Revue d'Histoire des Mathématiques

NOTES & DÉBATS

L'introduction des courbes algébriques par Descartes : genèse et inauguration. Complément à la conjecture de H. Bos sur le rôle historique du problème de Pappus

Alain Herreman

Tome 22 Fascicule 1 2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `rhmsmf@ihp.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 89 €; prix public hors Europe : 97 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
22 (2016), p. 97–137

NOTES & DÉBATS

L'INTRODUCTION DES COURBES ALGÉBRIQUES PAR DESCARTES : GENÈSE ET INAUGURATION

COMPLÉMENT À LA CONJECTURE DE H. BOS SUR LE RÔLE HISTORIQUE DU PROBLÈME DE PAPPUS

Alain Herreman

Résumé. — Cette note revient sur la reconstruction proposée par Henk Bos de la résolution par Descartes du problème de Pappus. Son propos est d'abord de souligner l'importance de cette reconstruction et ensuite de confronter l'analyse que Henk Bos a développée à partir d'elle de l'introduction des courbes algébrique dans *La Géométrie* à celle développée par l'auteur à partir de la notion de texte inaugural.

Abstract (Descartes's introduction of algebraic curves: genesis and inauguration. A complement to H. Bos' conjecture on the historical role of Pappus' problem)

This note revisits Henk Bos's reconstruction of Descartes' resolution of the Pappus problem. The aim is first of all to stress the importance of this reconstruction. Turning then to Henk Bos's analysis of the introduction of algebraic curves in *La Géométrie,* which he developed from that reconstruction, this analysis is confronted with the one proposed by the author on the basis of the concept of an inaugural text.

INTRODUCTION

Le premier propos de cet article est de revenir sur la reconstruction proposée par Henk Bos de la résolution par Descartes du problème de

Texte reçu le 23 septembre 2014, révisé le 16 février 2015, accepté le 18 février 2015.

A. Herreman, Université de Rennes I, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
Courrier électronique : alain.herreman@univ-rennes1.fr

Pappus[1]. Les exemples de reconstructions fécondes sont tellement exceptionnels en histoire des mathématiques que l'on pourrait douter de l'intérêt de continuer d'en proposer. Une reconstruction ne convainc généralement que la personne qui la propose et il est rare qu'elle soit reprise sinon pour être contestée. La reconstitution considérée m'apparaît constituer une des rares exceptions et c'est à ce titre qu'il me semble justifié de l'exposer à nouveau : la présentation qui va en être proposée n'apportera fondamentalement rien au premier exposé qui en a été fait si ce n'est précisément d'être présentée par un autre que celui qui l'a découverte et de la reprendre dans une perspective un peu différente.

Au delà de cet intérêt historiographique général, cette reconstruction a aussi un intérêt plus spécifique qui tient au rapport entre la résolution du problème de Pappus et l'introduction en tant que telle de la totalité des courbes algébriques. Descartes introduit en effet dans *La Géométrie* une caractérisation des courbes géométriques qui leur confère une nouvelle extension et soutient ensuite que ces courbes recevables en géométrie coïncident avec les courbes constructibles point par point à partir d'équations :

> Mais, pour comprendre ensemble toutes celles [courbes] qui sont en la nature, et les distinguer par ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer Géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise & exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même. [Descartes 1637, p. 392]

Il s'agit donc aussi de revenir sur l'analyse des conditions historiques d'introduction de cette nouvelle totalité de courbes, couramment appelées « courbes algébriques », qui a modifié l'étendue des courbes recevables en mathématiques en même temps qu'elle rendait possible d'autres généralisations, notamment l'introduction des courbes transcendantes.

Je confronterai pour cela l'interprétation que Henk Bos a proposée, à partir de sa reconstruction du problème de Pappus, de l'introduction des courbes algébriques par Descartes à celle que j'en ai proposée avec la notion d'inauguration. Il s'agit ce faisant d'éprouver ces deux interprétations en les confrontant l'une à l'autre afin de mieux apprécier les apports, les limites et les possibilités de chacune[2].

---

1 Mon propos n'étant pas d'en discuter la validité, j'utiliserai le terme de « reconstruction » plutôt que celui de « conjecture » utilisé par Henk Bos. Cette reconstruction a été présentée dans [Bos 1992], et ensuite reprise dans [Bos 2001].

2 D'autres interprétations devraient être considérées, notamment celle de R. Rashed [Rashed & Vahabzadeh 1999, p. 20–29] mais ne pourront pas l'être ici.

La manière dont les solutions du problème de Pappus sont données dans *La Géométrie*, et notamment la plus élaborée d'entre elles, la parabole de Descartes, ne rend pas compte de la façon dont elles ont pu être trouvées. Cela rend nécessaire la recherche d'une reconstruction de la manière dont Descartes a pu résoudre ce problème. La parabole de Descartes a par ailleurs diverses occurrences tout au long de *La Géométrie* : elle participe d'à peu près tous les thèmes qui y sont abordés, mais la plupart étant sans rapport apparent avec le problème de Pappus. Nous verrons comment la reconstruction proposée par Henk Bos permet de rendre compte de l'ensemble de ces occurrences.

La deuxième partie de l'article confronte l'analyse de l'introduction des courbes algébriques proposée par Henk Bos à partir de sa reconstruction et celle que j'ai proposée à partir de la notion d'inauguration.

I. L'ORIGINE DE LA PARABOLE DE DESCARTES ET LE PROBLÈME DE PAPPUS

1. *La parabole de Descartes dans la* Géométrie

La parabole de Descartes intervient dans sept passages répartis sur l'ensemble de *La Géométrie* : deux dans le Livre I, trois dans le Livre II, et à nouveau deux dans le Livre III.

La courbe est introduite dans le Livre I quand, après avoir présenté le problème de Pappus, Descartes décrit brièvement l'ensemble des solutions auxquelles il est parvenu [Descartes 1637, p. 380–382]. Il commence cette description par une première énumération des configurations de droites en suivant l'ordre des *courbes requises pour construire les solutions du problème.* Il énumère ainsi les configurations de droites pour lesquelles les solutions peuvent être construites au moyen d'un cercle et d'une droite (problèmes plans), celles pour lesquelles une section conique est requise (problèmes solides) et celles qui requièrent une courbe d'« *un degré plus composée* ». C'est là la première référence à la nouvelle « parabole ». La seule indication alors donnée est qu'il s'agit d'une courbe d'un « *degré plus composée* » que les coniques, sans que le lecteur puisse savoir à ce moment ce qui détermine ce degré[3]. Descartes poursuit en énumérant les configurations pour lesquelles les solutions sont construites au moyen d'une courbe « *encore d'un degré plus composée que la précédente* », mais cette courbe n'est pas décrite et ne le sera pas. Il termine en indiquant que cette

[3] Le terme de « degré » renvoie aux degrés d'un ordre linéaire dénombrable, et non au degré d'un polynôme.

énumération se poursuit « *à l'infini* » [Descartes 1637, p. 381]. Il considère donc ici une extension graduelle infinie au-delà des coniques des courbes nécessaires à la construction des solutions du problème de Pappus.

Il fait ensuite une nouvelle description des solutions du problème de Pappus en suivant cette fois l'ordre d*es courbes solutions*. Il indique alors que toutes les coniques, mais aussi les droites et les cercles, peuvent être obtenus comme *solutions* du problème pour 3 ou 4 droites, qu'avec un plus grand nombre de droites on obtient à nouveau des courbes d'« *un degré plus composées que les sections coniques* ». Il poursuit en considérant à nouveau les courbes « *d'un degré plus composée[s] que les précédentes* » et termine en indiquant que cette énumération se poursuit « *à l'infini* » [Descartes 1637, p. 381]. L'extension des courbes au delà des coniques intervient à nouveau dans cette seconde énumération des solutions du problème de Pappus, avec en outre cette fois l'affirmation que l'on obtient de cette manière toutes les courbes de chaque degré, c'est-à-dire que toutes les courbes géométriques, dont la caractérisation sera donnée ultérieurement, sont, degré par degré, des courbes de Pappus.

Après cette double énumération des solutions du problème de Pappus, Descartes ajoute que « *la première et la plus simple de toutes* [les courbes], *après les sections coniques, est celle qu'on peut décrire par l'intersection d'une parabole et d'une ligne droite, en la façon qui sera tantôt expliquée* » [Descartes 1637, p. 381–382]. La nouvelle courbe apparaît ici plus distinctement et fait l'objet d'une double caractérisation : elle est « *la première et la plus simple* » des courbes après les coniques et les premières indications sont données sur sa construction. Cette conjonction suggère un rapport entre ces deux caractéristiques, à savoir que la construction de cette courbe par l'intersection d'une parabole et d'une droite rend compte du fait qu'elle soit « *la première et la plus simple* » des courbes après les coniques : ce n'est pas une conique, mais sa construction au moyen d'une parabole et d'une simple droite ne permet pas d'envisager de courbes qui se déduisent plus simplement des coniques sans en faire partie.

Le deuxième passage dans lequel la parabole de Descartes intervient se trouve à la toute fin du Livre I [Descartes 1637, p. 386–387]. Après avoir introduit l'équation générale du problème de Pappus, Descartes reprend l'énumération de ses solutions, rapportées au nombre et à la configuration des droites, suivant la dimension (degré) des équations correspondantes et l'ordre des *courbes requises pour en construire les solutions*. La nouvelle parabole apparaît à nouveau ici sous les traits de la « *ligne qui n'est que d'un degré plus composée que les sections coniques* », c'est-à-dire uniquement en tant que courbe servant à la construction d'autres courbes. Il n'y est pas fait référence en tant que solution du problème de Pappus, ayant une équation de degré 3, mais en tant que courbe servant à construire les solutions des équations de degré 5 et 6. C'est bien néanmoins en déduisant l'équation de degré 3 de la courbe à partir de sa construction que Descartes démontrera dans le quatrième passage qu'elle est une solution du problème de Pappus.

Le troisième passage se trouve au début du Livre II à l'occasion de la caractérisation que donne Descartes des courbes géométriques [Descartes 1637, p. 395]. Descartes commence par y considérer la courbe obtenue par l'intersection d'une droite en translation et d'une droite en rotation. Il affirme ensuite qu'en remplaçant la droite en translation par une courbe du premier genre, on construit ainsi une courbe géométrique du deuxième genre, qu'en remplaçant la droite par une courbe du deuxième genre, on construit une courbe géométrique du troisième genre, « *et ainsi à l'infini* ». Il précise à cette occasion qu'en prenant une parabole en translation, on obtient par ce procédé « *la ligne courbe que j'ai tantôt dit être la première et la plus simple pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position* » [Descartes 1637, p. 395]. Il renvoie à une mention précédente (« *tantôt* »), et ce passage est inversement sans doute celui qui donne l'explication de la construction qui avait été annoncée dans les deux premiers. Il avait déjà été fait allusion à sa construction par l'intersection d'une droite et d'une parabole, mais il n'avait pas été fait mention de leurs mouvements respectifs nécessaires à la construction. La construction est ainsi donnée ici complètement pour la première fois.

Le quatrième passage se trouve aussi dans le Livre II au moment d'exposer la solution du problème de Pappus pour 5 droites, 4 parallèles équidistantes et une perpendiculaire : « *le point cherché sera en la ligne courbe qui est décrite par le mouvement d'une parabole en la façon ci-dessus expliquée* » [Descartes 1637, p. 408]. Il suffit alors à Descartes pour établir que la courbe est la solution de déterminer l'équation du problème pour cette configuration et de vérifier qu'elle coïncide avec celle de la courbe qu'il détermine à cette occasion [Descartes 1637, p. 408–409].

Toujours dans le même Livre, Descartes applique à sa « parabole » sa nouvelle méthode pour déterminer la normale à une courbe [Descartes 1637, p. 415].

Le sixième passage se trouve au Livre III [Descartes 1637, p. 476–479], quand Descartes démontre que la courbe permet de construire toutes les solutions des équations de degré 5 et 6.

Descartes conclut *La Géométrie* par une synthèse des constructions qu'il a données des problèmes suivant qu'ils sont plans, solides ou d'un degré plus composé, et cela à l'infini [Descartes 1637, p. 485]. Il rappelle alors que la construction des problèmes d'un degré plus composé que les solides se fait « *en coupant (...) d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composée que la parabole* ». C'est la septième et dernière référence à la courbe.

2. *La nécessité d'une reconstruction*

Le recensement des occurrences de la parabole de Descartes établit la présence récurrente de cette courbe dans *La Géométrie.* Il en ressort aussi que la courbe a diverses fonctions ou qu'elle se rapporte à plusieurs thèmes fondamentaux de *La Géométrie* : la résolution du problème de Pappus dont la courbe est une solution pour une configuration particulière de 5 droites ; la caractérisation des courbes géométriques dont la courbe est, par sa construction, un exemple ; la possibilité d'associer une équations aux courbes géométriques ; la détermination de la normale à une courbe ; la construction des racines des équations, la courbe permettant de construire les racines des équations de degré 5 et 6.

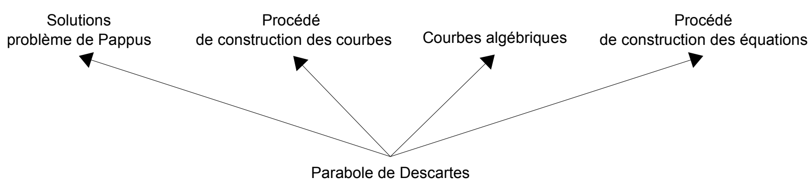

FIGURE 1. Fonctions de la parabole de Descartes dans *La Géométrie*

Mais inversement, le fait que cette courbe revienne dans chacun des trois Livres et qu'elle participe ainsi de tous ces thèmes apparaît sans fonction ni raison explicites dans *La Géométrie.* La courbe est en effet présentée comme une solution du problème de Pappus, autre que les coniques, sans que le lecteur ne sache comment elle a été trouvée. Il la retrouve ensuite parmi les exemples donnés pour illustrer la caractérisation retenue des courbes géométriques. C'est cette fois à sa construction qu'il fait référence, construction donnée à cette occasion. Qu'elle soit une solution du problème de Pappus et la manière dont elle est construite sont ainsi introduits séparément et apparaissent par conséquent indépendants. Pour le lecteur, qu'il s'agisse de la même courbe n'est qu'une coïncidence. Il la retrouve ensuite mais cette fois pour construire les solutions des équations de degré 5 et 6. A nouveau, cette nouvelle propriété apparaît sans rapport avec le fait qu'elle soit solution du problème de Pappus et avec la manière dont elle est construite. Qu'il s'agisse encore de la même courbe apparaît toujours comme une coïncidence.

D'un point de vue aussi bien historique que mathématique, ces coïncidences ne sont pas satisfaisantes. Elles appellent des explications. En particulier, si Descartes se contente de vérifier dans *La Géométrie* que sa « parabole » est solution du problème de Pappus, il a bien dû d'abord la découvrir. La reconstruction proposée par Henk Bos de la résolution du problème de Pappus rend compte de cette découverte. Mais avant de la présenter, je voudrais faire quelques observations supplémentaires sur les occurrences de la parabole de Descartes dans *La Géométrie*.

Si la parabole de Descartes est bien une courbe particulière, identifiée de diverses manières, ce n'est jamais une courbe isolée. Une de ses caractéristiques le plus souvent mise en avant par Descartes est qu'elle est d'« *un degré plus composées que les sections coniques* ». Elle est ainsi rapportée à une totalité : la totalité des courbes d'un degré plus composées que les sections coniques dont elle est « *la première et la plus simple* ». Mais inversement, le lecteur ne sait au fond que cela sur cette totalité : elle vient juste après celle des coniques, la nouvelle courbe en fait partie et elle en est la première et la plus simple. L'existence de cette totalité est avant tout établie par la courbe. La courbe en tient lieu, elle en est la *représentante*. La courbe s'inscrit en outre toujours dans des énumérations qui se poursuivent « à l'infini ». La totalité dont elle est la représentante n'est ainsi elle-même qu'un segment, un degré, d'une totalité complète qui en comprend une infinité.

On se souvient que dans le troisième passage Descartes faisait référence à la nouvelle courbe comme étant « *la ligne courbe que j'ai tantôt dit être la première et la plus simple pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position* » [Descartes 1637, p. 395]. Si l'on se reporte aux deux seuls passages précédents celui-ci, il apparaît que la nouvelle parabole n'y est en fait jamais considérée comme « *la première et la plus simple pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position* ». Dans le quatrième passage en revanche, la courbe est bien considérée comme solution du problème de Pappus. Descartes fait bien valoir que la configuration de droites pour laquelle la courbe est solution, c'est-à-dire 5 droites, 4 parallèles équidistantes et une perpendiculaire, est « *le plus simple cas qu'on puisse imaginer après le précédent* », c'est-à-dire après le cas trivial où les 5 droites sont parallèles [Descartes 1637, p. 408]. Dans ce passage, postérieur à celui considéré, la courbe est donc bien à nouveau

[3] L'équation de la courbe n'est pas explicitement donnée ici, mais comme on le verra, il ressort du contexte que la construction est donnée avec en vue la conséquence que la courbe a une équation.

associée au « *plus simple* », mais il s'agit alors du *cas* le plus simple, c'est-à-dire de la plus simple configuration de 5 droites (à condition tout de même d'en écarter une), et non de « *la première et la plus simple* [solution] *pour la question de Pappus, lorsqu'il n'y a que cinq lignes droites données par position* ».

Ainsi, la nouvelle courbe participe de diverses totalités dont elle tient lieu de représentante (« la première et la plus simple »), et ce qui précède montre que Descartes tend à assimiler les diverses totalités qui ont la même représentante.

La fonction de représentante de la courbe ressort aussi des énoncés généraux introduits dans plusieurs des passages dans lesquels elle intervient.

Ainsi, le premier passage est l'occasion pour Descartes d'affirmer que la résolution du problème de Pappus conduit, degré par degré, à *toutes* les courbes géométriques. Les propriétés de la courbe, ici d'être une solution particulière du problème de Pappus, servent un propos plus général : identifier la totalité des solutions du problème de Pappus et celle des courbes géométriques.

De même, dans le prolongement immédiat du troisième passage, Descartes fait valoir que *toutes* les courbes géométriques ont une équation : *« Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. »* [Descartes 1637, p. 395]. Il a en effet préalablement établi que l'hyperbole, construite par la rotation d'une droite et la translation d'une autre droite, avait une équation algébrique [Descartes 1637, p. 393-394]. La construction complète de la nouvelle parabole est donnée ensuite, Descartes faisant valoir que le même procédé peut être itéré à l'infini. Même si l'équation n'est donnée que dans le passage suivant, la construction de la nouvelle courbe est introduite dans une énumération qui permet ensuite à Descartes de déclarer que toutes les courbes géométriques ont une équation algébrique. Le fait que la courbe soit construite comme l'hyperbole, établit son caractère géométrique, et sert un propos plus général, en l'occurrence l'identification des courbes géométriques à des courbes algébriques.

Si l'on recense les totalités auxquelles participent la courbe de Descartes, on obtient :

– les solutions du problème de Pappus d'un degré plus composées que les coniques ;
– les courbes géométriques d'un degré plus composées que les coniques ;
– les courbes algébriques d'un degré plus composées que les coniques.

Et si l'on étend ces identifications à tous les degrés, les totalités complètes identifiées sont :

– les solutions du problème de Pappus ;
– les courbes géométriques ;
– les courbes algébriques.

Nous verrons que la reconstruction proposée par Henk Bos rend compte de la manière dont la résolution du problème de Pappus a pu conduire à ces assimilations.

3. *La reconstruction*

La reconstruction de la résolution du problème de Pappus proposée par Henk Bos est fondée sur la correspondance entre Descartes et Golius. Le problème de Pappus a en effet été soumis à Descartes par Golius à la fin de l'année 1631. Nous savons, par une lettre conservée[4], que Descartes a envoyé une solution à son correspondant sans doute vers janvier 1632. L'écrit, joint à sa lettre, contenant cette solution n'a, lui, pas été conservé, mais la lettre comprend néanmoins un certain nombre d'indications. On apprend notamment que les solutions peuvent toutes être construites par un mouvement continu complètement déterminé par un certain nombre de « relations simples »[5]. Cette indication est relativement vague puisqu'on ne sait pas ce que sont ces « relations simples ». Descartes la précise un peu en indiquant qu'il faut distinguer le fait que la construction n'implique qu'*un* mouvement continu, à l'exclusion de plusieurs, et le fait que ce mouvement doive être déterminé par un certain nombre de « relations simples ». La spirale et la quadratrice sont exclues parce que construites au moyen de *deux* mouvements. La deuxième condition sur les « relations simples » lui permet d'envisager l'exclusion d'autres courbes dont il précise qu'elles n'ont pas encore été nommées.

Comme ces indications ne découlent pas directement de l'*énoncé* du problème de Pappus, les solutions trouvées ont donc dû être construites par un mouvement continu complètement déterminé par un certain nombre de « relations simples ». Cette description correspond à la construction de la parabole de Descartes donnée dans *La Géométrie*, mais elle est néanmoins trop vague pour que l'on puisse être assurés que ce sont les mêmes.

---

4 [Descartes 1897–1913, vol. I, p. 232-235].

5 « *Dati quotcunque rectis lineis, puncta omnia ad illas juxta tenorem quæstionis relata, contingent unam ex lineis quæ describi possunt unico motu continuo, & omni ex parte determinato ab aliquot simplicibus relationibus* » [Descartes 1897–1913, vol. I, p. 233].

La lettre atteste aussi que la résolution du problème passait par sa mise en équation, mais elle ne comprend aucune indication sur le rôle joué par celle-ci dans la résolution proposée.

Une façon naturelle de résoudre un tel problème est de déduire les solutions les unes des autres en construisant les solutions pour un nombre donné de droites de celles pour un nombre moindre de droites. Suivant cette idée, Henk Bos a pu montrer que le problème pour 5 droites, dans la configuration considérée par Descartes dans *La Géométrie*, se ramène simplement au problème à 3 droites, dont la solution est une parabole. Le lieu des points pour 5 droites apparaît ainsi naturellement décrit comme intersection d'une parabole translatée, solution du problème pour 3 droites, et d'une droite en rotation, ce qui coïncide avec la description donnée dans *La Géométrie* [Bos 1992], [Bos 2001, chap. 19]. De plus, le premier exemple donné dans *La Géométrie* de ce procédé de construction est celui d'une hyperbole construite par la translation d'une première droite et la rotation d'une seconde. Henk Bos a établi de la même manière que cette construction correspondait à la résolution du problème de Pappus pour 4 droites, 3 parallèles et équidistantes, et une perpendiculaire [Bos 1992, p. 87–88], [Bos 2001, p. 278–280].

Voici à présent la construction proposée par Henk Bos de la solution pour 5 droites à partir de celle pour 3 droites.

Étant données 5 droites L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 (voir figure), avec L_1, L_2, L_3, L_4 parallèles et équidistantes, et L_5 perpendiculaire à elles. On cherche le lieu des points P tels que la distance d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 de P à chacune des droites vérifie la relation $ad_3d_5 = d_1d_2d_4$ où a est la distance commune entre les droites.

Soit P un tel point, O le point d'intersection de L_1 et de L_5 et Q le point d'intersection de la droite (OP) avec L_3. Soit R le point d'intersection de L_3 et de la droite passant par P perpendiculaire à L_3. En posant $z = QR$, on a $\frac{d_5}{d_1} = \frac{z}{d_3}$. Comme on a par ailleurs $ad_3d_5 = d_1d_2d_4$, cette condition équivaut à $az = d_2d_4$, qui est la relation du problème de Pappus pour 3 droites L_2, L_4 et L_Q, où L_Q est la droite passant Q par perpendiculaire à L_2, L_4 et z la distance de P à L_Q. Le problème pour 5 droites, 4 parallèles équidistantes et une perpendiculaire, a ainsi été ramené au problème pour 3 droites, deux parallèles et une perpendiculaire. Or, le lieu des points pour 3 droites, dans la configuration considérée, est la parabole d'axe L_3 et passant par les points d'intersection de L_Q avec L_2 et L_4.

Voyons à présent comment les solutions des deux problèmes dépendent l'une de l'autre. D'après ce qui précède, chaque solution du problème de Pappus pour les droites L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 s'obtient comme intersection

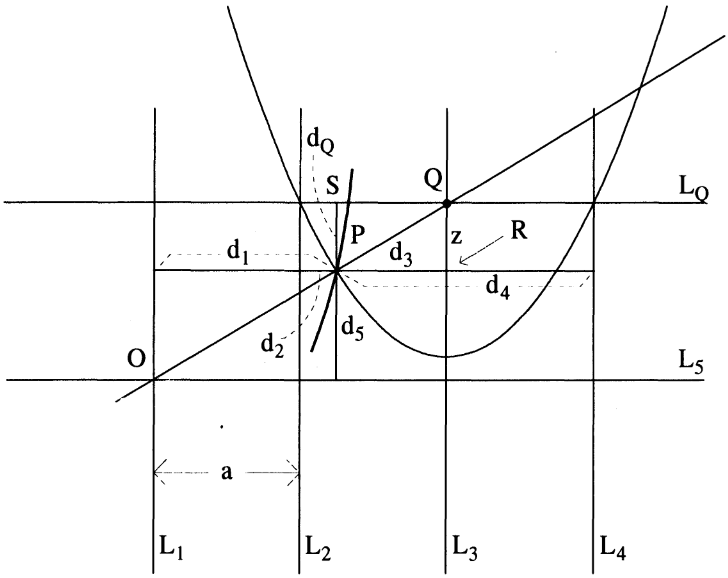

FIGURE 2. [Bos 2001, p. 275]

d'une parabole et d'une droite où la parabole est la solution du problème de Pappus pour les 3 droites L_2, L_4 et L_Q, avec L_Q droite quelconque parallèle à L_5, et où la droite passe par le point fixe O, point d'intersection de L_1 et de L_5 et le point Q, variable, point d'intersection de L_Q avec L_3. En translatant L_Q parallèlement à L_5, la parabole solution est, compte-tenu de sa caractérisation, aussi translatée de la même manière et la droite (OQ) tourne autour du point O. En outre, la translation de la droite L_Q détermine la rotation de (OQ) et réciproquement (les deux mouvements peuvent être rapportés au même paramètre, par exemple z). Le lieu des points solution du problème pour 5 droites est ainsi décrit par la translation conjointe d'une parabole et la rotation d'une droite. C'est exactement la description donnée dans *La Géométrie* de la parabole de Descartes.

4. *Le problème de Pappus, la parabole de Descartes et le procédé de construction de Pappus-Descartes*

Cette reconstruction rend parfaitement compte de la manière dont la parabole de Descartes a pu être découverte. Elle rend aussi compte des diverses fonctions de cette courbe qui se présentent dans *La Géométrie* sous forme de coïncidences. Elle lève notamment l'indétermination du rapport entre la courbe, sa construction et le problème de Pappus en faisant apparaître que la courbe et son mode de construction ont pu être découverts conjointement à l'occasion de la résolution du problème de Pappus. La résolution de ce problème apparaît de ce fait à l'origine de la découverte de cette courbe. Il était possible de l'envisager mais certainement pas de l'établir aussi clairement à partir de *La Géométrie*. Le problème de Pappus apparaît aussi à l'origine de la découverte du procédé de construction de la courbe. Ce lien est d'autant plus fort que ce procédé aurait à l'origine servi à construire *toutes* les solutions. Si l'on savait déjà par la lettre de Descartes que toutes les solutions étaient construites par un même procédé, la reconstruction permet d'identifier ce procédé à celui qui sert à construire la parabole de Descartes. Pour marquer le lien entre ce procédé et la résolution donnée par Descartes au problème de Pappus, je l'appellerai « le procédé de Pappus-Descartes ». Une telle identification est impossible à faire à partir de *La Géométrie*. En effet, la construction de la parabole de Descartes intervient dans *La Géométrie* pour établir que cette courbe est géométrique et qu'elle a une équation, mais elle n'intervient pas pour établir qu'elle est solution du problème de Pappus.

Cette reconstruction fait ainsi apparaître de nouvelles relations entre les diverses fonctions de la parabole de Descartes dans *La Géométrie*. La figure suivante reprend la précédente représentation de ces fonctions en faisant apparaître les relations établies par la reconstruction (flèches grises).

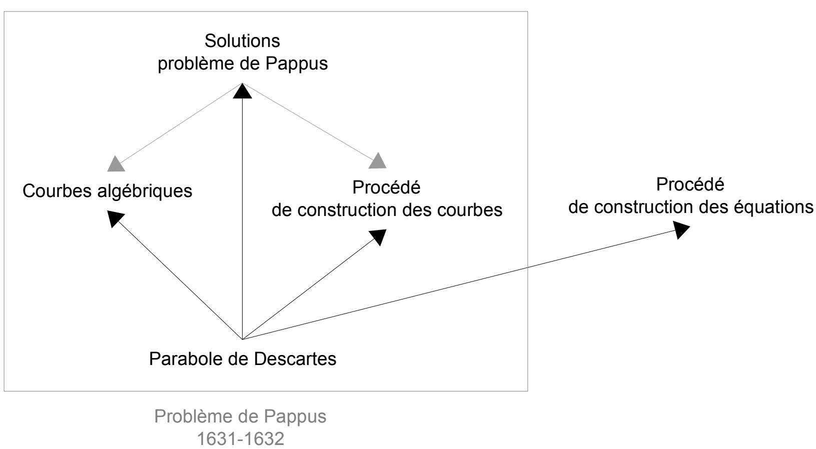

FIGURE 3. Fonctions de la parabole de Descartes (*avec la reconstruction*)

On voit qu'il reste à rendre compte du fait que cette courbe sert aussi à la construction des équations de degrés 5 et 6. Le fait que la courbe qui, suivant la reconstruction, a été découverte comme solution du problème de Pappus puisse aussi servir à construire les équations de degrés 5 et 6 apparaît pour l'instant toujours comme une coïncidence : rien ne justifie que la même courbe soit la solution de ces deux problèmes.

5. *La parabole de Descartes et la résolution des équations*

a) *La construction des moyennes proportionnelles et la construction des solutions des équations en 1628*

La lettre à Beeckman du 26 mars 1619 atteste que Descartes a déjà à cette date l'idée d'une méthode lui permettant de résoudre tous les problèmes se rapportant à une quantité continue et même discrète (arithmétique) [Descartes 1897–1913, vol. X, p. 154-160]. Il fait alors déjà valoir que la résolution de tous les problèmes de géométrie implique des courbes qui peuvent toutes être tracées par un même moyen, mais il s'agit alors de « nouveaux compas ». Ces courbes, engendrées par un seul mouvement, ce qui exclut notamment la quadratrice, sont non moins recevables que des cercles et il n'y a selon lui pas de problème qui ne puisse être résolu par leur moyen. Aussi bien la possibilité de résoudre tous les problèmes que l'extension des courbes ont donc été déjà envisagées par Descartes. Les courbes sont rapportées à leur fonction dans la résolution des problèmes et leur recevabilité est fondée sur leur construction au moyen d'instruments. Dans les *Cogitationes Privatæ*, écrites aussi en 1619 [Descartes 1897–1913, vol. X, p. 213-248], Descartes présente plusieurs « nouveaux compas », dont le système d'équerres, repris dans *La Géométrie*, qui permet de construire *toutes* les moyennes proportionnelles. Il y donne une construction des solutions de diverses équations de degré 3, sinon de toutes, fondée sur la construction de deux moyennes proportionnelles.

Quelques années plus tard, lors de son passage à Paris dans les années 1625-1626, il communiquera à divers mathématiciens une construction de deux moyennes proportionnelles au moyen d'une parabole et d'un cercle [Bos 2001, p. 255 *sq*]. Deux ans plus tard, en 1628, Beeckman consigne dans son journal [Descartes 1897–1913, vol. X, p. 344-346] que Descartes lui a montré comment construire avec ces deux courbes les solutions de toutes les équations de degré 3 et 4. Il note que Descartes tient ce résultat pour le plus remarquable qui ait été obtenu en géométrie.

La construction des solutions des équations de degré 3, auxquelles s'ajoute à présent celles de degré 4, se fait alors au moyen de deux courbes, une parabole et un cercle, sans plus passer par la construction de deux moyennes proportionnelles. L'identité des moyens nécessaires pour construire deux moyennes proportionnelles et les solutions des équations de degré 3 et 4 demeure évidemment.

Mais la construction de deux moyennes proportionnelles n'est elle-même que le deuxième problème d'une série de problèmes particuliers de géométrie : la construction d'une moyenne proportionnelle, de deux, trois, etc. Cette série est en outre aussi celle à laquelle se rapportent les nouveaux compas de Descartes. Elle est bien attestée en tant que série. Or, comme la construction d'une seule moyenne proportionnelle se fait au moyen d'un cercle et d'une droite, de la même manière que celle des équations de degré 1 et 2, la paire d'équations de degré 3 et 4 apparaît à son tour être le deuxième terme d'une autre série, celle des équations regroupées par paires. La correspondance entre la construction de deux moyennes proportionnelles et les équations de degré 3 et 4 s'inscrit dans une correspondance graduelle plus vaste entre la série des moyennes proportionnelles successives et celle des paires d'équations, cette extension pouvant être envisagée dès 1619.

Comme les constructions d'une et de deux moyennes proportionnelles sont respectivement des problèmes plans et solides, les constructions qui fondent la correspondance coïncident avec la classification de Pappus des problèmes plans et solides à partir des courbes qui servent à les résoudre. Mais aussi bien la série des moyennes proportionnelles, que celle des courbes tracées par le mésolabe, que la série des équations s'étend au delà des deux premiers degrés de cette classification. Cela ne peut manquer de suggérer l'extension de cette correspondance au delà des courbes habituellement reçues ainsi que leur utilisation pour construire les solutions des équations au delà des degrés 3 et 4. La construction par une parabole et un cercle des solutions des équations de degré 3 et 4 apparaît ainsi prolonger la construction des problèmes plans au moyen d'une droite et d'un cercle prolongeant ainsi la classification de Pappus des courbes et des problèmes.

L'importance de la découverte de la construction des solutions des équations de degré 3 et 4 au moyen d'une parabole ne tient donc pas tant à la découverte d'un procédé de construction général pour deux degrés d'équations que dans la mise en évidence de cette nouvelle correspondance graduelle générale entre l'*ensemble* des problèmes de géométrie, l'*ensemble* des équations et l'*ensemble* des courbes géométriques qui servent à les construire. Cette correspondance en place dès 1628, et peut-être dès 1619, attestée par le journal de Beeckman, présente déjà d'importantes

Problèmes	Construction	Équations (degré)
plans	droite + cercle	1–2
solides	parabole + cercle	3–4
⋮	⋮	⋮

TABLE 1. La correspondance problèmes-constructions-équations en 1628

similarités avec celle exposée et mise en œuvre dans la *Géométrie* et cela avant que Descartes ne soit confronté au problème de Pappus.

b) *La parabole de Descartes et la résolution des équations de degré 5 et 6*

La correspondance entre problèmes, équations et courbes mise en place en 1628 permet de rendre compte du fait que la parabole de Descartes, une fois découverte, ait pu être considérée pour la construction des solutions des équations de degré 5 et 6. En effet, sa construction par le procédé de Pappus-Descartes à partir de la parabole la fait apparaître comme une courbe plus complexe mais seulement d'un degré plus complexe que la parabole, ce qui en fait « la parabole du second genre » [Descartes 1637, p. 484]. La fonction de la parabole dans cette correspondance conduit à envisager la même fonction pour cette parabole du second genre pour les équations de la paire de degrés suivante. La nouvelle courbe prend ainsi place dans la série des courbes géométriques qui servent à établir la correspondance entre la construction des solutions des équations et la résolution des problèmes de géométrie. Cette correspondance est en l'occurrence le *cadre* qui conduit Descartes à considérer que *si* cette « parabole » est, d'après son mode de construction à partir de la parabole, une courbe du genre suivant celui de la parabole *alors* elle doit pouvoir servir à construire les solutions des équations de la paire de degrés suivante. Cela revient à reprendre le tableau précédent et à en remplir une ligne supplémentaire.

Le recours dans *La Géométrie* à la parabole de Descartes pour construire les solutions des équations de degré 5 et 6 n'apparaît donc plus comme une coïncidence. Il résulte de la conjonction de la résolution du problème de Pappus obtenue en 1632 et de la correspondance graduelle générale préalablement mise en place entre les courbes, les problèmes et les équations. Cette coïncidence est un effet de la reprise de la courbe découverte à l'occasion de la résolution du problème de Pappus dans un cadre constitué antérieurement à la résolution de ce problème.

Problèmes	Construction par le procédé de Pappus-Descartes	Équations (paires de degrés)
plans	droite + cercle	1–2
solides	parabole + cercle	3–4
⋮	*parabole du second genre* + cercle	5–6
⋮	⋮	⋮

TABLE 2. La correspondance problèmes-constructions-équations étendue après la résolution du problème de Pappus

Précisons un peu les conditions de ce croisement. En premier lieu, la résolution du problème de Pappus fournit la nouvelle courbe. Mais elle fournit aussi l'*ordre*, défini par le procédé de Pappus-Descartes, qui la fait apparaître comme étant du genre suivant celui de parabole. La nouvelle courbe n'aurait en effet aucune raison d'être considérée pour la construction des solutions des équations de degrés 5 et 6 si rien ne la désignait comme une courbe du genre suivant celui de la parabole. On a là une nouvelle manifestation de l'importance soulignée par Henk Bos de l'ordre associé au procédé de Pappus-Descartes (Henk Bos [1992, 95] ; [2001, 364, 372]). La vérification mathématique que la nouvelle courbe permet effectivement de construire les solutions des équations de degrés 5 et 6 n'a pu manquer d'apparaître en retour comme une confirmation de la pertinence de cet ordre, partant de celle du procédé de construction de Pappus-Descartes, et au delà de la correspondance entre les courbes, les problèmes et les équations.

c) *Les déductions et leurs conditions de possibilité historiques*

La fonction de la parabole de Descartes dans la résolution des équations de degré 5 et 6 qui se présente dans *La Géométrie* comme une coïncidence apparaît avoir d'abord été le résultat d'une *déduction.* Il s'agit bien en effet d'une *déduction* : le fait que la nouvelle courbe soit du genre suivant de celui de la parabole conduit Descartes à considérer qu'elle pourrait aussi servir à construire les solutions des équations de degré 5 et 6. Cette déduction donne bien lieu à une découverte : la découverte du premier procédé de construction des solutions des équations de degré 5 et 6. Cette découverte est aujourd'hui encore incontestable, la vérification donnée dans *La Géométrie* reste valable mais la déduction qui y conduit n'est pourtant fondée ni logiquement ni mathématiquement. Ce n'est pas un argument logique ou mathématique qui permet de rendre compte de l'assertion : « *si* une courbe est du genre suivant celui d'une autre courbe qui permet de construire les solutions des équations pour une certaine paire de degrés *alors* cette courbe doit elle-même permettre de construire les solutions des équations pour la paire de degrés suivante ». Descartes lui-même ne rapporte pas cette conséquence à ses prémisses et ne fait que proposer une *vérification* du fait que cette courbe permet de construire les solutions des équations de degré 5 et 6, ce qui fait apparaître cette propriété comme une coïncidence supplémentaire. Mais il y a bien là pourtant une déduction, mais une déduction qui a ses conditions. Ces conditions consistent en l'occurrence avant tout en la correspondance graduelle générale envisagée par Descartes entre les procédés de résolution des problèmes géométriques, les procédés de construction des courbes et les procédés de construction des solutions des équations. La conception qu'il se fait des rapports entre ces différents éléments participe des déductions qu'il peut faire. C'est à l'intérieur de ces conditions que la déduction est possible et opère. Or, ces conditions sont *historiques.* Une conception uniquement logique de l'inférence, suivant l'acception que la logique a progressivement pris depuis sa mathématisation, ne permet pas de reconnaître comme telle cette déduction dont les effets sont pourtant réels et encore visibles dans *La Géométrie.* Une conception strictement logique de l'inférence conduit à en ignorer les *conditions de possibilité.* Or, ces conditions ont une histoire et surtout elles jouent un rôle en histoire des mathématiques.

La déduction considérée offre en l'occurrence un exemple du rôle de ces conditions et des effets de leur changement. En effet, en 1632, avec la résolution du problème de Pappus et le cadre déjà constitué en 1628, les conditions sont réunies qui permettent à Descartes de déduire que la nouvelle courbe devrait permettre de construire les solutions des équations de degrés 5 et 6. On a aussi vu que la vérification, par d'autres moyens, de la conclusion pouvait aussi renforcer le cadre auquel la déduction se rapporte. Mais divers changements affecteront ces conditions qui n'opèrent plus cinq ans plus tard, de telle sorte que la conséquence tirée de la déduction n'apparaît plus dans *La Géométrie* que comme une coïncidence. Même si les conditions de la déduction ne sont plus réunies, certains de ses effets demeurent. Une déduction peut ainsi avoir des conséquences au delà des conditions qui la rendent possible et qui donc la rendent aussi reconnaissable comme telle. Mais reconnaître l'existence de conditions historiques pour une déduction permet de chercher à les déterminer et éventuellement de retrouver une déduction disparue avec elles.

Sans en développer ici les conséquences historiographiques, cet exemple peut contribuer à montrer l'intérêt de reconnaître que les inférences ont, même en mathématiques, des conditions de possibilité irréductibles à celles en vigueur en logique et dans les mathématiques qui nous sont familières. Il devrait être clair que le recours à cette logique et à ces mathématiques, pour éclairantes qu'elles puissent être, peuvent aussi apporter avec elles des conditions de possibilité étrangères au texte considéré et ne pas restituer celles qui y sont à l'œuvre. Cela étant, il ne suffit pas de suspendre l'usage de nos notations pour en suspendre les effets.

II. GENÈSE ET INAUGURATION DES COURBES ALGÉBRIQUES

1. *Le problème de Pappus et l'introduction des courbes algébriques en 1632*

Dès 1632, la résolution du problème de Pappus a amené Descartes à donner une nouvelle extension aux courbes géométriques, à les identifier aux courbes algébriques introduites à cette occasion, et à considérer que toutes ces courbes pouvaient être construites par le même procédé.

La lettre à Golius atteste en effet que Descartes a considéré à l'occasion de la résolution de ce problème que les courbes de Pappus pouvaient toutes être construites par un même procédé de construction. Il fait aussi valoir que toutes les courbes recevables sont constructibles par ce procédé, procédé que la reconstruction proposée par Henk Bos autorise à assimiler au procédé de construction de Pappus-Descartes. Cette identification est alors sans doute fondée d'une part sur l'impression que toutes les solutions du problème de Pappus s'obtiennent par le procédé de Pappus-Descartes, ce qui assure leur recevabilité géométrique et donne en même temps son importance à ce procédé particulier, et d'autre part sur l'impression qu'il n'y a pas de courbe recevable qui ne soit solution du problème de Pappus. La résolution de ce problème a ainsi amené Descartes à identifier les courbes recevables aux courbes de Pappus.

La lettre à Golius atteste aussi que le problème de Pappus a été mis en équation, même si, aussi bien d'après la lettre que d'après la reconstruction, celle-ci ne semble avoir joué aucun rôle dans sa résolution. Cette mise en équation permet néanmoins d'associer à chaque courbe de Pappus une équation. Compte-tenu de la diversité du nombre de droites considérées et de leurs positions relatives, Descartes a pu alors déjà conclure, comme il le fera dans *La Géométrie*, que le problème de Pappus conduisait aussi à *toutes* les équations (Bos [2001, 281, 289, 351, 404]). La mise en équation du problème faisant correspondre à toute équation une courbe de Pappus, les courbes déterminées par des équations sont de ce fait elles-mêmes toutes constructibles par le procédé de Pappus-Descartes. Les courbes algébriques sont ainsi toutes recevables et toutes les courbes recevables sont inversement des courbes algébriques.

La classe, ou le genre, d'une courbe de Pappus, et partant de n'importe quelle courbe géométrique, peut ainsi être rapportée à divers nombres, que ce soit le nombre des droites du problème de Pappus dont elle est solution, celui défini par l'ordre associé au procédé de construction de Pappus-Descartes ou encore le degré de son équation ([Bos 2001, 282, 286, 331, 350, 356]). La classification des courbes de Pappus est explicitement fondée dans la lettre à Golius sur le nombre de « relations simples » mais Henk Bos peut faire valoir que cette classification coïncide avec celle rapportée au degré de leurs équations : augmenter de deux le nombre de droites du problème de Pappus fait augmenter de un le degré de l'équation ([Bos 2001, 274]).

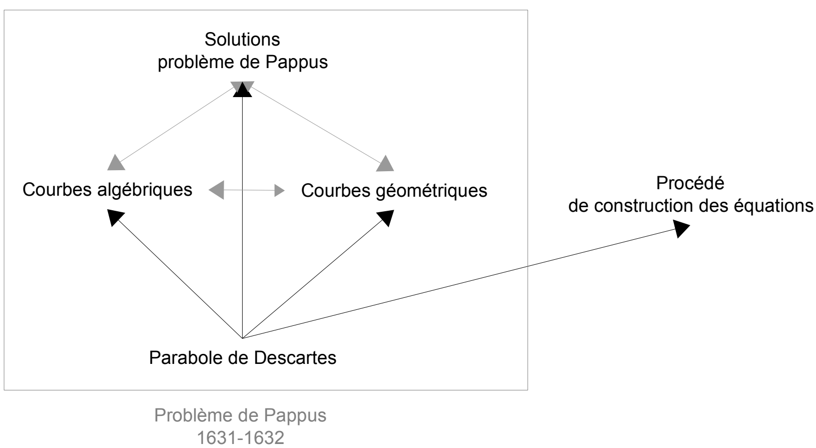

FIGURE 4. Identifications induites par la résolution du problème de Pappus de 1632

Ainsi, Descartes a-t-il pu identifier à cette occasion, et de cette manière, les courbes géométriques recevables aux courbes algébriques et adopter une classification des courbes fondée sur le degré des équations[6].

6 La synthèse des conséquences tirées par Henk Bos de la résolution donnée en 1632 est présentée dans le passage suivant : « *Thus I conjecture that the confrontation with Pappus' problem in early 1632 suggested to Descartes a number of crucial ideas about geometry,*

Il suffit de reprendre le schéma des fonctions des occurrences de la parabole de Descartes dans *La Géométrie* tenant compte des relations mises en évidence par la reconstruction pour faire apparaître les trois ensembles identifiés (voir figure 4).

2. *L'évolution entre 1632 et 1637 et l'interprétation de* **La Géométrie**

Descartes a donc pu concevoir dès 1632 l'identification des courbes géométriques et des courbes algébriques à l'occasion de la résolution du problème de Pappus. La reconstruction proposée par Henk Bos a permis de mettre en évidence le rôle du procédé de Pappus-Descartes dans cette résolution et sa découverte probable à cette occasion. Mais inversement, cette reconstruction a été nécessaire parce que l'importance de ce procédé aussi bien dans la résolution du problème de Pappus que dans l'introduction des courbes algébriques ne ressortent plus guère de *La Géométrie.* Diverses coïncidences en tiennent lieu dont il a été possible en retour de rendre compte en grande partie grâce à cette reconstruction. Il faut à présent rendre compte de ces changements. Leur interprétation est indissociable de celle de *La Géométrie.* Henk Bos propose de les expliquer par les difficultés inhérentes à la démonstration de la possibilité de construire toutes les courbes algébriques au moyen du procédé de Pappus-Descartes. La résolution du problème de Pappus de 1632 confronte, selon lui, Descartes à ce problème. Celui-ci ne parvenant pas à donner cette démonstration aurait alors remplacé le procédé de Pappus-Descartes par leur construction point par point à partir des équations et une classification des courbes rapportée aux équations dont il ne peut dès lors justifier l'adoption qu'en invoquant la simplicité de ces critères.

Suivant cette interprétation, les changements opérés par Descartes procèdent d'un renoncement. Ce renoncement est en outre *forcé* : forcé par la *difficulté* d'une *démonstration* qui n'a été donnée que par Kempe en 1876[7]. Cette interprétation est fondée sur l'idée que l'identification des courbes

namely : (1) *that curves should be accepted in geometry in so far as they were traced by geometrically legitimate motions ;* (2) *that these legitimately traced curves were precisely the Pappus curves ;* (3) *that Pappus curves were precisely the ones that admitted polynomial equations ; and* (4) *that therefore the totality of geometrically acceptable curves could be classified equivalently by the complexity of the tracing motion, the degree of the equation, and the number of given lines in the pertaining Pappus problem.* » [Bos 2001, 281–282]

7 « *Descartes was compelled to abandon his expectations by the force of mathematical circumstances.* » [Bos 2001, 403]

géométriques et des courbes algébriques serait susceptible d'une démonstration mathématique[8].

Suivant cette perspective, *La Géométrie* apparaît « étrange » ([Bos 2001, 358]), avec des « contradictions dans la structure et le programme » ([1981, 295, 298, 326, 330, 332]). La construction point par point y est en particulier peu considérée, sinon pour faire valoir son incompatibilité avec la caractérisation donnée des courbes géométriques. Le recours aux équations apparaît emprunt d'« ambivalence » ([Bos 2001, 401]) et en « conflit » ([Bos 1981, 298]) avec les principes de construction défendus par Descartes. Cette interprétation conduit aussi à dénoncer « l'absence d'arguments clairs » ([Bos 2001, 361]), leur caractère « non convaincant » ([Bos 2001, 404]), voire leur complète absence ([Bos 2001, 358]).

Je voudrais à présent confronter cette interprétation, et notamment l'analyse de l'introduction des courbes algébriques, à celle proposée par l'analyse inaugurale de *La Géométrie* ([Herreman 2012]).

---

8 Ces conclusions sont notamment données dans le passage suivant « *Thus the episode of Pappus' problem suggested a ready and convincing answer to the demarcation question of geometry : geometrically acceptable curves were precisely the algebraic curves ; they were acceptable because they could be traced by acceptable motions ; these motion were simpler in as much as the degree of the curve was lower ; construction in geometry should be performed by the intersection of acceptable, i.e., algebraic, curves of lowest possible degree.*

However, in working out this version of geometry Descartes found it impossible to argue directly that any algebraic curve could be traced by the motions which he considered geometrically acceptable. Thus one cornerstone of his edifice, namely the identification of geometrical acceptability with algebraicity and simplicity with the algebraic degree, remained without direct proof ; the argument for it in the Geometry, though impressive, was ultimately unconvincing. In fact Descartes' demarcation of geometry was persuasive by its simplicity rather than by the arguments he provided. In that sense Descartes came to rely more on algebra than fitted his earlier convictions ; algebra provided a formulation of the demarcation whose simplicity concealed the absence of direct geometrical argument. » [Bos 2001, 404]. Les mêmes conclusions étaient déjà données dans l'article de 1992 : « *Whether or not Descartes for some time believed, rather than merely hoped, that he could fully generalize the methods he had found for special cases of Pappus' problem must remain undecided. But at some stage he must have realized that he had no general method for finding explicit tracing procedures for arbitrary Pappus curves. After such a realization he would naturally concentrate on the algebraic aspects of the problem, which is what we see him doing in the Geometrie. However, he obviously retained the programmatic and structural ideas about geometry and he tried to save the arguments for them. The result was that in the Géométrie Pappus' problem was no longer explicitly linked to curve tracing and that Descartes generally based his arguments more upon the nature of the equations of the curves than upon their generation by motion. Still several elements of his original arguments about explicit curve tracing were retained in the Géométrie where in fact they no longer served much purpose.* » [Bos 1992, 92]

3. *L'analyse inaugurale*

Les mathématiciens et à leur suite les historiens des mathématiques disposent depuis longtemps de la représentation algébrique des problèmes et des courbes. Elles leurs sont devenues familières, voire même nécessaires, et il leur est difficile d'en suspendre les effets sur leurs rapports aux problèmes et à leurs solutions, leur conception des courbes, de leurs relations mutuelles, etc. L'analyse inaugurale s'attache à l'analyse de l'introduction (inauguration) de ces représentations en considérant la nécessité pour celui qui les introduit de *faire ce qu'il faut* pour les introduire au sein des mathématiques en vigueur. Il s'agit donc de reconnaître que l'introduction d'une nouvelle représentation pose le problème spécifique de son intégration qui, même s'il s'agit d'un problème récurrent, ne fait néanmoins pas partie des problèmes courants. Celui qui introduit une nouvelle représentation doit opérer une sorte de greffe du nouveau sur de l'ancien.

Cette perspective conduit à mettre en évidence l'importance de la *conformité* dans l'inauguration de certaines représentations et, au delà, dans l'histoire des mathématiques. Ainsi, *La Géométrie* apparaît pour l'essentiel consacrée à soutenir que la résolution des problèmes de géométrie à partir des équations est *conforme* à leur résolution géométrique reçue, c'est-à-dire à soutenir que toutes les caractéristiques de la résolution géométrique d'un problème se retrouvent dans sa résolution algébrique, celle-ci n'ajoutant en outre rien qui ne se retrouve dans celle-là.

Le texte de Descartes est ainsi avant tout considéré comme un texte soutenant cette conformité et répondant aux problèmes inhérents à celle-ci. Mais soutenir cela conduit en l'occurrence aussi à soutenir la conformité de la représentation algébrique des courbes à leur représentation géométrique : il lui faut aussi soutenir que toutes les caractéristiques des courbes géométriques se retrouvent dans leur représentation à partir d'équations, celle-ci n'ajoutant rien à celle-là. *La Géométrie* apparaît ainsi en partie consacrée à soutenir que la représentation algébrique des courbes est conforme à leur représentation géométrique reçue. L'assimilation des courbes géométriques et des courbes algébriques est considérée non seulement comme une idée, mais surtout comme le produit d'un processus argumentatif irréductible à une démonstration mathématique.

La simplicité, qui est incontestablement un critère privilégié par Descartes, participe aussi de la conformité : Descartes doit établir que les solutions les plus simples du point de vue de l'algèbre sont aussi les plus simples du point de vue de la géométrie (Herreman 2012, 99-102). Il ne s'agit pas tant pour lui de faire valoir la plus grande simplicité de l'algèbre comparée à celle de la géométrie que leur conformité. Ce n'est pas tant la simplicité qui fonde cette assimilation que la *conformité*.

L'analyse inaugurale conduit aussi à mettre l'accent sur la dimension argumentative du texte. C'est une argumentation particulière qui vise à soutenir la conformité des représentations considérées et qui doit résoudre les problèmes propres à celle-ci. Certains arguments de Descartes n'en sont pas moins objectivement faux. Mais la dimension argumentative de l'ensemble de son texte et la direction de cette argumentation n'en ressortent que mieux. Avant les défauts de l'argumentation cartésienne, il faut d'abord reconnaître la nécessité à laquelle elle répond. Et cette nécessité renvoie elle-même à une finalité : soutenir l'introduction d'une nouvelle représentation des problèmes et des courbes. Seul celui qui dispose de ces représentations peut se dispenser de les inaugurer. Cette argumentation ne peut pas être satisfaisante, comme peuvent l'être des démonstrations mathématiques, notamment celles qui disposent elles-mêmes de ces représentations. Le propos à la fois appelle une argumentation et interdit une argumentation satisfaisante. Mais cela ne doit pas tant servir à récuser l'argumentation donnée qu'à mieux identifier son propos et sa raison d'être.

Suivant cette perspective, l'argumentation déployée dans *La Géométrie* aussi bien que la portée du texte cartésien peuvent être rapportées à la recherche de la conformité plutôt qu'à des défauts ou à des renoncements. Cela ne veut pas dire que la genèse soit exempte de renoncements (notamment quant à l'extension des problèmes résolus), ni que le texte soit sans défauts mathématiques objectifs et que ceux-ci seraient tous inhérents à la nature sémiotique des problèmes considérés. Inversement, le souci de conformité qui se manifeste dans *La Géométrie* pourrait aussi avoir joué un rôle dans sa genèse.

La conformité rend aussi compte d'un *achèvement* du texte que chacun perçoit sans doute, mais dont il importe aussi de rendre compte. Un texte inaugural présente en tant que tel, c'est-à-dire rapporté à sa finalité inaugurale, une forme d'achèvement en dépit de l'incomplétude inévitable de ses arguments.

L'inauguration s'inscrit bien sûr dans une genèse : les totalités reçues et inaugurées, les relations considérées entre elles et les procédés utilisés pour établir ces relations ont une histoire. Mais l'inauguration n'est pas un moment dans une évolution continue. Elle répond à des problèmes spécifiques qui ne sont pas nécessairement ceux de sa genèse et qui ne relèvent pas d'une tradition mathématique : inaugurer la représentation algébrique des problèmes et des courbes géométriques ce n'est ni seulement résoudre le problème de Pappus ni seulement proposer des méthodes de construction des équations même si ces problèmes mathématiques y participent de manière essentielle.

4. *La conformité des courbes géométriques et des courbes algébriques*

Selon l'interprétation inaugurale, *La Géométrie* est en partie consacrée à soutenir que les courbes algébriques sont conformes aux courbes géométriques, c'est-à-dire non seulement qu'elles coïncident mais aussi que toutes les propriétés géométriques des courbes géométriques peuvent être déterminées à partir de leurs équations. Descartes introduit pour cela le procédé de construction point par point qui permet la construction des courbes à partir de leurs équations. Mais cela ne suffit pas. Il doit encore montrer que les courbes ainsi construites sont géométriques, c'est-à-dire qu'elles satisfont la caractérisation qu'il a adoptée pour les courbes géométriques, ce que les constructions point par point n'établissent pas. C'est ici qu'intervient le procédé de construction de Pappus-Descartes mais aussi le problème de Pappus. La preuve que les courbes algébriques sont des courbes géométriques n'est en effet donnée dans *La Géométrie* que pour et grâce aux solutions du problème de Pappus : c'est dans la mesure où les courbes algébriques sont des courbes de Pappus, et donc construites par le procédé de Pappus-Descartes, que ce sont des courbes géométriques. Le procédé de Pappus-Descartes continue donc bien de jouer un rôle essentiel dans *La Géométrie* : il demeure de fait le seul moyen par lequel Descartes établit qu'une courbe est géométrique. Ce rôle ressort notamment de la présentation de la résolution du problème de Pappus qui est entrecoupée de considérations qui soit permettent sa poursuite soit tirent parti de celle-ci ([Herreman 2012, 106–107]). Le problème de Pappus n'a donc pas qu'un rôle d'exemple, il a aussi dans *La Géométrie* un rôle essentiel dans l'inauguration des courbes algébriques puisqu'il sert à soutenir que les courbes algébriques sont des courbes géométriques. À cet égard, son rôle dans *La Géométrie* est assez semblable à celui qu'il jouait en 1632. Il sert en outre à soutenir que les courbes de Pappus couvrent toutes les équations, même si l'affirmation est en l'occurrence fausse.

Le caractère géométrique des courbes algébriques ne peut donc avoir été établi qu'aussi loin que Descartes a déterminé et construit les solutions du problème de Pappus. Cette preuve n'est donc donnée que jusqu'au degré 3, et encore pour une seule courbe : sa parabole.

La construction des équations est en revanche menée jusqu'aux équations de degré 5 et 6. Mais comme le caractère géométrique des courbes qui servent à la construction point par point doit avoir été préalablement établi, le degré des équations que l'on peut construire point par point est nécessairement supérieur à celui des équations des courbes algébriques dont le caractère géométrique a pu être établi. Il est donc inévitable que la construction point par point des courbes à partir des équations soit menée plus loin que la preuve que les courbes ainsi construites sont géométriques. Ce décalage ne saurait être invoqué en faveur de l'hypothèse qu'il y aurait *plus* de difficultés à fonder l'identification des courbes géométriques et algébriques sur le procédé de Pappus-Descartes qu'à le faire en recourant à leur construction point par point à partir de leurs équations. La construction point par point des courbes à partir de leur équation ne se substitue pas complètement au procédé de Pappus-Descartes qui continue de jouer un rôle dans l'identification des courbes algébriques et géométriques.

Il peut sembler que Descartes ne mène finalement pas très loin l'inauguration de la représentation algébrique des courbes et des problèmes géométriques. Il faut néanmoins entendre l'argument par lequel il conclut *La Géométrie* selon lequel « *il ne faut que suivre la même voie pour construire tous [les problèmes] qui sont plus composés à l'infini* » (p. 413). Le même argument vaut pour l'inauguration des courbes algébriques et notamment pour la possibilité d'en poursuivre la construction au moyen du procédé de Pappus-Descartes au delà de la parabole du deuxième genre. Il fait en effet valoir qu'« *en matière de progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres* » (p. 413). Il a bien montré pour les deux ou trois premiers degrés des équations que les courbes algébriques étaient constructibles par le procédé de Pappus-Descartes. Suivant cette position, qu'il convient d'un point de vue inaugural de prendre au sérieux, non seulement Descartes n'apparaît pas avoir été confronté à des difficultés mathématiques, mais l'eut-il été, il ne semble pas qu'elles eussent été de nature à le forcer à des changements et *a fortiori* à des renoncements. Il convient de reconnaître que les problèmes posés par l'inauguration ne sont pas tous justiciables d'un traitement mathématique satisfaisant et le rôle de la représentation algébrique des courbes dans la possibilité d'envisager des démonstrations relatives à des courbes arbitraires[9].

5. *Construction point par point : contradiction et conformité*

Le recours par Descartes à des constructions point par point est une des principales différences entre la présentation de la résolution du problème de Pappus donnée en 1632 et celle donnée dans *La Géométrie*. Il est aussi,

9 On en trouvera de nombreux exemples dans [Lützen 2014].

suivant l'analyse proposée par Henk Bos, un des principaux défauts de *La Géométrie* et un des renoncements le plus marqué de Descartes à ses principes ([Bos 2001, 402]).

A l'évidence, la construction point par point même effective[10] d'une courbe ne satisfait pas la caractérisation des courbes géométriques donnée par Descartes au début du Livre II. Cela est manifeste et incontestable. Et comme c'est le procédé qui sert à construire les courbes algébriques à partir de leurs équations, c'est bien l'introduction de ces courbes qui est directement affectée et qui apparaît ainsi défectueuse[11].

Le procédé de construction point par point n'est en effet pas *lui-même* un procédé qui satisfait aux critères cartésiens, mais il se trouve que, selon Descartes, s'il est utilisé pour la construction de courbes auxquelles correspond des équations algébriques, les courbes construites sont des courbes géométriques. Ce procédé de construction ne satisfait donc pas en tant que tel les critères donnés par Descartes pour la construction des courbes géométriques, mais il *devient* légitime par conformité : une courbe n'est pas géométrique parce qu'elle est construite point par point, c'est le procédé de construction qui devient recevable parce que les courbes construites le sont.

Ainsi, toutes les coniques peuvent être construites effectivement point par point mais la raison de leur caractère géométrique est ailleurs. C'est la résolution du problème de Pappus qui, comme on l'a vu, permet à Descartes d'établir que *toutes* les courbes construites à partir d'équations de degré 2 sont toutes des courbes de Pappus pour 3 ou 4 lignes droites, en l'occurrence des coniques, et que ces courbes algébriques sont donc pour cette raison des courbes géométriques. La résolution du problème de Pappus sert à établir que les courbes algébriques construites point par point à

---

10 J'appelle « effectives » les constructions point par point dont les points font eux-mêmes l'objet d'une construction géométrique. Les constructions point par point étant ici toujours effectives, cet adjectif sera souvent omis. L'abandon du caractère effectif des constructions point par point, étape importante du développement de ce procédé de construction et de la réception des courbes algébriques, ne sera pas étudié ici.

11 « *We have seen that in Descartes' programme for geometry as expounded in the Géométrie there was a contradiction in the criteria for the geometrical acceptability of curves. On the one hand Descartes claimed that he accepted curves as geometrical only if they could be traced by certain continuous motions. This requirement was to ensure that intersections with other curves could be found and it was induced by the use of the curve as means of construction in geometry. On the other hand Descartes stated that, under certain conditions, curves represented by pointwise constructions were truly geometrical. Pointwise connstructions were related to curve equations in the sense that an equation for a curve directly implied its pointwise construction. Pointwise construction was used primarily for curves that occured as solutions to locus problems.* » [Bos 1981, 326]

partir d'équations de degré 2 sont des courbes géométriques *parce que* ce sont des coniques. De même, la parabole du deuxième genre est géométrique en raison de sa construction par le procédé de Pappus-Descartes.

Il faut ici prendre en considération le cheminement suivi dans *La Géométrie.* Descartes commence par faire référence à sa « parabole » dans le Livre I en tant que la plus simple des courbes d'un degré plus composées que les coniques à la fois solution du problème de Pappus et servant à en construire les solutions. La caractérisation des courbes géométriques est ensuite introduite au début du Livre II. La courbe est alors donnée comme un exemple de courbe répondant à la caractérisation adoptée. Descartes n'a plus ensuite qu'à déterminer l'équation du problème pour 5 droites, 4 parallèles équidistantes et une perpendiculaire, ainsi que celle de sa « parabole » et à vérifier qu'elles coïncident [Descartes 1637, p. 337]. L'équation étant de degré 3, avec un paramètre ($y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$, où a est la distance commune entre les quatre parallèles équidistantes), il a ainsi montré que les courbes construites à partir de ces équations de degré 3 étaient des courbes géométriques. Il ajoute ensuite qu'il en serait de même si les quatre parallèles n'étaient pas équidistantes (ce qui conduit à introduire trois paramètres au lieu d'un seul), couvrant un plus grand nombre d'équations de degré 3. C'est à la suite immédiate de ces résultats qu'il trouve « *à propos de remarquer qu'il y a grande différence entre cette façon de trouver plusieurs points pour tracer une ligne courbe et celle dont on se sert pour la spirale et ses semblables* » [Descartes 1637, p. 339-340]. Et il conclut :

> Et pour ce que cette façon de trouver une ligne courbe, en trouvant indifféremment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles qui peuvent aussi être décrites par un mouvement régulier et continu, on ne la doit pas entièrement rejeter de la Géométrie [Descartes 1637, p. 340].

Ainsi, Descartes lui-même inscrit la recevabilité de la construction point par point des courbes dans le prolongement des développements consacrés à la résolution du problème de Pappus. La résolution de ce problème contribue à soutenir la légitimité de ces constructions en permettant d'établir qu'elles conduisent, en l'occurrence, c'est-à-dire quand les courbes ont une équation, à des courbes qui peuvent être construites par un mouvement régulier et continu, c'est-à-dire à des courbes géométriques.

6. *Un texte performatif*

La contradiction apparente entre le recours à la construction point par point et la caractérisation donnée des courbes géométriques met en évidence une caractéristique que *La Géométrie* partage avec d'autres textes inauguraux : la performativité. Un texte inaugural transforme en effet la situation dont il part. Ces changements ne sont évidemment pas immédiats et d'autres textes vont y contribuer. Mais le texte inaugural peut lui-même tirer parti de *certains* des changements qu'il opère. C'est en l'occurrence le cas des constructions point par point dans *La Géométrie*. Descartes part en effet d'une certaine conception des constructions géométriques explicitée au début du Livre II. C'est à elle que son argumentation se rapporte. C'est notamment elle qui lui permet de soutenir la conformité des courbes algébriques construites point par point avec les courbes géométriques. Mais ses arguments portent de telle sorte qu'il peut lui-même considérer *ensuite* que les constructions point par point sont devenues légitimes. Le statut des constructions point par point change *au cours du texte* et Descartes est le premier à en bénéficier.

7. *L'objection fondée sur la construction des points d'intersection*

Pour étayer l'incohérence du recours aux constructions point par point Henk Bos a fait valoir que ce procédé ne permettait pas de construire effectivement les points d'intersection de deux courbes ([Bos 1981, 303, 331] ; [2001, 343])[12]. Une courbe décrite comme intersection de courbes construites effectivement point par point pourrait donc ne pas être effectivement constructible point par point. La construction effective point par point des courbes ne leur confère pas les propriétés qui leur permettraient de servir elle-mêmes à construire d'autre courbes, ce qui est pourtant bien l'une de leurs principales fonctions[13]. Il serait donc dès lors incohérent de recourir à ces constructions.

On peut à présent reconsidérer cette objection. Si l'argument est incontestable, l'objection ne l'est pas parce que Descartes n'applique ce procédé qu'à des courbes ayant des équations dont il a soutenu qu'elles étaient géométriques. Elles ne sont pas géométrique en raison de leur construction effective point par point, elles le sont *par ailleurs*. Les points d'intersection des deux courbes n'ont donc pas à être déterminés par les constructions point par point effectives de chacune des courbes, mais par le pro-

---

12 « *If a curve is used as means of construction, it must be possible to find its intersection with other curves. A pointwise construction is not sufficient for that purpose.* » ([1981, 303, 331], [2001, 343]).

13 Descartes met lui-même en avant l'intersection des courbes dans sa caractérisation des courbes géométriques : « *Et il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je prétends ici d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres* » [Descartes 1637, p. 389].

cédé de construction proprement géométrique, comme celui de Pappus-Descartes, qui doit aussi exister, même si ce n'est pas celui qui a servi à les construire. Les intersections des courbes construites point par point sont donc bien constructibles, mais ce n'est pas parce qu'elles sont constructibles point par point.

8. *Constructions géométriques et constructions point par point : un changement par conformité*

Les constructions point par point ne sont en effet pas légitimes *en tant que constructions*, c'est-à-dire qu'elles ne permettent pas d'établir, contrairement au procédé de Pappus-Descartes, que les courbes ainsi construites seraient géométriques. Mais il n'y a ni contradiction ni renoncement à y recourir dans la mesure où Descartes soutient que les courbes construites par ce moyen se trouvent être, *par ailleurs*, géométriques quand elles ont une équation algébrique.

Cette relation aux courbes géométriques rend inversement compte de la possibilité d'introduire en mathématique un procédé qui n'était *a priori* pas recevable, qui le devient *parce qu'il ne change rien*, mais qui change néanmoins la conception des constructions recevables, opérant ainsi un changement par conformité.

La construction point par point rend uniforme la construction de toutes les courbes. Elle réduit à un seul les différents procédés de construction qui fondaient la distinction des classes de la classification de Pappus. Les différences entre les courbes ne sont ainsi plus rapportées à leur mode de construction. Mais la conformité oblige et permet de restituer ces différences en même temps qu'elle les abolit. Un déplacement s'opère des procédés de construction vers les équations. Ce déplacement se fait d'abord sans changement, par conformité. Les paires de degrés des équations peuvent ainsi reproduire la base de la classification de Pappus alors même qu'il n'y a plus de différence dans les procédés de constructions. L'opposition entre courbes géométriques et mécaniques est aussi reproduite, et de cette manière d'abord préservée. L'association de la construction point par point et des équations algébriques permet leur inauguration conjointe. Mais si le caractère algébrique des équations a été nécessaire pour assurer la conformité, il ne peut ensuite manquer d'apparaître comme une limite artificielle aussi bien pour les constructions point par point que pour les équations : il n'est essentiel ni aux unes ni aux autres. La conformité a ainsi permis l'inauguration d'un procédé de construction et d'un rapport aux équations qui, une fois inaugurés, s'affranchissent inévitablement des conditions nécessaires à leur inauguration mais qui ne manquent pas d'apparaître ensuite comme des limitations artificielles. Ainsi, la conformité permet d'inaugurer des représentations à partir desquelles diverses généralisations vont pouvoir se déployer. Les conditions pour certaines généralisations qui fondent une partie du développement des mathématiques peuvent ainsi s'introduire sous couvert de conformité.

L'inauguration de la construction point par point a une autre conséquence peut-être plus remarquable encore : avec elle, la constructivité des courbes n'est plus assurée par leur construction. Le fait que la constructivité soit assurée *par ailleurs*, quand les équations sont algébriques, permet de recourir à la construction point par point qui ne l'assure pas elle même. La constructivité est ainsi à la fois assurée mais aussi disjointe de la construction utilisée. La notion de construction reçue en géométrie, et plus généralement en mathématiques, va ainsi être modifiée.

Ce n'était certainement ni le propos ni l'intention de Descartes mais c'est bien néanmoins une conséquence paradoxale de son introduction de la construction point par point. Un changement majeur et paradoxal peut donc se produire par conformité, la conformité apparaissant ici, inversement, comme une condition essentielle de la possibilité d'un tel changement. Ainsi, de fait, les courbes algébriques peuvent être aujourd'hui à la base de la notion d'*ensemble constructible* en géométrie algébrique réelle sans que n'y apparaisse aucune autre construction que leur construction point par point, devenue un modèle pour la constructivité. La notion de construction a bien été changée.

9. *Le changement par conformité des fonctions de figure et d'opération*

Une courbe peut avoir deux fonctions différentes. Elle peut n'être qu'une figure, comme un cercle est la figure formée des points équidistants à un point donné. Mais un cercle peut aussi servir à construire la moyenne proportionnelle de deux segments. Il n'est alors plus seulement une figure, il est une figure qui opère sur des figures. C'est cette fonction d'opération des courbes, qui ne nous est plus guère familière aujourd'hui (en géométrie analytique tout du moins), qui est prise en compte dans la classification de Pappus. De manière typique, dans les *Éléments* d'Euclide, le triangle rectangle du « théorème de Pythagore » (Euclide, proposition 47), n'a qu'une fonction de figure dans l'énoncé et la démonstration du théorème mais il intervient ensuite, dans la quadrature des figures rectilignes, comme opération qui permet de construire le carré équivalent à la différence de deux carrés donnés ([Herreman 2012, 119–124]). Il ne s'agit pas de deux types de courbes ou de figures, certaines servant de figures, d'autres d'opérations, mais bien de deux fonctions qu'une même courbe peut remplir tour à tour, l'une présupposant l'autre (une courbe pour servir d'opération est nécessairement aussi une figure). Remarquons aussi que la *figure* est bien nécessaire à l'opération : la construction d'une moyenne proportionnelle ne peut se faire à partir de la définition d'un cercle, elle a besoin de sa figure, c'est-à-dire d'un type d'expression particulier (considérer un cercle comme un ensemble ne lui permet pas non plus de remplir cette fonction)[14].

Ces deux fonctions sont essentielles à la résolution du problème de Pappus de 1632. En effet, suivant la reconstruction proposée, chaque solution trouvée sert à construire une nouvelle solution. Cette construction itérative des solutions fait ainsi intervenir la possibilité pour chaque courbe d'être d'abord une figure et d'être ensuite une opération servant à la construction d'une nouvelle solution. Le recours en alternance à ces deux fonctions fonde la possibilité de construire une *infinité* de solutions, elle-même nécessaire pour pouvoir envisager ensuite de les obtenir ainsi *toutes*[15]. Ces deux fonctions entrent donc de manière essentielle dans la possibilité de donner à la résolution du problème de Pappus la portée que lui donne Descartes. Elles rendent compte notamment de la possibilité de considérer que ses solutions, construites par le procédé de Pappus-Descartes, sont susceptibles de couvrir toutes les courbes géométriques. Ces deux fonctions participent de la possibilité d'identifier les courbes algébriques et les courbes géométriques.

Cette résolution itérative du problème de Pappus, découverte par la reconstruction, n'est pas reprise dans *La Géométrie*, mais le procédé de Pappus-Descartes s'y retrouve et avec lui la possibilité de construire par itération une infinité de courbes impliquant toujours la double fonction de figure et d'opération des courbes. Descartes peut ainsi établir l'existence de courbes géométriques indéfiniment plus composées que les coniques. Le recours tour à tour à l'une et l'autre des fonctions est préservé et demeure une condition de possibilité de l'extension infinie des courbes géométriques.

Mais les deux fonctions de figure et d'opération interviennent encore de deux autres façons plus fondamentales dans *La Géométrie*. Comme elles

---

14 C'est là un autre exemple du polysémiotisme des mathématiques ignoré par les approches qui assimilent les mathématiques à un symbolisme unique quel qu'il soit (logique, ensembliste, catégorique, etc.).

15 Sur l'analyse des conditions d'expression de la généralité, voir [Herreman 2013].

interviennent dans la résolution des problèmes de géométrie et que Descartes soutient dans *La Géométrie* la conformité de la résolution algébrique d'un problème à sa résolution géométrique, il est *nécessaire* que ces deux fonctions se retrouvent d'une manière ou d'une autre dans l'inauguration de la représentation algébrique des problèmes et des courbes. Comme la fonction d'opération implique celle de figure, il suffit de repérer cette seconde fonction.

La fonction d'opération intervient de manière essentielle dans l'interprétation géométrique que Descartes donne des opérations algébriques au début de *La Géométrie.* Il interprète en effet toutes les opérations algébriques par des constructions géométriques. Ainsi, la multiplication de deux grandeurs est le résultat de l'application de la configuration de Thalès à l'unité et aux deux segments représentant les deux grandeurs. De la même manière, la racine d'une grandeur est le résultat de l'application de la construction au moyen d'un cercle d'une moyenne proportionnelle à l'unité et au segment représentant la grandeur donnée. Et de même pour les autres opérations. L'interprétation de chaque opération algébrique implique ainsi la fonction d'opération d'une figure, en l'occurrence exclusivement sur des segments. De ce fait, l'interprétation d'une équation implique autant de fonctions d'opération de figures qu'elle comprend de symboles d'opération.

Cette fonction se retrouve aussi dans les constructions point par point des courbes à partir des équations. La fonction d'opération est en effet requise pour la construction *effective* des points d'une courbe à partir des points d'une droite. Cette fonction n'opère plus cette fois que sur des points.

Mais si la fonction d'opération est ainsi conservée, comme elle doit l'être, elle n'intervient cependant plus *que* dans l'interprétation géométrique des équations et la construction des solutions des équations[16]. Elle se trouve de ce fait exclusivement associée et ce faisant cantonnée à ces deux rôles. Ainsi, la représentation algébrique isole la fonction d'opération des courbes et la sépare de leur fonction de figure. Mais ces deux rôles auxquels la fonction d'opération des figures est cantonnée participent exclusivement de l'*inauguration.* En effet, celui qui résout de manière algébrique un problème de géométrie a besoin de mettre son problème

[16] Remarquons que ces deux rôles ne correspondent à aucune étape de la résolution géométrique d'un problème. Les étapes de la résolution géométrique d'un problème ne sont pas conservées dans la résolution algébrique. C'est en considérant des *fonctions* qu'il est en l'occurrence possible de mettre en évidence des phénomènes de conservation.

en équation, mais il n'a pas besoin d'exposer à chaque fois les principes de la représentation algébrique qu'il utilise : il en *dispose.*

Il *dispose* de la même manière des constructions des solutions des équations. Elles ne font plus partie du problème. Elles font partie des *moyens* à sa disposition pour le résoudre. Certes, ces constructions n'ont pas été données pour tous les degrés par Descartes, mais la recherche de constructions effectives des solutions des équations d'un degré supérieur à 6 n'en est pas moins indépendante de tout problème de géométrie particulier et relève d'un autre problème.

Descartes soutenant que les courbes construites point par point à partir de leur équation peuvent aussi l'être par une construction effective, la construction point par point se trouve ainsi légitimée. Mais cette légitimation rend en retour superflue leur construction effective. Adopter la construction point par point fait ainsi disparaître les constructions effectives, et avec elles la fonction d'opération des figures qu'elles impliquent. La construction effective des courbes est dans cette mesure éliminée à l'occasion de l'inauguration de la représentation algébrique des problèmes.

Alors que la résolution géométrique d'un problème de géométrie tirait auparavant parti et jouait de la possibilité de combiner les deux fonctions de figure et d'opération, la fonction d'opération est nécessaire à l'inauguration de cette représentation mais se trouve cantonnée dans deux rôles qui ne sont requis qu'au moment de l'inauguration. La fonction d'opération des courbes est ainsi en quelque sorte absorbée par la représentation algébrique des problèmes et des courbes. Il est ainsi possible de rendre compte de l'importance de la fonction d'opération dans *La Géométrie* en même tant que du rôle de celle-ci dans son élimination. L'élimination de la fonction d'opération est un autre exemple de changement fondamental opéré par conformité.

Ce changement, aussi important soit-il, ne procède lui non plus d'aucune *intention.* En effet, si Descartes soutient intentionnellement la conformité des courbes algébriques avec les courbes géométriques, s'il soutient aussi intentionnellement la conformité de la résolution algébrique des problèmes avec leur résolution géométrique qui changent aussi par conformité, la séparation de la fonction d'opération induite par les représentations algébriques qu'il inaugure *n*'est *pas* intentionnelle. Au contraire, on a vu que la fonction d'opération des courbes a pu jouer, notamment par son implication dans le procédé de Pappus-Descartes, un rôle essentiel dans la genèse de *La Géométrie,* et donc dans sa propre élimination. Il importe de reconnaître que de tels changements peuvent ne pas être intentionnels, et cela même chez un philosophe dont l'œuvre mathématique participe d'un programme et d'une réflexion philosophiques plus vastes.

Il va de soi que l'élimination de la fonction d'opération des courbes et des figures par l'inauguration de la représentation algébrique des problèmes et des courbes n'a été ni immédiate ni totale.

Elle n'est pas immédiate puisque cette représentation algébrique ne va pas s'imposer immédiatement à tous. Son adoption ne va pas éliminer cette fonction chez les mathématiciens habitués à ce rapport aux courbes.

Elle n'est pas non plus, même à plus long terme, totale. On la rencontre encore aujourd'hui (par exemple dans la définition d'un groupe à partir d'une courbe elliptique). La fonction d'opération d'une courbe reste notamment à l'œuvre dans la construction de la tangente en un de ses points. C'est bien elle qui est à l'œuvre dans la construction imaginée par Archimède d'un segment équivalent à la circonférence du cercle au moyen d'une spirale. Cette manifestation particulière de cette fonction des courbes va même connaître un développement important au 17ème siècle avec notamment l'étude des enveloppes de familles de courbes[17]. Mais ces manifestations ne font que mieux ressortir l'effet de l'adoption de la représentation algébrique : la fonction d'opération des courbes qui était essentielle à la résolution des problèmes, sur laquelle Pappus et Descartes pouvaient fonder leurs classifications, n'intervient plus du tout de la même manière une fois la représentation algébrique adoptée. L'analyse qui a été proposée de *La Géométrie* permet de rendre compte des manifestations qui ont été éliminées et de la manière dont elles l'ont été[18].

---

17 Sans développer ce point ici, cette fonction d'opération des courbes, avec aussi celle qui se manifeste dans la construction d'une aire, va être ressaisie par les opérations du calcul différentiel et intégral. Ces manifestations de la fonction d'opération des courbes, qui n'étaient, par exemple, pas distinguées par Pappus, vont ainsi être séparées par le développement de la représentation algébrique et du calcul différentiel et intégral.

18 L'élimination de cette fonction est bien une des différences entre ce que l'on appelle aujourd'hui « la géométrie euclidienne », où elle ne joue aucun rôle, et la géométrie d'Euclide, où elle est essentielle à la compréhension de nombre de théorèmes et de démonstrations.
La fonction d'opération des figures dans les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert est particulièrement intéressante à considérer ici. La fonction d'opération des figures est, conformément à ce qui précède, absente des démonstrations des théorèmes de géométrie, ces démonstrations se devant d'être purement logiques, la fonction d'opération des courbes doit en être absente. En revanche, Hilbert réactive la fonction d'opération

10. *Conformité mathématique et transparence historiographique*

L'histoire de l'introduction et de la réception de la représentation algébrique des problèmes et des courbes géométriques ne commence ni ne s'arrête avec *La Géométrie*. Le texte de Descartes met néanmoins bien en évidence le rôle de la conformité dans l'introduction de ces représentations et, en particulier, dans l'introduction des courbes algébriques. L'adoption progressive de la représentation algébrique des courbes, avec l'adoption conjointe du procédé de construction point par point a conduit à modifier la conception des courbes et des procédés de construction reçus. Elle a aussi induit un changement dans l'usage des figures géométriques : la fonction d'opération qui était essentielle aux figures de la géométrie grecque, au point de pouvoir fonder la classification des problèmes proposée par Pappus, est encore à l'œuvre dans *La Géométrie*, mais son sort est alors lié à la réception de la représentation algébrique des problèmes et de la construction point par point des courbes. L'usage de ces représentations a ainsi fait progressivement perdre la familiarité à l'ancien rapport aux figures, aux problèmes, aux courbes et aux constructions. Tout cela est devenu de l'histoire pour le mathématicien. L'analyse de *La Géométrie*, quel qu'ait été son rôle historique, aide à identifier ces changements et montre qu'ils ont pu se faire par conformité.

Les textes dans lesquels ces anciens rapports sont à l'œuvre deviennent alors difficiles à comprendre. Il devient difficile de comprendre l'intérêt de théorèmes quant celui-ci tient à la fonction d'opération de ses figures qui ne nous est plus familière. Mais les représentations que nous utilisons et qui nous ont rendu la compréhension de ces textes difficile vont alors elles-mêmes résoudre une partie des problèmes qu'elles posent : la même conformité qui a servi à les introduire garantit inversement la possibilité de traduire ces textes dans nos représentations. En l'occurrence, elle garantit la possibilité d'une relecture algébrique des textes anciens. Ce

---

des figures qui fondait l'interprétation des expressions algébriques donnée par Descartes. Elle n'a évidemment plus de rôle inaugural. Elle sert cette fois à la construction des différents modèles « arithmétiques » (les systèmes complexes de nombres) que Hilbert associe aux différentes géométries : des constructions géométriques identiques (configuration de Thalès) ou semblables (configuration de Desargues) à celles utilisées par Descartes lui servent à définir *diverses* opérations d'addition et de multiplication dont les propriétés algébriques reflètent celles de la géométrie à laquelle chacune est associée. Ainsi, l'un des ressorts essentiels de l'étude algébrique des modèles géométriques mise en place par Hilbert reprend, dans un tout autre cadre, un des deux rôles de la fonction d'opération des figures qui intervenait dans l'inauguration de la représentation algébrique des problèmes. Il n'est évidemment pas possible de présenter ici l'analyse des conditions de possibilité de cette reprise.

sont bien des représentations algébriques dérivées de celles inaugurées par Descartes qui sont alors utilisées pour ces traductions. Ainsi, la possibilité de cette relecture n'est pas une caractéristique mystérieuse de l'algèbre et plus généralement des représentations utilisées en mathématiques : elle trouve son origine dans les conditions de l'inauguration de ces représentations. C'est une possibilité construite historiquement.

La conformité a ainsi deux fonctions distinctes mais qui sont liées. Elle a une fonction lors de l'inauguration de nouvelles représentations. Elle opère alors la transition entre ce qui est reçu et ce qui est inauguré. Elle intervient au moment du changement et le rend possible. Elle en est une condition. C'est une fonction historique ponctuelle et isolée. Mais elle a aussi une fonction ultérieure permanente et répandue, celle d'offrir la possibilité d'appliquer les représentations algébriques des problèmes et des courbes aux textes dont elles étaient absentes. C'est une fonction historiographique, postérieure au changement et qui permet d'en ressaisir les effets. La conformité intervient alors à nouveau et en quelque sorte en sens inverse.

Ainsi, certains changements se font par conformité, ce qui permet ensuite d'en ressaisir certains effets. La conformité procède au moment de l'inauguration d'un rapport au passé et participe d'un autre quand elle permet l'application de ces représentations aux textes dont elles sont absentes. Elle établit de ce fait une relation spécifique entre la manière dont les mathématiques peuvent changer et la manière dont sont appréhendés ces changements.

Sans développer ici ce point, remarquons qu'il n'y aurait pas de changements si la conformité était totale : des représentations mêmes conformes n'en sont pas moins des représentations différentes : il n'y aurait autrement pas d'intérêt à les introduire. Ces traductions vont alors aussi reproduire, et d'une certaine manière grossir, les effets dus au changement de représentations ([Herreman 2001]). Elles peuvent donc aussi de ce fait offrir un moyen privilégié pour les mettre en évidence. Pour les mêmes raisons, le rapport au passé dont procède la conformité au moment de l'inauguration n'est pas identique au rapport historiographique qu'elle détermine. Il y a là aussi une autre sorte de changement par conformité.

Henk Bos a lui-même déjà fait valoir que le thème de la construction géométrique des solutions des équations n'avait pas été étudié avant lui en raison de la propension des historiens à lire les textes du XVII^e^ et du début du XVIII^e^ siècles au travers du « symbolisme analytique moderne » ([Bos 1981, 296]) : ces constructions n'étant plus nécessaires à la représentation d'une courbe à partir d'une équation, elles ne sont en effet plus un enjeu pour l'historien. L'histoire qu'il propose de ces constructions procède donc d'un recul critique vis-à-vis de notre familiarité à la représentation algébrique des courbes et du type des constructions qu'elles impliquent. Inversement, le fait qu'elle n'ait pas été considérée avant illustre l'effet des représentations utilisées par les historiens sur leur lecture des textes et les histoires qu'ils proposent. Mais si le fait qu'on ne construise plus effectivement en mathématique les solutions des équations explique que les historiens ont ignoré ce thème, il faut encore expliquer le fait que les mathématiciens aient eux-mêmes été amenés à l'ignorer. Les historiens n'ignorent ces constructions que parce qu'ils reprennent les moyens d'expression des mathématiciens qui le leur permettent ; ils les ignorent *à leur suite*. Le changement du rapport des mathématiciens aux constructions et aux courbes recevables suppose une inauguration, qui procède en l'occurrence par conformité. Et suivant cette perspective, l'existence après *La Géométrie* de travaux consacrés à la construction des racines des équations est bien, dans une certaine mesure, la poursuite de l'inauguration initiée par Descartes. Ces travaux apparaissent alors surtout comme une *continuation de cette inauguration*. Ils prolongent le moment de l'inauguration. D'autres, à commencer par Descartes, ont pu la considérer achevée et ont *disposé* de la construction point par point des courbes, algébriques ou non[19].

Le changement par conformité permet donc de rendre compte de la relégation des procédés de construction des courbes en même temps que de leur occultation par leur construction point par point. Le texte inaugural est ce moment d'occultation d'une représentation par une autre. Son étude permet de saisir les conditions et le moment de cette occultation. Ainsi, les constructions géométriques des solutions des équations doivent non seulement être étudiées alors que la représentation algébrique conduit à les ignorer, mais leur occultation doit être intégrée à

19 On peut citer, par exemple, Leibniz qui, généralisant en 1692 les droites ordonnées de Desargues à « toute sorte de courbes » écrit : « *Toutefois par lignes ordonnées, je n'entends pas uniquement des droites, mais également toute sorte de courbes, à la seule condition qu'on connaisse la loi permettant, pour tout point donné d'une courbe déterminée (prise comme* ordinatrice*), de tracer la courbe correspondante, cette dernière sera l'une des courbes qu'on doit tracer par ordre, courbes dont sont données en ordre les positions.* » Leibniz, « De linea ex lineis », *Acta Eruditorum*, 1692, trad. Parmentier [1989, p. 216–217]. La suite du texte rend clair à la fois ce qu'il faut entendre par « loi » et l'adoption par Leibniz de la construction des courbes à partir de leur équation : « *En effet, dès que nous avons formé une équation particulière (correspondant à l'une des courbes ordonnées), mais néanmoins générale (puisqu'elle montre quelle est la loi commune à toutes), cherchons son équation différentielle, d'une manière qu'il me reste à préciser, ces deux équations permettent d'obtenir la courbe voulue.* » *Ibid.*, p. 218–219.

leur étude. L'occultation n'est pas qu'un phénomène historiographique, elle est aussi et d'abord un phénomène historique et mathématique que l'histoire des mathématiques peut mettre en évidence et dont elle peut rendre compte si elle ne l'occulte pas elle-même. *La Géométrie* participe du développement des constructions géométriques des solutions des équations mais aussi, et surtout, de leur disparition. Le changement par conformité opéré par le texte inaugural rend compte aussi bien et conjointement du développement du thème de la construction des solutions des équations que de sa disparition.

Une caractéristique remarquable des mathématiques est la possibilité d'y exceller en en ignorant à peu près complètement l'histoire. L'historien ne doit pas trop s'en émouvoir et s'attacher trop exclusivement à dénoncer ce fait malgré tout incontestable. Il peut au contraire l'intégrer à l'histoire des mathématiques en montrant comment cette possibilité d'ignorer l'histoire s'élabore au cours de celle-ci. Il s'agit pour l'historien de dégager les conditions de possibilité de cette ignorance de l'histoire. Ainsi, en soutenant la conformité de ses représentations des courbes et des problèmes, Descartes construit un rapport entre les représentations reçues et celles qu'il inaugure qui permet à ceux qui en disposeront ensuite d'exceller en mathématique et d'en ignorer progressivement l'histoire. La conformité permet de rendre compte conjointement de la possibilité pour les mathématiques de changer et de la possibilité pour les mathématiciens d'ignorer ces changements.

CONCLUSION

La reconstruction proposée par Henk Bos a établi que la résolution du problème de Pappus a sans doute été l'occasion pour Descartes de découvrir le procédé de construction de Pappus-Descartes et de considérer qu'il pouvait par son moyen construire toutes les courbes recevables en géométrie. Cette reconstruction contribue de manière essentielle à notre connaissance de la genèse d'un texte majeur de l'histoire des mathématiques. Son intérêt va au delà. Elle permet aussi de rendre compte de certains aspects manifestement inexpliqués de *La Géométrie* et notamment du rôle singulier qu'y joue la parabole de Descartes. Mais si les nombreuses occurrences de cette courbe trouvent ainsi une explication, il faut alors encore expliquer pourquoi ce qui n'était pas et ne pouvait pas être une coïncidence se présente comme telle dans *La Géométrie.* Or, cette question engage notre compréhension de cette œuvre, indépendamment de tout intérêt historique pour sa genèse, et en particulier l'analyse de l'introduction des courbes algébriques dans *La Géométrie,* et au delà en mathématiques.

Henk Bos a répondu à la question qu'il avait ainsi lui-même dégagée en faisant valoir la possibilité mais aussi la difficulté de démontrer mathématiquement l'équivalence entre les courbes constructibles par le procédé de Pappus-Descartes et les courbes algébriques. Il a vu dans *La Géométrie* un renoncement face aux difficultés d'une telle démonstration auquel il a rapporté les diverses incohérences qu'il dénonce dans ce texte.

L'analyse inaugurale de ce texte conduit à une réponse différente. Suivant cette perspective, la résolution du problème de Pappus et le procédé de Pappus-Descartes[20] jouent bien un rôle dans l'inauguration opérée dans *La Géométrie* et les difficultés rencontrées, et les « incohérences » par lesquelles certaines se manifestent, sont pour une part de nature sémiotique, et non mathématique. Autrement dit, il s'agit de problèmes découlant des représentations en présence, inhérents à l'inauguration des courbes algébriques, et semblables à ceux rencontrés dans d'autres inaugurations procédant aussi par conformité. L'introduction de la construction point par point des courbes procèderait en particulier par conformité. Et si elle contredit bien la conception traditionnelle reçue et reprise par Descartes, la notion de *changement par conformité* permet de rendre compte de l'adoption de ce procédé de construction en même temps que de la modification qu'il induit sur la notion de construction en vigueur en mathématiques.

On a pu aussi observer de quelle manière la représentation algébrique des problèmes et des courbes inaugurée par Descartes a pu absorber la fonction d'opération des courbes et ce faisant modifier notre rapport aux figures et aux courbes géométriques. L'analyse inaugurale de *La Géométrie* permet de rapporter certains changements affectant notre rapport aux figures aux relations établies au moment de l'inauguration entre la représentation algébrique inaugurée et celles dont elles tiennent lieu. Si chacun peut constater que cette fonction n'intervient plus que de manière circonscrite dans notre rapport aux figures géométriques, il est ainsi possible d'en proposer une explication. L'élimination de cette fonction des figures est un exemple, *a priori* difficile à anticiper, des conséquences que peut avoir l'adoption de la représentation algébrique des problèmes et des courbes. Comme le rapport aux figures qui en résulte, consécutif et partant adapté à leur traitement algébrique, se manifeste sans qu'aucune notation algé-

---

20 Le rôle du procédé de Pappus-Descartes dans *La Géométrie* n'a, de fait, été vu que grâce à la reconstruction proposée par Henk Bos. Celui du problème de Pappus a été établi indépendamment.

brique n'ait plus besoin d'intervenir explicitement, cela montre bien qu'il ne suffit pas de suspendre l'usage de la représentation algébrique pour en connaître et en contrôler les effets. Inversement, les relations à la fois instaurées et mises en évidence lors de l'inauguration entre la représentation algébrique des problèmes et des courbes et leur usage établi permet de rendre compte de la possibilité d'une relecture algébrique des textes anciens et de déterminer certaines des distorsions induites par celle-ci.

Remerciements

Je remercie Sophie Roux pour sa relecture de cette note.

RÉFÉRENCES

Bos (Hendrik Jan Maarten)

[1981] On the representation of curves in Descartes' géométrie, *Archive for History of Exact Sciences*, 24 (1981), p. 295–338.

[1984] Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory ; the 'construction of Equations', 1637–1750, *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), p. 331–380.

[1992] Descartes, Pappus' Problem and the Cartesian Parabola : a conjecture, 1992.

[2001] *Redefining geometrical exactness*, Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences, New York : Springer, 2001.

Descartes (René)

[1637] *La Géométrie*, 1637 ; cité d'après le vol. VI de [Descartes 1897–1913].

[1897–1913] *Œuvres* publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Paris : Léopold Cerf, 1897–1913 ; réimpression Paris : Vrin, 1996.

Goldstein (Catherine)

[1995] *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

Harman (P.M.) & Shapiro (A.E.)

[1992] *The Investigation of Difficult Things : Essays on Newton and the History of Exact Sciences*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1992.

Herreman (Alain)

[1997] Le sens d'un texte mathématique : à propos du livre « Un theorème de Fermat et ses lecteurs » de Catherine Goldstein, *Revue d'Histoire des Sciences*, 53 (1997), p. 295–301.

[2001] La mise en texte mathématique : une analyse de l'« Algorisme de Frankenthal », *Methodos*, 1 (2001), p. 61–100.

[2012] La fonction inaugurale de *La Géométrie de Descartes*, *Revue d'histoire des mathématiques*, 18 (2012), p. 1–89.

[2013] L'inauguration des séries trigonométriques dans la *Théorie analytique de la chaleur de Fourier* et dans la controverse des cordes vibrantes, *Revue d'histoire des mathématiques*, 19 (2013), p. 151–243.

HILBERT (David)
[1899] *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, 1899.

KEMPE (Alfred Bray)
[1876] On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7 (1876), p. 213–216.

LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm)
[1692] De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu, *Acta Eruditorum*, 1692.

LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) & PARMENTIER (Marc)
[1989] *Naissance du calcul différentiel*, Paris : Vrin Mathesis, 1989.

LÜTZEN (Jesper)
[2014] 17th century arguments for the impossibility of the indefinite and the definite circle quadrature, *Revue d'histoire des mathématiques*, 20 (2014), p. 211–251.

RASHED (Roshdi) & VAHABZADEH (Bijan)
[1999] *Al-Khayyam mathématicien*, Paris : Blanchard, 1999.