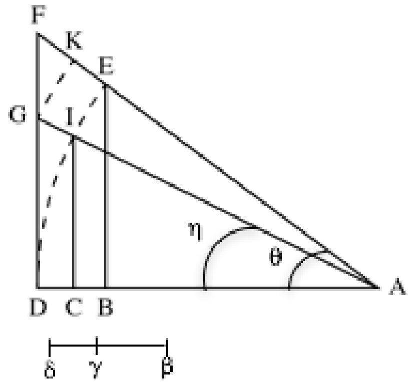
$$(\sec\eta : 1) < (\mathrm{Log}_K(A) - \mathrm{Log}_K(A+1) : \mathrm{Log}_K(E)) < (\sec\theta : 1),$$

où E est l'élément minimum définissant le Logarithme, et où, dans un cercle de rayon 1, les angles θ et η sont tels que $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = A$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-\eta) = A+1$.

Et on peut affiner la seconde inégalité en :

$$(\mathrm{Log}_K(A) - \mathrm{Log}_K(A+1) : \mathrm{Log}_K(E)) < (\sqrt{\sec\theta \times sec\,\eta} : 1).$$

Dans la figure ci-dessous, l'angle θ est l'angle que fait AD avec AF et l'angle η est l'angle que fait AD avec AG, de sorte que $\sec\theta = AF$ et $\sec\eta = AG$.



Comme dans les propositions XXI et XXII, Kepler prend comme élément minimum, base de la construction des Logarithmes, le rapport de AD à AC, dont la mesure est par conséquent DC. Il la note $\delta\gamma$. Et il note $\delta\beta$ la mesure du rapport de AD à AB.

Il lui faut donc montrer :

$$(AG : AD) < (\mathrm{Log}_K(AB) - \mathrm{Log}_K(AC) : \mathrm{Log}_K(AC)) < (\sqrt{FA.GA} : AD)$$

ou

$$(AG : AD) < (\gamma\beta : \delta\gamma) < (\sqrt{FA.GA} : AD).$$

Le résultat s'obtient assez facilement à partir de la proposition XXV, qui donne immédiatement :

$$(AD : AC) < (\mathrm{mes}(AC : AB) : \mathrm{mes}(AD : AC)) < (AD : \sqrt{AB.AC}),$$

ou

$$(AD : AC) < (\gamma\beta : \delta\gamma) < (AD : \sqrt{AB.AC}).$$

Dans le cours de la preuve de la proposition XXI, on a montré que DA est le moyen proportionnel entre AC et AG, de sorte que $(AD : AC) = (AG : AD)$.

De même, DA est le moyen géométrique entre AB et AF. On en déduit facilement que

$$(AD : \sqrt{AB.AC}) < (\sqrt{FA.GA} : AD).$$

7. INEXACTITUDE DES VALEURS DES LOGARITHMES AINSI DÉTERMINÉS

Dans les propositions XXVIII et XXIX, Kepler explique que la méthode qu'il a décrite à la proposition XVII ne permet de donner que des valeurs approchées de la mesure des rapports, donc des Logarithmes. En effet, les Logarithmes des nombres entiers entre 1000 et 501 ont été construits de la manière suivante : pour tout nombre A, le rapport entre 1000 et A est divisé successivement, n fois, à l'aide de moyens proportionnels, n étant déterminé de telle manière que la mesure de chaque partie du rapport soit plus petite que l'excès du rapport de 999 à 998 sur le rapport de 1000 à 999. Si on note a_n le moyen proportionnel le plus proche de 1000, le Logarithme de A est alors $2^n(1000 - a_n)$. Or, a_n n'est pas un nombre rationnel (il vaut $\sqrt[2^n]{\frac{A}{1000}}$). Le calcul ne permet de donner que des valeurs approchées de Logarithmes ainsi définis.

L'étude des Logarithmes se termine avec la proposition XXX qui explique que les Logarithmes des nombres plus grands que 1000 sont négatifs.

CONCLUSION

Il nous semble que l'on ne peut apprécier le travail théorique de Kepler pour fonder les Logarithmes que si l'on replace sa démarche dans les mathématiques de son temps. Il convient pour cela de comprendre le rôle central joué par une théorie des rapports, qui n'est pas seulement euclidienne mais est aussi l'héritière d'une théorie mise en place au XIVe siècle, par Nicole Oresme en particulier. Il faut notamment prendre au sérieux le choix qui est fait de penser la composition des rapports sur le modèle d'une addition, ce qui permet de considérer les rapports comme des quantités susceptibles d'avoir entre elles des rapports. Il faut alors prendre garde à ne pas confondre le rapport avec la fraction de ses termes (pour Kepler, comme pour ses prédécesseurs, le rapport reste une relation), car cela conduit à perdre de vue le rôle joué par le vocabulaire additif dans la théorie et peut même conduire à des erreurs d'interprétation de certains énoncés (comme nous l'avons vu pour la proposition XIII).

Le cadre théorique dans lequel se place Kepler étant bien établi, le principe de sa construction n'est pas si compliqué que le lecteur non familier avec les mathématiques anciennes pourrait le penser. À partir du choix arbitraire du Logarithme d'un nombre donné de la chiliade, n, que l'on peut déterminer de manière approchée à partir du calcul d'un nombre déterminé de moyens proportionnels entre 1000 et n, on peut trouver les mesures de tous les rapports commensurables au rapport entre 1000 et n, en s'appuyant sur la propriété fondamentale qui est que la mesure d'un rapport composé est la somme des mesures des rapports qui le compose, ou encore que $\mathrm{Log}_K(n^p) = p.\mathrm{Log}_K(n)$, avec p entier mais aussi fractionnaire. En présence d'un rapport entre 1000 et m qui est incommensurable au rapport entre 1000 et n, Kepler tente, maladroitement, par une raisonnement infinitésimal, d'étendre sa construction, ce qui reviendrait à dire qu'on a toujours $\mathrm{Log}_K(n^p) = p.\mathrm{Log}_K(n)$, même si p n'est pas rationnel. Mais, dans la pratique, il lui faut faire un nouveau choix arbitraire pour la mesure du rapport entre 1000 et m ou le Logarithme de m, qui permet de déterminer les mesures de tous les rapports qui sont commensurables au rapport entre 1000 et m, et ainsi de suite. C'est bien ce qu'explique Kepler dans l'adresse au lecteur du *Supplementum*.

On peut se demander maintenant si les contemporains ou les successeurs de Kepler ont été convaincus par sa construction. Charles Hutton note que Nicolaus Mercator, Edmond Halley et Roger Cotes ont repris la théorie képlérienne de la mesure des rapports et Charles Naux, pourtant si critique à l'égard de cette théorie, reconnaît qu'elle a séduit de nombreux mathématiciens [Hutton 1791, p. lii ; Naux 1966, tome I, p. 156].

RÉFÉRENCES

Belyi (Yu A.)

[1975] Johannes Kepler and the Development of Mathematics, *Vistas in Astronomy*, 18 (1975), p. 643–660.

Biard (Joël)

[2008] *La Question sur le rapport entre les mouvements* d'Alexandre Achillini, dans Biard (Joël) & Rommevaux (Sabine), dir., *Mathématiques et Théorie du mouvement (XIV^e – XVI^e siècles)*, Villeneuve d'Ascq : Presses universitaires du Septentrion, 2008, p. 59–80.

Blaise de Parme

[2005] *Questiones circa Tractatum proportionum magistri Thome Braduardini,* introduction et édition critique de Joël Biard et Sabine Rommevaux, Paris : Vrin, 2005.

Busard (Hubert L. L.)

[1991] *Jordanus de Nemore,* De Elementis Arithmetice Artis, Stuttgart : Franz Steiner, 1991.

[2005] *Campanus of Novara and Euclid's Elements,* Wiesbaden/Stuttgart : Franz Steiner, 2005.

CLAGETT (Marshall)
[1959] *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison : The University of Wisconsin Press, 1959.

CLARK (Kathleen M.) & MONTELLE (Clemency)
[2012] Priority, Parallel Discovery, and Pre-eminence : Napier, Bürgi and the Early History of the Logarithm Relation, *Revue d'histoire des mathématiques*, 18-2 (2012), p. 223–270.

CLARK (Kathleen M.)
[2015] *Jost Bürgi's Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen (1620) : Edition and Commentary*, Basel : Birkhäuser, 2015.

CROSBY (H. Lamar)
[1955] *Thomas Bradwardine. His Tractatus de Proportionibus. Its significance for the Development of Mathematical Physics*, Madison : The University of Wisconsin Press, 1955.

DELAMBRE (Jean-Baptiste)
[1821] *Histoire de l'astronomie moderne,* vol. I, Paris : Courcier, 1821.

EUCLIDE
[1994] *Les Éléments,* vol. 2 *: Livres V à IX,* traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : PUF, 1994.
[1998] *Les Éléments,* vol. 3 *: Livre X,* traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : PUF, 1998.

FERNEL, JEAN
[1528] *De proportionibus libri duo,* Paris : Simon de Colines, 1528.

FRIEDELMEYER (Jean-Pierre)
[2006] Contexte et raisons d'une « mirifique » invention, dans inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques (Commission), dir., *Histoires de Logarithmes,* Paris : Ellipses, 2006, p. 39–72.

HOFMANN (Joseph Ehrenfried)
[1975] On Kepler's Contribution to Mathematics, *Vistas in Astronomy,* 18 (1975), p. 687–688.

HUTTON (Charles)
[1791] *Scriptores Logarithmici ; or, a collection of several curious tracts on the nature and construction of Logarithms*, London : J. Davis, 1791.

KEPLER (Johannes)
[1624] *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, præmissa demonstratione legitima ortus Logarithmorum eorumque usus*, Marpurgi : C. Chemlini, 1624.
[1625] *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens præcepta de eorum usu,* Marpurgi : C. Chemlini, 1625.
[1868] *Opera omnia,* ed. Christian Frisch, vol. VII, Frankfurt/Erlangen : Heyder & Zimmer, 1868.
[1981] *Gesammelte Werke,* Band VI *: Harmonice mundi,* hrsg. Max Caspar, München : C.H. Beck, 1981 ; rep. de la 1ère éd. (1940).

[1960] *Gesammelte Werke,* Band IX *: Mathematische Schriften,* hrsg. Franz Hammer, München : C.H. Beck, 1960 ; rep. de la 1re éd. (1955).

NAUX (Charles)
[1966] *Histoire des Logarithmes de Neper à Euler,* tome I : *La découverte des Logarithmes et le calcul des premières tables*, Paris : Blanchard, 1966.

ORESME (Nicole)
[1966] *De proportionibus proportionum* and *Ad pauca respicientes,* English Translations and Critical Notes by Edward Grant, Edited with Introductions, Madison : The University of Wisconsin Press, 1966.

REGIER (Jonathan)
[2014] Kepler's Theory of Force and His Medical Sources, *Early Science and Medicine*, 19-1 (2014), p. 1–27.

ROMMEVAUX (Sabine)
[2010] Thomas Bradwardine*, Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements ;* Nicole Oresme*, Sur les rapports de rapports,* introduction ; traduction, et commentaires, Paris : Les Belles Lettres, 2010.
[2013] A treatise on proportion in the tradition of Thomas Bradwardine : the *De proportionibus libri duo* (1528) of Jean Fernel, *Historia Mathematica*, 40 (2013), p. 164–182.
[2014] *Les nouvelles théories des rapports mathématiques du XIVe au XVIe siècle*, Turnhout : Brepols, 2014.

SYLLA (Edith D.)
[2005] Mathematics in the *Liber de Triplici Motu* of Alvarus Thomas of Lisbon, dans *Proceedings of the International Conference : The Practice of Mathematics in Portugal (November 16-18, 2000)*, Coimbra : The University of Coimbra Press, 2005, p. 109–161.

THOMAS (Alvarus)
[1509] *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Alvari Thome ulixbonensis philosophicas Suiseth calculationes ex parte declarans*, Paris : Guillaume Anabat, 1509.

WARDHAUGH (Benjamin)
[2008] *Music, Experiment and Mathematics in England, 1653-1705*, Farnham (GB)/Burlington (Vt) : Ashgate, 2008.

ANNEXE : TRADUCTION FRANÇAISE DE LA PARTIE THÉORIQUE DU *CHILIAS LOGARITHMORUM*[56]

Démonstration de la structure des Logarithmes

POSTULAT I

Mesurer ou exprimer par la même quantité tous les rapports égaux entre eux, quelle que soit la diversité des deux termes de l'un ou de l'autre[57].

AXIOME I

Si on a autant de quantités de même genre que l'on veut se succédant l'une l'autre selon n'importe quel ordre, par exemple si elles se succèdent l'une l'autre selon l'ordre de la grandeur, le rapport des extrêmes doit être compris comme étant composé de tous les rapports intermédiaires de deux quantités voisines entre elles.

Ou, ce qui revient au même, le rapport est diminué par l'augmentation du plus petit terme ou la diminution du plus grand, et il est augmenté par les procédés inverses.

PROPOSITION I

Un moyen proportionnel entre deux termes divise le rapport entre les termes en deux rapports égaux entre eux.

---

56 Il existe une traduction française de ce traité par Jean Peyroux, publiée chez Blanchard en 1993. Le texte produit est bien souvent incompréhensible, voire fautif, de sorte qu'il nous a semblé qu'une nouvelle traduction s'imposait. Nous avons utilisé pour cette traduction l'édition de Hammer [Kepler 1960, p. 317–345]. Nous nous sommes aussi reportée à l'édition originale de 1624, à l'édition de Charles Hutton [Hutton 1791, p. 1–38], à l'édition de Christian Frisch [Kepler 1868, p. 317–345].

57 Voir notre introduction, p. 118, pour une explication des principes qui ouvrent le traité.

En effet, si on se donne deux termes et leur moyen proportionnel, alors on a une Analogia ou une proportionnalité entre ces trois quantités. Mais l'Analogia est définie comme l'égalité des rapports (τῶν λόγων), donc les rapports obtenus par la division en parties du rapport total proposé sont égaux entre eux.

AXIOME OU NOTION COMMUNE II

Si on a autant de quantités que l'on veut en ordre croissant, le rapport des extrêmes est divisé par les quantités intermédiaires en parties plus nombreuses d'une unité que sont les quantités intermédiaires produisant la division.

De même, les quatre interstices des doigts montrent qu'il y a cinq doigts. Et de même, les cinq corps réguliers insérés dans l'ordre entre les orbes intercalés, inscrits et circonscrits, montrent qu'on a six tels orbes.

POSTULAT II

Diviser un rapport entre deux termes donnés quelconques en autant de parties que l'on veut (par exemple en parties en nombre continument multiple selon la progression double), jusqu'à ce que les parties deviennent plus petites qu'une quantité donnée.

En effet, le rapport appartient aussi aux quantités continues divisibles à l'infini.

Vois ici la représentation du rapport entre 10 et 7 divisé grâce à trente moyens proportionnels :

POUR LE POSTULAT II, UN EXEMPLE DE DIVISION,

dans lequel le rapport qui se trouve entre 10 est 7 est divisé — la trentième division étant réalisée —, en 1 073 741 824 parties égales, grâce à autant de moyens proportionnels (moins un) du trentième groupe, où pour chaque groupe seul le moyen terme le plus grand et le plus proche du terme le plus grand du rapport est exprimé ici.

	Dénomination, par les nombres de divisions, du moyen proportionnel qui est le plus grand de tous dans n'importe quelle division		Nombre des parties égales du rapport que forment les moyens proportionnels de l'une quelconque des classes
Le plus grand terme		100000 00000 00000 00000	
	30ième	99999 99996 67820 56900	1073741824
	29ième	99999 99993 35641 13801	536870912
	28ième	99999 99986 71282 27702	268435456
	27ième	99999 99973 42564 55589	134217728
	26ième	99999 99946 85129 12883	67108864
	25ième	99999 99893 70258 38590	33554432
	24ième	99999 99787 40516 88629	16777216
	23ième	99999 99574 81034 22452	8388608
	22ième	99999 99149 62070 25698	4194304
	21ième	99999 98299 24147 74542	2097152
	20ième	99999 96598 48324 51665	1048576
	19ième	99999 93196 96764 73647	524288
	18ième	99999 86393 93992 28474	262144
	17ième	99999 72787 89835 81819	131072
	16ième	99999 45575 87076 62114	65536
	15ième	99998 91152 03773 10068	32768
	14ième	99997 82305 26024 99026	16384
	13ième	99995 64615 25959 97766	8192
	12ième	99991 29249 47518 67706	4096
	11ième	99982 58574 77102 11873	2048
	10ième	99965 17452 79822 51100	1024
	9ième	99930 36118 40985 14780	512
	8ième	99860 77086 38438 31172	256
	7ième	99721 73557 52112 10274	128
	6ième	99444 24546 13234 50059	64
	5ième	98891 57955 37194 96652	32
15 quatrièmes	4ième	97795 44506 62963 20009	16
7 troisièmes	3ième	95639 49075 71498 12386	8
3 deuxièmes	2d	91469 12192 28694 43920	4
1 premier	1er	83666 00265 34075 54820	2
Le plus petit terme		70000 00000 00000 00000	

Cet unique premier moyen dans son groupe ou dans le premier groupe est aussi l'un des trois parmi les deuxièmes moyens et ces trois deuxièmes moyens sont aussi parmi les sept troisièmes moyens, c'est-à-dire les moyens entre les quatre autres ajoutés, et ces sept troisièmes moyens, huit autres étant insérés, font quinze quatrièmes moyens et ainsi de suite.

Parmi les trentièmes moyens, la différence la plus grande est obtenue à partir du terme le plus grand du rapport divisé et c'est 00000 00003 32179 43100. Donc cette différence est posée arbitrairement comme mesure de l'élément minimum du rapport divisé ou comme Logarithme dudit plus grand moyen parmi les trentièmes. Donc ce Logarithme multiplié par le nombre de parties que forment ces trentièmes moyens produit le Logarithme suivant : 35667 49481 37222 14400. Et c'est le Logarithme du terme le plus petit, soit 70000 00000 00000 00000.

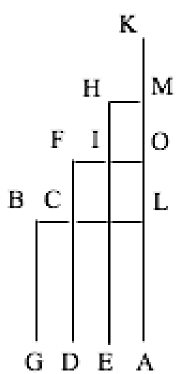
Ce nombre surpasse d'une unité le nombre des moyens proportionnels de n'importe quel groupe.

Cet exemple doit être compris ainsi : entre les termes, soit le plus grand 100 etc. et le plus petit 70 etc., que soit cherché le moyen proportionnel ; ce sera $83\frac{2}{3}$ etc. Sont alors formées deux parties du rapport entre lesdits termes, l'une entre 100 etc. et $83\frac{2}{3}$ etc. et l'autre entre $83\frac{2}{3}$ etc. et 70 etc. D'après la proposition I, elles sont égales entre elles. Deuxièmement, que soit cherché le moyen proportionnel entre 100 etc. et $83\frac{2}{3}$ etc. ; ce sera $91\frac{1}{2}$ etc. Et de nouveau les parties seront égales entre elles, l'une entre 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc., l'autre entre $91\frac{1}{2}$ etc. et $83\frac{2}{3}$ etc. Ainsi, la première moitié du rapport total est ici divisée en deux quatrièmes parties de ce même tout. Et on comprend que l'autre moitié, qui était entre $83\frac{2}{3}$ etc. et 70 etc., est semblablement divisée en deux quarts du tout, grâce au pendant de $91\frac{1}{2}$ etc., ou au plus petit des trois parmi les deuxièmes moyens (qui dans cet exemple n'est pas exprimé). Troisièmement, que soit cherché le moyen proportionnel entre 100 etc. et $91\frac{1}{2}$ etc.; ce sera $95\frac{2}{3}$ etc., qui détermine avec 100 etc. la huitième partie du tout, ce qu'indique le nombre correspondant à droite. Et ainsi de suite.

POSTULAT III

Mesurer ou désigner l'élément minimum d'un rapport (aussi petit qu'on se plaise à le prendre pour minimum) par une quantité quelconque, comme par la différence des termes de cet élément.

PROPOSITION II



Lorsque l'on a trois quantités continûment proportionnelles, le rapport de la première à la deuxième ou de la deuxième à la troisième est le même que le rapport de la différence des premières à la différence des secondes.

Soient *AK*, *EH* et *DF* continûment proportionnelles, *KM* la différence des premières et *HI* celle des secondes. Je dis que comme *AK* est à *EH*, ainsi *KM* est à *HI*. En effet, *HE* est à *FD* comme *KA* à *HE*, par hypothèse. Mais *HE* est égale à *MA* et *FD* égale à *IE*, de nouveau par hypothèse. Donc *MA* sera aussi à *IE*, comme *KA* à *HE*. Donc, d'après la proposition 17 du livre V d'Euclide[58], le reste *KM* sera aussi au reste *HI* comme le tout *KA* au tout *HE*.

PROPOSITION III

Si on a quelques quantités en proportion continue, la différence entre les plus petites sera la plus petite et celle entre les plus grandes, la plus grande.

58 Euclide [1994, p. 104], Proposition V. 17 : « Si des grandeurs sont en proportion par composition, elles seront aussi en proportion par séparation ».

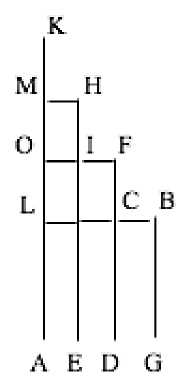
Car, d'après la proposition II, comme la plus grande est à la plus petite la plus proche, ainsi est la différence entre les plus grandes à la différence entre les suivantes. Donc n'importe laquelle des différences entre les suivantes est plus petite que la précédente. Donc la dernière différence est la plus petite, celle précisément qui est entre les plus petites.

PROPOSITION IV

Si quelques quantités sont en proportion continue et si la différence entre les plus grandes est prise comme mesure de leur rapport, les différences entre deux quantités quelconques à la suite seront plus petites que la juste mesure de leur rapport[59].

Car, puisqu'elles sont posées continûment proportionnelles, le rapport entre les deux plus grandes est égal au rapport entre deux plus petites quelconques qui se suivent, d'après la proposition I. Mais la différence entre les plus grandes est plus grande que les différences entre d'autres, quelles qu'elles soient, qui se suivent, d'après la proposition III. Donc, si la plus grande différence est posée comme mesure du rapport entre les deux plus grandes, alors, d'après le postulat III, la même différence entre les deux plus grandes est encore posée comme mesure du rapport entre deux plus petites qui se suivent. Mais la différence entre les deux plus petites est assurément plus petite que la différence entre les plus grandes, d'après la proposition III, donc elle est aussi plus petite que celle qui mesure le rapport de ses termes.

PROPOSITION V



Pour des quantités continûment proportionnelles, si la différence des plus grandes est posée comme mesure de leur rapport, tous les autres rapports qui sont entre la plus grande et n'importe laquelle des autres quantités plus petites recevront des mesures plus grandes que les différences de leurs termes.

En effet, le rapport de la plus grande *AK* à la plus petite *GB* est composé des rapports de deux en deux, à la suite, jusqu'à la plus petite, d'après

[59] Pour les propositions IV à VI, voir notre introduction p. 126–129.

l'axiome I. Mais les rapports entre deux quantités qui se suivent sont égaux entre eux, d'après la proposition I. C'est pourquoi ils ont aussi des mesures égales, d'après le postulat I. Donc, autant il y a d'éléments du rapport entre la plus grande *AK* et la plus petite *GB*, autant de fois la différence *KM* entre les plus grandes *KA* et *HE*, ou *MA*, est contenue dans la mesure du rapport de la plus grande *KA* à la plus petite *BG*.

Or, la différence *KL* entre la plus grande *KA* et la plus petite *BG* est composée des différences *KM*, *MO*, *OL* de toutes les quantités prises de deux en deux à la suite.

Mais n'importe quelle différence *MO*, ou *OL*, entre deux à la suite est par ailleurs plus petite que la différence *KM* entre les plus grandes, d'après la proposition III. Donc, tout autant la somme des différences entre deux qui se suivent, c'est-à-dire la différence *KL* entre la plus grande *KA* et la plus petite *BG*, sera plus petite que le multiple de cette différence *KM* entre les plus grandes selon le nombre des éléments du rapport divisé. Mais ce multiple est la mesure du rapport entre la plus grande *KA* et la plus petite *BG*, comme cela a déjà été montré. Donc la différence *KL* entre la plus grande et la plus petite n'est pas égale à la mesure de leur rapport, les choses étant posées telles qu'elles ont été posées.

Dans les nombres : soient les nombres 1000, 900, 810, 729 continûment proportionnels. Les plus grands sont 1000 et 900. Leur différence est 100. Que ce soit la mesure arbitraire du rapport 1000, 900[60]. Ce sera alors la mesure du rapport 900, 810 et du rapport 810, 729. Donc la mesure du rapport composé entre 1000 et 729 sera 300, car on a trois éléments égaux du rapport grâce à deux moyens proportionnels, d'après l'axiome II. Mais la différence entre les termes de ce rapport, soit 1000 et 729, est 271, beaucoup plus petit que 300, le triple de 100.

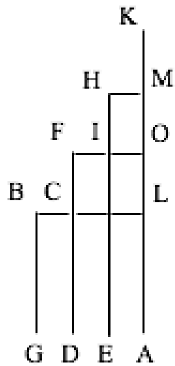
PROPOSITION VI

Pour des quantités continûment proportionnelles, si la différence entre la plus grande et une des plus petites qui ne vient pas à la suite est prise pour mesure de leur rapport, les autres rapports qui sont précisément entre la plus grande et une quantité plus grande que celle choisie précédemment recevront une mesure plus petite que la différence de leurs

---

60 Nous avons conservé les notations de Kepler, soit *A*, *B* ou tout simplement *AB*, pour le rapport entre *A* et *B*. Et on doit noter que l'ordre des lettres *A* et *B* est indifférent, en ce sens que c'est toujours le rapport de plus grande inégalité qui est considéré par Kepler. Ainsi, lorsqu'il parle du rapport 7, 10, ou même du rapport entre 7 et 10, c'est toujours le rapport de plus grande inégalité de 10 à 7 qu'il envisage.

termes. Mais les rapports qui sont entre la quantité la plus grande et une quelconque plus petite que celle choisie précédemment obtiendront une mesure plus grande que la différence de leurs termes.



Soient les quantités proportionnelles *AK*, *EH*, *DF* et *GB*. Que soient choisies la plus grande, soit *AK*, et une des plus petites qui ne la suit pas, *DF*. Que leur différence soit *KO* et que *KO* mesure la quantité du rapport entre *AK* et *DF*. Soient d'autres quantités : *EH* plus grande que *DF* choisie précédemment et *GB* plus petite. Soit *MK* la différence entre *AK* et *EH*, soit *HI* ou *MO* la différence entre *EH* et *DF* et soit enfin *FC* la différence entre *DF* et *GB*. Je dis, premièrement, que la mesure du rapport *AK*, *EH* sera plus petite que la différence des termes *MK*.

En effet, puisque le rapport *AK*, *DF* reçoit la mesure *KO* et que le même rapport a des parties égales obtenues grâce au moyen proportionnel *EH*, d'après la proposition I, alors la mesure du rapport *AK*, *EH* sera la moitié de *KO*, d'après le postulat I (ou une autre partie aliquote selon le nombre des termes intercalés comme *EH*). Mais la différence *MK* est plus grande que le reste *MO* de *KO*[61], d'après la proposition III, c'est pourquoi elle est plus grande que la moitié de *KO*. Donc elle est aussi plus grande que ce que pourrait être la mesure du rapport entre *KA* et *HE*, *HE* étant plus grande que *FD* posée précédemment.

Je dis, deuxièmement, que la mesure du rapport *AK*, *GB* sera plus grande que la différence *LK*. En effet, de nouveau, la mesure du rapport *EH*, *DF*, qui est la moitié du rapport *AK*, *DF*, sera la moitié de *KO*, d'après le postulat I, ou une autre partie aliquote etc. Mais la différence *HI*, ou *MO*, est plus petite que le reste *MK* de *KO*, d'après la proposition III. C'est pourquoi *HI* est plus petite que la moitié de *KO*, donc plus petite que la mesure du rapport *EH*, *DF*. Mais la différence *FC*, ou *OL*, est de nouveau plus petite que la différence *MO*, d'après la proposition III. C'est pourquoi *OL* fait davantage défaut à la mesure du rapport *DF*, *GB* que *MO* à la mesure du rapport *EH*, *DF*. De plus, le rapport *DF*, *GB* est égal au rapport *EH*, *DF*, puisqu'assurément *DF* est à la fois également proche de *GB* du côté de la plus petite et de *EH* du côté de la plus grande. Et si cela n'était pas le cas, on pourrait en prendre une autre, précisément parmi les continûment proportionnelles. C'est pourquoi *OL* fait défaut

61 C'est-à-dire que $MK > MO$ avec $MO = KO - MK$.

à la mesure du rapport DF, GB. Mais on a posé que KO est la mesure du rapport AK, DF. Donc, puisque le rapport AK, GB est composé du rapport AK, DF et du rapport DF, GB, d'après l'axiome I, sa mesure sera aussi composée de leurs mesures, de sorte que si le rapport DF, GB est la moitié du rapport AK, DF, le rapport AK, GB est trois demis du rapport AK, DF. Les trois demis de KO, la mesure choisie, devra aussi être prise pour la mesure du rapport AK, GB. De même, KL est composée de KO et OL. Or, il a été démontré que OL est plus petite que la moitié de KO, c'est pourquoi le tout KL est plus petit que les trois demis de KO, donc plus petit que la mesure du rapport entre AK et GB.

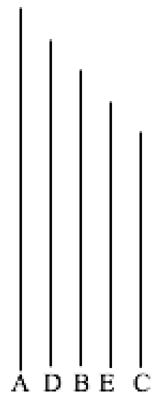
Les nombres proportionnels	Les différences
100000	−10000
90000	−90000
81000	−81000
72900	−7290
65610	−6561
59049	−5905

Par les nombres : soient 100000, 90000, 81000, 72900, 65610 et 59049, continûment proportionnels. Que l'on choisisse 100000 et 72900 et que leur différence 27100 soit prise comme mesure du rapport entre les termes. Alors, puisque ce rapport a trois parties égales, dont l'une est entre 100000 et 90000, avec la différence 10000, l'autre entre 90000 et 81 000, avec la différence 9000, et la troisième entre 81000 et 72900, avec la différence 8100, et puisque n'importe lequel de ces rapports est la troisième partie du tout, la mesure des éléments du rapport vaudra aussi la troisième partie de la mesure de celui-ci, soit $9033\frac{1}{3}$, assurément plus petite que la différence entre les premiers termes, 10000, mais plus grande que la deuxième différence 9000, beaucoup plus grande encore que la troisième 8100 et par conséquent encore plus grande que la différence 7290 entre les nombres 72900 et 65610 et que la différence 6561 entre les nombres 65610 et 59049. Par conséquent pour le rapport 100000, 90000, la différence 10000 entre les termes excède la mesure choisie $9033\frac{1}{3}$. Et pas moins pour le rapport 100000, 81000 la différence 19000 excède sa mesure, soit le double de $9033\frac{1}{3}$, ou $18066\frac{2}{3}$, puisque les plus petits termes 90000 et 81000 se trouvent en outre avant 72900, associé dans un premier temps. Inversement, pour le rapport 100000, 65610, la différence 34390 est plus petite que sa mesure $36133\frac{1}{3}$, c'est-à-dire le quadruple de $9033\frac{1}{3}$. De même, encore, pour le rapport 100000, 59049, la différence 40951 est plus petite que le quintuple de $9033\frac{1}{3}$, soit $45166\frac{2}{3}$, puisque les plus petits termes 65610 et 59049 se trouvent après 72900, associé dans un premier temps, vu qu'ils sont plus petits que lui.

PROPOSITION VII

Si quelques quantités sont mises à la suite selon l'ordre de la grandeur, en faisant deux à la suite des rapports égaux, ces quantités seront continûment proportionnelles.

Que soient mises à la suite A, D, B, E, C, de plus en plus petites, dans l'ordre, à partir de la première et que les rapports AB et BC soient égaux. Je dis que B est moyenne proportionnelle entre A et C. En effet, sinon, ou bien elle serait plus grande que la moyenne proportionnelle, ou bien plus petite. Qu'elle lui soit plus grande et que cette moyenne proportionnelle soit E. Alors, le rapport AE sera plus grand que AB, d'après l'axiome I, donc EC sera plus petit que AE. Mais si E est la moyenne proportionnelle, alors AE et EC sont des rapports égaux, d'après la proposition I. C'est pourquoi la moyenne proportionnelle ne sera pas plus petite que B.



Qu'elle soit plus grande et que ce soit D ; il s'ensuit de nouveau la même absurdité.

Alors, si AB et BC sont des rapports égaux, B est la moyenne proportionnelle, etc.

PROPOSITION VIII

Si sont mises à la suite selon l'ordre de la grandeur des quantités quelconques dont les intermédiaires ne sont pas parmi les moyennes proportionnelles selon un rapport quelconque, que ces intermédiaires soient continuées en acte ou qu'elles doivent être continuées en puissance par l'interposition des quantités manquantes[62], de telles intermédiaires ne divisent pas le rapport des extrêmes en rapports commensurables.

62 Il faut comprendre que, soit ces quantités forment une progression, soit il manque des quantités pour qu'elles forment une telle progression, auquel cas on les ajoute. Et cette progression ne peut être qu'arithmétique, car si elle était géométrique, ces quantités seraient des moyennes proportionnelles entre les extrêmes. Dans

Définitions[63]. 1. En effet, ils sont dits commensurables du fait qu'ils ont une mesure commune que n'importe lequel contient exactement un certain nombre de fois selon un certain nombre, de sorte que ne demeure aucun reste qui soit plus petit que cette mesure.

2. En outre, la mesure commune des rapports est quelque rapport plus petit que chacun des rapports à mesurer.

3. Or, tout rapport est entre deux termes.

4. Et un rapport mesurant, par sa répétition, un autre rapport commence à l'un des termes du rapport à mesurer et lui en associe un autre, en tant que quantité plus petite, puis celui-ci étant pris pour antécédent, un autre est posé comme conséquent, et cela à plusieurs reprises, jusqu'à ce qu'on épuise la quantité du rapport à mesurer. On a cela de la même manière que, lorsque nous mesurons une ligne avec l'écartement des pieds d'un compas, un pied du compas étant fixé à l'une des extrémités de la ligne, nous marquons un point avec l'autre pied, puis le premier pied étant transporté à ce point, nous traçons un autre point avec l'autre pied vers la suite, jusqu'à ce que nous ayons parcouru toute la ligne.

5. Et un rapport est dit mesurer exactement un rapport quand, dans cette interposition continue et cet ajustement des termes, le dernier terme du rapport mesurant coïncide à la fin avec le second terme du rapport mesuré en quantité. C'est pourquoi cette identité du rapport servant à mesurer, répété continûment, produit des termes continûment proportionnels, d'après la proposition VII. Donc, si quelque rapport mesure exactement deux rapports, il est nécessaire que les termes que le rapport mesurant interpose soient continûment proportionnels avec les termes des rapports à mesurer. Si, donc, aucun rapport, aussi petit soit-il, ne peut être trouvé qui, par sa répétition, atteigne les derniers termes des rapports à mesurer, de sorte que aussi bien le plus grand terme de la mesure commune que les deux plus petits termes des rapports à mesurer soient continûment proportionnels avec les termes interposés du rapport mesurant, ces rapports sont entre eux incommensurables.

PROPOSITION IX

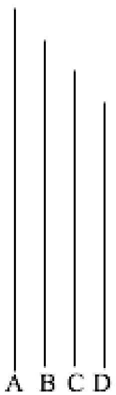
Lorsque deux longueurs exprimables ne sont pas l'une relativement à l'autre comme deux nombres de la même espèce figurative, par exemple

---

les propositions X et XI, c'est à des quantités en progression arithmétique que la proposition VIII est appliquée.

63 Pour ces définitions, voir notre introduction, p. 129–132.

comme deux carrés ou deux cubes, il ne tombe pas entre celles-ci d'autres longueurs exprimables, moyennes proportionnelles, en nombre conforme à ce que demande l'espèce, par exemple, une pour le carré, deux pour le cube, trois pour le bicarré, etc.



En effet, soient deux longueurs A et D qui soient l'une relativement à l'autre assurément comme un nombre à un nombre, mais pas comme un nombre cube à un nombre cube. Et puisqu'il est question de cubes, nous devrons parler de deux moyennes proportionnelles ; que ce soient B et C. Je dis que B et C ne sont pas des longueurs exprimables.

En effet, si quelqu'un prétend qu'elles sont exprimables, qu'on le pose. Elles sont donc comme des nombres. Ce sont aussi des moyennes proportionnelles entre A et D, par hypothèse. Puisque A et D sont comme des nombres, car elles ont été supposées exprimables, et qu'elles ont deux moyennes B et C, qui sont comme des nombres, alors, d'après la proposition 21 du livre VIII d'Euclide[64], A et D seront semblables à des solides. Donc, d'après la proposition 27 du même livre[65], elles seront l'une relativement à l'autre comme un nombre cube à un nombre cube. Mais ceci est en contradiction avec la première hypothèse de la proposition. C'est pourquoi il a été faux de poser que B et C sont exprimables en longueur. Donc, dans l'énoncé de la proposition, la négation est valide.

Nous pouvons raisonner de la même manière en utilisant une déduction à l'impossible, pour les carrés et une moyenne proportionnelle et de même pour les autres espèces qui viennent après le carré et le cube.

PROPOSITION X

Si, pour un certain nombre de quantités exprimables se suivant selon l'ordre de la grandeur, les deux extrêmes ne sont pas l'une relativement à l'autre comme deux nombres carrés ou deux cubes ou deux autres

64 Euclide [1994, p. 402], Proposition VIII, 21 : « Si deux nombres moyens proportionnels tombent entre deux nombres, ces nombres sont solides semblables ».

65 Euclide [1994, p. 408], Proposition VIII, 27 : « Les nombres solides semblables ont comme rapport, l'un relativement à l'autre, celui d'un nombre cube à un nombre cube ».

nombres de même espèce, aucune quantité parmi les quantités intermédiaires ne divisera le rapport en rapports commensurables.

En effet, à moins que les deux quantités exprimables n'admettent des moyennes proportionnelles, leur rapport ne sera pas divisé par une quantité intermédiaire exprimable en rapports commensurables, d'après la proposition VIII. Mais, si deux quantités ne sont pas entre elles comme deux nombres de la même espèce figurative, elles n'admettent pas des moyennes proportionnelles exprimables, d'après la proposition IX. Donc ces intermédiaires que la proposition requière, puisqu'elles sont exprimables, ne seront pas des moyennes proportionnelles. C'est pourquoi elles ne divisent pas le rapport des extrêmes en rapports commensurables.

PROPOSITION XI

Tous les rapports pris à la suite et se trouvant entre des termes exprimables s'excédant selon une égalité arithmétique sont incommensurables entre eux.

En effet, les termes extrêmes exprimables, ou bien admettent une seule ou plusieurs quantités moyennes proportionnelles exprimables, ou bien ils n'en admettent pas. S'ils n'en admettent pas, leur rapport n'est divisé par aucune quantité exprimable ou par aucun moyen arithmétique en rapports commensurables, d'après la proposition VIII. Mais qu'ils admettent un moyen proportionnel exprimable, comme les termes 8 et 18 admettent 12, exprimable, puisqu'ils sont comme 4 à 9, un carré à un carré. Entre 8 et 18 on a par ailleurs un moyen arithmétique, 13, et par conséquent, le rapport 8, 13 est plus grand que 8, 12 et 13, 18 est plus petit que 12, 18, l'un et l'autre selon la quantité du petit rapport entre les termes 12, 13.[66] Mais le rapport 12, 13 n'est commensurable à aucun des autres. En effet, les termes 8 et 13, puisqu'ils ne sont pas l'un relativement à l'autre comme un nombre figuré à un autre de la même espèce de figuration, n'admettent pas un moyen ni des moyens proportionnels exprimables, d'après la proposition X. Donc le nombre 12 n'est pas un de ces nombres qui tombent entre 8 et 13 en proportion continue. C'est pourquoi le rapport 8, 13 n'est pas commensurable au rapport 12, 13 ou 8, 12. Ainsi, à partir des mêmes

66 Nous rappellerons que le rapport 8, 13 est le rapport de plus grande inégalité de 13 à 8, que nous notons pour notre part $(13:8)$, et de même pour les autres.
On a $(13:8) = (12:8) * (13:12)$, donc $(13:8) > (12:8)$ selon la quantité ou la mesure de $(13:12)$. De même, $(18:12) = (13:12) * (18:13)$, donc $(18:13) < (18:12)$ selon la quantité de $(13:12)$.

principes, puisque les termes 12 et 18 n'admettent pas un moyen proportionnel exprimable, alors 12, 13 et 13, 18 sont incommensurables. D'où, au rapport 8, 12, commensurable à 8, 18, est apposé l'incommensurable 12, 13. Donc, le tout 8, 13 est incommensurable à 8, 18. Ainsi, dans 13, 18, du commensurable 12, 18 est retranchée la partie incommensurable 12, 13, et le reste 13, 18 est incommensurable à 12, 18. Et le rapport entre 8 et 13 n'est pas commensurable au rapport entre 13 et 18, puisque le tout entre 8 et 18 est incommensurable à l'une des parties, entre 13 et 18. Donc, les parties sont aussi incommensurables entre elles, d'après la proposition 16 du livre X d'Euclide[67]. De plus, si les parties étaient commensurables, elles auraient une mesure commune et celle-ci mesurerait aussi le rapport composé, entre 8 et 18. Et ainsi les parties seraient commensurables au tout. Mais il a déjà été démontré qu'aucune partie n'est commensurable au tout. C'est pourquoi les parties que produit ici un moyen arithmétique ne sont pas commensurables entre elles.

PROPOSITION XII

Si des quantités quelconques sont prises à la suite selon l'ordre de la grandeur et que pour la mesure du rapport entre les plus grandes est posée leur différence, la différence entre n'importe lesquelles des autres quantités posées sera plus petite que la mesure de leur rapport ; et si pour la

---

[67] Euclide [1998, p. 139], Proposition X. 16 : « Si deux grandeurs incommensurables sont composées, le tout sera aussi incommensurable avec chacun d'elles ; et si le tout est incommensurable avec l'une d'elles, les grandeurs initiales aussi seront incommensurables ». Cette même proposition est évoquée dans la démonstration de la proposition XVII, mais sous le numéro 17 (voir note 74). Nous verrons ainsi plus loin (note 69) que la proposition X. 14 évoquée par Kepler correspond à la proposition X.13 de l'édition grecque par Heiberg des *Éléments* d'Euclide. En toute logique, Kepler devrait citer ici la proposition X. 17 et non la proposition X. 16. En effet, Kepler semble utiliser une édition des *Éléments* d'Euclide dans laquelle, au livre X, on a un décalage de 1 dans le numéro des proportions à partir de la treizième. C'est par exemple le cas dans l'édition de Christoph Clavius, publiée une première fois à Rome en 1574 (puis de nouveau en 1589, et plusieurs fois jusqu'à l'édition des *Opera mathematica*, vol. 1, publiée en 1612), ou encore celle de Frederico Commandino publiée à Venise en 1572, ou même l'édition grecque et latine des seuls énoncés (pour les livres III à XIII) publiée par Conrad Dasypodius à Strasbourg en 1564 (les livres I et II sont publiés la même année, mais avec les démonstrations des propositions). Dans toutes ces éditions, le lemme entre la proposition X. 12 et la proposition X. 13, que l'on trouve dans certains manuscrits grecs et dans l'édition latine de Bartholomeo Zamberti publiée à Venise en 1505 (puis à Paris, en 1516, en parallèle avec l'édition de Campanus) devient la proposition X. 13, de sorte que, dans toutes ces éditions, la proposition X. 13 d'Euclide est la X. 14 et les propositions suivantes sont ainsi décalées d'un numéro.

mesure du rapport entre les plus petites est posée la différence entre les plus petites, les autres différences seront plus grandes que la mesure du rapport de leurs termes[68].

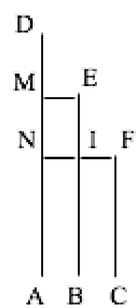
En effet, ou bien les quantités sont prises continûment proportionnelles en acte ou en puissance en ajoutant les manquantes, et alors, la proposition est claire d'après la proposition IV et d'après la proposition III, ou bien elles ne sont pas continûment proportionnelles, de sorte qu'elles produisent des parties incommensurables, et alors, par une conception de l'esprit, elles semblent être divisées en une infinité de petites parties égales grâce à une infinité de moyennes proportionnelles interposées. Elles sont ainsi ramenées à celles qui sont continûment proportionnelles en acte par la même force de démonstration.

COROLLAIRE

Et si la mesure du rapport entre les plus grandes surpasse leur différence, le rapport de cette mesure à cette différence sera plus petit que celui de la mesure du rapport suivant à sa différence, puisque le rapport entre des quantités proportionnelles est le même[69].

PROPOSITION XIII

Si trois quantités se suivent selon l'ordre de la grandeur, le rapport entre les deux plus petites sera contenu dans le rapport des extrêmes moins de fois que la différence des plus petites dans la différence des extrêmes et, inversement, le rapport entre les plus grandes sera contenu dans le rapport des extrêmes plus de fois que la différence de celles-là dans la différence de celles-ci.



En effet, dans le schéma ci-contre, que la différence des plus petites *EI* ou *MN* soit contenue dans la différence *DN* des extrêmes un certain nombre de fois, même si ce n'est pas exactement, et que le rapport entre les plus petites *BE*, *CF* ait pour mesure la différence *MN*, alors la

68 Pour les propositions XII à XV, voir notre introduction p. 132–135.

69 Soient $A > B > C$ des quantités continûment proportionnelles. On pose $\mathrm{mes}(A : B) > A - B$. Alors, $(A : B) = (B : C)$, d'où $\mathrm{mes}(A : B) = \mathrm{mes}(B : C)$. Par ailleurs, $A - B > B - C$ (d'après la proposition III). Donc, $(\mathrm{mes}(A : B) : (A - B)) = (\mathrm{mes}(B : C) : (A - B)) < (\mathrm{mes}(B : C) : (B - C))$.

mesure du rapport *AD*, *CF* sera plus petite que la différence *DN*, d'après la proposition XII. C'est pourquoi *MN* sera contenue dans la mesure du rapport *AD*, *CF* moins de fois que dans *ND*, plus longue, donc aussi ce rapport moins de fois dans le rapport[70].

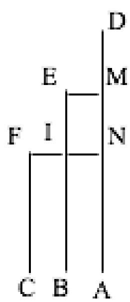
Inversement, que la différence *DM* soit contenue dans *DN* un certain nombre de fois et soit *DM* la mesure du rapport *AD*, *BE*. La mesure du rapport *AD*, *CF* sera plus grande que *DN*. C'est pourquoi *DM* sera dans la mesure de ce rapport *AD*, *CF* plus que dans *DN*, donc etc.

COROLLAIRE

La différence entre ces deux plus grandes quantités-ci étant la même qu'entre ces deux plus petites-là, le rapport entre les plus grandes sera plus petit et plus grand celui entre les plus petites.

PROPOSITION XIV

Si trois quantités sont ordonnées à la suite en s'excédant selon des différences égales, le rapport entre les extrêmes est plus grand que le double du rapport entre les plus grandes.



Soient trois quantités, *AD* la plus grande, *BE* la médiane et *CF* la plus petite. Soit *DM*, l'excès de la première sur la deuxième, égal à l'excès, *EI* ou *MN*, de la deuxième sur la troisième. Je dis que le rapport *AD*, *CF* est plus grand que le double de celui entre *AD* et *BE*. En effet, que le rapport *AD*, *BE* soit mesuré par la différence *DM*, d'après le postulat III. Alors, la mesure du rapport *BE*, *CF* sera plus grande que la différence *IE* ou *NM*, d'après la proposition XII. Mais *MN* est égale à *DM*, la mesure du rapport entre *AD* et *BE*. Donc la mesure du rapport *BE*, *CF* est plus grande que la mesure du rapport *AD*, *BE*. Et ainsi le rapport *BE*, *CF* est plus grand que le rapport *AD*, *BE*. Mais le rapport *AD*, *CF* est composé du rapport *AD*, *BE* et du rapport *BE*, *CF*, d'après l'axiome I. Donc le rapport *AD*, *CF* a pour parties le rapport *AD*, *BE* et le rapport *BE*, *CF*, plus grand, donc il est plus grand que le double de *AD*, *BE*.

70 C'est-à-dire que le rapport entre les plus petites quantités *CF* et *BE* est contenu dans le rapport entre les extrêmes *AD* et *CF* moins de fois que la différence *MN* entre les plus petites dans la différence *ND* entre les extrêmes.

COROLLAIRE

De là, il s'ensuit que la moitié du rapport entre les extrêmes est plus grand que le rapport entre les plus grandes, plus petit que le rapport entre les plus petites.

PROPOSITION XV

Si deux quantités produisent un rapport et que la moitié de la plus grande quantité est retranchée de chaque quantité, les quantités restantes produisent un rapport plus grand que le double du premier.

Soient les quantités 10 et 9. La moitié de 10, c'est-à-dire 5, étant retranchée de chacune, il reste 5 et 4. Je dis que le rapport entre 5 et 4 est plus grand que le double de celui entre 10 et 9. Que l'on double 5 et 4 et on aura 10 et 8. Le rapport 5, 4 sera le même que 10, 8. Mais la différence entre 10 et 8, c'est-à-dire 2, sera le double de la différence entre 5 et 4, c'est-à-dire de la différence entre 10 et 9, soit 1.

Mais si sont prises dans l'ordre les trois quantités 10, 9, 8, dont la première 10 excède la troisième 8 du double de ce selon quoi elle excède la deuxième 9, ou dans lesquelles les excès entre 10 et 9 et entre 9 et 8 sont égaux, le rapport entre les extrêmes 10, 8 (c'est-à-dire 5, 4) est plus grand que le double de celui entre les plus grandes 10, 9, d'après la proposition XIV, donc etc.

PROPOSITION XVI

Les parties aliquotes des rapports incommensurables sont incommensurables entre elles.

En effet, la partie aliquote est commensurable à son tout, mais ce tout est rapporté à un tout associé incommensurable, donc la partie de l'un d'eux sera incommensurable à l'autre tout, d'après la proposition 14 du livre X d'Euclide[71], et à la partie aliquote de l'autre, d'après la même proposition.

---

71 Pour les raisons évoquées plus haut (note 67), la proposition X. 14 évoquée ici par Kepler correspond à la proposition X. 13 dans l'édition grecque par Heiberg des *Éléments* d'Euclide. Son énoncé est le suivant [1998, p. 134] : « Si deux grandeurs sont commensurables et que l'une d'entre elles est incommensurable avec une certaine grandeur, l'autre sera aussi incommensurable avec cette même grandeur ».

PROPOSITION XVII

Si mille nombres se succèdent l'un l'autre selon l'ordre naturel, leurs différences de deux en deux étant l'unité, et si l'on commence par le plus grand 1000, alors, par une bissection continue, on divisera le rapport entre les plus grands 1000, 999 en parties plus petites que l'excès du rapport entre les plus proches, 999, 998, sur le rapport entre les plus grands, 1000, 999. Que cet élément minimum du rapport entre 1000 et 999 ait pour mesure la différence entre 1000 et le moyen proportionnel qui est l'autre terme de l'élément. Ensuite, si le rapport entre 1000 et 998 est lui aussi divisé en parties deux fois plus nombreuses que le premier rapport entre 1000 et 999, que l'on prenne pour mesure de l'élément minimum de cette autre division la différence de ses termes, dont l'un est 1000. De la même manière, n'importe quel rapport de 1000 à un des nombres suivants, comme à 997, etc., sera divisé par bissection continue en petites parties d'une grandeur se trouvant entre une fois et demi et trois quarts de l'élément qui a été obtenu à partir de la division du premier rapport entre 1000 et 999. Que la mesure de chaque élément[72] soit donnée par la différence de ses termes, le plus grand étant 1000. Cela étant accompli, si la mesure de chacun des mille rapports est constituée de la mesure de son élément prise autant de fois que le rapport a été divisé en éléments, alors tous les rapports auront des mesures correctes et exactes, conformément à l'entière justesse du calcul[73].

En effet que les nombres 1000, 999, 998 etc. se succèdent selon l'ordre naturel avec des différences d'une unité. Entre les plus grands 1000, 999 le rapport sera le plus petit et plus grand celui entre les plus proches 999, 998 et de nouveau plus grand que celui-ci est le plus proche entre 998 et 997, et ainsi de suite, d'après le corollaire à la proposition XIII. Et on a cela jusqu'à ce que le rapport entre 500 et 499 soit plus grand que le double du rapport entre 1000 et 999, d'après la proposition XV. Je dis par ailleurs que l'excès du deuxième sur le premier sera le plus petit, de sorte que l'excès du suivant sur le précédent est plus grand que l'excès précédent. Ainsi, chaque fois qu'un rapport suivant est deux fois plus éloigné du premier que chacun des précédents, chaque fois l'excès du suivant sur le premier est deux fois plus grand que l'excès du précédent[74]. En effet que 1000 soit à 999 comme 999 à $998\frac{001}{1000}$, alors le rapport de 999 à $998\frac{1}{1000}$ est le même

72 C'est-à-dire de l'élément de chaque rapport 1000 à 997, 1000 à 996 etc.

73 Pour un descriptif de cette proposition, voir notre introduction, p. 136–141.

74 Sous-entendu « sur le premier ».

que celui de 1000 à 999. Qu'on le retranche du rapport 999, 998, il reste comme excès le rapport 998001, 998.000. De nouveau, que 1000 soit à 999 comme 998 à 997$\frac{002}{1000}$, alors le rapport de 998 à 997$\frac{2}{1000}$ est le même que celui de 1000 à 999. Retranche celui-ci du rapport 998, 997, il reste comme excès le rapport 997002, 997000. Mais, dans le premier excès, c'est-à-dire le rapport 998001, 998000, les termes différaient de 1 et dans cet autre excès les termes 997002 et 997000 diffèrent de 2. Mais si les plus grands termes de l'un et de l'autre avaient été égaux, le second rapport, pour lequel la différence aurait été double de la première, aurait été plus grand que le double du premier, d'après la proposition XIV. C'est pourquoi beaucoup plus grand sera le rapport pour lequel le terme qui est à la place du plus grand dans le rapport suivant, soit 997002, est plus petit.

Pour que la raison en soit plus évidente, soient des nombres plus petits et moins nombreux, et qu'ils diffèrent d'une unité, comme 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Je dis que l'excès du rapport 8, 7 sur le rapport 10, 9 est plus que deux fois plus grand que l'excès du rapport 9, 8 sur le même rapport 10, 9. En effet, que l'on ramène comme auparavant le rapport entre 10, 9 à chacun des suivants que constituent deux nombres à la suite, qu'on le ramène, dis-je, au terme commun le plus grand. Ici aussi les termes des excès diffèrent de plus en plus. Par exemple, puisque 72 et 70 sont en deuxième place, la différence 2 (puisqu'elle est le double de la précédente, 1, entre 81 et 80) indique que l'excès entre 72 et 70 est deux fois plus grand que celui entre 81 et 80. De même, pour 54 et 50, en quatrième place, elle est deux fois plus grande que pour 72 et 70, en deuxième place. De même, pour 18 et 10 en huitième place, elle est deux fois plus grande que pour 54 et 50, car on voit que la différence 8 est le double de 4, la différence entre les plus petits termes.

	est	mais le rapport entre 10 et 9 vaut	leur excès
10 à 9	100 à 90	100 à 90	
9 à 8	90 à 80	90 à 81	81 à 80
8 à 7	80 à 70	80 à 72	72 à 70
7 à 6	70 à 60	70 à 63	63 à 60
6 à 5	60 à 50	60 à 54	54 à 50
5 à 4	50 à 40	50 à 45	45 à 40
4 à 3	40 à 30	40 à 36	36 à 30
3 à 2	30 à 20	30 à 27	27 à 20
2 à 1	20 à 10	20 à 18	18 à 10

Donc, puisque dans le premier exemple des mille nombres, le plus petit excès est de 998001 à 998000, nous partageons facilement le premier rapport 1000, 999 en parties égales plus petites, un nombre de l'excès ayant été posé. En effet, que l'on ramène cet excès au terme le plus petit du rapport à diviser, c'est-à-dire que l'on fasse que comme 998000 est à 998001, ainsi 999000000000 est à 999001002004 etc., alors il apparaît que la différence entre les termes est 1002004 etc., laquelle est un peu plus grande que la millième partie de la différence entre les termes du premier rapport[75]. Donc, d'après la proposition XIII, une moindre partie du rapport 1000, 999 est dans l'excès du second rapport 999, 998.

Que l'on cherche alors le moyen proportionnel entre 1000 et 999. Celui-ci partagera le rapport entre les termes en deux parties égales, d'après la proposition I. Que l'on cherche ensuite un autre moyen proportionnel entre ce moyen trouvé et 1000, de sorte que le premier moyen est pensé comme étant entouré de deux autres moyens proportionnels, dont cependant un seul du côté de 1000 est nécessaire pour l'investigation. Grâce à ces trois moyens, le rapport sera partagé en 4 parties, comme on l'a dans l'axiome II. Puis, le troisième moyen proportionnel entre le premier trouvé et 1000 le partagera en 8 parties, le quatrième en 16 et par conséquent, d'après le postulat II, en 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ce qui est fait en dix étapes. C'est pourquoi ce nombre 1024 permet de déterminer assurément les petites parties du rapport 1000, 999, plus petites que l'excès trouvé, puisque le rapport a un excès plus petit que mille. Ici donc sont construites 1024 petites parties. C'est pourquoi que cette mille vingt-quatrième petite partie ait pour mesure la différence entre son terme le plus petit ou le dixième moyen proportionnel et le terme le plus grand 1000, d'après le postulat III.

Nous continuons avec la division semblable du rapport 1000, 998. Celui-ci est incommensurable au premier rapport 1000, 999. En effet, d'après la proposition XI, le rapport 999, 998 est incommensurable au rapport 1000, 999, car les deux termes diffèrent dans les deux cas d'une unité. Mais le rapport 1000, 998 est composé de ceux-ci, qui sont incommensurables entre eux, d'après l'axiome I. Et puisque le tout est divisé en incommensurables, il est incommensurable à chacun, d'après la proposition 17 du livre X d'Euclide[76].

---

75 On considère donc que le premier rapport est entre 1000000000000 et 999000000000.

76 On voit ici que la proposition citée par Kepler sous le numéro 17 du livre X correspond à la proposition X. 16 dans l'édition grecque par Heiberg du traité euclidien. Voir note 67.

Ce rapport 1000, 998 est plus grand que le double du premier rapport 1000, 999 avec un excès incommensurable, comme cela a été indiqué plus haut selon ce qui a été dit à la proposition XIV précédente. C'est pourquoi sa mille vingt-quatrième partie est plus que le double de l'élément minimum du rapport précédent. Donc, qu'on la divise en deux grâce à la recherche d'un onzième moyen proportionnel, de sorte qu'on ait en tout 2048 parties. Alors, son élément sera assurément presque égal à l'élément minimum du premier rapport, mais cependant toujours plus grand que celui-ci, et il lui est incommensurable d'après la proposition XVI précédente.

Si, donc, celui-là[77] a reçu comme mesure la différence de ses termes, dès lors cet élément du rapport[78], assurément plus grand que celui-là, aura une mesure[79] plus grande que la différence de ses termes, d'après la proposition XII. Et par conséquent, si la différence entre les termes du premier élément est multipliée 1024 fois pour donner la mesure du rapport entre 1000 et 999, alors la différence des termes du second élément, multipliée 2048 fois, sera plus petite que la mesure du rapport entre 1000 et 998. Cependant, si nous sommes attentifs à la quantité de ce défaut, celle-ci est tout à fait minuscule et n'est décelable par aucun calcul, même zélé. En effet, puisque le rapport entre 1000 et 999 a été divisé en plus de mille petites parties, la mesure du petit élément est constituée de la différence entre les termes 1000000 et 999999, soit 1. D'où, le rapport plus grand le plus proche, entre 999999 et 999998, aura une mesure plus grande que le précédent, d'après la proposition XII, mesure qui excède la première différence des termes d'à peine mille fois sa millième partie. Et par conséquent, le rapport composé entre 1.000.000 et 999998 est plus grand que le double du premier d'à peine mille fois la millième petite partie du premier. Mais, déjà, l'élément du second rapport entre 1000 et 998, construit plus haut, était aussi plus grand que le double de l'élément du premier rapport. Et pour cela ont été faites non pas 1024 parties, mais 2048, afin que cette partie soit la plus proche de la première, de manière à ce qu'elle l'excède de nouveau à peine de la millième partie de celle-ci. Si, donc, pour le tout, on additionne mille fois la millième partie de sa différence afin de constituer la mesure du rapport, alors la millième partie du tout n'ajoute

77 C'est-à-dire l'élément minimum du rapport de 1000 à 999.

78 C'est-à-dire du rapport de 1000 à 998.

79 Il faut comprendre ici la mesure plus exacte du rapport de 1000 à 998, que l'on obtiendrait à partir de la mesure du rapport de 1000 à 999. Mais on a vu qu'on ne pouvait pas procéder ainsi puisque ces deux rapports sont incommensurables.

pas plus que mille fois la millième partie de la millième partie du premier élément.

Nous passons à la section du rapport suivant entre 1000 à 997. Celui-ci est un peu plus grand que le triple du premier entre 1000 et 999. Donc, si on le partage en 1024 petites parties égales, une telle petite partie sera un peu plus grande que le triple de l'élément du premier. Mais si on divise de nouveau en deux grâce à un onzième moyen proportionnel, elles seront au nombre de 2048 et chacune d'elles sera plus grande que les trois demis du premier élément. En effet, la moitié du triple est trois demis du tout. Donc, puisqu'elles surpassent le premier élément plus que de sa moitié, qu'elles soient de nouveau divisées en deux par la construction d'un douzième moyen proportionnel, de sorte qu'on ait 4096 parties. N'importe laquelle est plus grande que les trois quarts du premier élément, puisque la moitié de trois demis est trois quarts. Elle est alors suffisamment proche du premier élément. Si, donc, pour cet élément du troisième rapport, on pose comme mesure la différence de ses termes, elle sera plus petite[80], d'après la proposition XII précédente, mais par un défaut que l'on ne peut pas du tout évaluer pour les raisons données pour la division du deuxième rapport.

De même, le rapport 1000, 996 produit, grâce à une division en 4096 parties, un élément un peu plus grand que l'élément du premier rapport et le rapport entre 1000 et 995 un élément un peu plus grand que cinq quarts du premier élément. Le rapport entre 1000 et 994 doit recevoir, grâce à un treizième moyen proportionnel, 8192 parties, de sorte que de nouveau elles soient un peu plus grandes que les trois quarts du premier élément. Le rapport entre 1000 et 993 aura des parties un peu plus grandes que sept huitièmes du premier. Le rapport entre 1000 et 992 de nouveau des parties un peu plus grandes que le premier élément. Et on a cela jusqu'à ce que les nombres de la série de mille se soient rapprochés davantage de 500, la moitié du premier, que du premier 1000.

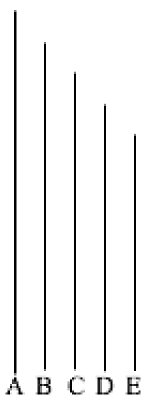
En effet, puisque le rapport entre 500 et 499 est plus grand que le double du rapport entre 1000 et 999, d'après la proposition XV précédente, alors l'excès de 500, 499 sur 1000, 999 surpasse 1000, 999. Donc, dans la division des rapports qui précèdent le plus près le rapport entre 500 et 499, on est ramené, grâce à une nouvelle bissection ou quadrisection, à l'élément apparaissant au voisinage du premier élément déterminé dans la proposition. Et pour ceux qui suivent le rapport entre 500 et

80 La différence des termes est plus petite que la mesure plus exacte que l'on obtiendrait si l'on déterminait la mesure du rapport de 100 à 997 à partir de celle du rapport de 1000 à 999.

499 il n'est pas besoin de nouveau d'une section. En effet, puisque le rapport entre 500 et 499 est le même que celui entre 1000 et 998, si les rapports entre 1000 et 998 et entre 1000 et 500 sont connus, alors le rapport composé de chacun d'eux, entre 1000 et 449, est connu sans division laborieuse. Donc la recherche des moyens proportionnels cesse avec le rapport double entre 1000 et 500.

PROPOSITION XVIII

Le rapport entre un nombre quelconque et le premier nombre 1000 étant connu[81], on connaît aussi le rapport des autres nombres en même proportion continue au même premier nombre 1000[82].



Que soit connue la mesure du rapport entre A et B et que comme A est à B, ainsi B est à C et C à D et D à E. Alors, les mesures de chacun de ces rapports seront égales à celle du rapport de A à B qui est d'abord connu, d'après le postulat I. Mais le rapport de A à C est composé des rapports de A à B et de B à C, d'après l'axiome I, donc la mesure du rapport AC est aussi composée des mesures des deux rapports AB et BC. C'est-à-dire que la mesure de AB doublée donne la mesure de AC, triplée celle de AD, quadruplée celle de AE.

De cette manière, le rapport entre 1000 et 900 étant connu, on connaît aussi celui de 1000 à 810, et à 729.

Et à partir de celui de 1000 à 800, on a aussi celui de 1000 à 640 et à 512.

Et à partir de celui de 1000 à 700, on a aussi celui de 1000 à 490 et à 343.

Et à partir de celui de 1000 à 600, on a aussi celui de 1000 à 360 et à 216.

Et à partir de celui de 1000 à 500, on a aussi celui de 1000 à 250 et à 125.

COROLLAIRE

De là découle la règle permettant de mettre au carré, d'élever au cube etc., et inversement d'extraire la racine carrée, la racine cubique etc., dans

81 Un rapport est connu si sa mesure est connue, comme on le voit au début de la démonstration.

82 Pour les propositions XVIII à XX, voir notre introduction, p. 141–143.

les premières figures des nombres. En effet, comme le plus grand de la chiliade, en tant que dénominateur, est au nombre proposé, en tant que numérateur, ainsi celui-ci est au carré de la fraction et celui-là au cube[83].

PROPOSITION XIX

Le rapport entre un nombre et le premier nombre 1000 étant connu, si deux autres se trouvent dans le même rapport, le rapport de l'un d'eux à 1000 étant connu, le rapport de l'autre au même 1000 sera aussi connu.

Soit A, 1000, et que soit connue la mesure du rapport de A à B. Que A soit à B comme C à D, et que la mesure du rapport de A à C soit connue. Je dis que la mesure du rapport de A à D se fait aussi connaître. En effet, puisque la mesure du rapport AB est connue, celle du rapport CD sera aussi connue, du fait qu'elle a été posée égale à celle-ci, d'après le postulat I. Et celle de AC est aussi connue. Or, AD est composé de AC et de CD, d'après l'axiome I. Donc la mesure de AD sera aussi composée de la mesure de AC et de la mesure de CD, c'est-à-dire de AB.

COROLLAIRE I

De cette manière, à partir de la connaissance des quinze rapports précédents de la proposition XVIII, sont connus cent vingt autres rapports entre des nombres inférieurs à 1000 et ce même 1000.

En effet, toutes les fois que sont donnés les rapports à 1000 pour deux nombres tels que ou bien les deux ont 0 dans les deux dernières places, comme 900 ou 800, ou bien l'un des deux en a deux et l'autre un seul, comme dans 700 et 810 ou 700 et 10, ou si un seul 0 obtient la dernière place parmi les trois dans chacun des nombres, mais que le chiffre qui précède ce 0 est 5 dans l'un des nombres et 2 dans l'autre, comme dans 620 et 950, ou 620 et 50, ou 20 et 950, ou si l'un n'a pas de 0 à la dernière place mais a 2, comme dans 512, 12 ou 2 et l'autre est 500, dans tous ces cas la multiplication des nombres étant effectuée, on obtient à la fin trois 0 et, ceux-ci étant mis de côté, est produit un nombre parmi les 1000 de l'ordre naturel ou de la progression arithmétique.

83 La fin de l'énoncé n'est pas claire. On peut remarquer que si a est le nombre donné,

$$\frac{1000}{a} = \frac{\frac{a}{1000}}{\left(\frac{a}{1000}\right)^2} = \frac{\left(\frac{a}{1000}\right)^2}{\left(\frac{a}{1000}\right)^3}.$$

COROLLAIRE II

De là découle le mode de maniement de la règle de trois, quand à un endroit se trouve le nombre rond 1000.

En effet, si celui-ci se trouve à la première place, comme dans une telle situation : A 1000 donne B, qu'est C ? Alors, que la mesure du rapport AB soit ajoutée à la mesure du rapport AC, afin qu'on ait la mesure du rapport AD[84].

Mais si 1000 est en deuxième place ou en troisième, dans cette situation : B donne A 1000, qu'est C ? ou dans celle-ci : B donne C, qu'est A 1000 ? Alors, on retranche la mesure du rapport AB de la mesure du rapport AC ou de son multiple plus grand le plus proche et il reste la mesure du rapport AD, ou de son équimultiple.

PROPOSITION XX

Si on a que, comme un premier nombre est à un deuxième, ainsi un troisième est à un quatrième et que les rapports de 1000 au trois premiers sont connus, alors le rapport de ce même nombre 1000 au quatrième sera connu.

En effet, que A soit 1000 et que comme B est à C, ainsi D à E. Et que les rapports AB, AC et AD soient connus. Je dis que le rapport AE est aussi connu. Car, puisque B est à C comme D à E, la mesure du rapport BC est égale à la mesure du rapport DE. Mais BE est composé de BD et de DE, d'après l'axiome I. C'est pourquoi le rapport BE sera égal aux rapports BD et BC pris ensemble. Mais AE est composé de AB et de BE, de même AD de AB et BD et AC de AB et BC, d'après l'axiome I. Si, donc, pour BD et BC sont pris les rapports connus AD et AC, deux fois AB sont en surplus. En retour, si pour BE est pris le rapport cherché AE, alors une seule fois AB est en surplus. Si, donc de AD et AC connus, joints, tu as enlevé une seule fois AB connu, il reste AE le rapport cherché[85].

---

[84] Il est sous-entendu que D est le quatrième nombre cherché.

[85] On a $(B:C) = (D:E)$, donc $(B:E) = (B:D) * (D:E) = (B:D) * (B:C)$. De plus, $(A:D) = (A:B) * (B:D)$, donc $(B:D) = (A:D) - (A:B)$ et $(A:C) = (A:B) * (B:C)$, donc $(B:C) = (A:C) - (A:B)$. D'où, $(B:E) = (A:C) * (A:D) - 2(A:B)$. Finalement, $(A:E) = (A:B) * (B:E) = (A:C) * (A:D) - (A:B)$.

COROLLAIRE I

Par cette méthode, même si on retrouve beaucoup des rapports précédents de la chiliade, quelques autres adviennent en plus de ceux-ci.

COROLLAIRE II

De là découle le mode de maniement de la règle de trois, quand nulle part n'apparaît le nombre rond 1000, comme si trois nombres sont posés ainsi : B donne C, qu'est D ?

En effet, la mesure du rapport AC est ajoutée à la mesure du rapport AD et de la somme est retranchée la mesure du rapport AB ou l'une de ses parties aliquotes, il reste alors la mesure du rapport AE, ou son multiple.

DÉFINITION

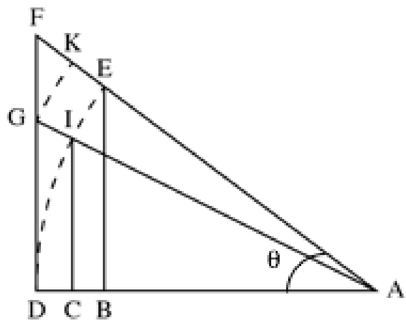
Que la mesure de n'importe quel rapport entre 1000 et un nombre qui lui est plus petit, telle qu'elle a été définie dans les propositions précédentes et exprimée par un nombre, soit associée à ce nombre plus petit dans la chiliade et qu'elle soit dite son LOGARITHME, c'est-à-dire le nombre (ἀριθμός) indiquant le rapport (λόγον) qu'a à 1000 ce nombre auquel le Logarithme est associé.

PROPOSITION XXI

Si le premier nombre est le demi-diamètre d'un cercle ou le sinus total, tout nombre plus petit considéré comme le sinus de quelque arc complémentaire[86] a un Logarithme plus grand que la flèche de l'arc, mais plus petit que l'excès de la sécante de l'arc sur le rayon ou le demi-diamètre, sauf pour celui qui suit immédiatement le demi-diamètre, puisque, par hypothèse, son Logarithme est égal à la flèche[87].

86 C'est-à-dire le sinus du complémentaire de l'arc relativement au quart de cercle, ou le cosinus de cet arc.

87 Voir notre introduction, p. 143–146.



Soit *A* le centre du cercle, *AD* le demi-diamètre, *DI* et *DE* les arcs et *IC* et *EB* leurs sinus. Que *CA* et *BA* soient les sinus de leurs complémentaires et *CD* et *BD* leurs flèches. Que *AD* soit à *AC* comme *AC* à *AB*. De plus, soient *AG* et *AF* les sécantes de ces mêmes arcs, tirées au delà des points *I* et *E* jusqu'aux tangentes *DG* et *DF*. Que soit retranchée de *AF* une droite égale à *AG*, qui soit *AK*. Enfin, que *CD* soit la mesure du rapport *CA*, *AD*, considéré comme l'élément minimum arbitraire. Je dis que la mesure du rapport *BA* à *AD*, c'est-à-dire le Logarithme de *BA*, est plus grande que *BD* et plus petite que *EF*.

Qu'elle soit plus grande que *BD* a été démontré plus haut à la proposition XII.

Que les mesures de leurs rapports[88] soient plus petites que *IG* et *EF*, on le prouve ainsi : premièrement, pour *CA*, puisqu'on a posé que la flèche *CD*, en tant que plus petit élément des rapports, est le Logarithme de *CA*, *CD* est assurément plus petit que *IG*. En effet, comme *CA* est à *AD*, ainsi *IA*, c'est-à-dire *DA*, est à *AG*, puisque *DG* et *CI* sont parallèles. C'est pourquoi *AD* est la moyenne proportionnelle entre *CA* et *AG*. Donc, comme *CA* est à *AD*, ainsi la différence entre *CA* et *AD*, c'est-à-dire *CD*, est à la différence suivante entre *DA* et *AG*, c'est-à-dire *IG*. Mais *CA* est plus petite que *AD*, donc *CD* est plus petite que *IG*. Mais *CD* est le Logarithme de *CA*, le sinus de l'arc complémentaire à *ID* et *IG* est l'excès de la sécante de ce même arc, donc le Logarithme est plus petit que cet excès.

Nous en venons à *BA* dont le Logarithme est plus grand que *BD*. On doit démontrer qu'il n'est pas plus grand que *BD*, sans que dans le même temps il ne reste plus petit que *EF*. De nouveau, *AD* est la moyenne proportionnelle entre *BA* et *AF*[89]. Et puisqu'il a été posé que comme *BA* est à *AC*, ainsi *CA* est à *AD*, alors comme *EA* est à *AG*, ou *AK*, ainsi *KA* ou *GA* est à *AF*. C'est pourquoi *AB*, *AC*, *AD*, *AK* ou *AG*, et *AF* sont continûment proportionnelles. Donc *BC*, *CD*, *IG* ou *EK*, et *KF* sont dans le même rapport[90]. Mais *CD* est plus petite que *IG*, comme cela a été montré plus haut,

88 C'est-à-dire les mesures des rapports *CA* à *AD* et *BA* à *AD*.

89 C'est le même raisonnement que précédemment : on avait montré que *AD* est moyenne proportionnelle entre *CA* et *AG* en appliquant le théorème de Thalès.

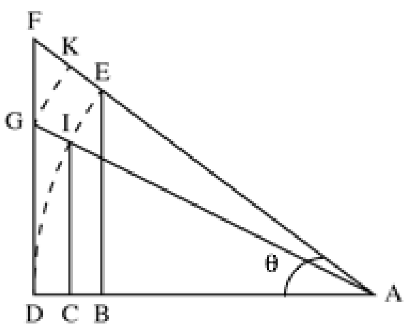
90 On applique la proposition II.

donc *IG*, ou *EK*, sera aussi plus petite que *KF*. C'est pourquoi le tout *EF* est plus grand que le double de *IG*. Donc *EF* sera bien plus grande que le double de *CD*, la plus petite. Mais la mesure du rapport entre *BA* et *AD* — qui est le double de la mesure de celui entre *BA* et *AC*, d'après la proposition I — ou le Logarithme de *BA* est précisément le double de *CD*, d'après le postulat I. Donc le Logarithme de *BA* est plus petit que l'excès *EF* de la sécante. Et il était plus grand que la flèche *BD*. Donc la proposition est claire.

PROPOSITION XXII

Avec les mêmes hypothèses, la flèche de l'arc avec l'excès de la sécante surpasse le double du Logarithme devant être associé au sinus du complément[91].

En effet, premièrement, que le sinus du complément soit le plus long, ou le plus long parmi les moyens proportionnels par lesquels quelque rapport est divisé en plusieurs parties en nombre arbitraire, de sorte que, par exemple, pour lui, *AC*, le reste *CD* — ou la flèche de l'arc *ID* — soit lui-même la mesure arbitraire du rapport de *AC* à *AD*. Alors, le Logarithme de *CA* est *CD*. Mais *IG* est plus grand que *CD*. C'est pourquoi l'excès de la sécante *IG* avec la flèche *CD* font plus que le double de *CD*.



Ensuite, soit une autre ligne quelconque de la proportion continue, plus petite, comme *AB*, et que soit érigée à partir de *B* la perpendiculaire jusqu'en *E* sur la circonférence. *A* étant jointe à *E* et *D* à *G* et les lignes étant continuées jusqu'au point *F*, soit *EF* l'excès de la sécante et *BD* la flèche du même arc, c'est-à-dire de *ED*. Je dis que *EF* et *BD* font ensemble plus que le double du Logarithme devant être associé à *BA* ou de la mesure du rapport *BA*, *AD*.

Puisque, comme *BA* est à *AD*, ainsi *DA* est à *AF*[92] et que *CA* est le moyen proportionnel entre *BA* et *AD*[93], alors comme *BA* est à *AC*, ainsi *GA* est

91 Voir notre introduction, p. 143–146.

92 On l'a démontré dans la proposition précédente.

93 On l'a posé par hypothèse.

à *AF*[94]. Donc, d'après la proposition 25 du livre V d'Euclide[95], *BA* et *AF* jointes sont plus longues que *CA* et *AG* jointes. Et puisque, comme *BA* est à *AD*, ainsi *DA* est à *AF*, alors *BA* et *FA* jointes surpassent *DA* et *AD*, les deux moyens. Mais comme *BA* est à *AC*, ainsi *BC* est aussi à *CD* et *IG* à *KF*, d'après la proposition II. Donc *BC* et *KF* jointes surpassent aussi *CD* et *IG* jointes. Mais *CD* et *IG* sont plus que le double de *CD*. Donc *BC* et *KF* jointes sont beaucoup plus que le double de *CD*. Ainsi *BD* et *EF* sont plus que le quadruple de *CD*. Mais le double de *CD* est le Logarithme ou la mesure du rapport de *BA*, *AD*, d'après le postulat I. Donc *BD* et *EF* jointes sont plus que le double du Logarithme de *BA* ou de la mesure du rapport *BA*, *AD*.

Troisièmement, que le rapport *BA*, *AC* soit plus petit ou plus grand que *CA*, *AD*, il ne sera pas moins démontré que *BD* et *EF* jointes surpassent le double d'une aussi grande portion de *CD* que la portion que le rapport *BA*, *AC* est du rapport *CA*, *AD*.

COROLLAIRE

Le Logarithme du sinus du complément est plus petit que le moyen arithmétique entre la flèche et l'excès de la sécante.

RÈGLE

Le sinus ayant été trouvé dans la table des sinus, ajoute le reste relativement au tout[96] à l'excès de la sécante du complément. La moitié de la somme surpasse le Logarithme et la flèche la plus proche est plus petite que le Logarithme.

Soit le sinus de l'arc :	99970.1490
Son reste relativement au sinus total[97] :	29.8510, la flèche de l'arc complémentaire, plus petite que le Logarithme

94 On l'a démontré dans la proposition précédente.

95 Euclide [1994, p. 125], Proposition V. 25 : « Si quatre grandeurs sont en proportion, la plus grande et la plus petite d'entre elles sont plus grandes que les deux restantes. ».

96 C'est-à-dire au sinus de l'angle droit, soit 1, ou dans les nombres étendus, 100000.0000.

29.8599, l'excès de la sécante sur le sinus total
59.7109, la somme
29.8555, la moitié, plus grande que le Logarithme.

Donc le Logarithme est entre 29.8510 et 29.8555.

AUTRE RÈGLE

Le Logarithme du sinus étant trouvé, tu trouveras à peu près le Logarithme du nombre rond qui est le plus petit le plus proche de ton sinus exact, si tu ajoutes l'excès du sinus exact sur le nombre rond au Logarithme du sinus qui a été trouvé.

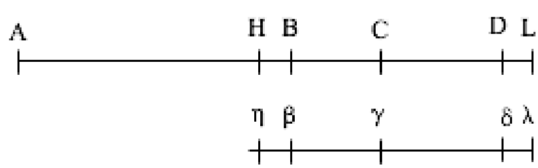
Ainsi, puisque pour le sinus 99970.149, le Logarithme a été trouvé égal à 29.854 environ, si tu veux maintenant connaître le Logarithme du nombre rond 99970.000, tu remarques que l'excès de ton sinus exact est 149. Ajoute-le au Logarithme du sinus trouvé, en conservant le point, ainsi :

$$\begin{array}{r} 29.854 \\ .149 \\ \hline 30.003 \end{array}$$

C'est à peu près le Logarithme du nombre rond 99970.000.

PROPOSITION XXIII

Si trois quantités se suivent l'une l'autre, en différant selon des excès égaux, la mesure du rapport entre la plus grande et la médiane constituera avec la mesure de l'autre rapport entre la médiane et la plus petite un rapport plus grand assurément que le rapport entre les plus grandes et plus petit que le rapport entre les plus petites[98].



[97] Soit 100000.0000 – 99970.1490.

[98] Voir notre introduction, p. 146–150.

Soient trois quantités AD, AC, AH, avec des excès égaux DC et CH. Soit la ligne $\delta\gamma$ la mesure du rapport DA, AC et la ligne $\gamma\eta$ la mesure du rapport CA, AH. Je dis que le rapport de $\delta\gamma$ à $\gamma\eta$ est plus grand assurément que le rapport CA à AD et plus petit que le rapport de HA à AC.

En effet, que l'on fasse en sorte que DA soit à AC comme CA à AB. Alors, comme DA est à AC, ainsi DC est à CB, d'après la proposition II. Mais DA est plus longue que AC, donc DC est plus longue que CB et CH plus longue que CB avec la différence BH.

C'est pourquoi puisque les rapports DA, AC et CA, AB sont égaux, d'après la proposition I, et que la mesure de DA, AC est la ligne $\delta\gamma$, le rapport CA, AB aura aussi une mesure égale à $\delta\gamma$, d'après le postulat I. Et puisque le rapport CA, AH est composé du rapport CA, AB et du rapport BA, AH, le rapport CA, AH sera plus grand que le rapport DA, AC, égal à CA, AB. C'est pourquoi sa mesure $\gamma\eta$ sera plus grande que $\delta\gamma$. Que l'on retranche de $\gamma\eta$ une ligne égale à $\delta\gamma$, qui soit $\gamma\beta$, alors le reste $\beta\eta$ sera la mesure du rapport restant BA, AH. Et le rapport de $\gamma\beta$ à CB sera plus petit que celui de $\beta\eta$ à BH, d'après le corollaire à la proposition XII[99], c'est-à-dire que $\beta\eta$ est plus grand relativement à $\beta\gamma$ ou $\gamma\delta$ que HB relativement à BC. Donc les termes étant composés, ici $\gamma\beta$ et $\beta\eta$ en $\gamma\eta$, là CB et BH en CH, $\gamma\eta$ sera plus grande relativement à $\gamma\beta$ ou à son égale $\gamma\delta$, que CH relativement à CB. Donc le rapport entre $\gamma\eta$ et $\delta\gamma$ est plus grand que le rapport entre CH, c'est-à-dire CD et BC.

Mais, comme BC est à CD, ainsi CA est à AD, d'après la proposition II. C'est pourquoi le rapport entre $\gamma\eta$ et $\delta\gamma$ est plus grand que celui entre AD et CA. Mais $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$ sont des mesures, celle-là précisément du rapport entre DA et AC les plus grandes et celle-ci du rapport entre CA et AH les plus petites. Donc le rapport entre les mesures est plus grand que le rapport entre les plus grands termes.

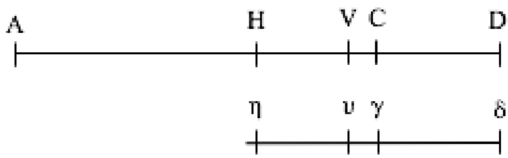
De nouveau, qu'il soit fait en sorte que HA soit à AC comme CA à AL. Alors, comme HA est à AC, ainsi HC est à CL, d'après la proposition II. Mais HA est plus courte que AC donc HC, c'est-à-dire DC, est plus courte que CL, avec la différence DL. C'est pourquoi puisque les rapports HA, AC et CA, AL sont égaux, d'après la proposition I, et que la mesure de HA, AC est la ligne $\eta\gamma$, le rapport CA, AL aura une mesure égale à $\eta\gamma$, d'après le

99 Pour appliquer ce corollaire à AC, AB, AH, il faut que $\mathrm{mes}(AC : AB) > CB$. De même, plus loin, Kepler applique ce même corollaire à AL, AD, AC. Il faut donc supposer que $\mathrm{mes}(AL : AD) > DL$. Les deux inégalités sont vraies, si on prend comme rapport de référence celui entre deux quantités plus grandes que AL et en proportion continue avec AC et AL. On a alors la supériorité des mesures sur les différences, d'après la proposition IV.

postulat I. Que ce soit $\gamma\lambda$. De plus, la mesure du rapport CA, AD, soit $\gamma\delta$, était plus petite, donc $\gamma\delta$ est plus petite que $\gamma\lambda$. C'est pourquoi l'excès $\delta\lambda$ sera la mesure du rapport entre DA et AL, apposé au rapport entre CA et AD. Et puisque les termes DA et AL sont plus longs que CA et AD, alors, d'après le corollaire à la proposition XII, $\delta\lambda$ relativement à $\lambda\gamma$, ou $\gamma\eta$, est plus petite que DL relativement à LC[100]. C'est pourquoi le reste $\gamma\delta$ relativement à $\gamma\lambda$, ou $\gamma\eta$, est plus grand que CD, ou HC, relativement à CL. Et puisque le rapport est diminué par l'augmentation du plus petit terme, d'après l'axiome I, le rapport entre $\gamma\eta$ et $\delta\gamma$ est plus petit que celui entre CL et HC. Mais comme HC est à CL, ainsi sont HA à AC les plus petits termes parmi les trois, d'après la converse de la proposition II. C'est pourquoi le rapport entre $\delta\gamma$ et $\gamma\eta$, les mesures des rapports dont l'un est fait du plus grand terme et du moyen et l'autre du moyen et du plus petit, est plus petit que celui entre les plus petits termes.

PROPOSITION XXIV

Ledit rapport entre les deux mesures est plus petit que la moitié du rapport entre les termes extrêmes.



En effet, soient, comme plus haut, les termes extrêmes AH et AD et les deux moyens, AC, l'arithmétique, et AV le géométrique. Que $\delta\gamma$ la mesure du rapport DA, AC soit ou bien égale à DC, soit plus grande, d'après le postulat III. Que soit appliquée à $\delta\gamma$ une autre ligne $\gamma\upsilon$, qui soit la mesure juste du rapport CA, AV, de sorte que toute la ligne $\delta\upsilon$ mesure le rapport DA, AV. Alors, la mesure du rapport restant VA à AH sera égale à la première, $\delta\upsilon$, d'après le postulat I et la proposition I et que ce soit $\upsilon\eta$. Alors, puisque $\delta\gamma$ est ou bien égale, ou bien plus grande que DC, le rapport de

100 Ce n'est pas ce que dit le corollaire à la proposition XII. En fait, si l'on applique ce corollaire aux trois quantités $AL > AD > AC$, on a $(\mathrm{mes}(AL{:}AD){:}LD) < (\mathrm{mes}(AD{:}AC){:}DC)$, soit $(\delta\lambda{:}DL) < (\delta\gamma{:}DC)$ ou $(\delta\lambda{:}\delta\gamma) < (DL{:}DC)$. Alors, $(\delta\lambda-\delta\gamma{:}\delta\gamma) < (DL-DC{:}DC)$, soit $(\gamma\lambda : \delta\gamma) < (LC : DC)$. Mais $\gamma\lambda = \gamma\eta$, car $(AL : AC) = (AC : AH)$ par hypothèse, et $DC = CH$ par hypothèse. Donc, $(\gamma\eta : \delta\gamma) < (LC : CH)$.

la deuxième, $\gamma\upsilon$, à CV sera plus grand que le rapport de $\gamma\delta$ à CD[101], et le rapport de la troisième, $\upsilon\eta$, à VH sera de nouveau plus grand que celui de la deuxième $\gamma\upsilon$ à la deuxième CV[102]. Et par composition, le rapport du tout $\eta\delta$ au tout HD sera plus grand que celui de la partie $\upsilon\gamma$ à la partie VC[103]. Alors, par permutation, le rapport du tout $\eta\delta$, le terme le plus grand dans le premier, à $\upsilon\gamma$, le plus grand dans le deuxième, sera plus grand que celui du tout HD, le terme le plus petit dans le premier rapport, à VC, le terme le plus petit dans le deuxième. Mais le tout $\eta\delta$ provient des termes $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$, dont la différence est $\gamma\upsilon$[104], et semblablement DH provient des termes DV et VH, dont la différence est VC[105]. C'est pourquoi le rapport des termes $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$ joints à leur différence $\gamma\upsilon$ est plus grand que celui des termes DV et VH à la différence VC. Mais par l'augmentation du rapport de la somme des termes à leur différence est diminué le rapport entre les termes pris séparément, d'après le corollaire à la proposition XIII et la notion commune, puisque la manière d'être entre des quantités proportionnelles est la même. C'est pourquoi le rapport entre $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$ est plus petit que celui entre DV et VH. Mais le rapport de DV à VH est égal au rapport de DA à AV, d'après la proposition II. Et ce rapport de DA à AV est la moitié de celui de DA à AH, d'après la proposition I. Donc le rapport entre $\eta\gamma$ et $\gamma\delta$, les mesures des rapports HA, AC et CA, AD, est plus petit que la moitié de celui entre les termes HA, AD

Un exemple, ici :

Les nombres	La différence des nombres	Les Logarithmes	La différence des Logarithmes ou la mesure du rapport
1000.		00.	
	−250		28768.21
750.		28768.21	
	−250		40456.51
500.		69314.72	

101 On applique le corollaire à la proposition XII aux trois quantités $AD > AC > AV$.

102 On applique le corollaire à la proposition XII aux trois quantités $AC > AV > AH$.

103 On a $(\eta\delta : HD) > (\gamma\delta : CD)$, mais pas $(\eta\delta : HD) > (\gamma\upsilon : CV)$. Voir le commentaire de Hammer dans [Kepler 1960, p. 547].

104 On n'a pas $\eta\gamma - \gamma\delta = \gamma\upsilon$, mais $\eta\gamma - \gamma\delta = 2\gamma\upsilon$. Voir le commentaire de Hammer dans [Kepler 1960, p. 547].

105 Là encore Kepler fait une erreur. On n'a pas $DV - VH = VC$. Voir le commentaire de Hammer dans [Kepler 1960, p. 547].

Et si on fait en sorte que le moyen proportionnel entre les termes extrêmes 1000 et 500 (c'est-à-dire 70710.68) est à 1000, ainsi est le rapport de la mesure du premier rapport[106], qui est 28768.21 à quelque autre nombre, sera produit 40684.40, plus grand que la mesure du second rapport[107].

Et si on fait en sorte que comme 1000 est au moyen proportionnel entre 1000 et 360 (c'est-à-dire 600), ainsi est la mesure du second rapport 63598.86 à quelque nombre, sera produit 38159.32 plus petit que la mesure du premier rapport entre 1000 et 680[108].

Un autre exemple :

1000.		0.	
	320.		38566.25.
680.		38566.25	
	320.		63598.86.
360.		102165.11	

COROLLAIRE

Alors, puisque le moyen arithmétique divise le rapport en parties inégales, dont l'une est plus grande que la moitié du tout et l'autre plus petite, si on cherche quel est le rapport entre ces rapports[109], on répond qu'il est un peu plus petit que la moitié du dit rapport.

EXEMPLE DE LA RECHERCHE DE QUELQUE CHOSE DE PLUS GRAND ET DE TRÈS PROCHE DE LA MESURE D'UN RAPPORT DONNÉ ET DE QUELQUE CHOSE DE PLUS PETIT ET DE TRÈS PROCHE

Que la mesure du rapport entre 1000 et 900 soit donnée et que ce soit 10536.05. On cherche la mesure du rapport de 900 à 800, de sorte que les différences entre 1000 et 900 et entre 900 et 800 soient égales[110].

---

106 C'est-à-dire le rapport de 1000 à 750.

107 C'est-à-dire le rapport de 750 à 500. En effet, d'après la proposition précédente, on a :

$$(\mathrm{mes}(750:500):\mathrm{mes}(1000:750)) < (1000:\sqrt{1000\times 500}) = (X:\mathrm{mes}(1000:750)).$$

Donc, $\mathrm{mes}(750:500) < X$.

108 On a $(\mathrm{mes}(680:360):\mathrm{mes}(1000:680)) < (1000:\sqrt{1000\times 360}) = (\mathrm{mes}(680:360):Y)$. Donc, $Y < \mathrm{mes}(1000:680)$.

109 C'est-à-dire les parties du rapport initial.

110 Voir notre partie introductive, p. 148.

Comme 9 est à 10, ainsi 10536.05 est à 11706.72 et la mesure du rapport 9, 8 est plus grande. De nouveau, comme le moyen proportionnel entre 8 et 10 (qui est 89.442719.) est à 10, ainsi 10536.05 est à 11779.66 et la mesure du rapport entre 9 et 8 est plus petite que 11778.30.

NOTION COMMUNE

Tout nombre exprime une quantité exprimable.

PROPOSITION XXV

Si mille nombres se succèdent les uns les autres selon l'ordre naturel, avec des différences de deux en deux égales à l'unité, que l'on en choisisse deux quelconques, ordonnés à la suite, en tant que termes de quelque rapport. La mesure de ce rapport sera à la mesure du rapport entre les deux plus grands de la chiliade dans un rapport assurément plus grand que ce que le plus grand, 1000, est au plus grand terme choisi, et plus petit que ce que 1000 est au plus petit choisi, et aussi dans un rapport plus petit que ce que 1000 est au moyen proportionnel entre les termes choisis[111].

En effet, que l'on choisisse deux nombres quelconques à la suite parmi les mille, par exemple 501 et 500. Que le Logarithme du premier soit 69114.92 et du second 69314.72. La différence entre leurs Logarithmes est 199.80. Donc, par définition, la mesure du rapport entre 501 et 500 est 199.80. De la même manière, puisque le Logarithme du plus grand 1000 est 0 et que le Logarithme du plus proche 999 est 100.05, la différence entre les deux Logarithmes est aussi 100.05. C'est pourquoi la mesure du rapport entre 1000 et 999 (ou entre 100000.00 et 99900.00) est 100.05. Que l'on mette en relation le plus grand 1000 avec chacun des termes choisis, soit avec 501 et 500, et que l'on mette aussi en relation la mesure 199.80 avec la mesure 100.05, je dis que le rapport entre 199.80 et 100.05 est plus grand que le rapport entre 1000 et 501 et qu'il est plus petit que le rapport entre 1000 et 500.

En effet, il a été démontré à la proposition XXIII que les mesures de deux rapports pris à la suite renferment un rapport plus grand que le plus petit rapport de ceux qui sont à la suite. Par exemple, si on a les trois termes à la suite 1000, 999 et 998, dont les premiers 1000 et 999 font un premier

111 Soit A un nombre entre 1000 et 1, on a $(1000{:}A) > (\mathrm{mes}(A{+}1{:}A){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) > (1000 : A + 1)$. Et $(1000 : B) > (\mathrm{mes}(A + 1 : A) : \mathrm{mes}(1000 : 999))$ où B est le moyen proportionnel entre A et $A + 1$.

rapport et les suivantes 999 et 998 un second, la mesure du premier rapport sera, comme auparavant, 100.05 et la mesure du second sera 100.15. Ces deux mesures 100.15 et 100.05 produisent un rapport plus grand qu'entre 1000 et 999[112].

De plus, les deux mesures, l'une du rapport entre 1000 et 999, c'est-à-dire 100.05, et l'autre du rapport entre 501 et 500, c'est-à-dire 199.80, ces deux mesures, dis-je, en tant que termes considérés, forment entre elles un rapport composé à partir de tous les rapports entre les mesures de toutes les paires interposées prises à la suite[113], d'après l'axiome I. Semblablement les termes 1000 et 501 forment entre eux un rapport composé d'autant de rapports, c'est-à-dire de tous les rapports entre toutes les paires de nombres interposés à la suite entre 1000 et 501[114], d'après le même axiome I.

Or, pour les composés de parties proportionnelles équimultiples, le rapport est le même que celui entre chacune des parties combinées ici et là[115], d'après la proposition 1 du livre V d'Euclide[116]. Donc, les mesures qui ne se suivent pas mais qui sont distantes de beaucoup, 199.80 et 100.05, feront aussi un rapport plus grand que les termes ne se suivant pas mais distants de beaucoup, 1000 et 501[117].

---

112 Il ne faut pas oublier ici que 100.15. et 100.05. sont des valeurs approchées des mesures. En effet, si d'après la proposition XIII, le rapport entre les mesures est bien plus grand que le rapport entre 1000 et 999, ce n'est pas vrai pour les valeurs approchées considérées ici ($\frac{1000}{999} \approx 1{,}001001001$ et $\frac{100{,}15}{100{,}05} \approx 1{,}0009995$). Mais, en prenant plus de décimales dans le calcul de la valeur approchée du moyen proportionnel permettant de déterminer le Logarithme de 999 et 998, on a : $\mathrm{mes}(999{:}998) = \mathrm{Log}_K(998) - \mathrm{Log}_K(999) = 2048(1000 - 1000\sqrt[2048]{0{,}998}) - 1024(1000 - 1000\sqrt[1024]{0{,}999}) \approx 1{,}00150185$ et $\mathrm{mes}(1000 : 999) = \mathrm{Log}_K(999) = 1024(1000 - 1000\sqrt[1024]{0{,}999}) \approx 1{,}0004998$. On remarque alors que $\frac{1{,}00150185}{1{,}0004998} \approx 1{,}001001549$ et $\frac{1000}{999} \approx 1{,}001001001$.

113 Soit $(\mathrm{mes}(1000{:}999) : \mathrm{mes}(501{:}500)) = (\mathrm{mes}(1000{:}999) : \mathrm{mes}(999{:}998)) * (\mathrm{mes}(999 : 998) : \mathrm{mes}(998 : 997)) * \cdots * (\mathrm{mes}(502 : 501) : \mathrm{mes}(501 : 500))$.

114 Soit $(1000 : 501) = (1000 : 999) * (999 : 998) * \cdots * (502 : 501)$.

115 Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont équimultiples de $B_1, B_2, \ldots, B_n$, alors $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n : B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = (A_i : B_i)$ pour tout i. Et c'est vrai même si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'une part et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ d'autre part ne sont pas proportionnels.

116 Euclide [1994, p. 69], Proposition V. 1 : « Si des grandeurs en quantité quelconque sont équimultiples de grandeurs en quantité quelconque égales en multitude, chacune de chacune, le multiple que l'une des grandeurs est de l'une [des autres], ce même multiple toutes le seront aussi de toutes ». On voit que la proposition V. 1 n'est pas énoncée en termes de rapports mais d'équimultiples. Toutefois la propriété énoncée par Kepler en découle immédiatement.

117 Pour en arriver à cette conclusion, Kepler n'utilise pas ici la proposition 1 du livre V d'Euclide, mais plutôt, un résultat qui n'est pas dans le texte grec, mais qui a été ajouté à la fin du livre V par Campanus, dans son édition des *Éléments*, rédigée vers

De nouveau, en commençant par la même propriété, nous produirons le même raisonnement : les deux mesures qui se suivent 100.15 et 100.05 forment un rapport plus petit que les deux termes qui se suivent 999 et 998. Or, le rapport entre les mesures 100.05 et 199.80 est composé de tous les intermédiaires et, semblablement, le rapport entre les termes 999 et 500 est composé de tous les interposés. Donc le rapport entre 199.80 et 100.05 est plus petit que celui entre 999 et 500. Donc il est beaucoup plus petit que celui entre 1000 et 500, du fait qu'au rapport 999, 500 est ajouté le rapport 1000, 999.

Troisièmement, en suivant les mêmes étapes du raisonnement nous concluons grâce à la proposition XXIV précédente : le rapport entre les mesures situées à la suite, c'est-à-dire entre 100.15 et 100.05, est plus petit que celui qui est entre 1000 et le moyen proportionnel entre les termes 1000 et 998, ou que celui qui est entre le moyen proportionnel entre les termes 1000 et 998 et le terme 998[118]. Or, le rapport entre les mesures qui ne se suivent pas, 199.80 et 100.05 est composé de toutes les paires de termes proportionnels à la suite et celui dont l'un est le moyen proportionnel entre 1000 et 998, c'est-à-dire $\surd 998000$ et l'autre 500 ou, ce qui est la même chose, l'un est 1000 et l'autre le moyen proportionnel entre 501 et 500 ou $\surd 250500$, ce rapport, dis-je est composé des rapports que forment toutes les lignes moyennes proportionnelles interposées entre les paires de nombres, le nombre 1000 étant atteint. Donc les mesures qui ne sont pas situées à la suite, 199.80 et 100.05, produisent un rapport plus

1260 et publiée à plusieurs reprises dès 1482 [Busard 2005]. Le résultat en question est à la proposition 31 : « Si fuerit tres quantitates in uno ordine itemque tres in alio fueritque prime priorum ad secundam maior proportio quam prime posteriorum ad secundam itemque secunde priorum ad tertiam maior quam secunde posteriorum ad tertiam, erit quoque prime priorum ad tertiam maior proportio quam prime posteriorum ad tertiam. » [Busard 2005, p. 200]. C'est-à-dire que si on a trois quantités A, B, C et trois autres quantités X, Y, Z telles que :

$$(A:B) > (X:Y) \text{ et } (B:C) > (Y:Z) \text{ alors } (A:C) > (X:Z).$$

Dans le cas présent, on a :

$$\begin{aligned} &(\mathrm{mes}(999:998):\mathrm{mes}(1000:999)) > (1000:999)\\ &(\mathrm{mes}(998:997):\mathrm{mes}(999:998)) > (999:998)\\ &\vdots\\ &(\mathrm{mes}(501:500):\mathrm{mes}(502:501)) > (502:501)\\ \text{donc}\quad &(\mathrm{mes}(501:500):\mathrm{mes}(1000:999)) > (1000:501). \end{aligned}$$

118 En effet, d'après la proposition XIV, on a $(\mathrm{mes}(999:998):\mathrm{mes}(1000:999)) < 1/2\mathrm{mes}(1000:998)$. Et $1/2\mathrm{mes}(1000:998) = \mathrm{mes}(1000:\sqrt{1000\times 998})$.

petit que 1000 avec le moyen proportionnel entre les nombres choisis 501 et 500[119].

COROLLAIRE I

Étant donné un nombre quelconque plus petit que 1000 et son Logarithme, n'importe laquelle des différences entre les Logarithmes qui précèdent le nombre proposé du côté du début de la chiliade[120] est relativement au dernier Logarithme (c'est-à-dire à celui qui a été associé à 999) dans un rapport plus grand que 1000 au nombre proposé et n'importe laquelle parmi celles entre ceux qui le suivent du côté du dernier Logarithme est à celui-ci dans un rapport plus petit[121].

COROLLAIRE II

Avec ce procédé sont facilement remplies les places de la chiliade qui n'ont pas encore obtenu leurs Logarithmes par les propositions précédentes.

---

119 On a successivement :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{mes}(999:998):\mathrm{mes}(1000:999)) < (1000:\sqrt{1000\times 998}) = (\sqrt{1000}:\sqrt{988})\\
&(\mathrm{mes}(998:997):\mathrm{mes}(999:998)) < (\sqrt{999}:\sqrt{987})\\
&\qquad\vdots\\
&(\mathrm{mes}(501:500):\mathrm{mes}(502:501)) < (\sqrt{502}:\sqrt{500})\\
\text{donc}\quad &(\mathrm{mes}(501:500):\mathrm{mes}(1000:999)) < (\sqrt{1000\times 999}:\sqrt{501\times 500})\\
&\qquad < (1000:\sqrt{501\times 500}).
\end{aligned}$$

120 C'est-à-dire du côté de 1.

121 Premièrement, soit B le nombre donné, et C et D tels que $1 < D < C < B$. On doit montrer que :

$$(\mathrm{mes}(C:D):\mathrm{mes}(1000:999)) > (1000:B).$$

On a $(\mathrm{mes}(C{:}D){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) = (\mathrm{mes}(C{:}D){:}\mathrm{mes}(B{:}B-1)) * (\mathrm{mes}(B{:}B-1){:}\mathrm{mes}(1000{:}999))$, avec $\mathrm{mes}(C{:}D) > \mathrm{mes}(B{:}B-1)$ car $(C{:}D) > (B{:}B-1)$ et $(\mathrm{mes}(B{:}B-1){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) > (1000:B)$, d'après la proposition XXV. Donc, $(\mathrm{mes}(C:D):\mathrm{mes}(1000:999)) > (1000:B)$.

Deuxièmement, soient E et F tels que $B < E < F < 1000$. On veut montrer que :

$$(\mathrm{mes}(F:E):\mathrm{mes}(1000:999)) < (1000:B).$$

On a $(\mathrm{mes}(F{:}E){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) = (\mathrm{mes}(F{:}E){:}\mathrm{mes}(B+1{:}B)) * (\mathrm{mes}(B+1{:}B){:}\mathrm{mes}(1000{:}999))$, avec $\mathrm{mes}(F{:}E) < \mathrm{mes}(B+1{:}B)$ car $(F{:}E) < (B+1{:}B)$, $(\mathrm{mes}(B+1{:}B){:}\mathrm{mes}(1000{:}999)) < (1000:B)$, d'après la proposition XXV. Donc, $(\mathrm{mes}(F:E):\mathrm{mes}(1000:999)) < (1000:B)$.

PROPOSITION XXVI

La différence entre deux Logarithmes qui sont associés à des nombres qui se suivent est à la différence de ces mêmes nombres dans un rapport plus grand assurément qu'est 1000 au nombre le plus grand et plus petit qu'est le même 1000 au nombre le plus petit[122].

On le démontre facilement d'après la proposition précédente et son corollaire. En effet, d'un côté, la différence entre deux nombres qui se suivent est toujours l'unité (ou, dans les nombres étendus, toujours 100.00) et le dernier Logarithme est 100.05, le même que la mesure du dernier et plus petit rapport, c'est pourquoi aucune différence entre des nombres qui se suivent ne diffère de la mesure du dernier rapport plus que de cinq unités des nombre étendus. D'un autre côté, la mesure du rapport entre les deux nombres qui se suivent n'est rien d'autre que la différence entre les deux Logarithmes associés à ces nombres, par définition. Donc, si entre la mesure du rapport choisi et la mesure du dernier rapport le rapport est plus grand que celui entre 1000 et le terme le plus grand du rapport choisi[123], on aura entre la différence des Logarithmes qui se suivent et la différence des nombres relativement auxquels sont les Logarithmes un rapport plus grand qu'entre 1000 et le terme le plus grand du rapport choisi. En effet, ce qui est plus grand qu'un plus grand est encore plus grand que lui[124]. Mais le rapport entre la différence des Logarithmes qui se suivent, par exemple 199.80[125], et 100.00, la différence toujours égale entre les nombres qui se suivent, est plus grand que le rapport entre 199.80 et 100.05. En effet, l'excès est le rapport entre 100.05 et 100.00. Or, dans la proposition précédente, le rapport entre 199.80 et 100.05 a été démontré plus grand que le rapport entre 1000 et 501. Donc le rapport entre 199.80 et 100.00 est beaucoup plus grand que celui entre 1000 et, par exemple, 501, le terme le plus grand du rapport choisi.

---

122 Soit A entre 1000 et 1, on a $(1000{:}A) > (\mathrm{Log}_K(A) - \mathrm{Log}_K(A+1){:}1) > (1000{:}A+1)$.

123 C'est la proposition XXV.

124 C'est-à-dire que le rapport entre 1000 et le terme le plus grand du rapport choisi. On se place dans le cadre des nombres étendus, de sorte que la différence entre deux nombres consécutifs est 100.00. Soient deux tels nombres A et B, avec $A > B$, d'après la proposition XXV, on a : $(\mathrm{mes}(A:B) : (1000:999)) > (1000:A)$ ou

$$(\mathrm{Log}_K(B) - \mathrm{Log}_K(A) : \mathrm{Log}_K(999)) > (1000 : A).$$

Donc $$(\mathrm{Log}_K(B) - \mathrm{Log}_K(A) : A - B) > (1000 : A),$$

car $$A - B = 100.00 < \mathrm{Log}_K(999) = 100.05.$$

125 Kepler vérifie ce qu'il vient de dire sur l'exemple du rapport entre 501 et 500.

Et le même rapport entre 199.80, la différence des Logarithmes, et 100.00, la différence des nombres, est aussi plus petit que le rapport entre 1000 et 500, le terme le plus petit du rapport choisi, ce que je prouve ainsi : le rapport entre 199.80 et 100.05 est plus petit que le rapport entre 999 et 500, d'après la proposition XXV démontrée précédemment; semblablement le rapport entre 100.05 et 100.00 ou entre 20.01 et 20.00 est plus petit que le rapport entre 1000 et 999, d'après le corollaire à la proposition XIII, puisque la différence entre les nombres les plus grands 2001 et 2000 est la même que celle entre les plus petits 1000 et 999, soit l'unité pour l'une comme pour l'autre.

De plus, le rapport entre 199.80 et 100.00 est composé de rapports dont chacun est plus petit que celui qui lui est associé, c'est-à-dire du rapport de 199.80 à 100.05 et du rapport de 100.05 à 100.00[126]. Et de même le rapport de 1000 à 500 est composé de rapports dont chacun est plus grand que celui qui lui est associé, c'est-à-dire du rapport de 999 à 500 et du rapport de 1000 à 999. Donc le premier composé sera plus petit et le deuxième composé sera plus grand[127].

PROPOSITION XXVII

Si des nombres se succèdent selon l'ordre naturel, les différences entre deux qui se suivent étant l'unité, et si à tous sont associés les Logarithmes, indices ou mesures des rapports que les nombres ronds et absolus forment avec leur plus grand, 1000, les accroissements ou les différences de leurs Logarithmes sont au Logarithme de l'élément minimal des rapports comme les sécantes toutes entières des arcs, pour lesquels les deux nombres absolus, en tant que sinus, s'accordent aux compléments[128], sont au nombre maximal ou au rayon du cercle, de sorte que parmi les deux sécantes des deux nombres entre lesquels la différence des Logarithmes a été posée, la plus petite forme avec le rayon un rapport plus petit que la différence proposée avec le premier de tous[129] et la plus grande un plus grand, et de même le moyen proportionnel entre les sécantes en forme un plus grand[130].

---

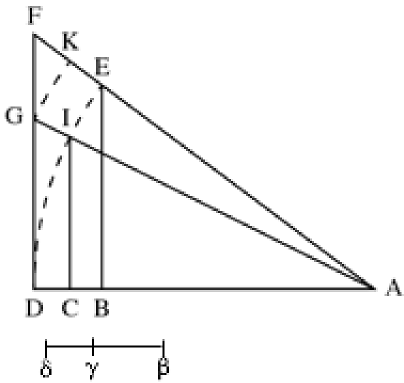
126 Le rapport de 199.80 à 100.05 est associé au rapport de 999 à 500 et le rapport de 100.05 à 100.00 est associé au rapport de 1000 à 999.

127 Finalement $(199.80 : 100.05) > (1000 : 500)$.

128 C'est-à-dire que les nombres absolus donnés sont les cosinus des arcs ou les sinus des arcs complémentaires.

129 C'est-à-dire le rapport entre la différence des Logarithmes et le premier de tous les Logarithmes.

130 Voir notre introduction, p. 149–150.



Dans le schéma de la proposition XXI que soient égales les différences *DC* et *CB* entre les nombres absolus *DA*, *CA* et *BA*, dont le plus grand est *DA*. Et puisque *DC* et *CB* sont égales, plus grand est le rapport *BA*, *AC*, entre les plus petits termes, et plus petit est le rapport *CA*, *AD*, entre les plus grands, d'après le corollaire à la proposition XIII. C'est pourquoi la mesure du rapport *BA*, *AC* est plus grande que celle du rapport *CA*, *AD*, c'est-à-dire que la différence des Logarithmes correspondants aux nombres absolus *CA* et *BA* est plus grande que le premier Logarithme représenté par *CD*[131]. Soit δγ le Logarithme de *CA* et, dans les parties de la même ligne, soit γβ le Logarithme de *BA*. Et que corresponde à *CA* la sécante *GA* et à *BA* la sécante *FA*. Je dis que le rapport de βγ à γδ est plus grand que le rapport de *GA* à *AD* et plus petit que *FA* à *AD* et de même plus petit que le moyen proportionnel entre *FA* et *GA* à *AD*. En effet, d'après la proposition XXV précédente le rapport de *DA* à *AB* est plus grand que celui de βγ à γδ ; lui est aussi plus grand celui de *DA* au moyen entre *BA* et *CA*. Mais le rapport de *FA* à *AD* est égal au rapport de *DA* à *AB*, car *DA* est le moyen proportionnel entre *BA* et *AF*. Ainsi, le rapport du moyen géométrique entre *FA* et *GA* à *DA* est égal au rapport de *DA* au moyen géométrique entre *CA* et *AB*. C'est pourquoi le rapport de *FA* à *AD* et aussi le rapport du moyen proportionnel entre *FA* et *AG* à *AD* sont plus grands que le rapport de βγ à γδ. Et d'après la même proposition, le rapport de *DA* à *AC* et aussi celui de *GA* à *AD* sont plus petits que celui de βγ à γδ.

COROLLAIRE I

On obtient encore la même chose, si les deux termes diffèrent, non pas d'une seule unité de l'élément minimum, mais d'une autre unité qui soit dix fois, cent fois ou mille fois celle-ci.

131 On a posé dans la proposition XXI que la mesure du rapport *CA* à *AD* ou le Logarithme de *CA* est *CD*.

COROLLAIRE II

De là peuvent être construites des différences assez justes, surtout là où les nombres absolus sont suffisamment grands, un moyen arithmétique ayant été pris entre les deux petites sécantes ou encore, si ça en vaut la peine, un moyen géométrique entre les grandes sécantes. Et à partir des différences continûment ajoutées sont obtenus les Logarithmes.

COROLLAIRE III. RÈGLE

Divise le sinus total par chaque terme du rapport choisi, le moyen arithmétique entre les quotients est l'accroissement cherché. Ajoute-le au Logarithme du terme le plus grand. Est alors produit le Logarithme du terme le plus petit.

EXEMPLE

Étant donné le Logarithme de 700, soit 35667.4948, on cherche le Logarithme de 699. Divise alors le rayon par 700, est produit 142857. 142857. 142857. 142857. etc. Divise-le aussi par 699 et est produit 1430615. etc.

Le moyen arithmétique est	142.962
Ajoute-le à	35667.4948
Est produit le Logarithme de 699	35810.4568

Plus approprié et bien plus proche est le moyen géométrique, mais une recherche si pénible n'est pas utile quand on doit construire l'un ou l'autre des Logarithmes.

COROLLAIRE IV. RÈGLE DES LOGARITHMES DES SINUS

Tu trouveras l'accroissement des Logarithmes entre deux sinus de cette manière : que soit construit le moyen géométrique entre les sécantes des compléments et qu'il soit divisé par la différence des sinus. Est alors produite la différence des Logarithmes.

EXEMPLE

Soit le sinus de 0.1 degré	29.09	La sécante du complément	343774682
celui de 0.2	58.18	La sécante du complément	171887348
Différence	29.19	Moyen géométrique	à peu près 2428
			2919

Le quotient 80000 est plus grand que l'accroissement cherché entre les Logarithmes, car les sécantes sont très grandes.

APPENDICE

On pourrait aussi démontrer presque de la même manière que les deuxièmes différences sont dans le rapport double des premières et les troisièmes dans le rapport double des deuxièmes[132]. Par exemple, puisqu'au début la première différence entre les Logarithmes est 100.00000, c'est-à-dire égale à la différence entre les nombres 100000.00000 et 99900.00000, la deuxième ou la différence des différences est 10000, la troisième 100. Après qu'on en sera venu au nombre 50000.00000, les Logarithmes les plus proches ont pour différence 200.00000, qui est à la première différence comme le nombre 50000.00000 au nombre maximum 100000.00000. Et la deuxième différence est 40000 dans laquelle 10000 est contenu quatre fois. La troisième est 328 dans laquelle 20 est contenue 16 fois. Et puisque pour cette chose inhabituelle nous sommes mis en difficulté par le manque de vocabulaire, afin que ce que nous proposons ne soit pas excessivement obscur, que la démonstration soit laissée inachevée.

PROPOSITION XXVIII

Aucun nombre n'exprime avec exactitude la mesure du rapport entre deux nombres parmi un millier, construite par la méthode précédente.

En effet, puisque les termes extrêmes de tout rapport ne sont pas entre eux comme deux nombres de la même espèce figurative de degrés aussi nombreux que le nombre de fois où les éléments arbitraires relativement au deuxième rapport sont pris dans l'élément minimal arbitraire, alors les moyens proportionnels formant les éléments ne sont pas exprimables, d'après la proposition IX. C'est pourquoi la différence entre le plus grand des moyens proportionnels et le terme signifié par 1000 est inexprimable. Mais la mesure du rapport entre 1000 et un terme plus petit dans la

---

132 J.-B. Delambre [1821, tome 1, p. 510] remarque ici une erreur de Kepler : « Nous avons donné les expressions exactes des divers ordres de différences, dans notre Préface des tables de Borda. Kepler se trompait sur les différences troisièmes, qui sont en raison triplée des premières et non en quadruplée comme il le dit ou par inadvertance, ou par faute d'impression ». Voir aussi le commentaire de Hammer dans [Kepler 1960, p. 549–550].

chiliade, exprimable, est multiple de cette petite différence, c'est-à-dire qu'elle lui est commensurable. Donc cette mesure est en des termes incommensurables, c'est-à-dire qu'elle est inexprimable. Et donc aucun nombre et ainsi aucun Logarithme n'expriment avec exactitude cette mesure.

AVERTISSEMENT

C'est pourquoi il est intéressant d'observer jusqu'où va cette imperfection. En effet, si le rapport entre 1000 et 999 est partagé en 1677216 petites parties grâce aux vingt-quatrièmes moyens proportionnels et si pour la mesure d'une petite partie exprimée par un nombre l'erreur est de la moitié d'une unité, cette erreur dans la mesure de l'élément multipliée par le nombre d'éléments du rapport fera 8000000 unités.

PROPOSITION XXIX

Si les mesures de tous les rapports sont exprimées en nombres ou Logarithmes, tous les rapports ne recevront pas leur portion légitime de mesure avec toute la précision des petites parties[133].

En effet, d'après la proposition XI, les rapports entre les nombres de la chiliade sont incommensurables entre eux. Par ailleurs, tous leurs Logarithmes sont exprimables, d'après le postulat III. Ainsi, ils conduisent à des mesures commensurables entre elles, si on en vient aux éléments minimaux par une partition non exacte.

REMARQUE

On a la même chose pour les sinus, pour le rapport du cercle à la circonférence, etc. Et il est intéressant de remarquer à quel chiffre du nombre commence l'erreur, afin que nous ne dépensions pas d'effort, inutilement, pour déterminer les nombres qui le suivent.

PROPOSITION XXX

Si au nombre 1000, le plus grand de la chiliade, sont mis en relation d'autres plus grands et qu'à ce nombre 1000 est associé le Logarithme 0, les Logarithmes qui correspondent à ces nombres plus grands seront négatifs.

---

133 C'est-à-dire que, dans la valeur numérique approchée de la mesure, toutes les décimales ne sont pas exactes.

Que l'on mette en relation avec 1000 un plus grand, 1024, qu'on fasse en sorte que comme 1024 est à 1000 ainsi celui-ci[134] est à 97656.25 et que la mesure du rapport entre 100000.00 et 97656.25 soit le Logarithme 2371.6526. Alors, puisque le rapport entre 1024 et 1000 est égal au rapport entre 100000.00 et 97656.25, il aura la même mesure. Et si à 1024 était associé le Logarithme 0, alors à 1000 devrait être associé le Logarithme 2371.6526 et au nombre 97656.25 le double de ce Logarithme, puisque le rapport de 10240000 à 97656.25 est le double du rapport de 1024 à 1000. Mais, puisque à 1000, dans la chiliade, est associé le Logarithme 0, après avoir retranché le Logarithme, 2371.6526 a été dépensé à partir du double de celui-ci pour le simple 97656.25 dans la table de la chiliade, alors, du Logarithme de 1024, auquel nous avons appliqué le Logarithme 0, doit être dépensé autant. Si, donc, de 0 tu enlèves 2371.6526, il reste 2371.6526 négatif, avec un signe cossique[135].

Méthode la plus courte pour construire la Chiliade des Logarithmes

Premièrement, que l'on cherche le Logarithme qui mesure le rapport entre 100000.00 et 97656.25, par la recherche du plus grand moyen proportionnel entre ces termes, parmi les vingt-quatrièmes. Et de la différence de celui-ci au nombre total étendu, dupliquée autant de fois[136], surviendra le Logarithme 2371.6526, qui est le même que celui, négatif, du nombre 1024, d'après la proposition XXX.

Deuxièmement, que l'on fasse de même avec le rapport entre 1000 et 500 et surviendra le Logarithme de 500, 69314.7193, qui est dit le Logarithme de la duplication.

Puisque, comme 1000 est à 500, ainsi 1024 est à 512, et celui-ci à 256, et celui-ci à 128, et celui-ci à 64, et celui-ci à 32 et celui-ci à 16 et celui-ci à 8 et celui-ci à 4 et celui-ci à 2 et celui-ci à 1, alors le rapport de 1024 à 1 est le décuple du rapport de 1000 à 500. Donc le Logarithme de 1 serait assurément le décuple du Logarithme de 500, si le nombre 1024 recevait pour Logarithme 0. Mais, du fait que le nombre négatif 2371.6526 lui a été

134 En fait 100000.00.

135 C'est-à-dire qu'au nombre 237.6526 on adjoint le signe des nombres négatifs, soit le signe cossique, ou le signe de l'algèbre.

136 C'est-à-dire que la différence est ajoutée à elle-même autant de fois.

appliqué, le Logarithme de 1 devra être diminué d'autant. Que soit ainsi diminué le décuple du dupliquant[137] :

$$\begin{array}{r} 693147.1928. \\ 2371.6526. \\ \hline 690775.5422. \end{array}$$

Ceci est le Logarithme de l'unité dans notre chiliade, ou de 100.00[138].

Et celui de 10.00. est 921034.0563. En effet, comme 1 est à 10, ainsi celui-ci est à 100 et celui-ci à 1000, donc le rapport de 1000 à 1 est le triple du rapport de 1000 à 100. Donc la troisième partie du Logarithme de 1 doit être prise pour le Logarithme de 100, soit 230258.5141 ; et c'est le Logarithme de la décuplication. Et les deux tiers sont le Logarithme de 10, soit 460517.0282. Et si tu soustrais le dupliquant du Logarithme de 1 survient le Logarithme de 2[139], et si tu retranches de celui-ci le Logarithme de 10, il reste le Logarithme de la quintuplication[140].

Logarithme de 1	690775.5422
Le dupliquant	69314.7193
Logarithme de 2	621460.8229
Logarithme de 10	460517.0281
Le quintupliquant	160943.7948

Ceci étant fait, que l'on construise les Logarithmes des cent plus grands, en commençant par 999, de cette manière : que le tout 1000., étendu par 7 zéros, soit divisé par chacun, dans l'ordre, et que les quotients soient reportés dans une table ; ce sont en effet les sécantes des arcs dont les compléments ont ces diviseurs pour sinus. Par exemple, si le diviseur ou le sinus du complément est 999, le quotient ou la sécante sera 100.10010, si on divise par 901, le quotient sera 110.98779, si par 900, le quotient sera 111.11111. La division est continuée jusqu'au huitième chiffre, là où nous constatons que le moyen arithmétique diffère le plus du géométrique. Par exemple, après avoir multiplié entre eux les deux derniers quotients, on cherche la racine ; celle-ci sera 111.04942. Et le moyen arithmétique entre les deux quotients est 111.04945. Donc, dans la construction des cent

137 Kepler nomme ainsi le Logarithme égal à la mesure du rapport de 2 à 1, ou de 1000 à 500. De manière générale, il appelle *n-uplicans* le Logarithme égal à la mesure du rapport multiple de n à 1.

138 Sous-entendu, dans les nombres étendus, dont le plus grand est alors 100000.00.

139 En effet, $(1000:2) = (1000:1) * (1:2)$, donc $\mathrm{Log}_K(2) = \mathrm{Log}_K(1) - \mathrm{mes}(2:1)$.

140 En effet, $(5:1) = (10:2) = (10:1000) * (1000:2)$, donc $\mathrm{mes}(5:1) = \mathrm{Log}_K(2) - \mathrm{Log}_K(10)$.

plus petits Logarithmes, ces deux moyens sont égaux entre eux jusqu'au septième chiffre inclus ; dans le huitième apparaît une différence de trois. Pose donc qu'elle vaut autant pour tous les cent moyens. Si, donc, tu ajoutes les cent moyens arithmétiques dans l'ordre, ils produisent une erreur pas plus grande que 00300., c'est-à-dire de trois dans le troisième chiffre après le point. Or, on n'a pas dans tous une telle différence ; dans les premiers en effet elle disparaît presque, comme entre 100.00000 et 100.10010. En effet, chaque moyen est 100.05005 et la différence est dissimulée dans les chiffres suivants, si quelqu'un veut aller l'y chercher.

Ce faisant, nous construisons le plus sûrement les cent Logarithmes les plus petits par l'accumulation des moyens proportionnels entre les quotients, d'après la proposition XXVII. En effet, ayant toujours ajouté deux sécantes au double du premier Logarithme, on a le double du Logarithme suivant.

Ces Logarithmes ayant été construits, que l'on prenne le Logarithme de 960 qui sera presque 4082.2001. Si tu lui ajoutes continûment le dupliquant, surviennent les Logarithmes de 480, 240, 120, 60, 30 et 15. Puisque le rapport de 960 à 15 est sextuple du rapport de 1000 à 500, surviendra le Logarithme de 15, qui est 419970.5159

et le Logarithme de 30	350655.7965.
Si tu le retranches du Logarithme de 10, soit de	460517.0281.
il restera le Logarithme tripliquant	109861.2316.
Retranche-le donc du Logarithme de 1	690775.5422.
Il reste le Logarithme de 3	580914.3106.

La même chose peut être obtenue à partir du Logarithme de 900. La raison en est : son Logarithme est 10536.0535. Or celui-ci est trop grand, pour la raison déjà donnée. Et comme 1000 est à 900, ainsi 9000 est à 8100, et comme 10000 à 8100 ainsi celui-ci est à 6561. Donc le quadruple du Logarithme de 900 correspond au nombre 6561 (ou 90000.00 au nombre 65610.00), soit 42144.2140. Mais le nombre 65610.00 est le multiple continu de 3 à partir de 10.00[141] : 6561, 2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1. Donc le rapport de 6561 à 1 est l'octuple du rapport de 3 à 1.

Donc, du Logarithme de 10.00, soit	921034.0563.
retranche le Logarithme de 65610.00, soit	42144.2140.
Du reste,	878889.8423.
la huitième partie	109861.2303.

141 On a $65610 = 3^8 \times 10$.

C'est un peu plus petit qu'auparavant, car le Logarithme de 900 était plus grand que la juste valeur et donc aussi son quadruple ; celui-ci étant soustrait de la juste valeur du Logarithme de 1, il reste moins que la juste valeur. Et assurément la bissection continue du rapport entre 10 et 9 fournit pour les derniers chiffres du Logarithme de 900, non pas 0535, mais 0513, plus petit de 22, dont le quadruple, 88, est en moins dans le reste, et sa huitième partie 11, ajoutée à 2303 fait 2314, presque autant que 2316 que nous avons trouvé par le procédé précédent.

On obtient la même chose à partir du Logarithme de 960 donné plus haut, par une autre voie : puisque 1000 est à 960 comme 9600 à 9216 et puisque le Logarithme de 960 est 4082.2001, le Logarithme de 9216 sera le double du précédent, soit 8164.4002. Et le rapport de 9216 à 9 est le décuple du rapport de 1000 à 500, ainsi : 9216, 4608, 2304, 1152, 576, 288, 144, 72, 36, 18, 9. Et le rapport de 9 à 1 est le double du rapport de 3 à 1.

Donc, au décuple du dupliquant,	693147.1928.
ajoute le Logarithme du nombre 92100.00, soit	8164.4002.
La somme, qui est le Log. de 90.00,	701311.5930.
retranche-la du Log. de 10.00, soit de	921034.0563.
Il reste	219722.4633.
Sa moitié est le tripliquant, comme auparavant	109861.2316.

De même, à partir du Logarithme de 990 (ou de 99000.00), qui est 1005.0337[142], ou bien sans le décuplant, ou bien grâce à lui, nous parviendrons au Logarithme de 11 (ou 1100.00). En effet[143] :

Le Logarithme doublé[144] sera celui de 98010.00	2010.0675.
Celui-ci est ajouté au quadruple du tripliquant	439444.9256.
et fait le Logarithme de 1210.00	441454.9931.
Retranche-le du Logarithme de 10.00	921034.0563.
Il reste	479579.0632.
Sa moitié, le onze-upliquant,	239789.5316.
retranche-la de Logarithme de 1,	690775.5422.
il reste le Logarithme de 1100.00.	450986.0100.

De même, puisque comme 1000 est à 980, ainsi celui-ci est à 9604, alors le double du Logarithme de 980 est le Logarithme de 9604, soit 4040.5422. Mais le rapport de 9604 à 2401 est le double du rapport de 1000 à 500, le

142 Nous avons repris la correction de Fisch pour ce nombre.

143 On a $98010 = 1210 \times 81 = 3^4 \times 10 \times 11^2$.

144 C'est-à-dire le double du Logarithme de 990.

rapport de 24010.00 à 10.00 est le quadruple du rapport de 70.00 à 10.00. Alors,

ajoute le double du dupliquant, soit	138629.4386.
à	4040.5422.
La somme, le Logarithme de 2401	142669.9808.
retranche-la du Logarithme de 10.00000	921034.0563.
Du reste	778364.0755.[145]
la quatrième partie, le septupliquant	194591.0189.
retranche-le du Logarithme de 100	230258.5141.
il reste le Logarithme de 700 ou de 70000.00	35667.4952.

Et le même Logarithme de 700 est produit avec autant d'exactitude par bissection continue du rapport de 10 à 7 grâce au plus grand des trentièmes moyens proportionnels. Vois cela plus haut, dans la table.

Aussi, puisque comme 1000 est à 950, ainsi 9500 est à 9025, alors

le Logarithme de 9025 est son double[146], soit	10258.6606.
Ajoute-lui le double du quintupliquant,	321887.5896.
survient le Logarithme de 3610.00	332146.2402.
Retranche-le du Logarithme de 10.00	921034.0563.
Du reste	588887.8061.
la moitié, le dix-neuf-uplant	294443.9030.
ajoute-la au Logarithme de 1 ou 100.00	690775.5422.
il reste le Logarithme de 1900.00.[147]	396331.6392.

Nous dériverons la même chose de 912 dont le Logarithme est 9211.5306. Puisque le rapport de 912 à 57 est le quadruple du rapport de 1000 à 500,

ajoute le quadruple du dupliquant,	
soit 277258.8771, survient	286470.4077.
Ajoute-lui le tripliquant,	109861.2316.
il reste le Logarithme de 1900.00.[148]	396331.6393.

145 Nous avons corrigé ce nombre, le suivant et la valeur du Logarithme de 700. Pour ce nombre, on trouve 778364.0775. dans l'édition originale de Kepler [1624, p. 50], dans l'édition de Hutton [1791, vol. I, p. 36], dans celle de Hammer [Kepler 1960, p. 332] et 778364.0765 dans l'édition de Frisch [1868, p. 343]. La quatrième partie de ce nombre vaut 194591.0194 et le Logartihme de 700, 35667.4947., dans toutes ces éditions.

146 C'est-à-dire le double du Logarithme de 950.

147 On a $\mathrm{Log}_K(1900.00) = \mathrm{Log}_K(100.00) - \mathrm{mes}(1900.00 : 100.00)$. Or $2\mathrm{mes}(1900.00 : 100.00) = \mathrm{mes}(3610000.00 : 100.00) = \mathrm{Log}_K(1) - \mathrm{Log}_K(3610)$. Et on remarque que $\mathrm{Log}_K(3610.00) = \mathrm{mes}(10000 : 9025) + \mathrm{mes}(9025 : 361) = \mathrm{Log}_K(9025) + \mathrm{mes}(25 : 1) = \mathrm{Log}_K(9025) + 2\mathrm{mes}(5 : 1)$.

Nous dérivons la même chose de 950, par une autre voie :

le Logarithme de 95000.00	5129.3303.
le décupliquant	230258.5141.
le Logarithme de 9500.00.	235387.8444.
le quintupliquant	160943.7948.
le Logarithme de 1900.00.[149]	396331.6392.

De même, au Logarithme de 988	1207.2583.
ajoute le double du dupliquant,	138629.4386.
il vient le Logarithme de 247	139836.6969.
Ajoute le dix-neuf-upliquant,	294443.9030.
se présente le Logarithme de 13	434280.5999.
Le Logarithme de 1 est retranché,	690775.5422.
il reste le treize-upliquant[150]	256494.9423.

Et ainsi au Logarithme de 969	3149.0672.
ajoute le tripliquant,	109861.2316.
il vient le Logarithme de 323	113010.2988.
Ajoute le dix-neuf-upliquant,	294443.9030.
il vient le Logarithme de 17	407454.2018.
retranche-le du Logarithme de 1	690775.5422.
il reste le dix-sept-upliquant[151]	283321.3404.

Ainsi, au Logarithme de 986	1409.8927.
ajoute le dupliquant	69314.7193.
et le dix-sept-upliquant,	283321.3404.
il vient le Logarithme de 29.	354045.9524.
Qu'il soit retranché du Logarithme de 1,	690775.5422.
il reste le vingt-neuf-upliquant[152]	336729.5898.

Et au Logarithme de 966	3459.1450.
ajoute le dupliquant	69314.7193.
et le tripliquant	109861.2316.
et le septupliquant,	194591.0194.
il vient le Logarithme de 23,	377226.1153.,

148 On a $91200 = 16 \times 3 \times 1900$.

149 On a $95000 = 10 \times 5 \times 1900$.

150 On a $988 = 247 \times 4$ avec $247 = 19 \times 13$.

151 On a $969 = 323 \times 3$ avec $323 = 17 \times 19$.

152 On a $986 = 2 \times 17 \times 29$.

qui est retranché du Logarithme de 1,	690775.5422.
il reste le vingt-trois-upliquant[153]	313549.4269.

On a le même à partir du Logarithme de 920. Car, comme 1000 est à 920, ainsi 9200 est à 8464.

Donc, le double du Logarithme de 920	16676.3247.
ajoute-le au quadruple du dupliquant,	277258.8771.
survient	293935.2018.
Retranche-le du Logarithme de 100.00[154],	921034.0563.
il reste	627098.8545.
Sa moitié[155]	313549.4272.

Je construis la même chose à partir du Logarithme de 920 ayant été trouvé auparavant avec un excédant :

Au Logarithme de 920	8338.1624.
ajoute le double du dupliquant	138629.4386.
et le décupliquant	230258.5141.
vient le Logarithme de 23[156]	377226.1151.

De même, au Logarithme de 930, un peu trop grand	7257.0706.
ajoute le tripliquant	109861.2316.
et le dédupliquant,	230258.5141.
vient le Logarithme de 31, aussi un peu trop grand	347376.8163.
Plus justement	8149.
retranché du Logarithme de 1,	690775.5422.
il reste le trente-et un-upliquant, un peu trop petit[157]	343398.7259.

J'obtiens la même chose à partir du Logarithme de 961. En effet, comme 961 est à 31, ainsi celui-ci est à 1, donc

retranche le Logarithme de 961	3978.0876.
du Logarithme de 1,	69077.5422.
il reste	686797.4546.
Sa moitié, le trente-et-un-upliquant	343398.7273.

Celui-ci est plus juste.

153 On a $966 = 2 \times 3 \times 7 \times 23$.

155 Nous avons repris la correction de Hutton [1791, vol. 1, p. 37], car il s'agit ici de l'unité que Kepler écrit 100.00. dans les nombres étendus. On a 10000 dans l'édition originale [Kepler 1624, p. 53] et celle de Hammer [Kepler 1960, p. 315] et 1000 dans celle de Frisch [Kepler 1868, p. 344].

156 On a $920 = 2^2 \times 10 \times 23$.

157 On a $930 = 3 \times 10 \times 31$.

Maintenant, puisque parmi ces mille nombres aucun carré n'est plus grand que 961, alors nous ne devrons pas nous occuper des autres multiplications selon des nombres premiers plus grands que 31. En effet tout multiple d'un nombre premier plus grand inférieur à 1000 est un multiple de quelque nombre plus petit que 31, comme 979 est onze fois le nombre premier 89.

De là, on doit noter que le Logarithme de quelque rapport multiple est la différence entre le Logarithme de l'unité dans la chiliade et le Logarithme du nombre qui fait apparaître le caractère multiple du rapport[158]. C'est pourquoi ce Logarithme multiplicateur ajouté au Logarithme de n'importe quel nombre produit le Logarithme de la partie, et retranché, le Logarithme du multiple[159]. De même, au sujet des Logarithmes des rapports non multiples, il est vrai qu'ils ne sont rien d'autres que les différences, ou bien entre les Logarithmes multiplicateurs, ou bien entre ceux associés aux nombres qui désignent les multiples. Ainsi, la différence est la même entre le septupliquant et le tripliquant, qu'entre le Logarithme de 7 et le Logarithme de 3. C'est pourquoi ayant ajouté celui-ci au Logarithme du nombre 3, il produit le Logarithme d'un nombre proportionnel plus petit que 3, et retranché, il produit le Logarithme d'un nombre proportionnel plus grand que 3.

De cette manière apparaissent les Logarithmes de la plupart des nombres premiers inférieurs à 500 à partir d'un seul nombre parmi les cent posés[160]. En effet, dans la première centaine, il n'en reste aucun[161], dans la deuxième il en reste seulement cinq : 127, 149, 167, 173, 179; dans la troisième onze : 211, 223, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293; dans la quatrième, onze : 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397; dans la cinquième neuf : 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449. La somme fait 36.

Entre 500 et 900 restent des nombres premiers au nombre de 59 et, de plus, les multiples des trente-six déjà trouvés, c'est-à-dire les doubles et les

---

158 Kepler veut dire ici que le Logarithme n-upliquant, soit la mesure du rapport n-uple, vaut $\mathrm{Log}_K(1) - \mathrm{Log}_K(n)$.

159 Soit p et n deux entiers, on a $(1000{:}p)*(n{:}1) = (1000{:}p)*(p{:}n/p) = (1000{:}n/p)$, donc $\mathrm{Log}_K(p) + \mathrm{mes}(n:1) = \mathrm{Log}_K(n/p)$. Et $(1000:p)*(1:n) = (1000:p)*(p:n.p) = (1000:n.p)$, donc $\mathrm{Log}_K(p) - \mathrm{mes}(n:1) = \mathrm{Log}_K(n.p)$.

160 Kepler vient de montrer comment trouver les Logarithmes de 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 à partir des Logarithmes des nombres entre 1000 et 900.

161 Chercher les Logarithmes des nombres premiers plus grands que 31 et inférieurs à 100 n'est pas utile, comme Kepler l'a expliqué plus haut. Il lui faut maintenant chercher les nombres premiers de la deuxième centaine, ceux de la troisième centaine, et ainsi de suite.

triples des seize plus petits, les quadruples des sept premiers, les quintuples de cinq parmi les précédents, les sextuples des deux, 127 et 149, et le septuple du seul 137.

C'est pourquoi comme on a les Logarithmes de ceux-ci et des 59 nombres premiers plus grands que 500, on doit considérer les différences entre les Logarithmes obtenus pour ceux qui sont interposés entre eux et, de la même manière qu'ont été construites les différences des Logarithmes des 100 plus petits dans une série continue, on les construit grâce au corollaire 3 à proposition XXVII et bien plus à son appendice, s'il est utilisé avec adresse. Et assurément, ces différences sont très facilement complétées par une série interrompue, car le plus souvent manqueront les Logarithmes d'un seul, ou de deux à la suite, et rarement de trois à la suite, de sorte que dans la somme des différences on revient souvent à un Logarithme déjà connu auparavant[162].

[162] Comme on l'a vu dans les exemples précédents, la recherche des Logarithmes s'effectue à partir de la division du nombre en un produit de nombres dont on connaît déjà le Logarithme.