Revue d'Histoire des Mathématiques

La réception par quelques mathématiciens européens du XVI^e siècle des travaux des algébristes italiens sur les équations du troisième degré : réticence de la plupart et avancées significatives de Stevin

Sabine Rommevaux-Tani

Tome 22 Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : rhmsmf@ihp.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 89 €; prix public hors Europe : 97 €; prix au numéro : 43 €. Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde

 Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
22 (2016), p. 1–52

LA RÉCEPTION PAR QUELQUES MATHÉMATICIENS EUROPÉENS DU XVI[e] SIÈCLE DES TRAVAUX DES ALGÉBRISTES ITALIENS SUR LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ : RÉTICENCE DE LA PLUPART ET AVANCÉES SIGNIFICATIVES DE STEVIN

Sabine Rommevaux-Tani

Résumé. — Les méthodes de résolution des équations du troisième degré et du quatrième degré par les algébristes italiens du xvi[e] siècle sont saluées par les historiens des mathématiques comme un apport majeur à la théorie des équations. Nous montrerons quels types de critiques ont suscités les travaux de Tartaglia et Cardano sur les équations du troisième degré auprès de leurs contemporains. Et nous verrons que Simon Stevin propose dans l'*Arithmetique* (1585) un exposé des algorithmes de résolution de ces équations qui, sur plusieurs aspects, présente des avancées significatives par rapport au traitement qu'en fait Cardano dans l'*Ars magna* (1545). En particulier, un des mérites de Stevin est de proposer des règles unifiées pour les équations sans terme du premier degré et pour les équations complètes. Stevin fait aussi un pas décisif vers une meilleure compréhension des méthodes de résolution en expliquant les origines des différents algorithmes.

INTRODUCTION

Dans les histoires générales des mathématiques, le chapitre consacré à la Renaissance fait la part belle aux travaux des algébristes italiens, notamment Nicollò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari et Rafael

Texte reçu le 22 avril 2015, révisé et accepté le 13 mars 2016.

S. Rommevaux-Tani

Mots clefs : Cardano, Tartaglia, Bombelli, Peletier, Borrel, Gosselin, Nuñez, Stevin, algèbre, équations, xvi[e] siècle.

Bombelli, célébrés pour leurs méthodes générales de résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Si l'importance des mathématiciens italiens pour le développement de l'algèbre ne fait aucun doute, il peut être intéressant de se demander comment leurs contemporains ont reçu leurs travaux sur la résolution des équations[1]. Cette question m'a été suggérée par une remarque critique de Christoph Clavius à leur encontre. Ce dernier, mathématicien d'origine allemande, professeur de mathématiques renommé au collège jésuite de Rome, publie en 1608 une *Algebra*, en latin, à visée largement pédagogique. Pour son algèbre, Clavius a deux sources principales : l'*Arithmetica integra* de Michael Stifel, qui paraît à Nuremberg en 1544, soit avant la publication des formules dites de Cardano pour la résolution des équations du troisième degré, et le *Libro de algebra en arithmetica y geometria* de Pedro Nuñez, publié à Anvers en 1567. Bien qu'enseignant en Italie, Clavius s'appuie donc sur l'ouvrage d'un mathématicien allemand, rédigé en latin, et sur celui d'un mathématicien portugais, rédigé en espagnol. Clavius évoque les algébristes italiens, mais pour déplorer que les travaux de Cardano et de Tartaglia soient incomplets et que ceux de Bombelli soient incompréhensibles :

> L'art n'a pas encore été inventé par lequel sont extraites avec certitude les racines de cette sorte [Clavius vient d'évoquer les équations du type : $ax^3 = bx + c$ et $ax^3 = bx^2 + c$, a, b et c étant positifs[2]], même si Cardano et Niccolò Tartaglia ont trouvé la valeur d'une racine dans quelques cas particuliers. Quant à Rafael Bombelli, il pense avoir trouvé comment on doit extraire les racines à partir de quelques équations de cette sorte et de quelques autres. [...] les explications de Bombelli sont très obscures [...][3].

Il existe sans doute plusieurs raisons au rejet par Clavius des développements des algébristes italiens sur la résolution des équations du troisième

---

[1] J'ai présenté une première version de cette étude lors du colloque international « Scuole matematiche e identita' nazionale nell'Italia moderna e contemporanea », qui s'est déroulé à Turin en octobre 2013. Je remercie les organisateurs pour m'avoir donné l'opportunité d'y exposer mes réflexions. Je remercie aussi Maryvonne Spiesser et Odile Kouteynikoff pour leurs remarques et suggestions à propos de cette étude.

[2] Pour rendre notre étude plus accessible aux non-spécialistes des mathématiques de la Renaissance, nous utiliserons les notations modernes pour l'écriture des équations dans nos commentaires. Par ailleurs, nous utiliserons le terme d'équation, quand, selon les auteurs, on a les termes « aequatio », « equation » ou « ygualacion ».

[3] [Clavius 1609, 49] : « [...] nondum est inuenta ars, qua huiusmodi radices certò eruantur, quamuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibusdam exemplis singularibus inuenerint æstimationem vnius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibusdam etiam æquationibus eiusmodi, & aliis nonnullis putat se inuenisse, quo pacto eruendæ sint radices. [...] & rationes Bombelli obscure valde sunt [...]. »

et du quatrième degré[4]. L'une d'elles est peut-être le regard critique que porte l'une de ses sources, Nuñez, sur ces travaux, comme nous allons le voir.

Les étapes de la publication des algorithmes de résolution des équations du troisième degré

Avant de commencer notre étude sur la réception des travaux des algébristes italiens sur les équations du troisième degré et plus, rappelons les étapes essentielles de la découverte et de la publication des algorithmes de résolution. Nous ne revenons pas sur les circonstances, bien connues, de la découverte de ces algorithmes par Scipion dell Ferro, Antonio Maria Fiore et Niccolò Tartaglia. On retrouve ce récit aux folios 41 et 42 du livre II du *General trattato di numeri et misure* de Tartaglia [1556]. Cardano en fait aussi état au chapitre I de l'*Artis magnæ sive de regulis algebraicis liber unus* (que l'on cite le plus souvent sous le titre *Ars magna*), publié quelques années plus tôt [Cardano 1545]. Il y revient aussi au chapitre XI consacré aux équations du type $x^3 + bx = c$ (avec b et c positifs) ; il explique alors que Tartaglia ne lui pas transmis la démonstration de l'algorithme, qu'il lui fut bien difficile de reconstituer[5].

De fait, Tartaglia n'a pas eu l'occasion de développer ses méthodes de résolution. Dans les *Quesiti et inventioni diverse* [1546/1554], ouvrage composite qui traite aussi bien de balistique, de fortification, d'art militaire, de mécanique et finalement d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre, les algorithmes de résolution pour les équations du troisième degré, sans terme du deuxième degré, sont dévoilés dans l'entretien que Tartaglia a eu avec Cardano le 25 mars 1539, et dont il fait état au chapitre XXXIV du livre IX [Tartaglia 1554, 120r-121r]. La méthode est révélée sous la forme d'un poème, bien connu : la racine n'est pas explicitée en fonction des coefficients de l'équation, seul le moyen d'y parvenir est présenté. Ainsi,

---

4 Malheureusement la correspondance de Clavius ne nous apprend rien sur ce point. Les algébristes italiens y sont très peu cités et la résolution des équations du troisième degré encore moins. Je signale qu'on peut maintenant trouver cette correspondance, éditée par Ugo Baldini et Pier Daniele Napolitani, sur le site ECHO à l'adresse suivante : `http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/content/mpiwglib/clavius`.

5 « CAPVT XI. *De cubo & rebus æqualibus Numero.* Scipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cùm in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressà demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiuimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiiciemus. » [Cardano 1663, vol. 4, 249]

pour les équations du premier type, $x^3 + bx = c$ (b et c étant positifs), il est demandé de considérer p et q tels que

$$\begin{cases} p - q = c \\ pq = \left(\frac{b}{3}\right)^3 \end{cases}$$

alors $x_0 = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}$ est solution de l'équation. Pour les équations du deuxième type $x^3 = bx + c$, on cherche p et q tels que $p + q = c$ et $pq = \left(\frac{b}{3}\right)^3$; la racine est alors $x_0 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$. Quant aux équations du troisième type, $x^3 + c = bx$, Tartaglia dit seulement qu'on peut les ramener à celles du deuxième type.

On trouve aussi quelques exemples de résolutions d'équations dans les échanges de Tartaglia avec Cardano et dans son entretien avec Richard Wentworth, toujours publiés au livre IX des *Quesiti et inventioni diverse* (Qu. XXXV, Qu. XXXVIII, Qu. XL et Qu. XLII). Par ailleurs, si le livre VI du *General trattato* (publié de manière posthume en 1560) est consacré à l'algèbre, les méthodes de Tartaglia sur la résolution des équations du troisième degré n'y figurent pas.

Contrairement à Tartaglia, Cardano consacre plusieurs traités à la résolution des équations. Ainsi, il fait paraître en 1539, à Milan, une *Practica arithmeticæ et mensurandi singularis*, arithmétique pratique dans laquelle on trouve ses premières réflexions sur les équations. Il y explique en particulier comment résoudre les équations du troisième degré ayant une racine rationnelle, par abaissement du degré. Mais son œuvre maîtresse sur le sujet est l'*Ars magna* (1545), qui est entièrement consacré aux équations. On y trouve des considérations sur le nombre de racines, sur les racines négatives ou irrationnelles, ou encore, selon notre terminologie, sur les racines complexes. Y sont présentées des règles générales permettant de ramener une équation d'un degré élevé à une équation d'un degré plus bas, que l'on sait résoudre, et des règles particulières pour certains types d'équations dont les coefficients remplissent certaines conditions, etc. Le chapitre V traite des équations du deuxième degré ; les chapitres XI à XXIII sont consacrés au treize types d'équations du troisième degré ; le chapitre XXXIX porte sur les équations du quatrième degré, pour lesquelles Cardano reprend la méthode de Ferrari[6]. Pour les équations du troisième degré, Cardano étudie, dans l'ordre, les trois types sans terme du deuxième degré, $x^3 + bx = c$, $x^3 = bx + c$ et $x^3 + c = bx$; les trois types

6 [Cardano 1663, vol. 4, 294] : « REGVLA II. Alia est regula nobilior præcedente, & est Ludouici de Ferrariis, qui eam me rogante inuenit [...] »

sans terme du premier degré, $x^3 = ax^2 + c$, $x^3 + ax^2 = c$ et $x^3 + c = ax^2$ et les sept types d'équations complètes $x^3 + ax^2 + bx = c$, $x^3 + bx = ax^2 + c$, $x^3 + ax^2 = bx + c$, $x^3 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + c = ax^2 + bx$, $x^3 + bx + c = ax^2$, $x^3 + ax^2 + c = bx$ (a, b et c étant tous positifs). Pour chaque type d'équations Cardano donne la démonstration géométrique de la validité de l'algorithme, avant d'énoncer la règle générale de résolution qu'il illustre par des exemples. Selon les cas, la règle fournit directement la racine en fonction des coefficients de l'équation ou explique comment se ramener à une équation d'un type étudié précédemment. Par exemple, pour les équations du type $x^3 + bx = c$ (b et c étant positifs), la règle de Cardano[7] donne la solution

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}.$$

Par contre, pour les équations du type $x^3 + c = bx$, Cardano explique que l'on doit considérer l'équation conjointe $y^3 = by + c$, dont on détermine la solution y_0 grâce à la règle précédente[8]. Alors l'équation initiale a deux solutions que l'on obtient en résolvant l'équation du deuxième degré $x^2 = y_0 x + b - {y_0}^2$.

Mécontent des limites de la méthode générale dans les cas où, pour certains types d'équations du troisième degré, l'algorithme conduirait

---

7 [Cardano 1663, vol. 4, 249-250] : « CAPVT XI. *De Cubo & rebus æqualibus Numero.* [...] REGVLA. Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seruabis vnique dimidium numeri quod iam in se duxeras, adiicies, ab altera dimidium idem minues, habebisque Binomium cum sua Apotomæ, inde detracta ℜ. cubica Apotomæ ex ℜ. cubica sui Binomij, residuum quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio. » (La troisième partie du nombre des choses ayant été portée au cube, ajoute-lui le carré de la moitié du nombre de l'équation et du tout prends la racine, précisément carrée, que tu conserveras, et tu lui ajouteras la moité du nombre que tu as déjà multipliée par elle-même, et tu lui retrancheras la même moité ; tu auras un binôme et son apotome. De là, ayant retranché la racine cubique de l'apotome de la racine cubique du binôme, ce qui reste est la valeur de la chose.)

8 [Cardano 1663, vol. 4, 251-252] : « CAPVT XIII. *De Cubo & numero æqualibus rebus.* [...] REGVLA. Regula igitur est : cùm fuerit cubus & numerus æqualis rebus, inuenies æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero, cuius dimidium in se ducto & triplicato, hoc abiice ex numero rerum, & ℜ. residui addita dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, vel detracta, ostendit æstimationem cubi & numeri æqualium rebus. » (CHAP. XIII. Au sujet du cube et un nombre égaux aux choses. [...] RÈGLE. Alors la règle est : lorsque le cube et un nombre sont égaux aux choses, tu trouveras la valeur du cube égal à autant de choses et au même nombre et, ayant multiplié sa moitié par elle-même puis l'ayant triplée, retranche cela du nombre des choses et la racine du reste ajoutée à la moitié de la valeur du cube égal aux choses et à un nombre, ou retranchée, donne la valeur du cube et un nombre égaux aux choses.)

à devoir prendre la racine carrée d'un nombre négatif (on qualifie aujourd'hui ces types d'équations de cas irréductibles), Cardano revient sur le sujet dans un traité intitulé *De aliza regula liber*, qui paraît à Bâle en 1570, couplé avec la réédition de l'*Ars magna* [Confalonieri 2013]. Il faut aussi citer l'*Ars magna arithmeticæ* — état intermédiaire de la réflexion de Cardano sur les équations, entre la *Practica arithmeticæ* et l'*Ars magna* —, qui ne sera publié que de manière posthume, dans le quatrième volume des *Opera omnia* [Cardano 1663].

Enfin, Rafael Bombelli publie à Bologne en 1572 son *Algebra, parte maggiore dell' arimetica*, en trois livres. Le premier livre porte sur les nombres radicaux et c'est à l'occasion de leur étude que Bombelli introduit les signes « *più di meno* » et « *meno di meno* », qui lui permettent de manipuler les racines des nombres négatifs. Le deuxième livre est consacré aux nombres algébriques, ou « *dignità* », et à la résolution des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degrés. L'exposé de Bombelli est à bien des égards plus clair et mieux structuré que celui de Cardano dans l'*Ars magna*. Pour les équations du troisième degré, Bombelli accompagne les règles de résolution de démonstrations géométriques fondées sur la décomposition du cube, comme Cardano l'avait fait avant lui. Il propose aussi des démonstrations « *in superficie plana* » de ces mêmes algorithmes [Gavagna 2014, 181]. Enfin, le troisième livre présente de nombreux problèmes arithmétiques conduisant à la résolution d'une équation.

Principaux traités d'algèbre publiés, hors d'Italie, après l'Ars magna de Cardano

Nous nous interressons ici aux ouvrages d'algèbre ou d'arithmétique contenant une partie algébrique publiés, hors d'Italie, dans les années qui suivirent la publication de l'*Ars magna* de Cardano en 1545 et avant la publication de l'*In artem analyticem isagoge* de Viète en 1591, qui donnera une nouvelle orientation aux développements de l'algèbre. Nous avons retenu les plus importants, en raison de leur originalité et/ou de leur diffusion[9] : l'*Algebræ compendiosa facilisque descriptio* de Johann Scheubel (Paris, 1551)[10], le *Libro primero de arithmetica algebratica* de Marco Aurel (Valence, 1552), l'*Algebre* de Jacques Peletier du Mans (Lyon, 1554), le *Whestone of Witte* de Robert Recorde (Londres, 1557), le *Compendio de la Regla de la Cosa o Arte Mayor* de Juan Pérez de Moya (Burgos, 1558), la *Logistica* de Jean Borrel (dit Buteo) (Lyon, 1559), le *Libro de algebra en*

9 Je ne signale pas ici les rééditions d'ouvrages parus avant 1545.

10 Une première édition de ce texte est parue en 1550, à Bâle, en introduction aux six premiers livres des *Éléments* d'Euclide.

arithmetica y geometria de Pedro Nuñez (Anvers, 1567), l'*Arithmetica* d'Antic Roca (Barcelone, 1564), le *De arte magna* de Guillaume Gosselin (Paris, 1577), l'*Arithmeticæ libri duo et algebræ totidem* de Bernard Salignac (Francfort, 1580) et l'*Arithmetique* de Simon Stevin (Leyde, 1585). Nous avons pu constater que certains de ces autres auteurs n'évoquent les équations de degré supérieur ou égal à 3, que dans les cas où elles peuvent être ramenées à des équations du deuxième degré pour lesquelles on connaît l'algorithme de résolution depuis al-Khwārizmī. Seuls Peletier du Mans, Borrel, Nuñez, Gosselin et Stevin font état des travaux des algébristes italiens sur la résolution des équations du troisième degré. Nous allons voir que Borrel, Nuñez, puis Gosselin, qui reprend les critiques des deux premiers, ne sont pas convaincus par ces méthodes. Par contre, si Stevin en voit lui aussi les limites, il propose dans l'*Arithmetique* un exposé unifié des algorithmes de résolution des équations du troisième degré qui, sur plusieurs aspects, présente des avancées significatives par rapport au traitement qu'en fait Cardano dans l'*Ars* magna, en expliquant notamment les origines des différents algorithmes. Pour cette raison, nous avons fait de l'ouvrage de Stevin le point d'orgue de notre étude. Il serait aussi intéressant de se demander quelle fut la diffusion des règles de Cardano, ainsi remaniées par Stevin. Ce sera peut-être l'objet d'une autre étude.

1. UNE ALLUSION AUX TRAVAUX DE CARDANO SUR LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ DANS L'*ALGEBRE* DE PELETIER DU MANS

Jacques Peletier du Mans publie une *Algebre* en 1554, soit neuf ans après l'*Ars magna* de Cardano. L'*Algebre* est composée de deux livres [Bosmans 1907a]. Dans le premier livre, après quelques considérations générales sur « l'invention et l'usage de l'algèbre », Peletier présente les nombres utiles à l'algèbre que sont les nombres radicaux, avant de traiter des nombres propres à l'algèbre que sont les nombres cossiques. Après avoir exposé les opérations sur ces deux types de nombres, Peletier en vient aux équations. Il commence par expliquer les différentes transformations que l'on peut effectuer sur celles-ci. Il énonce ensuite l'algorithme d'extraction des racines des équations du deuxième degré, qui correspond à la règle dite AMASIAS de Stifel[11]. Cette règle se propose de regrouper en un seul

[11] Cette règle est formulée ainsi par Stifel [1544, 240v] : « Sequitur modus iste extrahendi. Primo. A numero radicum incipe, eumque dimidiatum loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio. Secundo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate. Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorum, aut signi subtractorum, exigentiam. Quarto. Inuenienda est radix quadrata,

énoncé les expressions de la racine pour les équations canoniques de la forme $ax^2 = bx + c$, $ax^2 = c - bx$ ou $ax^2 = bx - c$ (a, b et c étant positifs). À la suite de Stifel, Peletier admet en effet des coefficients négatifs — sauf en début d'expression —, ce qui lui permet d'isoler le terme du second degré et d'avoir une formulation ramassée de l'algorithme d'extraction de la racine, selon les signes qui sont attribués à b et c. C'est aussi à Stifel que Peletier reprend l'énoncé de la « grand' Regle generale de l'Algebre »[12], que plusieurs exemples viennent illustrer. Le premier livre se termine par la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Le deuxième livre est consacré aux nombres irrationnels et à leurs opérations. Leurs espèces sont définies en lien avec les espèces de lignes irrationnelles étudiées par Euclide au livre X des *Éléments*[13]. Sont présentés aussi les nombres cossiques irrationnels, c'est-à-dire les racines de nombres cossiques.

Les équations du troisième degré sont évoquées dans le premier livre, au chapitre XX « De l'inuancion compandieuse de l'estimacion Cubique » [Peletier du Mans 1554, 42] et au chapitre XXI « De l'inuancion compandieuse des Racines Rompues » [Peletier du Mans 1554, 43], dans lesquels Peletier dévoile certaines propriétés des racines d'une équation en fonction de ses coefficients, lorsque ces racines sont rationnelles [Bosmans

ex summa additionis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto. Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam. ». Peletier [1554, 34] la traduit ainsi : « Premieremant, Prenèz la moetie du nombre des Racines, e la mettèz appart, auçc son sine de p. ou de m. Secondemant, Quarrèz cete Moetie : e ajoutèz le Quarre au nombre absolu, si le nombre absolu ét sinè de p : ou l'an otèz, s'il ét sinè de m. Tiercemant, Tirèz la Racine de prouenant de l'Addicion ou Souttraccion : e ajoutèz cete Racine a la Moetie mise appart, si son sine ét p. ou l'an otèz, si son sine ét m. Ce qui prouiendra sera la Racine de votre Nombre. »

12 Stifel énonce ainsi la règle de l'algèbre [1544, 227v] : « Inuenturus numerum inueniendum absconditum, ponat loco illius 1 Coss. (nos autem ponimus 1x) & inuenta æquatione aliqua, reducat eam, si reducenda sit. Deinde per numerum signi cossici maioris, diuidat reliquum æquationis, eidem diuisori æquatum, sed denominato tamen. Et sic semper proueniet numerus ille absconditus qui inquirebatur, uel in quotiente, uel in aliqua eius radice. Radix autem si qua fuerit extrahenda, pulchre hoc atque sufficienter signabit diuisor suo cossico signo ». Peletier [1554, 46-47] l'énonce ainsi : « Au lieu du Nombre inconnu que vous cherchèz, metèz 1 $\mathfrak{R}$: Auec laquele fetes votre discours selon la formalite de la Question proposee : tant qu'eyèz trouuè vne Equacion conuenable, e icelle reduitte si besoin ét. Puis, par le Nombre du sine majeur Cossique, diuisèz la partie a lui egalee : ou an tirèz la Racine tele que montre le Sine. E le Quociant qui prouiendra (si la Diuision suffit) ou la Racine (si l'extraccion ét necessere) sera le Nombre que vous cherchèz ».

13 Là encore Peletier reprend la nomenclature des nombres irrationnels proposée par Stifel au livre II de son *Arithmetica integra*. Pour Stifel, voir [Rommevaux-Tani 2014].

1907a, 143-150][14]. Ainsi, au chapitre XX, Peletier remarque que si t est une racine entière d'une équation du type $x^3 = ax^2 + c$, $x^3 = ax^2 - c$ ou $x^3 = c - ax^2$ (où a et b sont des entiers positifs), alors t^2 divise c, ce qu'il vérifie sur trois exemples[15]. Le chapitre XXI présente le même type d'exemples, mais avec des fractions. Il se termine ainsi [Peletier du Mans 1554, 46] :

> Par cete speculacion, se decouure le Cube egal aus Racines e au Nombre : le Cube e Nombre egauz aus Racines : le Cube e Racines egauz au Nombre. E qui plus ét, se decouure le Cube egal aus Çanses et ℜ : le Cube, egal aus Çanses, ℜ, et Nomb. &c.
>
> Qui ét la plus grande difficulte de tout l'Art, e an laquele les Auteurs de l'Algebre sont si ampeschèz : comme on peùt voèr par ce qu'an dìt Cardan des le premier Chap. de son Algebre, puis au Chap. XI. du méme Liure.

Ainsi, Peletier reconnaît la difficulté de la résolution des équations du troisième degré, difficulté déjà soulignée par Cardano au chapitre I puis au chapitre XI de son *Ars magna.*

Peletier renvoie aussi brièvement à la résolution, par Cardano, des équations du troisième degré, au chapitre XXIII du deuxième livre, intitulé : « De la multiplication cubique des nombres irracionnaus : E principalement de celle des Racines Sourdes ou Vniuerselles Cubiques » [Peletier du Mans 1554, 186]. Il y explique comment élever au cube une expression formée de deux parties. Il propose deux méthodes, que l'on peut transcrire ainsi :

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$$
$$(a \pm b)^3 = a\left(3b^2 + a^2\right) \pm b\left(3a^2 + b^2\right).$$

Il donne plusieurs exemples, en insistant sur la question des signes dans le cas où b est précédé du signe Moins. Le dernier exemple qu'il propose consiste à élever au cube l'expression $\sqrt[3]{\sqrt{26}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{26}-5}$. Peletier

---

14 Dans le chapitre XIX, Peletier propose de telles propriétés pour les équations du deuxième degré.

15 [Peletier du Mans 1554, 42-43] : « Soèt 1q° egal a 3ℜ [à corriger en 3ç] p. 50. Ie sè que 50 doèt contenir certein nombre de Çansiques [c'est-à-dire un carré] (car tout Cube ét accomplì de Çansiques precis.) Donq je voerrè incontinant, qu'il n'y à autre Çansique contenu egalemant an 50, sinon 25. Par quoe la ℜ que je cherche, ét 5. Item, Soèt 1q° egal a 1440 p. 2ç. Ie voè, que 1440 doèt contenir certeine quantite de Çanciques : E trouue, que 144, y ét precisemant contenù. Donq la ℜ ét 12. Autant seroèt, si 1q° fut egal a 2016 m. 2ç. Car j'usse samblablemant trouuè 144 y contenu. ». Dans l'équation $x^3 = 3x^2 + 50$ le carré 25 divise 50, et 5 est racine ; de même 12 est la racine de l'équation $x^3 = 1440 + 2x^2$, et de l'équation $x^3 = 2016 + 2x^2$ et 144 divise 1440 et 2016.

renvoie alors au chapitre XI de l'*Ars magna* dans lequel Cardano obtient cette expression comme racine de l'équation $x^3 + 3x = 10$ et il explique qu'il a voulu présenter cet exemple afin de faire voir son usage des signes Plus et Moins, qui diffère de celui de l'auteur italien [Peletier du Mans 1554, 195-196] :

> E auons voulù expressemant mettre l'Example dernier de ces Racines Vniuerselles Cubiques : Lequel pose Cardan an l'onzieme Chapitre de son Algebre : affin que les studieus Aritmeticiens connoesset e juget an quoe notre deduccion differe de la sienne, quant a la situacion des sines Plus e Moins.
>
> Il fèt le Cube, étre, 10 p. √q°. √ç18954m.135 m. √q°. √ç18954p.135. Lequel an valeur, reuient au notre. Mes la collocacion des parties e des sines ét transmuee : de sorte, que par elle ne se peut comprandre la forme reguliere de teles multiplicacions.
>
> E verifi'rons notre intancion par la sienne méme. Car il pose 1q°p.3ℜ, egauz a 10. E par discours, il se trouue que l'estimacion d'vne Racine vaut √q°. √ç26p. 5m. √q°. √ç26m.5. E a ce conte, les 3ℜ vaudront √q°. √ç18954p.135m. √q°. √ç18954m.135. Or ét ce, que √q°. √ç18954p.135m. √q°. √ç18954m.135 : ét vn Connexe de point an point contradictoere a cetuici, m. √q°. √ç18954p.135m. √q°. √ç18954m.135. Telemant que toutes les particules s'antr'effacet vne pour vne. Partant, 1q° e 3ℜ : demeureront egaus a 10 precisemant : einsi que vouloét sa posicion.

L'équation $x^3 + 3x = 10$ a bien pour racine $x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{26}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{26}-5}$, ce que l'on vérifie en élevant cette expression au cube. C'est ce que fait Cardano, qui trouve :

$$10 + \sqrt[3]{\sqrt{18954} - 135} - \sqrt[3]{\sqrt{18954} + 135},$$

expression qu'il écrit « 10.p̃.ra.v.cubica ra.18954. m̃. 135. m̃. ra.v.cubica ra.18954. p̃. 135 » [Cardano 1663, vol. 4, 250]. Peletier propose une autre écriture du cube, qui selon lui reflète mieux la généralité de l'algorithme quand on a affaire à un signe négatif. Il l'écrit donc « 10 m. √q°. √ç18954 p. 135 m. √q°. √ç18954 m.135 », soit en écriture moderne

$$10 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{18954} + 135} - \sqrt[3]{\sqrt{18954} - 135}\right).$$

Il faut en effet comprendre que le « m. » qui suit le 10 s'applique à l'ensemble de ce qui suit. Le manque de parenthèses dans les notations des algébristes de la Renaissance est parfois source de confusion pour le lecteur moderne. Il faut donc suivre les étapes des calculs pour en comprendre le sens.

Juste avant cette justification, Peletier écrit [1554, 194-195] :

> Cete multiplicacion ét l'vn des fors passages qui soèt an toutes les operacions Irracionnales : Pour ce, faut y étre antantif. E an voerrons quelque foes l'vsage an notre tiers Livre. Auquel (si Dieu nous donne vie, e s'il fauorise noz desseins) nous esperons decouurir des secrez des nombres qui n'ont point ancor' etè vùz. Qui sera pour ceus qui se seront dilig'ammant exercèz a antandre ce que nous auons ecrit an cetuici. Lequel ét autant ou plus antier, à mon auis (sauf touteffoes celui des bons espriz) que cela qu'an peuuet auoèr ecrit tous les autres jusques ici.

Il ne semble pas que Peletier ait mené à bien son projet d'un troisième livre pour son *Algebre* ; toutes les éditions françaises n'en contiennent que deux, de même que la traduction latine qui paraît en 1560[16]. Ce troisième livre devait peut-être contenir la résolution des équations du troisième degré, qui, dans les deux premiers livres, n'est évoquée qu'en passant, comme nous venons de le voir.

2. POUR BORREL, CARDANO EST INCOMPRÉHENSIBLE ET MANQUE DE MÉTHODE

Si Jacques Peletier du Mans se contente de faire allusion aux travaux de Cardano sur les équations du troisième degré, sans donner son opinion à leur sujet, l'*Ars magna* fait l'objet de vives critiques de la part du mathématicien français Jean Borrel (ou Johannes Buteo) dans sa *Logistica*, qui paraît à Lyon en 1559.

Cet ouvrage est composé de cinq livres. Le premier traite des nombres entiers. Le deuxième porte sur les fractions, ainsi que sur les rapports, relations quantitatives entre deux nombres à distinguer des fractions correspondantes. Ce deuxième livre se termine par l'énoncé des règles de fausse position simple et double. L'algèbre, que Borrel préfère appeler « *quadratura* »[17], est le sujet du troisième livre. Borrel n'envisage que les trois premières espèces de quantités, en liaison avec la géométrie ; il les nomme la ligne (*linea*, qu'il note avec un signe proche du ρ grec), le carré (*superficies*, désigné par un petit losange) et le cube (*solidus*, représenté par un petit cube). Après avoir expliqué les opérations sur ces quantités, notamment lorsqu'on leur associe les signes Plus ou Moins, il présente la résolution des

16 La version latine de l'*Algebre* a pour titre *De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, Libri duo* et est publiée à Paris, chez Guillaume Cavellat. À la suite des deux livres, on trouve une lettre adressée à Seraphin Razallius, dans laquelle Peletier critique l'algèbre de Borrel [Bosmans 1907a, 171-172].

17 [Borrel 1559, 117] : « His expeditis quæ sunt ex vsu numerationum communi, restat vt eum ratiocinandi modum operi summo veluti coronidem adiiciam, qui vulgò, & Arabica voce dicitur Algebra. Ego autem, prout reuera est, quadraturam dicere malo. »

équations simples, du type $ax = b$, $ax^2 = b$ ou $ax^3 = b$ (avec a et b positifs), suivie de l'exposé de nombreux problèmes qui s'y ramènent. Viennent ensuite les algorithmes d'extraction des racines des équations composées du deuxième degré, du type $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ ou $x^2 + b = ax$ (avec a et b positifs) ; Borrel cite alors les travaux de Luca Pacioli, d'Etienne de la Roche, qu'il nomme Stephanus, et de Cardano. Ce troisième livre se termine par la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Les quatrième et cinquième livres sont des applications des règles de l'arithmétique et de la résolution des équations du deuxième degré à de nombreux problèmes.

Borrel ne reprend pas les méthodes de résolution des équations du troisième degré présentées par Cardano dans son *Ars magna*, alors même que, comme nous allons le voir, il connaissait cet ouvrage. À la lecture des critiques qu'il adresse au mathématicien italien, on comprend pourquoi.

Borrel cite une première fois Cardano à propos de la résolution des équations du deuxième degré « composées du troisième type », à savoir les équations du type $x^2 + b = ax$, qui, lorsqu'elles ont des solutions entières, ont deux racines positives que l'on obtient en ajoutant ou en retranchant $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ à $\frac{a}{2}$:

> En outre, Cardano, dans l'*Opus perfectum*[18], s'exprime au sujet de cette sorte d'addition ou de soustraction en reprenant presque le discours des autres[19], mais de manière si maladroite et si obscure que tu comprends difficilement ce qu'il veut. En effet, l'homme a en propre un langage barbare dans le vocabulaire et l'expression[20].

Ainsi, la première critique de Borrel porte sur le style de rédaction de Cardano et le vocabulaire utilisé qu'il juge obscurs. Et Cardano est bien connu de ses contemporains, mais aussi des historiens, pour ses fautes de

---

18 C'est une partie du titre de l'*Ars magna* : *Hieronymi Cardani, præstantissimi mathematici, philosophi, ac medici, Artis Magnaæ, sive de regulis algebraicis, lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod Opus perfectum inscripsit, est in ordine Decimus.* Cardano avait en effet le projet d'une encyclopédie arithmétique en quatorze volumes ; l'*Ars magna* devait en constituer le dizième volume [Gavagna 2012, 177], [Tamborini 2003, 252-253].

19 Borrel vient de critiquer Luca Pacioli et Stephanus, soit Etienne de la Roche, à qui il reproche de donner deux solutions pour les équations du type $x^2 + b = ax$, alors que lui-même n'en admet qu'une seule, celle obtenue par addition [Borrel 1559, 183-184].

20 [Borrel 1559, 184] : « Cardanus insuper in opere quod inscripsit perfectum, super huiusmodi adiectione, vel detractione, ex aliorum ferè sententia loquitur, ita tamen ineptè, & implicitè, vt difficulter intelligas quid sibi velit. Est enim in verbis, & sensibus barbaries homini peculiaris. »

latin, sa grammaire souvent approximative, mais aussi ses erreurs de raisonnement[21]. Toutefois, dans le cas présent, celui de la résolution des équations du deuxième degré du type $x^2 + b = ax$, la remarque de Borrel ne va pas de soi. En effet, à leur propos, Cardano écrit (règle III, chapitre V de l'*Ars magna*) :

> Si les choses sont égales au carré et à un nombre, multiplie, comme auparavant, la moitié du nombre des choses par elle-même, et ayant retranché du résultat le nombre de l'équation, retranche la racine du reste de la moitié du nombre des choses, ou ajoute-la, et tant la somme que la différence sont la valeur de la chose[22].

Nous ne voyons pas bien ce qu'il y a d'obscur dans cet énoncé, si ce n'est que Cardano affirme que deux valeurs peuvent être attribuées à la chose, ce que refuse Borrel[23]. Toutefois, parmi les bizarreries du texte de Cardano, nous pouvons relever cette sentence, présentée comme un moyen de se souvenir des trois règles d'extraction des racines des équations composées du deuxième degré qu'il donnera ensuite :

> En accord avec celles-ci [Cardano vient de donner les démonstrations géométriques des algorithmes de résolution des trois types d'équations composées du deuxième degré] nous formulerons trois règles auxquelles nous adjoignons ce poème qui aidera à s'en souvenir : *Querna da bis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami*[24].

On comprend plus loin, à la fin de l'exposé des exemples qui illustrent la règle I, que *Querna* (ou *Quarna* ; on a les deux orthographes) désigne les équations du type « le carré (*<u>qu</u>adratum*) est égal aux choses (*<u>r</u>ebus*) et

---

21 Voir par exemple Jensen [1994] qui étudie la réception du *De subtilitate libri xxi* et du *De rerum varietate libri xvii* par ses lecteurs du XVIe siècle.

22 [Cardano 1663, vol. 4, 231] « REGVLA III. Si verò res æquales sint quadratis [à corriger en *quadrato*] & numero, ducto, vt prius, dimidio numeri rerum in se, & ab eo detracto numero æquationis, radicem residui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum quam residuum est rei æstimatio. »

23 Lorsqu'il présente l'algorithme de résolution des équations du type $x^2 + b = ax$, Borrel écrit [1559, 181] : « Imprimis ex dimidiato linearum numero fit quadratum, vnde continentis numerus subtrahi debet, eiusque residui tetragonicum latus iunctum dimidiato linearum numero, summam constituit, eum qui quæritur numerum. » (Avant tout, un carré est fait à partir de la moitié du nombre des lignes, puis le nombre du contenant [soit la première partie de l'équation] doit être soustrait et le côté carré du reste joint à la moitié du nombre des lignes produit comme somme le nombre qui est recherché). Ainsi, il ne considère que la solution $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ obtenue par addition, ce qui est confirmé dans la démonstration géométrique qui suit.

24 [Cardano 1663, vol. 4, 230] : « Secundum hæc formabimus regulas tres, pro quarum memoria subiungemus carmen hoc, Querna, da bis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami. »

à un nombre (*numero*) » ($x^2 = ax + b$). Et dans ce cas, dans l'expression de la racine $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$, on a deux additions (*da bis*) :

> Il est donc clair qu'ici nous ajoutons deux fois, à savoir le nombre au carré de la moitié des choses et la moitié des choses à la racine de la somme, et c'est ce que nous avons formulé dans le poème par *da bis*, soit ajoute deux fois[25].

De même, pour les équations du type *Nuquer*, « un nombre (*numerus*) égal au carré (*quadrato*) et aux choses (*rebus*) » ($b = x^2 + ax$), on doit faire une addition puis une soustraction (*admi*), la racine étant $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$:

> D'où il est clair que cette règle diffère seulement de la précédente du fait qu'on retranche la moitié du nombre des choses de la racine de la somme, dans laquelle elle avait été ajoutée, et c'est ce que nous avons formulé dans le poème par *ad mi*, soit ajoute d'abord puis retranche, c'est-à-dire ajoute le nombre au carré et retranche ensuite la moitié du nombre des choses à la racine de la somme[26].

Malheureusement pour les équations du type *Requan*, « les choses (*res*) égales au carré (*quadrato*) et à un nombre (*numero*) » ($ax = x^2 + b$), Cardano ne fournit pas d'explications, alors que la règle est plus complexe. On doit comprendre qu'on doit faire une soustraction (*Minue*), puis soit une addition, soit une soustraction (*da mi*) ; l'équation a en effet deux racines $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ et $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Outre l'usage d'un langage parfois abscons, Borrel reproche à Cardano la multiplication des règles dans son traitement des équations de degré supérieur ou égal à 3 :

> Il [Cardano] a bourré tout le livre d'une multitude prodigieuse de règles, distinguant, selon le nom des chapitres, les cas primitifs, les dérivatifs, les imparfaits, les particuliers, les plus grands, les singuliers et d'autres termes du même ordre [...][27].

---

25 [Cardano 1663, vol. 4, 230] : « Manifestum est igitur, quod hic bis addimus, scilicet numerum quadrato dimidij rerum, & dimidium rerum radici aggregari, & hoc est, quod in carmine diximus, da, bis, quasi, bis iunge. »

26 [Cardano 1663, vol. 4, 230] : « Ex hoc patet, quod hæc regula, à præcedenti solùm differt, quod minuat dimidium numeri rerum ab aggregati radice, vbi illa iungebat, & hoc est, quod in carmine diximus. Ad mi, quasi, adde primo, deinde minue, scilicet, adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum postmodum ab aggregati radice ».

27 [Borrel 1559, 187] : « Totum enim librum prodigiosa canonum multitudine constipauit, capitulorum nomine vocans, atque distinguens, in primitiua, deriuatiua, imperfecta, particularia, maiora, singularia, & multis modis aliter, atque nominibus [...]. »

Borrel fait ici référence aux contenus ou aux titres de certains chapitres de l'*Ars magna.* Ainsi, dans le chapitre II, Cardano distingue les équations primitives ou cas primitifs (*capitula primativa*), des équations dérivatives ou cas dérivatifs (*capitula derivativa*) qui se ramènent aux équations primitives par un changement simple d'inconnu ($y = x^n$). Par exemple, l'équation $x^2 + ax = b$ (avec a et b positifs) est primitive et les équations $x^4 + ax^2 = b$ et $x^6 + ax^3 = b$ en dérivent [Cardano 1663, vol. 4, 226]. Au chapitre XXV, soit après avoir donné les méthodes générales de résolution des équations du troisième degré, Cardano revient sur les « cas imparfaits et particuliers »[28]. Par exemple, une équation du type $x^3 = bx + c$ (avec b et c positifs), pour laquelle l'algorithme de résolution donne la racine $x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$, est imparfaite si $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ est inférieur à $\left(\frac{b}{3}\right)^3$, car dans ce cas on serait amené à devoir prendre la racine d'un nombre négatif. Mais si les coefficients de l'équation remplissent certaines conditions, on peut trouver la solution par un autre moyen. Cardano donne une série de dix-huit exemples. Dans le quatrième exemple, il considère une équation du type $x^3 = bx + c$ avec $b = f + g$ et $\frac{c}{2} = f\sqrt{g} + g\sqrt{f}$. L'une des solutions est alors $x = \sqrt{f} + \sqrt{g}$. Les autres exemples sont du même ordre[29]. Le chapitre XXVI, auquel là encore Borrel fait référence, « montre de grandes règles qui sont tout à fait singulières »[30] et il concerne la résolution de quelques cas particuliers d'équations du quatrième degré.

Cette multiplication de méthodes particulières selon le type d'équations considéré indispose Borrel, comme il l'avoue plus loin :

> Cardano [...] embrouille plus de questions qu'il n'en résout. Et s'il reste toujours dans le vrai, il n'arrive à rien présentement. S'ajoute à cela qu'il recherche beaucoup de cas particuliers dont la multitude est infinie, l'accumulation ridicule et d'aucune importance. Bien qu'il travaille à apporter des démonstrations satisfaisantes à beaucoup, cependant je ne l'ai vu en réussir et en conclure convenablement aucune[31].

---

[28] Le titre du chapitre XXV est « De capitulis imperfectis & specialibus » [Cardano 1663, vol. 4, 266]. Pour une description de ce chapitre, voir Confalonieri [2013, 84-98].

[29] On peut se reporter aux explications que donne T. Richard Witmer en note de sa traduction anglaise de l'*Ars magna* [Cardano 1993].

[30] « Caput XXVI. Ostendit regulas maiores, quæ sunt omnino singulares » [Cardano 1663, 270]

[31] [Borrel 1559, 188] : « Cardanus [...] quæsitum magis implicat quàm soluit. An verò semper intra verum consistat, nihil impresentiarum attingo. Huc accedit quòd particularia plurimùm sectatur, quorum est infinita multitudo, et exageratio ridicula,

Ainsi, Borrel reproche à Cardano, d'une part, de multiplier les règles dans les cas particuliers et d'autre part, de ne pas aboutir dans ses démonstrations, sans préciser malheureusement de quelles démonstrations il s'agit. Il est possible qu'il fasse allusion aux cas « imparfaits » des équations du troisième degré, dont il a parlé plus haut.

De fait, si l'histoire retient les méthodes générales de résolution des équations du troisième degré (qui sont décrites aux chapitres XI à XXIII), l'*Ars Magna* se présente plutôt comme un catalogue de méthodes diverses pour résoudre les équations[32]. Ainsi, un même type d'équations peut être traité de différentes manières dans plusieurs chapitres. Ce faisant, Borrel n'a pas été sensible à la portée générale des méthodes de résolution pour les équations du troisième degré, qui se trouve affaiblie par la multitude des méthodes particulières qui les entourent.

GOSSELIN, CONVAINCU, NI PAR LES ALGORITHMES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ PROPOSÉS PAR CARDANO, NI PAR SON STYLE D'EXPOSÉ

Autre mathématicien français à s'intéresser à l'algèbre, Guillaume Gosselin publie un *De arte magna*, en 1577, à Paris[33]. Cet ouvrage est composé de quatre livres [Gosselin, à paraître, « Étude introductive », I. 1]. Dans le premier livre, après s'être interrogé sur la nature de l'algèbre et sa finalité, Gosselin présente les dénominations des nombres de l'algèbre, puis il expose les algorithmes d'extraction des racines de différents ordres, avant de se tourner vers les rapports et les proportionnalités, pour finir par la démonstration des règles de fausse position simple et double. Le deuxième livre est consacré aux opérations sur les nombres algébriques et les expressions polynomiales. Le troisième livre porte sur les algorithmes de résolution des équations du premier et du deuxième degré et des équations de degré supérieur s'y ramenant. Gosselin y propose en outre une lecture algébrique des méthodes diophantiennes pour la résolution des problèmes indéterminés. Le quatrième livre traite des systèmes

nulliusque momenti. Cùm autem demonstrationes ad multa satis afferre laboret, nullam tamen adhuc legitimè procedere, vel concludere vidi. »

32 Voir à ce propos ce qu'écrit Jacqueline Stedall [2011, 7] : « The *Ars magna* is a treasury of rules, methods, observations, insights, and special cases, but the reader has to work hard for them. The ordering of the material is often haphazard, with many diversions and repetitions, and Cardano's language is verbose, dense, and sometimes ambigous. »

33 Odile Kouteynikoff propose une transcription de ce texte, ainsi qu'une traduction française dans [Gosselin, à paraître].

d'équations à plusieurs inconnues. Il est à souligner que la géométrie est pratiquement absente de l'algèbre de Gosselin. En particulier Gosselin établit des liens entre les règles de l'algèbre et celles de l'arithmétique et s'il démontre par le calcul algébrique les algorithmes de résolution des équations du deuxième degré, il n'en propose pas de preuve géométrique, comme c'est traditionnellement le cas.

Notons que Gosselin est très au fait des travaux de ses prédécesseurs. Il dit en particulier dans la dédicace à l'Évêque de Mende qui ouvre son traité :

> J'ai lu complètement, du début à la fin, toutes les Algèbres que je trouvai, celles de Forcadel, de Scheubel, de Peletier, de Stifel, de Cardan, de Lucas, de Villefranche, de l'Italien Tartaglia, [...], et enfin celle de l'Espagnol Nunes dont la parole m'est loi[34].

Toujours dans cette même dédicace, il cite les travaux de Borrel.

Les équations du troisième degré sont abordées brièvement dans le troisième livre, au chapitre x [Gosselin, à paraître, « Étude introductive », I. 5][35]. Pour ce qui est du niveau de difficulté et du nombre de tentatives n'ayant pas abouties, Gosselin compare la recherche d'un algorithme de résolution pour ces équations aux questions de la duplication du cube ou de la quadrature du cercle :

> Il serait long, je ne dis pas de recenser, mais même de se rappeler tous les mathématiciens qui jusqu'à notre époque se sont mobilisés sur cette seule égalisation : de même que des géomètres très habiles ont beaucoup travaillé à la duplication du cube, mais sans faire les bonnes recherches, nombre d'entre eux ayant atteint le but par la mécanique (pour nous, c'est par les mathématiques), et que beaucoup, y passant des nuits entières, ont consacré un travail assidu à la quadrature du cercle, parmi lesquels Archimède a remporté la palme, de même ils sont nombreux ceux qui ont consacré le plus clair de leur temps à la résolution de cette égalisation, [...][36].

---

34 [Gosselin 1577, f° a iiij] : « A principio ad calcem quascunque inueni Algebras perlegi, Forcadelum, Scheubelium, Peletarium, Stifelium, Cardanum, Lucam, Villafrancum, Tartagliam [...], ac denique Nonium Hispanum in cuius verba iuraui. » La traduction est d'Odile Kouteynikoff [Gosselin, à paraître]

35 Le chapitre x du livre III a pour titre « *De Aequatione tertia* » et se trouve aux folios 71r-73r de l'ouvrage de Gosselin. Dans les citations suivantes, nous reprenons la traduction d'Odile Kouteynikoff.

36 [Gosselin 1577, 71r-72r] : « Longum esset non dicam recensere sed ne meminisse quidem Mathematicorum omnium quos ad hæc vsque tempora hæc vna exercuit æquatio, sic vt quemadmodum Geometræ peritissimi in duplicando Cubo multum elaborarunt, neque sane rem vestigarunt, inter quos multi mechanice scopum tetigerunt (quanquam nos Mathematice) multi peruigiles in Circulo Quadrando assiduam nauarunt operam, inter quos Achimedes lauream reportauit, multi quoque in hac perquiranda æquatione plurimum olei consumpserunt, inter quos Cardanus

C'est alors que Gosselin cite Cardano, dont il doute de la réussite, n'étant pas convaincu par la méthode qu'il propose :

> [...] parmi lesquels Cardano semble y être parvenu, mais en quoi y serait-il parvenu quand dans presque aucun exemple sa méthode ne tient ?

Il souligne en effet combien il est difficile, voire impossible, d'extraire les racines cubiques des binômes qui apparaissent dans l'expression de la solution des équations du troisième degré ; nous verrons que ce reproche a déjà été formulé par Nuñez, que Gosselin a lu :

> [...] une difficulté essentielle accompagne sa voie d'invention, ce qui fait que je ne fais pas grand cas de ce qu'il appelle invention extraordinaire, quand les côtés cubiques des binômes se cherchent difficilement et par un travail difficile, que, quand on les cherche, trop souvent on ne les connaît pas [...]

Gosselin reproche aussi à Cardano, comme l'avait fait Borrel avant lui[37], la multiplication des règles particulières, quand on serait en droit d'attendre une méthode générale. Il juge même que certaines sont fausses, sans toutefois en donner un exemple[38] :

> [...] or nous cherchons ici une méthode générale, c'est pourquoi je n'attache pas grand prix à toutes les règles particulières que presque tous donnent pour cette égalisation, Cardano au tout premier chef qui, pour s'être trop souvent complu à des considérations partielles, donne même des règles fausses.

Gosselin s'intéresse pour finir aux liens entre équations du troisième degré sans terme du premier degré et celles sans terme du deuxième degré, sans doute à la suite de Cardano. Il remarque ainsi que le changement d'inconnu $x = \frac{y}{\sqrt{b}}$ permet d'obtenir la solution des équations du type $x^3 = ax^2 + b$, $x^3 + ax^2 = b$ ou $x^3 + b = ax^2$ (avec a et b positifs) à partir de celles correspondantes du type $y^3 + ay = \sqrt{b}$, $y^3 = ay + \sqrt{b}$ ou $y^3 + \sqrt{b} = ay$ (respectivement).

---

opus hoc videtur confecisse, sed qui ipse confecerit cum omnibus fere in exemplis ratio sua non constet ? vera quidem illa sed sæpius incognita, præterea suæ inuentionis viam difficultas præcipua comitatur, quo fit vt hoc quod ille vocat egregium inuentum non magni faciam, cum Binomiorum latera Cubica difficile difficilique labore inquirantur, inquisita sæpius non cognoscantur, at hic uniuersam viam quærimus, neque propterea magni pendo particulares omnes ad hanc æquationem regulas quas fere omnes afferunt, verum præcipue Cardanus, falsas etiam sæpius multum partialibus delectatus. »

37 Si Gosselin ne cite pas ici Borrel, il fait référence à sa *Logistica* en plusieurs endroits, notamment au début du quatrième livre traitant des systèmes d'équations.

38 On peut trouver un exemple de formulation fautive, plus loin, dans l'énoncé correspondant à la note 77.

Finalement, pour ce qui concerne la France, si Jacques Peletier du Mans, Jean Borrel et Guillaume Gosselin connaissent les travaux de Cardano, ils ne reprennent pas ses méthodes de résolution pour les équations du troisième degré.

3. POUR PEDRO NUÑEZ, LES RÈGLES DE NICCOLÒ TARTAGLIA NE FOURNISSENT PAS, DANS LA PLUPART DES CAS, LA VALEUR DE LA RACINE

En ce qui concerne la péninsule ibérique, seul le mathématicien portugais Pedro Nuñez[39] fait, au XVIe siècle, état des travaux des algébristes italiens sur les équations du troisième degré. Son *Libro de algebra en arithmetica y geometria* [Nuñez 1567], à la structure complexe, est le résultat de plusieurs états successifs du texte [Bosmans 1907b, 155-156]. Il est composé de trois parties. Dans la première partie, Nuñez présente les six équations canoniques du deuxième degré et les démonstrations géométriques de leurs règles de résolution. Dans la deuxième partie, il expose les opérations sur les nombres cossiques et les radicaux et il traite longuement de la théorie des proportions, dépassant largement le cadre de ce qui est nécessaire à l'algèbre. Dans la troisième partie, Nuñez revient sur les équations du deuxième degré pour lesquelles il propose de nouvelles formes des algorithmes de résolution adaptées au cas où le terme constant, dans la forme réduite de l'équation, est impair. Il étudie aussi les équations de degré supérieur ou égal à 3 qui peuvent se ramener à un type connu de degré 1 ou 2, puis les systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues. Cette partie comporte enfin une longue série de problèmes, qui sont des applications de l'algèbre à l'arithmétique et à la géométrie. Et on trouve, à la toute fin de l'ouvrage, une adresse au lecteur : « El autor desta obra, a los Lectores » [Nuñez 1567, 323v].

Nuñez évoque les équations du troisième degré, au premier chapitre de la troisième partie du *Libro de algebra* [Nuñez 1567, 123v]. Il montre alors comment résoudre ces équations, lorsqu'elles ont une racine rationnelle, grâce à la mise en évidence d'un facteur du premier degré qui permet d'abaisser le degré [Bosmans 1907b, 162-164]. Ainsi, à propos de l'équation $x^3 + x^2 = x^2 + 7x + 6$, il commence par remarquer qu'il ne faut pas simplifier l'expression en soustrayant x^2 de chaque côté, car on aboutirait à l'équation $x^3 = 7x + 6$, pour la résolution de laquelle, dit-il,

39 Je reprends ici la graphie de son nom telle qu'on peut la trouver sur la page de titre de son livre d'algèbre. En portugais, on écrirait plutôt Nunes.

il n'existe pas de règle générale[40]. De fait, l'application de la règle de Tartaglia-Cardano conduirait à la racine

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{9-\left(\frac{7}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{9-\left(\frac{7}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}},$$

et par conséquent à devoir considérer la racine d'un nombre négatif.

Nuñez observe alors que dans la première égalité $x^3+x^2=x^2+7x+6$, chacun des membres est divisible par $x+1$, et qu'après division, on obtient une équation du deuxième degré, $x^2=x+6$, que l'on sait résoudre[41]. Nuñez suggère alors qu'il serait utile de dresser une table de multiplication de $x+1$ par $x+1$, par $x+2$, par $x+3$, etc. et aussi de $2x+1$ par $x+1$, par $x+2$, par $x+3$, etc[42].

Il explique ensuite qu'il est aisé de déterminer le nombre à soustraire aux deux membres des équations du type $x^3+c=bx$ ou $x^3=bx+c$ (avec b et c positifs), afin de faire apparaître un facteur commun du premier degré, toutes les fois que « les choses excèdent le nombre d'une unité, ou le double des choses excède le nombre selon le cube de 2, qui est 8, ou le triple des choses excède le nombre selon le cube de 3, qui est 27, ou le quadruple des choses excède le nombre selon le cube de 4, qui est 64 et ainsi de suite pour les autres cubes »[43]. Il illustre la procédure sur des exemples.

---

40 [Nuñez 1567, 125v] : « Como si hallasemos que 1 cubo p̃. 1. censo, son yguales a 1.ce. p̃. 7.co. p̃. 6, no bastaria para las yguala r, sacar el censo de entrambas, porque aun quedaria 1. cu. ygual a 7.co. p̃. 6 y para esta tal conjugacion, no es hallada Regla general. »

41 [Nuñez 1567, 125v] : « Por lo qual hallando les commun partidor, el qual en este caso es 1.co. p̃. 1. y partiendo las por el, vernan a la segunda conjugacion de las compuestas. [...] Yguales seran por tanto 1.ce. y 1.co p̃. 6 y obrando por su Regla halleremos que el valor de la cosa es 3. »

42 [Nuñez 1567, 125v] : « Y para hallar partidor commun con menos negocio, seria cosa muy conueniente componer vna tabla, y guardarla en la memoria, en la qual se multiplique 1.co. p̃. 1. por 1.co. p̃. 1. y por 1.co. p̃. 2. y por 1.co. p̃. 3. y assi por esta orden, y despues multiplicar 2.co. p̃. 1. por 1.co. p̃. 1. y por 1.co. p̃. 2. y ir assi prosiguiendo hasta .10. »

43 [Nuñez 1567, 125v-126r] : « Pero ay algunas conjugaciones de dignidades y numero, en las quales sin esta tabla podremos luego por Regla general saber, qual sera el partidor commun, y quales seran los quocientes. Y las conjungaciones son aquellas, en las quales cubo, y numero, son yguales a cosas, o cosas y numero yguales a cubo, y non seruira la tal Regla que auemos de dar en qualquier conjugacion destas, porque solamente seruira, quando las cosas excedieren al numero en la vnidad, o el duplo de las cosas excediere al numero por el cubo de 2, el qual es 8, o el triplo de las cosas excediere al numero por el cubo de 3, el qual es 27, o el quadruplo de las cosas excediere al numero en el cubo de 4, el qual es 64, y assi por el consiguiente en los otros cubos. »

On peut la résumer ainsi : pour les équations du troisième degré du type $x^3 = bx + c$, s'il existe n tel que $nb - c = n^3$, l'équation $x^3 = bx + c$ est transformée en l'équation $x^3 + n^3 = bx + bn$, que l'on peut ramener à une équation du deuxième degré en simplifiant par le facteur du premier degré $x + n$.

Nuñez ne fait aucune allusion aux travaux de Cardano dans ce chapitre. Or dans la *Practica arithmeticæ*, au chapitre LI, intitulé « De modis omnibus imperfectis », Cardano explique comment réduire les équations de la forme « les cubes égaux aux choses et à un nombre ». La formulation de la règle est plutôt absconde[44], mais on peut comprendre, grâce notamment aux exemples qui suivent, que, dans un premier temps, on se ramène à une équation de la forme « le cube égal aux choses et à un nombre », soit $x^3 = bx + c$. Puis si $b - c = 1$, on ajoute 1 aux deux membres de l'équation, si $2b - c = 8$, on ajoute 8, et de manière générale, si $nb - c = n^3$, on ajoute $nb - c$ ou n^3 aux deux membres de l'équation. On fait alors apparaître le facteur commun $x + n$, et après division par ce facteur commun, on est conduit à une équation du deuxième degré. C'est exactement ce qu'explique Nuñez.

On remarque que Nuñez ne reprend pas, dans le corps de son traité, les méthodes de résolution de Tartaglia ou Cardano. Il s'en explique dans l'adresse au lecteur qui clôt son ouvrage. Au début de ce texte, Nuñez cite les algébristes italiens. Il présente alors Luca Pacioli comme un excellent arithméticien, tout en soulignant le peu d'ordre de son traité[45]. À propos

---

44 [Cardano 1663, vol. 4, 81] : « Si res & nu. æquantur cubis reducemus omnia ad vnum cubum deinde detrahemus res à numero si res sint 1 p̃. quam nu. aut detrahemus duplum rerum à numero si duplum rerum sit 8. p̃. quam nu. Et ita de triplo & aliis deinde ponemus res cum numero detracto per viam p̃. & residuum adiungemus cubo & erunt æqualia & habebunt communem diuisorem 1 co. p̃. R.cu. numeri additi ad cubum, & ex vna parte exibunt census co. & nu. & ex alia nu. Vnde æquatio erit manifesta. »

45 [Nuñez 1567, 323v-324r] : « El primero de todos que yo sepa, fue la summa de Arithmetica y Geometria, que compuso Fray Lucas de Burgo excellente Arithmetico, de la qual todos despues nos auemos aprouechado. Pero trata de Algebra tan sin orden, que resuelue muchas questiones por esta arte, antes de hazer mencion della, y començando de hazer el discurso, antes de llegar al cabo, pone en summa la conclusion, que no es para aprendizes ». Dans la dédicace du *Libro de algebra* au Cardinal-Infant Henrique do Reino, Nuñez [1567, aii-v] jugeait déjà l'œuvre de Luca Pacioli obscure et sans méthode, si bien qu'il a fallu attendre soixante ans avant qu'elle soit imprimée (« Ho primero Liuro que de Algebra se imprimio, he o que Frey Lucas de Burgo compos em lingoa Veneciana, mas tam obscuramente & tam sem methodo, que pasa de 60 annos que foy impresso, & ajnda oje em Espanha ha muy poucos que tenham noticia de Algebra. »). Toutefois, dans cette même dédicace, il salue les italiens qui sont très exercés dans l'art de l'algèbre (« E ha porem em Italia alguns hombres muy exercitados nesta arte [...]. »)

de Cardano, il dit que, dans sa *Practica arithmeticæ* (qu'il nomme *Summa*), celui-ci écrit confusément et fait de tout « une salade mal composée ». Nuñez n'est pas tendre non plus avec son « autre livre d'algèbre », soit l'*Ars magna*, qu'il qualifie de « chaos »[46] (il ne semble pas que Nuñez connaissait la *Logistica* de Borrel et par conséquent ses critiques sur la trop grande diversité des règles). Nuñez loue par contre le travail de Tartaglia ; ce dernier serait selon lui bien meilleur que Pacioli et Cardano[47].

Malgré ces éloges, Nuñez a quelques remarques ou critiques à faire à l'encontre du livre VI du *General trattato de numeri et misure* de Tartaglia, consacré à l'algèbre, dont il donne un aperçu dans la première partie de cet appendice qui fait dix-huit folios. Nous n'allons pas examiner cette partie de l'appendice, qui mériterait une étude approfondie. Nous n'évoquerons que ses remarques concernant la méthode de résolution des équations du troisième degré, qui constituent la seconde partie de ce texte[48]. Nuñez les introduit en disant qu'il souhaite donner ici les raisons qui l'ont poussé à ne pas présenter cette méthode dans son ouvrage[49].

Nuñez commence par reproduire la première partie du sonnet — édité au livre IX des *Quesiti et inventioni diversi* de Tartaglia, à la question XXXIIII —, donnant la méthode de résolution des équations du type $x^3 + bx = c$ (avec b et c positifs) [Nuñez 1567, 334r][50]. Puis il applique l'algorithme sur l'exemple donné par Tartaglia à Cardano, et que ce dernier avait juré de ne pas divulguer[51], à savoir l'équation $x^3 + 3x = 10$. C'était aussi l'exemple retenu par Jacques Peletier du Mans et nous avons vu que la solution est $\sqrt[3]{\sqrt{26}+5} - \sqrt[3]{\sqrt{26}-5}$, que Nuñez écrit « R.v.cu.R.26.

46 [Nuñez 1567, 324r] : « [...] vino otra summa de Hieronymo Cardano, [...]. Este Autor tuuo en el principio orden, mas despues escriue confusamente, y haze de todo vna ensalada mal hecha, y despues embio otro libro de Algebra, que es vn chaos. »

47 [Nuñez 1567, 324r] : « Despues destos Nicolao Tartalla muy gran maestro de cuenta [...] vino al presente vn libro, que en su casa se hallo, en el qual separamente trata de Algebra. El qual libro en la orden, y clareza, y en el estylo muestra ser suyo, principalmente que va en el allegando lo que en los otros libros auia escripto, y por el se puede muy mejor deprender esta arte, que por los libros de Fray Lucas y Cardano. »

48 Je m'appuie ici, en les prolongeant, sur les travaux de Bosmans [1907b, 160-162] et surtout de Maryvonne Spiesser [2012, 287-290].

49 [Nuñez 1567, 334r] : « Y porque auiendo vos dicho que hallo capitulos nueuos me podriades dar culpa, por no los traer en este my libro, os dare desto alguna razon. »

50 Nuñez ne dit rien des autres types d'équations résolus par Tartaglia, à savoir $x^3 = bx + c$ et $x^3 + c = bx$, mais seul le premier cas suffit à sa critique.

51 Nuñez [1567, 334r-v] évoque rapidement la dispute entre Tartaglia, Cardano et Ferrari.

p.5. $\tilde{m}$ R.v.cu.R.26. $\tilde{m}$ .5. »[52]. Nuñez donne pour finir, dans le cas général, l'expression des deux quantités dont la différence des racines cubiques fournit une solution de l'équation :

> Multiplions la moitié du nombre proposé par lui-même — qui est la différence des deux quantités —, et au produit ajoutons le cube de la troisième partie du nombre de la chose, et la racine du tout avec la moitié du même nombre feront un binôme, que nous prendrons pour la première quantité $[p = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}]$, et le résidu correspondant à ce binôme sera la seconde quantité $[q = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}]$.[53]

Nuñez présente alors plusieurs exemples. Les premiers ont pour but de montrer que, dans certains cas, la formule conduit à une racine entière, contrairement à ce que pense Tartaglia, comme nous le verrons plus loin[54]. Ainsi, si l'on applique l'algorithme de résolution à l'équation $x^3+9x = 26$, les radicaux se simplifient pour donner la valeur 2 de la racine[55].

En termes modernes :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{196}+13} - \sqrt[3]{\sqrt{196}-13} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1} = 3 - 1 = 2.$$

Dans les exemples suivants, le binôme et le résidu qui se trouvent sous les racines cubiques sont des cubes d'un binôme et d'un résidu, de sorte

52 [Nuñez 1567, 334v-335r] : « Que busquemos dos quantidades, que la mayor exceda la menor en el numero propuesto, que en este exemplo es .10. y que sean tales, que multiplicando la vna por la otra, hagan tanto como es el cubo de la tercia parte del numero de las cosas, las quales en este exemplo son 3. y la tercia parte dellas es 1., cuyo cubo tambien es 1. y que estas dos quantidades busquemos o por algebra, o por otra qualquier via, y seran estas dos quantidades R.26. p̃. 5. y R.26. $\tilde{m}$. 5. porque la mayor excede la menor en 10. y el ducto de la vna en la otra es .1. Y dize entonces, que de la raiz vniuersal cubica de la mayor sacando la raiz vniuersal cubica de la menor, sera lo que queda el valor de la cosa, quando 1.cu. p̃. 3.co. fueren yguales a .10. conuiene a saber R.v.cu.R.26. p̃. 5. $\tilde{m}$ R.v.cu.R.26. $\tilde{m}$. 5. [...]. »

53 [Nuñez 1567, 335r] : « Multiplicaremos en si la mitad del numero propuesto, que ha de ser la differencia de las dos quantidades, y con el producto juntaremos el cubo de la tercia parte del numero de las cosas, y la raiz de todo junto, y la mitad del mismo numero haran vn binomio, el qual tomaremos por la primera quantidad, y el reciso deste binomio sera la segunda quantidad. »

54 [Nuñez 1567, 335v] : « Es esta Regla nueua de Nicolao Tartalla que trae en este Soneto muy cierta, para saber el valor de la cosa, quando cosas y cubo son yguales a numero, y aun que el dize que non se puede dar della exemplo en quantidades discretas, vos lo daremos. »

55 [Nuñez 1567, 335v] : « Sean 1.cu. p̃. 9.co. yguales al numero 26. y queremos saber quanto es el valor de la cosa. [...] sacando la raiz vniuersal cubica de R.196. $\tilde{m}$. 13. de la raiz vniuersal cubica de R.196. p̃. 13. lo que queda sera el valor de la cosa, que mostraremos ser 2. [...] »

que l'on peut simplifier l'expression, et même si on obtient deux quantités irrationnelles, leur différence donne encore une racine entière[56]. Ainsi pour l'équation $x^3 + 6x = 20$, on a :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3} = 2.$$

De même pour l'équation $x^3 + 3x = 14$, on a :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3} = 2.$$

Ce dernier exemple est proposé par Tartaglia, dans son entretien avec Richard Wentworth, reproduit à la question XLII du livre IX des *Quesiti et inventioni diverse* [Tartaglia 1554, 126v-128v]. Nuñez remarque que Tartaglia fait une erreur de calcul, lorsqu'il dit que la racine de l'équation vaut (en écriture moderne) $\sqrt[3]{7+\sqrt{41}} - \sqrt[3]{7-\sqrt{41}}$[57]. Cette erreur a pour conséquence que Tartaglia ne peut pas remarquer que, dans ce cas, la formule donne la racine entière 2. Ainsi, comme l'a bien remarqué Nuñez[58], Tartaglia est conduit à penser que l'équation a deux solutions distinctes, l'une irrationnelle, obtenue grâce à son algorithme et l'autre rationnelle pour laquelle on n'a pas encore trouvé de règle permettant de la déterminer[59].

---

56 [Nuñez 1567, 336r-v] : « Otros exemplos daremos, en los quales la raiz cubica del binomio es quantidad irracional, y tambien la raiz cubica del reciso es quantidad irracional, mas lo que queda sacando vna raiz de la otra es numero, que sera el valor de la cosa. Exemplo : Sean 1.cu. p̃. 6.co. yguales al numero 20. [...] y sera por tanto el valor de la cosa R.v.cu. de R.108. p̃. 10. menos R.v.cu. de R.108. m̃. 10. la qual monstraremos ser el numero 2. Porque la raiz cubica deste binomio R.108. p̃. 10. es este binomio R.3. p̃. 1. como consta mutiplicando R.3. p̃. 1. en si, y el producto otra vez por R.3. p̃. 1. Mas la raiz cubica deste reciso R.108. m̃. 10. es este reciso R.3. m̃. 1. como consta mutiplicando en si R.3. m̃. 1. y el producto otra vez por R.3. m̃. 1. y manifiesto es, que sacando R.3. m̃. 1. de R.3. p̃. 1. quedan 2. [...] Otro exemplo : Sean 1.cu. p̃. 3co. yguales a 14. [...] el valor de la cosa sera R.v.cu.R.50. p̃. 7. menos R.v.cu. R.50. m̃. 7. »

57 [Nuñez 1567, 336v] : « [...] puesto que Nicolao Tartalla dize en este exemplo en la platica que tuuo con Ricardo Ventuorthe gentil hombre Ingles, que el valor de la cosa es R.v.cu.7. p̃. R.41. menos R.v.cu.7. m̃. R.41. Perro erro en la cuenta por inaduertencia, o vuo yerro en entrambas las impressiones, por que no es sino lo que diximos, que monstraremos ser el numero 2. »

58 [Nuñez 1567, 336v-337r] : « Dize Nicolao Tratalla sobre este exemplo, que este capitulo rescibe dos Reglas, y que la vna dellas nos auia de dar el valor de la cosa racional, que en este exemplo es 2. y esta Regla no es hallada, y que la otra que el hallo, nos da el valor de la cosa irracional, que monstramos ser R.v.cu.R.50. p̃. 7. menos R.v.cu.R.50. m̃. 7. »

59 [Tartaglia 1554, 127v] : « [...] che chi risoluera tal capitolo de 1.cu. piu. 3. cose egual à 14. secondo la regola da me ritrouata, se ritrouara la cosa ualer R.u. cuba .7. piu R.41. men R.u. cuba .7. men R.41. la qual cosa treplicandola, & tal treplicatione aggiongerla al suo cubo fara medesimamente .14. si come fa anchora ualendo la cosa

Nuñez explique alors que pour les équations du type $x^3 + bx = c$ (avec b et c positifs), il est impossible d'avoir à la fois une solution entière et une solution irrationnelle[60] ; la formule de Tartaglia donne bien une solution entière, même si on ne sait pas simplifier l'expression. Le raisonnement de Nuñez est mené sur l'exemple de l'équation $x^3 + 3x = 14$ pour laquelle 2 est une solution : si R est un nombre irrationnel positif, et si R est plus petit (resp. plus grand) que 2, alors $R^3 + 3R$ est plus petit (respectivement plus grand) que 14, donc R ne peut pas être solution de l'équation $x^3 + 3x = 14$.[61] Signalons que Cardano, au chapitre I de l'*Ars magna*, explique que si une somme de puissances impaires est égale à un nombre, l'équation n'a qu'une seule solution réelle, non fictive (« *una erit aestimatio rei vera & nulla ficta* »). Il donne l'exemple de l'équation $x^3 + 6x = 20$ ayant pour seule solution 2. Il ne donne aucune démonstration de cette affirmation [Cardano 1663, vol. 4, 223].

Nuñez donne pour finir plusieurs exemples d'équations pour lesquelles l'expression obtenue par la règle de Tartaglia ne peut pas être simplifiée, alors que l'on peut reconnaître une racine entière. C'est le cas de l'équation $x^3 + 3x = 36$, qui a pour racine 3 et pour laquelle la formule de Tartaglia donne :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}.$$

L'équation $x^3 + 9x = 54$ a aussi pour racine 3 alors que la formule de Tartaglia donne :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}.$$

simplicemente .2. E pero eglie cosa manifesta, che il capitolo de cosa, e cubo egual à numero receue due regole, cioe l'una (che nel sopradetto capitolo) me doueria dar il ualor della cosa rationale, cioe .2. & l'altra é la nostra qual me da la cosa irrationale, come disopra si è uisto. »

60 [Nuñez 1567, 337r] : « Y quanto a esto que el dize, auemos de entender que su intencion no seria que responden dos valores de la cosa, el vno racional, y el otro irracional, quando cubo y cosas son yguales a numero, porque esto es impossibile. »

61 [Nuñez 1567, 337r] : « Porque en este exemplo, si el valor de la cosa que es irracional, es menor que 2. valdran las 3. cosas menos que 6. y el cubo menos que 8. y todo junto menos que 14. Y si es mayor que 2. valdran las 3. cosas mas que 6. y el cubo mas que 8. y todo junto mas que 14. Mas el verdadero sentido deue ser este, que por la Regla que aun no es hallada, nos vernia el valor de la cosa racional descubiertamente, que en este exemplo concluiria ser 2. [...]. »
Remarquons que l'on peut démontrer facilement que les équations du type $x^3+bx = c$ ont une racine réelle et deux racines imaginaires. En effet, si t est une racine réelle de l'équation, alors l'équation $x^3+bx-c = 0$ est équivalente à l'équation $(x - t)(x^2 + tx + t^2 + b) = 0$. Le discriminant de l'équation du deuxième degré est $\Delta = t^2 - 4\left(t^2 + b\right) = -3t^2 - 4b$, qui est négatif.

Nuñez remarque qu'aucun arithméticien, même subtil, ne peut reconnaître que ces deux expressions valent 3 et sont par conséquent égales[62].

Nuñez termine cet appendice en disant qu'il ne se sent pas coupable de ne pas avoir donné dans son algèbre la règle de résolution des équations du troisième degré du type $x^3 + bx = c$, ni les autres, car il n'est pas satisfait de la manière dont elles fournissent la valeur de la racine de l'équation[63]. Maryvonne Spiesser fait alors cette remarque [Spiesser 2012, 289-290] :

> Et il semble clair que ce n'est pas la résolution par radicaux de l'équation du troisième degré qui préoccupe Nunes mais celle d'équations particulières, et surtout la recherche d'une méthode exprimant simplement la solution quand l'expérience montre que cette solution simple existe.

Ainsi, Nuñez est arrêté par la difficulté à extraire les racines cubiques du binôme et du résidu qui composent l'expression à laquelle conduit l'algorithme proposé par Tartaglia. Il reproche aussi à cette méthode de ne pas fournir dans tous les cas la racine entière de l'équation, lorsqu'elle existe, ce qui affaiblit son efficacité. Ceci ne l'incite pas à poursuivre sa lecture du poème de Tartaglia pour les autres types d'équations du troisième degré sans terme du deuxième degré. Et il ne cherche pas non plus à rendre compte des travaux de Cardano sur le sujet.

RECONNAISSANCE DES TRAVAUX DES ALGÉBRISTES ITALIENS PAR SIMON STEVIN

Tout autre est l'attitude de Simon Stevin qui reprend sans état d'âme les travaux des algébristes italiens sur les équations du troisième degré et leur fait faire un pas décisif vers une meilleure compréhension. Stevin publie son *Arithmetique* à Leyde en 1585, soit quarante ans après les tout premiers travaux des algébristes italiens. Le traité est constitué de deux parties[64]. Une première partie, faite de définitions, présente les nombres

---

62 [Nuñez 1567, 341r] : « Ny aura Arithmetico de tan sotil ingenio, que proponiendole estas dos quantidades R.v.cu.R.325. p̃. 18. *m̃* R.v.cu.R.325. *m̃*. 18 y R.v.cu.R.756. p̃. 27. *m̃* R.v.cu.R.756. *m̃*. 27 pueda conoscer que son yguales, y vale pero cada vna dellas 3. y el impedimento es, venir el valor de la cosa explicado por quantidades irracionales, y los binomios las mas de las vezes non seren cubos. »

63 [Nuñez 1567, 341r] : « Y aquy acabo esta obra, supplicando a los Lectores, que no me quieran dar culpa, por non traer esta Regla de co. et cu. yguales a numero, y las otras de dignidades disproporcionales, por sus principios, porque el trabajo era grande, y muy chico el loor, principalmente no me contendando aquella manera de notificar el valor de la cosa. »

64 Voir la description que fait Stevin de son ouvrage dans le paragraphe intitulé « Argument » en prélude à son traité.

arithmétiques, que sont les entiers et les fractions et ce que Stevin appelle les nombres géométriques qui recouvrent les nombres radicaux d'une part et les quantités algébriques d'autre part. Dans la première partie sont aussi décrites les relations sur ces nombres que sont les rapports et proportions, de même que les quatre opérations usuelles de l'arithmétique, que Stevin qualifie de « computations rationnelles ». Cette première partie se termine par l'exposé de la règle de trois, de la règle de division d'un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés et de la règle de fausse position, règles que Stevin regroupe sous le terme de « computations proportionnelles ». La deuxième partie, dite « de l'opération » est constituée de propositions relatives aux computations décrites dans la première partie, portant successivement sur les nombres arithmétiques entiers et rompus, sur les nombres radicaux, puis sur les quantités algébriques. Ainsi, Stevin propose une arithmétique étendue à tous les types de nombres, entiers, fractionnaires, irrationnels et algébriques.

On trouve dans la seconde partie les algorithmes de résolution des équations. Dans un chapitre intitulé « DES INVENTEVRS DE CES REIGLES DE TROIS DES QVANTITEZ » [Stevin 1585, 268], Stevin attribue à « Mahomet filz de Mose Arabien », soit al-Khwārizmī, les méthodes de résolution des équations du premier et du deuxième degrés (et de celles d'y ramenant), à « quelque autheur incognu » les méthodes pour les équations se ramenant à une équation du deuxième degré, à « quelque autre autheur incognu » les méthodes pour les équations du troisième degré et enfin à « Louys de Ferrare » (Ludovico Ferrari, élève de Cardano) les méthodes pour les équations du quatrième degré. Il ne prend donc pas position sur la question de l'attribution des algorithmes de résolution des équations du troisième degré à Scipion del Ferro, Tartaglia ou Cardano, question qu'il reprend en ces termes [Stevin 1585, 268-269] :

> Quant aux inuentions du second autheur incognu, Cardane se dict les auoir troué par escript; mais qu'elles n'estoient point diuulgees; Aussi que Scipio Ferreus de Bologne, aie troué la premiere sorte, qui est de ③ egale à ① ⓪ [soit les équations du type $x^3 = bx + c$][65] ; Auquel suiuoit Nicolas Tartalia Bressian, mais par occasion de quelque dispute qu'il eust de ceste matiere, auec Antonio Maria Florido Venetien, disciple dudict Scipio, en laquelle il discouura quelque chose, par laquelle Nicolas le coniectura, & trouua ; Lequel apres beaucoup de prieres de Cardane : le lui à declairé, ce que luy Cardane estoit fondement, par lequel il est venu au bout de plusieurs demonstrations geometriques,

[65] Stevin note ⓪ ce qu'il nomme le « commencement de quantité », soit tout nombre enntier, fractionnaire ou radical, qui correspond pour nous au terme constant de l'équation ; il note par ailleurs ① le nombre algébrique de premier ordre, soit notre x, ② celui du deuxième ordre, soit notre x^2, etc. [Stevin 1585, 15-16].

de ③ egale à ② ① ⓪ [soit les équations du type $x^3 = ax^2 + bx + c$], & leurs dependances, dont il à descript vn liure intitulé *Ars magna.*

Résolution des équations du deuxième degré

Avant de nous intéresser au traitement que fait Stevin des équations du troisième degré, disons un mot des équations du deuxième degré. Leur résolution fait l'objet du problème LXVIII dont l'énoncé est le suivant [Stevin 1585, 285] :

> Estant donnez trois termes, desquels le premier ②, le second ① ⓪, le troisiesme nombre algebraique quelconque : Trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Et Stevin ajoute aussitôt :

> NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme se peut rencontrer en trois differences à sçavoir : ① + ⓪, −① + ⓪, ① − ⓪.

On remarque premièrement que la recherche de la solution de l'équation est présentée comme la découverte d'un quatrième terme proportionnel. En d'autres termes, si le premier terme est x^2, le deuxième terme $ax+b$, $-ax+b$ ou $ax-b$ (avec a et b positifs) et le troisième terme x, on cherche le quatrième terme proportionnel, non pas dans un rapport quelconque, mais dans un rapport d'égalité, de sorte que si $x^2 = ax + b$, $x^2 = -ax + b$ ou $x^2 = ax - b$, on se demande que vaut x. Cette présentation permet à Stevin de renforcer le parallélisme qu'il souhaite établir entre les nombres algébriques et les nombres entiers, objets traditionnels de l'arithmétique. On sait le rôle fondamental que joue la règle de trois dans la résolution de nombreux problèmes ; c'est donc cette règle, qui est la première « computation proportionnelle », que Stevin met ici en avant.

Notre deuxième remarque porte sur les expressions adoptées par Stevin pour le second membre de l'équation ou de la proportion : ① + ⓪, −① + ⓪ ou ① − ⓪, soit $ax + b$, $-ax + b$ ou $ax - b$. Stevin admet des coefficients négatifs, même en début d'expression. C'est un apport significatif à l'unification des règles de résolution des équations du deuxième degré, entamée par Stifel avec sa fameuse règle AMASIAS[66]. Malgré tout, Stevin

---

66 Voir plus haut, notre partie consacrée à Peletier. Stevin reconnaît l'apport de Stifel à cette question, puisqu'il renvoie à sa règle. Le « nota » se poursuit en effet par ces mots [Stevin 1585, 285] : « Desquelles les autres en donnent trois diuerses operations, ausquels Michel Stiffle à accommodé ce mot *Amasias.* » Stevin renvoie aussi au moyen mnémotechnique proposé par Cardano au chapitre V de son *Ars Magna*, que nous avons évoqué plus haut : « & Cardane liure 10 chap. 5 ce carme, *Querna, dabis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami.* »

expose la méthode d'extraction de la racine ou des racines de ces équations en trois temps, selon la forme du second terme, tout en expliquant que l'algorithme est toujours le même [Stevin 1585, 285-286] :

> Mais nous demonstrerons vne seule maniere, par laquelle sans varier d'vne syllabe, l'operation sera en toutes trois la mesme : Parquoi faut sçavoir que nous les appellons pas Differences, en respect des operations car comme nous disons, l'operation est en toutes la mesme, mais en respect des diuersitez, de la disposition des quantitez, du second terme donné.

En d'autres termes, là où Stifel expliquait que l'on doit faire une addition ou une soustraction, selon le signe du coefficient du terme de premier degré, Stevin propose de faire dans tous les cas une addition, même lorsqu'il s'agit d'ajouter un terme négatif. Ainsi l'algorithme proposé se déroule pour chaque cas de la même manière : on commence par prendre la moitié du coefficient de ①, ou, selon les termes de Stevin, le « nombre de multitude des quantitez » (qu'il soit positif ou négatif), que l'on porte au carré ; à ce carré on ajoute le terme constant (qu'il soit positif ou négatif) ; de cette somme on prend la racine carrée ; à cette racine carrée on ajoute le premier nombre déterminé dans l'algorithme, à savoir la moitié du coefficient de ① (qu'il soit positif ou négatif, et là encore Stevin parle dans tous les cas d'addition). On a alors le quatrième terme proportionnel cherché ou la racine de l'équation. Seule différence notable dans le troisième cas, celui où le deuxième terme est de la forme ① − ⓪ : on a deux racines, l'une obtenue comme précédemment, l'autre en retranchant la racine à la moitié du nombre associé à ①. En termes modernes, si on a l'équation $x^2 = px + q$ (p et q étant positifs ou négatifs, mais pas tous les deux négatifs en même temps), alors une racine de l'équation est $x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$; et si p est positif et q négatif, on a une autre racine $x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ (cette expression est négative si q est positif et Stevin, comme ses contemporains, considère que les nombres négatifs ne peuvent être de vraies racines des équations, même si, comme nous le verrons plus loin, il peut être amené à les considérer).

Notons aussi que dans la présentation de la résolution des équations, qu'elles soient du deuxième degré ou de degré supérieur, Stevin suit toujours à peu près le même schéma (certaines étapes peuvent manquer) : énoncé du problème ; « Explication du donné », soit les termes du problème présentés sur un exemple ; « Explication du requis. Il faut trouuer leur quatriesme terme proportionnel » ; « Construction », soit le déroulé de l'algorithme de résolution sur l'exemple proposé ; « Démonstration arithmétique » puis « Autre démonstration géométrique », qui sont des justifications de la validité de l'algorithme, d'une part dans le domaine des nombres arithmétiques et d'autre part dans celui des nombres géométriques (nous aurons l'occasion de préciser ce point plus loin)[67]. Par ailleurs, dans un paragraphe intitulé « De l'origine de la construction », Stevin expose ce qui, selon lui, a permis la découverte de l'algorithme de résolution [Malet 2008, 319-320].

Résolution des équations du troisième degré sans terme du deuxième degré

Venons-en maintenant à l'extraction de la racine des équations du troisième degré, où nous noterons des avancées du même type que celles que nous venons de souligner pour les équations de deuxième degré. Dans le problème LXIX, Stevin considère les équations qui sont sans terme du deuxième degré. L'énoncé du problème est très proche de celui que nous avons vu pour les équations du deuxième degré [Stevin 1585, 305] :

> Estant donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ① ⓪, le troisiesme nombre algebraique quelconque : Trouuer leur quatriesme terme proportionel.

Et là encore, Stevin remarque :

> Nota. Le binomie du second terme donné de ce probleme, se peut rencontrer en trois differences, à sçavoir : ① + ⓪, −① + ⓪ ou ① − ⓪. Lesquelles trois differences nous declairerons separeement.

Stevin examine donc, dans l'ordre, les équations du type $x^3 = bx + c$, $x^3 = -bx+c$ et $x^3 = bx-c$ (avec b et c positifs), alors que dans les chapitres

---

67 Dans la première partie de son traité, Stevin explique les différentes étapes, ou « membres », des problèmes et des théorèmes [Stevin 1585, 75–77] : « Il faut doncques sçauoir que la proposition mathematique a deux especes, comme Probleme, & Theoreme. [...] Et ont ces deux propositions certains membres, ausquels en chascun est distinctement traicté vne certaine partie de la mesme proposition. Ceux du Probleme sont tels : Le premier membre est vne generale proposition [...] Le second membre est du *donné.* Par le vocable donné [...] entend on la chose proposée conforme à la petition du premier membre. Le troisiesme membre est du *Requis,* auquel on explique ce que du donné du second membre l'on veut auoir effectué. Le quatriesme membre est de la *Construction,* en laquelle faict par le donné quelque operation conforme au requis. Le cinquiesme membre est *Preparation de la demonstration* : mais tous problemes ne l'ont pas necessairement à faire, par ce qu'il auaient souuentesfois que les choses sont suffisantes par eux mesmes pour estre demonstrees, sans faire ceste preparation. Le sixiesme membre est la *Demonstration,* en laquelle on esprouue que la construction est vraie, & conforme au requis. [...] Le septiesme membre est la *Conclusion,* en laquelle on conclud (repetant quasi tous les motz du premier nombre) que tout ce qui au probleme estoit requis est accompli. »

XI à XIII de l'*Ars magna*, Cardano expose successivement les équations du type $x^3 + bx = c$, $x^3 = bx + c$ et $x^3 + c = bx$.

Stevin commence par résoudre l'équation $x^3 = 6x + 40$ (Cardano propose le même exemple au chapitre XII). Reprenant le procédé décrit par Cardano[68], il obtient comme solution $x_0 = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$. Il déroule l'algorithme ainsi [Stevin 1585, 305-306] :

Construction

Le quarré de la moitie de 40 donné, est	400
Du mesme soubstraict le cube de 2 (tiers de 6 de 6①) qui est 8 reste 392,	
sa racine $\surd 392$, qui aioustée à 20, moitie des 40 donnez faict	$20 + \surd 392$
Sa racine cubique est	$\surd$③*bino.*$20 + \surd 392$
A laquelle aiousté son respondant binomie	
disioinct comme	$\surd$③*bino.*$20 - \surd 392$
Donne somme	$\surd$③*bino.*$20 + \surd 392 + \surd$③*bino.*$20 - \surd 392$
Laquelle ie di estre le quatriesme terme proportionel requis.	

Il explique alors que si l'on pouvait simplifier l'expression, ou selon ses termes, si l'on pouvait convertir le multinomie (c'est-à-dire l'expression composée de plusieurs radicaux) en nombre arithmétique, on trouverait 4. Ainsi, Stevin reconnaît ici, comme Nuñez avant lui, qu'il a lu[69], une limite à la méthode de résolution de Tartaglia-Cardano : elle ne permet pas toujours de trouver la solution entière, quand elle existe, car on n'a pas encore trouvé le moyen de simplifier les radicaux.

Après avoir remarqué que 4 est solution de l'équation précédente, Stevin explique qu'on peut le vérifier facilement , c'est-à-dire que l'on peut montrer que l'on a bien proportionnalité entre x^3, $6x+40$, x et 4. Cette vérification, Stevin l'appelle « démonstration arithmétique », puisque, grâce à cette potentielle simplification, on quitte le domaine des radicaux pour

---

68 [Cardano 1663, vol. 4, 251] : « CAPVT. XII : *De cubo æquali rebus & numero.* [...] REGVLA. Regula igitur est, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipsum ex eodem, & residui radicem adde dimidio numeri æquationis, atque iterum minue ab eodem dimidio, habebisque vt dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum R. cubicæ iunctæ rem ipsam constituunt. » (CHAP. XII : Au sujet du cube égal aux choses et à un nombre. [...] RÈGLE. C'est pourquoi la règle est : lorsque le cube de la troisième partie du nombre des choses n'est pas plus grand que le carré de la moitié du nombre de l'équation, retranche celui-là de celui-ci et ajoute la racine du reste à la moitié du nombre de l'équation, puis retranche-le de la même moitié et tu auras ce que nous appelons le binôme et l'apotomé, dont les racines cubiques, ajoutées l'une à l'autre, donnent la chose-même).

69 Stevin cite Nuñez à propos de la recherche du plus grand commun diviseur entre deux multinomies algébriques, ou, si l'on veut, deux polynômes [Bosmans 1907a, 240], [Stevin 1585, 164-167].

entrer dans celui des nombres dits arithmétiques, soit ici les entiers [Stevin 1585, 306] :

> *Demonstration Arithmetique.* Si la conuersion du multinomie de ceste solution en nombre Arith. fust legitimement inuentée (quand il sera possible comme ici) ce seroit singuliere inuention, seruant autant aux problemes suiuans, comme à cestui ci ; & le trouuerions valoir 4, par lequel nous pouuons faire demonstration, mettant soubs chascun terme sa valeur en ceste sorte :

1③.	6①+40.	1①.	4.
64.	64.	4.	4.

> Et appert que 4 est leur quatriesme terme proportionel.

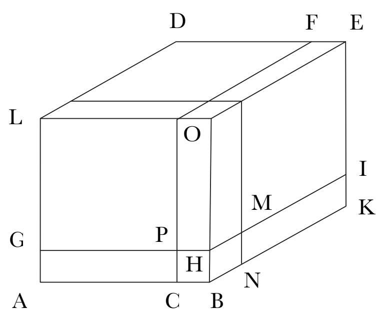

FIGURE 1.

La « démonstration géométrique » qui suit s'appuie sur la fig. 1 et est fondée sur la décomposition du grand cube de côté AB en deux cubes plus petits de côtés DF (= AC) et BC et trois parallélépipèdes rectangles égaux au parallélépipède LM[70], ou, si l'on veut, sur l'identité :

$$(\mathrm{AC}+\mathrm{CB})^3 = \mathrm{AC}^3 + \mathrm{CB}^3 + 3\mathrm{AC}.\mathrm{CB}(\mathrm{AC}+\mathrm{CB}).$$

Voici alors comment Stevin justifie l'algorithme de résolution[71] qu'il vient de donner pour l'équation $x^3 = 6x + 40$ et qui lui a fourni la racine $x = \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

70 Stevin démontre cette décomposition au problème 69 ; la démonstration consiste à montrer que les trois parallélépipèdes sont égaux, en exhibant l'égalité de leurs côtés [Stevin 1585, 302-303].

71 [Stevin 1585, 306-307] : « *Preparation d'autre demonstration Geometrique.* Soient à la figure du theoreme deuant ce 69 probleme selon la precedente operation, deux cubes LF [c'est plutôt le cube de côté DF dont on n'a pas le nom des autres sommets] 20+√392, & CHN 20 – √392, leur somme est 40, & leur produict 8 ; Doncques le costé DF, ou AC, faict √③*bino.*20 + √392, & le costé CB, faict √③*bino.*20 – √392, lesquels deux costez AC, & CB, aioustez, font pour le costé AB, du cube AE,

En reprenant les notations de la figure ci-dessus, Stevin pose que AC fait $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ et BC $\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$. On a alors AB = AC + BC, donc AB vaut $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, ou x. Stevin remarque ensuite que le produit AC.BC est égal 2 (dans un problème précédent il a montré comment multiplier entre eux deux nombres de ce genre), de sorte que la surface GC vaut 2. Par conséquent, la surface MO vaut aussi 2. Alors, le parallélépipède LM, produit de la surface MO par le côté GH (= AB) vaut $2x$, de même que les deux autres parallélépipèdes. Par ailleurs, la somme des cubes de $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ et de $\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$ fait 40. Ainsi, la somme des deux cubes (de côtés égaux à AC et CB) et des trois parallélépipèdes fait $40 + 6x$, et ces cinq solides forment le cube AE ou x^3. D'où on a bien $x^3 = 6x + 40$.

On voit ici comment Stevin mêle les calculs sur les radicaux à la décomposition géométrique du cube AE en cinq solides — deux cubes et trois parallélépipèdes — afin de vérifier que la valeur fournie grâce à l'algorithme qu'il a présenté plus haut, à savoir $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, est bien solution de l'équation. Il qualifie cette « démonstration » (qui est pour nous plutôt une vérification) de « géométrique », car il se place ici dans le domaine des nombres géométriques. Il faut en effet remettre les deux démonstrations, arithmétique et géométrique, dans le cadre général qui est celui du traité de Stevin. Ce dernier souhaite englober sous le terme de « nombres », qui sont les objets de son *Arithmetique*, aussi bien les nombres entiers et les fractions, qu'il nomme « nombres arithmétiques », que les radicaux et les nombres algébriques, qu'il nomme « nombres géométriques » [Malet 2006, 76-77]. Plus précisément, il définit le « nombre arithmetique » comme « celui qu'on explique sans adiectif de grandeur » (définition VI) [Stevin 1585, p. 6]. Dans l'explication qui suit, il précise qu'on doit ainsi faire la différence entre les nombres expliqués par un adjectif de grandeur,

√③*bino*.20 + √392 + √③*bino*.20 − √392. Il faut demonstrer, que tout le cube AE vaudra 6①+40, qui estant faict nous aurons le requis ; car si on demonstre que le cube qui est AE, de 1① AB √③*bino*.20 + √392 + √③*bino*.20 − √392, vaut 6① + 40 ; Doncques on conclura par la renuerse raison que du cube AE 6① + 40, la 1① AB vaudra √③*bino*.20 + √392 + √③*bino*.20 − √392, & par consequent 1③ vallant 6① + 40, qu'alors 1① vaudra √③*bino*.20 + √392 + √③*bino*.20 − √392.
Demonstration. Le produict de AC √③*bino*.20 + √392, par CB √③*bino*.20 − √392 est (par le 40 probleme) 2, pour la superfice GC, parquoi la superfice MO sera aussi 2 qui multipliée par 1① GH (car GH est egale à 1① AB) donne produict pour le solide rectangle LH [à corriger en LM] 2①, & semblablement seront les deux solides rectangles NF, & GC, aussi chacun 2①, & tous trois ensemble feront 6①. Item les deux cubes LF [c'est plutôt le cube de côté DF], & CHN (veu que leurs costez sont comme dessus) font ensemble 40 ; doncques tout le cube AE, faict 6①+40 ; Ergo, &c. ce qu'il falloit demonstrer. »

« comme les nombres quarrés ou cubiques, racines, quantitez &c. lesquels nous appellons nombres Geometriques », et les nombres expliqués sans adjectif de grandeur, « comme un, deux, trois, trois cincquiesmes, &c. » [Stevin 1585, p. 7]. Par exemple, 9 peut être considéré pour lui-même, c'est alors un nombre Arithmétique. Il peut aussi être considéré selon la place qu'il occupe dans une série géométrique. Ainsi, dans la série géométrique de raison 3, 9 est considéré comme nombre Géométrique « carré » ; mais dans la série géométrique de raison 9, il est nombre Géométrique « côté » [Stevin 1585, p. 29-30]. Par ailleurs, toujours pour ces nombres en progression géométrique, Stevin remarque [1585, p. 9] que :

> Ils [les anciens] ont veu qu'il estoit necessaire, de donner des propres noms à ces nombres, [...] appelans le premier en l'ordre *Prime*, que nous signifierons par ①, & le deuxième en l'ordre ils le nommoient *Seconde*, que nous denoterons par ②, et ainsi des autres [...].

Et il accompagne ces explications de représentations géométriques, à l'aide de lignes, de carrés, de cubes et d'empilements de cubes (qui lui permettent de contourner l'obstacle de la quatrième dimension) [Stevin 1585, p. 12-13], ce qui le conduit aux définitions suivantes [Stevin 1585, p. 15-16] : « Prime quantité, est vne ligne droicte nombre expliquée, son charactere est tel ① » (Définition XV), c'est-à-dire que la *Prime quantité* est un nombre, représenté par une ligne, au premier rang dans la progression géométrique, et auquel on associe le signe ① ; « Seconde quantité, est vn quarré descript d'vne ligne egale à la prime quantité, son charactere est tel ② » (Définition XVI) ; etc. On a aussi le « Commencement de quantité », qui « est tout nombre Arithmetique ou radical quelconque, son charactere est ⓪ » (définition XIV). Et Stevin précise que ce n'est pas la valeur numérique potentielle que l'on peut attribuer à ces quantités qui doit être considérée mais bien la place qu'elles occupent dans la progression géométrique qu'elles constituent [Stevin 1585, p. 18] :

> [...] la prime quantité, laquelle les algebraiciens vsent pour l'inferieure ne l'est pas, consideré ce qui consiste potentiellement en eux : mais comme il y a vn infini maieur progres des quantitez depuis l'vnité, ou de la prime quantité en ascendant, comme ①②③, &c.

Et finalement « Nombre algebraique entier, est quantité ou composee multitude de quantitez » (définition XIX) [Stevin 1585, p. 19], soit, par exemple, les nombres 3①, $\frac{1}{4}$① et $\sqrt{}$2③. Par ailleurs, le « nombre expliquant la valeur de quantité géométrique », c'est-à-dire la valeur numérique que l'on peut associer à la quantité prime ou la quantité seconde etc, est appelée « nombre géométrique » (définition XXXI) [Stevin 1585, p. 29], comme nous avons vu plus haut que 9 peut être dit « nombre carré », s'il est en deuxième position dans la progression géométrique de raison 3, ayant alors pour « charactere » ②.

C'est dans ce cadre que l'on doit comprendre la « démonstration géométrique » de l'algorithme de résolution de l'équation $x^3 = 6x + 40$, comme le montre bien l'expression « 1① AB $\surd$③*bino.*20 + $\surd$392 + $\surd$③*bino.*20 − $\surd$392 » que l'on rencontre au cours de la preuve et qui signifie que la *Prime quantité* 1①, dont la valeur est le nombre géométrique $\surd$③*bino.*20 + $\surd$392 + $\surd$③*bino.*20 − $\surd$392, est représentée par la ligne AB. Stevin peut alors jouer sur tous les registres, le calcul algébrique, le calcul sur les radicaux et la géométrie, afin de vérifier que l'expression fournie par l'algorithme est bien solution de l'équation.

Venons-en maintenant à l'établissement de l'origine de l'algorithme[72], là encore pour l'équation $x^3 = 6x + 40$. Reprenant la figure ci-dessus, Stevin suppose cette fois que $x^3 = 6x + 40$. Il représente x par le côté AB du cube AE, de sorte que AE vaut à la fois x^3 et $6x + 40$. Le cube AE étant décomposé en deux cubes et en trois parallélépipèdes rectangles égaux [soit $x^3 = (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$], il demande que la somme des deux cubes, de côtés AC et CB, vaille 40 et que chacun des trois solides restants, LM, NF et GC fasse $2x$ [soit $\alpha^3 + \beta^3 = 40$ et $\alpha\beta\,(\alpha + \beta) = 2x$]. Il remarque que chacun des parallélépipèdes a un de ses côtés égal à AB, qui vaut x, de

72 [Stevin 1585, 310] : « L'origine de la precedente construction apparoist à la figure du theoreme deuant ce 69 probleme en ceste sorte : Veu qu'il y a proposé, que 1③ qui soit AE, est egale à 6①+40 , & que l'on desire sçauoir la valeur de 1① AB, nous distribuons ces deux parties, comme 6①, & 40, à les parties integrantes du cube AE, & posons que les deux cubes comme LF, & CHN, sont 40, & que les trois solides rectangles comme LH. NF. GC sont les 6① ; Doncques chasque solide rectangle sera 2① ; à sçauoir la tierce part des 6① ; Mais la longeur de chasque solide rectangle est 1①, à sçauoir le costé du cube AE : Diuise doncques le solide 2①, par son costé 1② [à corriger en 1①], donne quotient 2, pour vne superfice comme AP. Estant doncques la superfice AP 2, il faut que AC, multiplié par PC, face 2 ; Mais AC, & PC, sont les deux costez des cubes LF, & CHN, qui font ensemble 40 par l'hypothese : Ergo les nombres de AC, & PC, sont tels que leur produict est 2, & la somme de leurs cubes est 40 ; Mais CB, est egale à PC, ergo les nombres de AC & CB, sont tels leur produict est 2, & la somme de leurs cubes est 40.
Quand doncques nous aurons trouuez tels deux nombres, la somme des mesmes (veu que AB, est la somme de AC & CB) sera la requise valeur de 1① AB. Et pourtant disons nous en ceste premiere difference par reigle generale, que quand deux nombres multipliez, donnent pour produict le tiers du nombre de multitude de la ① donnée, & que la somme de leurs cubes est egale au ⓪ donné, que la somme d'iceux deux nombres sera la valeur de 1①. Qui estant ainsi nous metterons vne question telle : *Trouuons deux nombres tels que leur produict soit 2* (qui est le tiers de 6 des 6① donnez) & *la somme de leurs cubes 40* (qui est le 40 donné). Et est ceste la 7 question du 81 probleme, par l'operation de laquelle il appert estre colligée la reigle de la construction precedente. Laquelle origine il nous falloit declarer. »

sorte que la surface associée est égale à 2. Ainsi, le rectangle AP vaut 2 et par conséquent le produit de AC par CB doit valoir 2 [$\alpha\beta = 2$]. On a ainsi deux nombres, AC et CB, tels que leur produit est égal à 2 et la somme de leurs cubes vaut 40. On est donc amené à chercher deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 40 \\ \alpha\beta = \frac{6}{3}. \end{cases}$$

Alors, si on pose $x = \alpha + \beta$, on aura bien $x^3 = (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 40 + 6x$. Dans un problème précédent, Stevin a expliqué comment trouver deux tels nombres.

On peut comparer cette preuve à la « demonstratio » que propose Cardano avant d'énoncer la règle d'extraction de la racine des équations du type « le cube égal aux choses et à un nombres ». Celle-ci est fondée sur la décomposition du cube en deux cubes plus petits et six parallélépipèdes, ou, s'il l'on veut, sur l'identité remarquable :

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\beta^2\alpha.$$

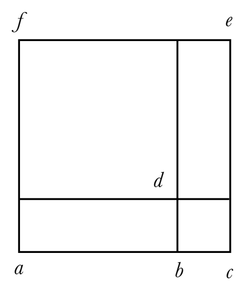

FIGURE 2.

La démonstration est menée dans le cas d'une équation générale[73], que, pour plus de facilité, nous écrirons $x^3 = px + q$ (p et q étant positifs).

73 [Cardano 1663, vol. 4, 251] : « CAPVT XII. *De cubo æquali rebus & numero.* DEMONSTRATIO. Sit etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi dc & de [à corriger en df], quorum latera ab & bc, producant tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico ac esse rei quæsitæ æstimationem, cùm enim ex ab in bc fiat tertia pars numeri rerum, ex ab in bc ter, fiet numerus rerum, & ex ac in productum ex ab in bc ter, fient res ipsæ, posita ac re, at ex ac in productum ab in bc ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex ab in quadratum bc, alia tria ex bc in quadratum ab, hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa verò cum cubis dc & df, ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum ae, cubi etiam dc & df, æquiualent numero proposito, igitur cubus ae æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrandum. » (Chap. XII. Au sujet du cube égal aux choses et à un

Cardano considère les deux cubes *dc* et *df* de côtés *ab* et *bc* (voir la fig. 2, reproduite à partir du texte de Cardano ; on remarque que ce dernier ne représente que les surfaces avant des solides et, au cours de la preuve il désigne ces solides par ces surfaces). Il suppose que « les côtés *ab* et *bc* multipliés l'un par l'autre produisent la troisième partie du nombre des choses et que ces cubes joints soient égaux au nombre ». C'est-à-dire :

$$\begin{cases} ab \cdot bc = \frac{p}{3} \\ ab^3 + bc^3 = q \end{cases}$$

Il veut démontrer que « *ac* est la valeur de la chose cherchée », soit x ; il doit donc prouver que le cube de *ac* (x^3), soit *ae*, est égal « aux choses et au nombre », soit à $px+q$. Il part de la première égalité qu'il écrit : $3.\,ab.bc = p$. En multipliant par *ac* (qui vaut x), il en déduit que $ac.(3.ab.bc) = px$. Il remarque alors que $ac.\,(3.ab.bc) = 3ab.bc^2 + 3bc.ab^2$. Donc, $3.\,ab.bc^2 + 3.\,bc.ab^2 = px$. Mais Cardano a démontré plus haut, que le cube *ae* est composé de ces six solides et des deux cubes *dc* et *df*. Donc, si on ajoute à l'égalité précédente les deux cubes *dc* et *df*, dont la somme vaut le nombre de l'équation, soit q, on aura $ae = px + q$, ce qu'il fallait démontrer.

On remarque que Cardano joue à la fois sur le registre de la géométrie et sur celui de l'arithmétique. Ainsi, *ac* est à la fois la ligne, côté du cube *de*, et « la valeur de la chose cherchée ». Mais contrairement à Stevin, Cardano ne donne pas le cadre théorique qui lui permet d'agir ainsi.

Cette démonstration ne correspond pas à la preuve de l'origine de l'algorithme proposée par Stevin. En effet, selon les instructions données par Tartaglia dans le poème qu'il lui a transmis, Cardano suppose directement l'existence de deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = p \\ \alpha\beta = \frac{q}{3} \end{cases}$$

nombre. Démonstration. Soit le cube égal aux choses et à un nombre, et soient deux cubes dc et df, dont les côtés ab et bc, multipliés l'un par l'autre, produisent la troisième partie du nombre des choses, et que ces cubes joints soient égaux au nombre, je dis que ac est la valeur de la chose cherchée. En effet, puisque à partir de ab par bc est faite la troisième partie du nombre des choses, à partir de ab par bc trois fois on aura le nombre des choses et à partir de ac par le produit fait à partir de ab par bc trois fois on a les choses-mêmes, ac étant posée égale à la chose. Mais à partir de ac par le produit fait à partir de ab par bc trois fois on aura six corps dont trois sont faits à partir de ab par le carré de bc et les trois autres à partir de bc par le carré de ab. C'est pourquoi ces six corps sont égaux aux choses, et ceux-ci avec les cubes dc et df constituent le cube ae, d'après la première supposition du chapitre VI. Or les cubes dc et df équivalent au nombre proposé, c'est pourquoi le cube ae est égal aux choses et au nombre de ce qui est proposé, ce qui était à démontrer ».

et il montre que $x = \alpha + \beta$ est solution de l'équation $x^3 = px + q$. Stevin explique quant à lui pourquoi on est amené à poser la recherche de deux tels nombres pour déterminer la racine de l'équation.

Pour finir, toujours à propos des équations du type $x^3 = bx + c$, dans un paragraphe intitulé « DE L'IMPERFECTION QU'IL Y A EN CESTE PREMIERE DIFFERENCE », Stevin remarque qu'il arrive parfois que l'on ait $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ inférieur à $\left(\frac{b}{3}\right)^3$, de sorte que l'on ne peut pas soustraire le cube du carré comme le requiert l'algorithme permettant de déterminer la racine $x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$ [Stevin 1585, 308][74] :

> Il auient en aucuns exemples de ceste difference, que le quarré de la moitie du ⓪ donné, sera moindre que le cube du tiers du nombre de multitude de ① donnée ; D'ou s'ensuit que le mesme cube, ne se pourra soubstraire d'iceluy quarré, comme veut la reigle de la precedente construction ; de sorte que ceste premiere difference (ensemble aucuns exemples des problemes suiuans, qui se conuertissent en icelle) est encore imparfaicte.

Stevin renvoie alors à Bombelli et à ses signes « *più di meno* » (plus de moins) et « *meno di meno* » (moins de moins), qui permettent d'exprimer la racine carrée d'un nombre négatif, qui n'est ni positive, ni négative. Ainsi, lorsque Bombelli [1572, 293-294] se propose de résoudre l'équation $x^3 = 12x + 9$, l'algorithme de Cardano le conduit à la solution $x_0 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ ou, si l'on veut, à $x_0 = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, qu'il écrit « R.c.⌊2.*p.di m*11.⌋ p. R.c.⌊2.*m.di m*11.⌋ ». Bombelli remarque alors que les deux expressions « R.c.⌊2.*p.di m*11.⌋ » et « R.c.⌊2.*m.di m*11.⌋ » peuvent être simplifiées en « 2. *p. di m.* 1. » et « 2. *m. di m.*1. » (soit $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$ et $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 - i$), de sorte que l'expression totale donne pour racine le nombre entier 4.

Stevin résout quant à lui l'équation $x^3 = 30x + 36$, dont la racine est, en écriture moderne, $\sqrt[3]{18 + 26i} + \sqrt[3]{18 - 26i}$ [Stevin 1585, 308-309] :

> Rafael Bombelle la solue par diction de *plus de moins* & *moins de moins* en ceste sorte : Soient les trois termes donnez, desquels on requiert le quatriesme proportionel, tels : le premier 1③, le second 30①+36, le troisiesme 1①.
>
> *Construction semblable à la precedente*
>
> Le quarré de la moitie de 36 donné est 324
> Du mesme sousbtraict le cube de 10 (tiers de 30 des 30① données)

[74] Dans la règle de Cardano, il est bien spécifié que le cube du tiers du nombre de choses doit être plus petit que le carré de la moitié du nombre de l'équation (voir note précédente).

qui est 1000, reste -676, sa racine + de -26, qui aiousté à 18,
moitié des 36 faict 18 + de -26
Sa racine cubique $\sqrt{\text{③}}$ *bino.*18 + de -26
A laquelle aiousté son respondant binomie disioinct,
comme $\sqrt{\text{③}}$ *bino.*18 − de -26
Donne somme & solution $\sqrt{\text{③}}$*bino.*18 + de − 26 + $\sqrt{\text{③}}$*bino.*18 − de − 26

Et Stevin ajoute que si l'on savait simplifier l'expression $\sqrt[3]{18+26i}+\sqrt[3]{18-26i}$ pour trouver 6, qui est solution de l'équation, la méthode serait parfaite :

> Or si par les nombres de ceste solution, l'on sceust approcher infinement à 6 (car ils vallent precisement autant) comme on faict par les nombres de la solution, du precedent premier exemple, certes ceste difference seroit en sa desirée parfection.

Or, Stevin aurait pu remarquer que $\sqrt[3]{18+26i}=3+i$ et $\sqrt[3]{18-26i}=3-i$, en s'inspirant de l'exemple présenté par Bombelli. Mais il ne le fait pas, alors même que dans son *Algebra*, Bombelli explique dans le chapitre intitulé « Modo di trovare il lato Cubico di simil qualità di Radici » comment déterminer les racines cubiques des expressions du type $a+\sqrt{-b}$[75] [Gavagna 2014, 179]. Il admet que cette racine est une expression du même type $x+\sqrt{-y}$, et montre que dans ce cas :

$$\begin{cases} x^3-3xy=a \\ x^2+y=\sqrt[3]{a^2+b}. \end{cases}$$

Pour les équations du type $x^3=-bx+c$ (b et c étant positifs), pour lesquelles la règle de Cardano[76] donne la solution

75 [Bombelli 1572, 180] : « Volendo trouare il lato Cubico di simili specie di Radici, per prattica si terrà questo modo. Giongasi il quadrato del numero col quadrato della R.e della somma si pigli il lato Cubico, poi si cerchi à tentone di trouare un numero, & una R.q. che li loro quadrati gionti insieme faccino tanto, quanto fù il lato cubico detto di sopra, e che del cubato del numero cauatone il triplo della multiplicatione del numero uia il quadrato della Rad. q. quello, che resta, fia il numero del lato, [...] ».

76 [Cardano 1663, vol. 4, 249-250] : « CAPVT XI. *De Cubo & rebus æqualibus Numero.* [...] REGVLA. Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seruabis vnique dimidium numeri quod iam in se duxeras, adiicies, ab altera dimidium idem minues, habebisque Binomium cum sua Apotomæ, inde detracta $\mathfrak{R}$. cubica Apotomæ ex $\mathfrak{R}$. cubica sui Binomij, residuum quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio. » (CHAP. XI. Au sujet du cube et des choses égaux à un nombre [...] Règle. Ayant porté la troisième partie du nombre des choses au cube, ajoute-lui le carré de la moitié du nombre de l'équation, et du tout prends la racine, précisément carrée, que tu garderas et que, d'une part, tu ajouteras à la moitié du nombre que tu as déjà multipliée par elle-même et de laquelle, d'autre part, tu retrancheras la même moitié, et tu auras le binôme et son apotomé ; alors, ayant retranché la racine cubique de l'aptomé de la racine cubique de son binôme, le reste qui en resulte est la valeur de la chose.)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}},$$

Stevin déroule l'algorithme sur l'exemple de l'équation $x^3 = -6x + 20$, avant d'en donner la démonstration arithmétique, la démonstration géométrique et l'origine, selon des schémas très proches de ce que nous avons vu précédemment.

Enfin, pour les équations du type $x^3 = bx - c$ (avec b et c positifs), Stevin explique, là encore sur un exemple (il résout l'équation $x^3 = 7x - 6$), et toujours à la suite de Cardano[77], qu'on l'on doit considérer l'équation conjointe ($y^3 = 7y + 6$), dont on détermine la solution y_0 grâce à la première règle. Alors l'équation initiale a deux solutions que l'on obtient en résolvant l'équation du deuxième degré $x^2 = 3x - 2$ [Stevin 1585, 314-315] :

Construction.

On mettera (par reigle) + au lieu du − donné, de sorte que 1③,
se posera egale à 7①+6, desquels la valeur de 1①, par la precedente
premiere difference, est 3, auquel est appliqué ① sera 3①
Et le quarré dudict 3, est 9, qui soubstraict du 7 (des 7① donnez) reste −2
Puis 1② (par reigle) donne 3① (premier en l'ordre) −2 (second en l'ordre)
combien 1① ?
faict par le 68 probleme[78] 2 ou 1
Ie di que autant 2 comme 1 est le quatrieme terme proportionel requis.

Cette construction est suivie de la démonstration arithmétique, qui consiste là encore à vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation. Stevin ne propose pas de démonstration géométrique pour cette équation, mais expose l'origine de l'algorithme en expliquant que ce qui est au fondement de la procédure est la réduction de l'équation du troisième degré à une équation du deuxième degré grâce à la mise en évidence d'un facteur du premier degré, après avoir ajouté aux deux membres de l'équation un nombre bien choisi [Stevin 1585, 315] :

A fin de declairer premierement en general ceste origine, faut sçavoir, que nous tachons d'aiouster à chasque partie des egales parties donnees, vn mesme nombre, tel, qu'alors diuisée chasque partie par quelque commun diuiseur, que les quotiens soient ②egale à ① ⓪, desquels la valeur de 1①, sera notoire [...].

77 Voir plus haut, note 8.

78 Dans ce problème, Stevin donne l'algorithme de résolution des équations du deuxième degré du type $x^2 = ax - b$ (avec a et b positifs).

Stevin explique que si on divise une expression du troisième degré de la forme x^3+p par une expression du premier degré $x+q$, afin d'obtenir une expression du deuxième degré de la forme x^2-cx+d, on a nécessairement $p=q^3$. Il en conclut qu'il lui faudra ajouter aux deux membres de l'équation du troisième degré initiale le cube du terme constant du facteur de premier degré, afin que l'on puisse faire la réduction grâce à ce même facteur. Il en vient alors à son exemple, l'équation $x^3=7x-6$. Il remarque que si l'on souhaite que x^3+q^3 et $7x-6+q^3$ soient divisibles par $x+q$, on a nécessairement $7q=6+q^3$. Afin de déterminer q, il est donc bien amené à devoir résoudre l'équation conjointe : $y^3=7y+6$. Cette équation a pour solution 3. Il lui faut donc ajouter 27 aux deux termes de l'équation initiale, afin de ramener celle-ci à l'équation $x^2=3x-2$, après division par $x+3$.[79]

Cardano ne donne aucune explication sur l'origine de son algorithme dans l'*Ars magna*. Mais au chapitre XXV de ce même ouvrage, Cardano propose de nouvelles règles pour le cas des équations qu'il qualifie d'imparfaites ou de particulières. La règle 10 concerne les équations du type $x^3+c=bx$. Cardano explique alors :

> Lorsque les choses sont égales au cube et à un nombre, soustrais le nombre de l'équation d'un nombre tel que la racine cubique de la différence multipliée par le nombre des choses produise ce nombre[80]. Alors les choses moins la racine cubique de la différence sera un diviseur commun, la soustraction ayant été faite[81].

79 [Stevin 1585, 316] : « Quand nous diuisons 1③ + quelque ⓪, par 1① + quelque ⓪, estant ce diuiseur commensurable au nombre à diuiser, il est notoire, qu'il en sortira necessairement 1② − quelque ① + quelque ⓪. Il appert aussi par la mesme diuision, que le ⓪ du nombre à diuiser, sera tousiours le cube du ⓪ du diuiseur, pourtant il faut que le nombre que nous aiousterons à chascune partie, soit le cube du ⓪, qu'il nous faut trouuer, pour appliquer à la 1①. Au second il est manifeste, que pour diuiser les 7① − 6 donnez & + quelque ⓪, par 1① + quelque ⓪ ainsi que le quotient soit ⓪, il sera necessaire [...] que le quotient multiplié par le ⓪ du diuiseur ; le produict soit egal au ⓪ du nombre à diuiser, dont il appert, qu'il nous faut auoir quelque nombre de ceste qualité : *Trouuons vn nombre cubique qui avec* −6 (pour le −6 donné) *face autant, comme le coste dudict cube, multiplié par* 7 (7 des ① donnés). Qui est la 9e question du 81 probleme, & appert par la mesme, que le nombre requis, qu'il nous faudra aiouster à chasque partie donnée, sera 27, duquel la racine cubique 3, est le nombre, qui faudra estre aiousté à ladicte 1①, pour auoir ledict commun diuiseur, qui sera 1①+3. [...] »

80 Le texte a : « soustrais du nombre de l'équation un nombre tel que la racine cubique de la différence multipliée par le nombre des choses produise le nombre soustrait », ce qui est clairement faux.

81 [Cardano 1663, 268] : « 10. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & subtraxeris talem numerum ex numero æquationis, ita quod ℜ. cub<ic>a differentiæ, ducta

La formulation est ramassée, car cette règle vient après une autre règle du même genre pour les équations d'un autre type (voir la règle 6 ci-dessous). Les exemples qui suivent permettent de comprendre que si on détermine un nombre p tel que $\left(\sqrt[3]{p-c}\right) b = p$ alors $x - \sqrt[3]{p-c}$ est un diviseur commun à $x^3 - p$ et $bx + c - p$. Ce n'est pas l'algorithme proposé par Stevin. Mais dans la règle 6, à propos des équations du type $x^3 = bx+c$, Cardano explique :

> Lorsque le cube est égal aux choses et à un nombre, et qu'un nombre cubique a été trouvé tel que sa racine cubique, multipliée par le nombre des choses produise la somme du nombre cubique trouvé et du nombre de l'équation, ou leur différence, alors la chose plus cette même racine cubique sera le diviseur commun du cube plus ce même nombre cubique et du nombre des choses avec la somme du nombre de l'équation et du nombre cubique, ou la chose moins cette même racine cubique sera le diviseur commun du cube moins ce même nombre cubique trouvé et du nombre des choses moins la différence du nombre de l'équation et du nombre cubique trouvé, et de là tu trouveras l'estimation de la chose[82].

On détermine un nombre p^3 tel que $bp = p^3 \pm c$, alors $x \pm p$ est un diviseur commun à $x^3 \pm p^3$ et à $bx + c \pm p^3$. Même si Cardano traite ici du cas des équations du type $x^3 = bx + c$, il est facile de transposer la règle pour les équations du type $x^3 = bx - c$, considérés par Stevin.

Par ailleurs, notons que si Stevin ne donne qu'un seul exemple, dans lequel l'équation dérivée est résoluble sans difficulté — puisqu'on n'est pas amené à devoir prendre la racine carrée d'un nombre négatif —, Bombelli [1572, 301-303] considère quant à lui plusieurs exemples. Il traite notamment de l'équation $x^3+6 = 7x$ dont l'équation associée $y^3 = 7y+6$ a pour racine $y_0 = \sqrt[3]{3+\sqrt{-18}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{-18}}$. Il introduit alors ses signes « *più di meno* » et « *meno di meno* » pour poursuivre les calculs. Il considère aussi l'équation $x^3 + 2 = 3x$. Mais au lieu de passer par l'équation associée, il ajoute de chaque côté de l'équation le nombre 6 afin de faire apparaître le diviseur de premier degré $x+2$. Cet exemple a aussi pu être une source d'inspiration pour Stevin.

---

in numerum rerum, producat numerum detractum, tunc res $\tilde{m}$ ℜ. cubica differentiæ, erit communis diuisor, facta detractione [...] »

82 [Cardano 1663, 267] : « 6. Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inuentus fuerit numerus cubicus, cuius ℜ. cubica, ducta in numerum rerum, producat aggregatum, ex numero cubico inuento, & numero æquationis, seu illorum differentiam, tunc res p̃ eadem ℜ. cubica, erit communis diuisor cubi, p̃ eodem numero cubico, & numeri rerum cum numero aggregato, ex numero æquationis, & numero cubo, vel res $\tilde{m}$ ℜ. cubica eadem, erit communis diuisor, cubi $\tilde{m}$. numero cubo inuento, & numeri rerum m̃. differentia æquationis, & numeri cubi inuenti, inde peruenies ad rei æstimationem. »

Résolution des équations du troisième degré sans terme du premier degré

Dans l'*Ars magna*, Cardano traite des équations du type, $x^3 = ax^2 + c$ (avec a et c positifs), au chapitre XIV. Il commence par donner la démonstration de l'algorithme, dans lequel il explique sur l'exemple de l'équation $x^3 = 6x^2 + 100$, comment la transformer en l'équation $y^3 = 12y + 116$, grâce au changement d'inconnu $x = y + 2$. Notons que dans la règle qui suit cette démonstration, Cardano donne directement l'expression de la racine de l'équation initial en fonction des coefficients de l'équation, soit :

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^6}} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^6}} + \frac{a}{3}.$$

Les équations du type $x^3 + ax^2 = c$ sont traitées au chapitre XV. Cardano propose le changement d'inconnue $x = y - \frac{a}{3}$. Dans la règle, il ne donne pas la racine de l'équation initiale en fonction des coefficients, comme dans le cas précédent, mais il explique, dans le cas général, comment construire l'équation dérivée à partir des coefficients de l'équation initiale. Et comme il refuse les coefficients négatifs, il doit considérer trois cas :

— si $c > 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$ l'équation dérivée est $y^3 = \frac{a^2}{3}y + c - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$,
— si $c = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$l'équation dérivée devient $y^3 = \frac{a^2}{3}y$
— si $c < 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$l'équation dérivée s'écrit $y^3 - c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^2}{3}y$.

Enfin, pour les équation du type $x^3 + c = ax^2$, exposées au chapitre XVI, Cardano propose le changement d'inconnue $x = \frac{(\sqrt[3]{c})^2}{y}$, qui conduit à l'équation dérivée $y^3 + c = a\sqrt[3]{c}y$, qui a deux solutions, comme on l'a vu plus haut.

Ainsi, pour les équations du troisième degré sans terme du premier degré, Cardano montre comment on se ramène à une équation sans terme du deuxième degré, traitées précédemment, grâce à un changement de variable. Mais ce changement de variable n'est pas le même selon le type d'équations considéré.

Stevin se différencie là encore de Cardano en acceptant les coefficients négatifs, ce qui lui permet d'isoler le terme de plus haut degré et de proposer un même algorithme de résolution pour les trois types d'équation, même s'il les traite séparément [Stevin 1585, 318] :

PROBLEME LXX.

Estant donnez trois termes, desquels le premier ③, le second ② ⓪, le troisième nombre algebraique quelconque : Trouuer leur quatriesme terme proportionnel.

NOTA. Le binomie du second terme donné de ce probleme, se peult rencontrer en trois differences à sçavoir : ②+⓪, −②+⓪, ②−⓪. Lesquelles trois differences nous auons reduict à vne mesme maniere d'operation, lesquelles nous descriprons separement pour plus grande euidence [...].

Dans tous les cas il s'agit de transformer l'équation initiale, que nous noterons $x^3 = px^2 + q$ (p valant a *ou* $-a$ et q valant c ou $-c$, selon les cas), en l'équation $y^3 = \frac{p^2}{3}y + q + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3$ grâce au changement de variable $x = y + \frac{p}{3}$ (c'est le changement de variable proposé par Cardano pour le premier type d'équation qu'il considère).

Nous ne nous attardons pas sur les démonstrations géométriques, qui là encore s'appuient sur la fig. 1 précédente et mêlent calculs sur les radicaux et considérations géométriques.

Stevin propose par ailleurs de mettre en évidence l'origine de la construction pour le premier type d'équation seulement, mais il termine son explication par ces mots [Stevin 1585, 330] :

[...] ceci est la vraie origine de la construction de la premiere difference ; Et celui qui entendra bien ceste ci, entendra aussi celles de deux autres differences.

En reprenant nos notations précédentes, on considère l'équation $x^3 = px^2 + q$ (p valant a *ou* $-a$ et q valant c ou $-c$, selon les cas), que l'on écrit :

$$x^3 - px^2 = q.$$

L'idée est d'ajouter à chacun des membres un terme du premier degré de la forme $fx + g$ de sorte que $x^3 - px^2 + fx + g$ soit un cube de la forme $(x+h)^3$. On montre facilement que $f = \frac{p^2}{3}$, $g = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ et $h = -\frac{p}{3}$. Il nous faut donc ajouter $\frac{p^2}{3}x - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ aux deux membres de l'équation $x^3 - px^2 = q$ et on obtient :

$$\left(x - \frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^2}{3}x - \left(\frac{p}{3}\right)^3 + q.$$

On pose $x = y + \frac{p}{3}$ et on obtient l'équation dérivée :

$$y^3 = \frac{p^2}{3}y + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 + q.$$

Cette présentation générale n'est pas de Stevin ; ce dernier mène le raisonnement sur le seul exemple de l'équation $x^3 = 6x^2 + 400$ [Stevin 1585, 328-330].

Pour le premier type d'équation, $x^3 = ax^2 + c$ (a et c étant ici toujours positifs), Stevin remarque que la transformation conduit à l'équation $y^3 = \frac{a^2}{3}y + c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$, qui est du type $y^3 = By + C$. Or, nous avons vu plus haut qu'il peut arriver que pour ce type d'équation l'algorithme conduise à devoir prendre la racine d'un nombre négatif. Ainsi, Stevin suggère que dans ce cas, on utilise une autre transformation, en posant $y = \frac{c}{x}$, qui conduit à une équation du type $y^3 = -By + C$, qui a toujours une racine[83].

Mais si l'on considère l'équation dérivée obtenue grâce à la première méthode,

$$y^3 = \frac{a^2}{3}y + c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3,$$

sa racine est $y = \sqrt[3]{\frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{3}\right)^3}}$ avec $B = \frac{a^2}{3}$ et $C = c + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3$. Or $\left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c\left(\frac{a}{3}\right)^3$, qui est toujours positif (puique a et c le sont). Ainsi, contrairement à ce que pense Stevin, sa première méthode vaut pour toutes les équations du type, $x^3 = ax^2 + c$ (a et c positifs).

Avant d'en venir aux équations complètes du troisième degré (avec un terme du deuxième degré et un terme du premier degré), Stevin remarque qu'il arrive que les équations considérées jusque là (du deuxième et du troisième degrés) conduisent à une racine négative, ou, selon ses termes, à une « solution songée ». Il ajoute qu'il est utile de considérer de telles

---

83 [Stevin 1585, 318-319] : « NOTA. Ceste construction se peut faire en deux sortes ; L'vne procedant d'origine à laquelle se faict conuersion des termes donnez, en ③ egale à ① + ⓪ ; L'autre en ③ egale à −① + ⓪. Or quand ③ est egale à ① + ⓪, alors la valeur de 1① se trouue par la premiere difference du 69 probleme : Mais quand telle solution ne se pourra faire par icelle, pour les raisons que nous en auons dict à la mesme difference, alors ne se pourra aussi faire, par telle maniere, en ceste premiere difference ; Pourtant on la pourra soluer par ladicte deuxiesme maniere, à sçavoir, procedant de reduction en ③ egale à −① + ⓪ ; Laquelle est generale. »

solutions négatives, lorsqu'elles conduisent à la solution positive, qu'il appelle « vraie solution », du problème initialement posé[84]. Dans une série de onze articles, Stevin montre, la plupart du temps sur des exemples, s'il peut arriver ou non qu'une des racines des équations du premier, du deuxième ou du troisième degré du type considéré soit négative. Ainsi, dans l'article VI, il explique qu'une équation du type $x^3 = -bx + c$ (b et c étant positifs) ne peut jamais avoir une solution négative, car si c'était le cas « la valeur du premier terme seroit tousiours −, & du second terme tousiours +, lesquels ne peuuent estre egaux » [Stevin 1585, 335]. Et, dans l'article VII, il montre que l'équation $x^2 = 2x - 21$ a pour solution -3 [Stevin 1585, 335].

Résolution des équations complètes du troisième degré

Dans le problème LXXI, Stevin considère finalement les équations complètes, qui sont de sept types : $x^3 = ax^2 + bx + c$, $x^3 = -ax^2 + bx + c$, $x^3 = ax^2 + bx - c$, $x^3 = -ax^2 + bx - c$, $x^3 = ax^2 - bx + c$, $x^3 = -ax^2 - bx + c$ et $x^3 = ax^2 - bx - c$ (a, b et c étant positifs). Là encore il donne une même règle pour tous ces types d'équations, quand, selon ses dires, d'aucuns en donnent plusieurs [Stevin 1585, 337] :

PROBLEME LXXI.

Estant donnez trois termes, desquels le premier ③, *le second* ② ① ⓪, *le troisiesme nombre algebraique quelconque : Trouuer leur quatriesme terme proportionnel.*

NOTA Le trinomie du second terme donné de ce probleme se peut rencontrer en sept differences, à sçavoir ② + ① + ⓪, −② + ① + ⓪, ② + ① − ⓪, −② + ① − ⓪, ② − ① + ⓪, −② − ① + ⓪, ② − ① − ⓪. Lesquelles sept differences selon les autres autheurs, reçoiuent bien 25 diuerses manieres d'operations : Mais nous l'auons conuertie en vne simple, facile & generale [...]

Pour ces types, Cardano propose selon les cas le changement de variable $x = y + \frac{a}{3}$ ou $x = y - \frac{a}{3}$ et, comme dans le cas des équations du troisième degré sans terme du premier degré, son refus d'admettre les coefficients négatifs le conduit à multiplier les cas particuliers pour la forme de l'équation dérivée [Confalonieri 2013, 130-150]. L'effort d'unification et de simplification de Stevin est donc là aussi remarquable. Il déroule l'algorithme

84 [Stevin 1585, 332] : « DES SOLVTIONS QUE L'ON PEVT FAIRE PAR − SVR LES PRECEDENS PROBLEMES. Aucuns des precedens problemes, de la proportion des nombres algebraiques, reçoiuent par dessus les solutions ci deuant données, encore d'autre solution par − ; Et combien les mesmes ne semblent que solutions songées, toutesfois elles sont vtiles, pour venir par les mesmes aux vraies solutions des problemes suiuans par + ; La cause est, qu'au valeur de 1① trouué par quelque des problemes precedens, il faudra aucunefois encore aiouster quelque certain nombre, comme apparoistra ; d'ou s'ensuit, que quand le nombre à aiouster, sera maieur que ladicte solution par −, que leur difference sera vraie solution par +. »

sur deux exemples pour les deux premiers types, suivi, dans les deux cas, d'une démonstration arithmétique et d'une démonstration géométrique. Il revient sur le fait que la méthode est générale [Stevin 1585, 342] :

> Le general ordre que nous auons promis sur les questions qui se peuuent rencontrer en ce probleme, apparoist assez es constructions des deux exemples precedens, car il n'y a en l'vne pas vne syllabe autrement qu'en l'autre, & pourroient satisfaire à ce probleme, toutesfois pour les moins exercés, nous descriprons leurs diuersitez.

Nous pouvons la décrire ainsi : soit l'équation complète

$$x^3 = px^2 + qx + r,$$

(où p, q et r sont positifs ou négatifs, sans toutefois être tous les trois en même temps négatifs). On considère l'équation dérivée, sans terme du deuxième degré :

$$y^3 = \left(3\left(\frac{p}{3}\right)^3 + q\right)y + r + 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 + q\frac{p}{3},$$

qui a pour solution y_0. Alors l'équation initiale a pour solution $x = y_0 + \frac{P}{3}$.

Stevin résume les différentes étapes de l'algorithme, pour deux équations, dans un tableau (auquel nous ajoutons une colonne où nous reportons le cas général) [Stevin 1585, 343] :

> Mais (à fin de ne mesuser le temps, & gaster papier) seulement les nombres de l'ordre, ausquels on entendra se referer les motz des constructions precedentes, en ceste sorte :

1③ egale a	2③ egale a	$x^3 = px^2 + qx + r$
$-$② + 3① + 22	$-6$② + 3① + 4	
-2	-2	$\frac{p}{3}$
15①	15①	$\left(3\left(\frac{p}{3}\right)^3 + q\right)y$
22	4	r
30	12	$r\left(\frac{p}{3}\right)^3$
0	-18	$r\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(3\left(\frac{p}{3}\right)^3 + q\right)$
$\sqrt{}15$	3	y_0
$\sqrt{}15 - 2$	1	$y_0 + \frac{P}{3}$

Il expose tous les autres cas d'équations, sur des exemples, présentés avec le même genre de tableau.

À la suite de cette série d'exemples, Stevin présente l'origine de l'algorithme, qu'il décrit à l'aide de l'équation $x^3 = 6x^2 + 10x + 300$. Comme dans le cas des équations du troisième degré sans terme du premier degré, il convient d'ajouter un terme du premier degré bien choisi de chaque côté de l'équation récrite sous la forme $x^3 - 6x^2 = 10x + 300$, afin de faire apparaître le cube d'un terme du premier degré à gauche du signe égal. Le terme à ajouter est $12x - 8$. On obtient alors $(x - 2)^3 = 22x + 292$. En posant $x = y+2$, on est conduit à résoudre l'équation dérivée : $y^3 = 22y+336$.

Ce rapide aperçu montre que Stevin est bien au fait des travaux de Cardano sur la résolution des équations du troisième degré (et du quatrième degré), dont il fait largement état. Il connaît aussi les innovations de Bombelli. Toutefois, Stevin ne reprend pas aveuglement les travaux de ses prédécesseurs. Son exposé est bien plus systématique que celui de Cardano et l'usage des coefficients négatifs lui permet d'unifier les algorithmes proposés.

CONCLUSION

Nous ne devons pas nous étonner que les travaux novateurs des algébristes italiens sur les équations du troisième et du quatrième degré n'aient pas trouvé leur place dans les traités les plus élémentaires d'algèbre du XVIe siècle ; la difficulté du sujet l'explique aisément. Notre étude a toutefois montré que certains des auteurs parmi les plus importants, ceux qui ont proposé des ouvrages d'algèbre originaux, sont au fait de ces travaux. Malgré tout, leurs réticences restent grandes face aux méthodes de résolution qui conduisent à des formes de solutions requérant l'extraction de racines cubiques de binômes et d'apotomés. Nous avons vu ainsi Nuñez refuser d'exposer les méthodes de Tartaglia car elles ne conduisent pas toujours à la solution rationnelle de l'équation — lorsqu'elle existe —, les racines cubiques ne pouvant être simplifiées dans la plupart des cas ; Gosselin, après lui, adressait la même critique à l'encontre de Cardano[85]. Et si Stevin reprend les travaux des algébristes italiens, il regrette, peut-être influencé par Nuñez, qu'aucune méthode n'ait encore été trouvée pour simplifier les solutions auxquelles mènent les algorithmes.

Une autre difficulté surgit lorsque l'algorithme conduit à devoir prendre la racine carrée d'un nombre négatif, ce qui fait dire à Borrel ou à Gosselin que l'algorithme n'aboutit pas dans certains cas. L'introduction par Bombelli des signes « *piu di meno* » et « *meno di meno* », qu'évoque

---

85 On doit noter, qu'en dehors de Nuñez qui porte sa critique à l'encontre de Tartaglia, tous les auteurs se réfèrent à Cardano. Ceci n'a rien d'étonnant si l'on songe que Tartaglia n'a pas eu l'occasion de développer ses méthodes de résolution, alors que Cardano propose un exposé complet dans l'*Ars magna*.

Stevin, permet de contourner cette difficulté. Malgré cela, René Descartes considérera que sa méthode géométrique de résolution des équations du troisième degré — qu'il a établie à la suite de Viète —, soit par la recherche de deux moyennes proportionnelles, soit en utilisant la trisection de l'angle, est bien meilleure que celle de Cardano, car elle fournit la solution de l'équation, même dans les cas dits irréductibles [Bos 2001, 400], 173-176 (pour Viète) et 375-379 (pour Descartes)] [1637][86] :

> Au reste il est a remarquer que cete façon d'exprimer la valeur des racines [Descartes vient de donner l'expression de la racine de l'équation $x^3 = px + q$, selon la méthode de Cardano] par le rapport qu'elles ont aux costés de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien intelligible, ny plus simple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtenduës de certains arcs, ou portions de cercles, dont le triple est donné. En sorte que toutes celles des Equations cubiques qui ne peuuvent estre exprimées par les reigles de Cardan, le peuuent estre autant ou plus clairement par la façon icy proposée.

Finalement, Borrel et Gosselin sont aussi déroutés par la multitude des règles que propose Cardano dans l'*Ars magna*, pour un même type d'équations. Il est un fait que les méthodes générales de résolution présentées aux chapitres XI à XXIII sont noyées dans un ensemble de règles particulières. Ainsi, au chapitre XXV, Cardano revient sur les équations du troisième degré déjà traitées, pour fournir d'autres algorithmes lorsque les coefficients de ces équations remplissent certaines conditions. C'est bien sûr très intéressant pour les cas dits irréductibles, mais cela occulte la portée générale des algorithme présentés dans les chapitres précédents.

Stevin ne semble pas avoir eu connaissance des traités de Borrel et de Gosselin, qu'il ne cite pas. Et il ne dit rien de la multitude des règles dans l'*Ars magna*. Mais à propos de l'*Aliza*, dans lequel Cardano revient sur les cas irréductibles, il écrit [Stevin 1585, 309-310] :

> Cardane met aussi en son *Aliza* quelques exemples seruans à ceste matiere, mais pas generaux, ains à tastons, par lesquel aprés grand travail, on ne peut souventesfois rien en effectuer. Quant à moi, i'estime inutile d'en escripre ici de semblables ; La raison est, que ce qui ne se peut trouver par certaine reigle, semble indigne d'avoir lieu entre les propositions legitimes. D'autre part, que de ce qui se solue en telle maniere, la Fortune en merite autant d'honneur, comme l'efficient. Au tiers, qu'il y a assez de matiere legitime, voire en infini, pour s'en exercer, sans s'occuper & perdre le temps, en les incertaines : pourtant nous les passerons oultre.

Ainsi, Stevin ne veut pas perdre de temps en cas particuliers, mais cherche à produire des règles générales, comme nous l'avons vu.

---

86 Je remercie Sébastien Maronne pour m'avoir fourni cette information et les références utiles sur le sujet.

RÉFÉRENCES

BOMBELLI (Rafael)
[1572] *L'Algebra parte maggiore del l'arimetica divisa in tre libri*, Bologne : Giovanni Rossi, 1572.

BORREL (Jean)
[1559] *Joan. Buteonis Logistica, quæ & Arithmetica vulgo dicitur...*, Lyon : Guillaume Rouillé, 1559.

BOS (Henk J.M.)
[2001] *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, New York-Berlin-Heidelberg : Springer, 2001.

BOSMANS (Henri)
[1907a] L'Algèbre de Jaques Peletier du Mans departie an deus livres (XVIe siècle), *Revue des Questions scientifiques*, 53/11 (1907), p. 117–173.

[1907b] Sur le « Libro de algebra » de Pedro Nuñez, *Bibliotheca mathematica*, 3/8 (1907), p. 154–169.

CARDANO (Gerolamo)
[1539] *Practica arithmetice et mensurandi singularis...*, Milan : B. Calusci, 1539.

[1545] *Artis magnae, sive de Regulis algebraicis lib. unus...*, Nuremberg : Johann Petreius, 1545.

[1570] *Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum, aliarumque rerum mensurandarum... Praeterea, artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus.... Item de aliza regula liber...*, Bâle : Heinrich Petri, 1570.

[1663] *Opera omnia*, Lyon : Jean Antoine Huguetan & Marc Antoine Ravaud, 1663.

CARDANO (Girolamo)
[1993] *Ars magna or the Rules of Algebra*, translated and edited by T. Richard Witmer, New York : Dover Publications, 1993.

CLAVIUS (Christoph)
[1609] *Algebra*, 1609 ; 1re éd. 1608, Rome : B. Zannettus ; 2e éd. Genève : Stéphane Gamonet, 1609.

CONFALONIERI (Sara)
[2013] *The telling of the unattainable attempt to avoid the casus irreducibilis for cubic equations : Cardano's De regula Aliza*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, 2013.

DESCARTES (René)
[1637] *La Géométrie*, Leyde : Ian Maire, 1637.

Gavagna (Veronica)
[2012] L'Ars magna arithmeticæ nel corpus matematico di Cardano, dans Rommevaux (Sabine), Spiesser (Maryvonne) & Estève (Maria Rosa Massa), éds., *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris : Honoré Champion, 2012, p. 237–268.
[2014] Radices Sophisticae, Racines imaginaires : The Origins of Complex Numbers in the Late Renaissance, dans Lupacchini (Rosella) & Angelini (Annaritta), éds., *The Art of Science. From Perspective Drawing to Quantum Randomness*, New York-Berlin-Heidelberg : Springer, 2014, p. 165–190.

Gosselin (Guillaume)
[1577] *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quæ & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur...*, Paris : Gilles Beys, 1577.
[à paraître] *L'algèbre / De arte magna libri IV, suivi de Leçon pour l'étude et l'enseignement des mathématiques / Praelectio*, Paris : introduction et traduction d'Odile Kouteynikoff, Les Belles Lettres, à paraître.

Jensen (Kristian)
[1994] Cardanus and his readers in the sixteenth century, dans Keßler (Eckhard), éd., *Girolamo Cardano Philosoph, Naturforscher, Arzt*, Wiesbaden : Harrassowitz, 1994, p. 265–308.

Malet (Antoni)
[2006] Renaissance notions of number and magnitude, *Historia Mathematica*, 33 (2006), p. 63–81.
[2008] Just before Viète : Numbers, polynomials, demonstrations, and variables in Simon Stevin's Arithmétique (1585), dans Radelet-de Grave (Patricia), éd., *Liber amicorum Jean Dhombres*, vol. 311–329, Louvain-la-Neuve : Brepols, 2008, p. 311–329.

Nuñez (Pedro)
[1567] *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Anvers : Arnold Birckman, 1567.

Peletier du Mans (Jacques)
[1554] *L'Algebre*, Lyon : Jean de Tournes, 1554.

Rommevaux-Tani (Sabine)
[2014] Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin, *Revue d'histoire des mathématiques*, 20 (2014), p. 171–209.

Spiesser (Maryvonne)
[2012] Pedro Nuñez : points de vue sur l'algèbre, dans Rommevaux (Sabine), Spiesser (Maryvonne) & Estève (Maria Rosa Massa), éds., *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris : Honoré Champion, 2012, p. 269–292.

Stedall (Jacqueline)
[2011] *From Cardano's great art to Lagrange's reflexions : filling a gap in the history of algebra*, Zürich : European Mathematical Society Publishing House, 2011.

STIFEL (Michael)
[1544] *Arithmetica integra*, Nuremberg : Johann Petreius, 1544.

STEVIN (Simon)
[1585] *L'arithmetique*, Leyde : Christophe Plantin, 1585.

TAMBORINI (Massimo)
[2003] Per una storia dell'Opus Arithmeticæ Perfectum, dans M. Baldi (M.) & Canziani (G.), éds., *Cardano e la tradizione dei saperi*, Milan : Franco-Angeli, 2003, p. 157–189.

TARTAGLIA (Niccolò)
[1546/1554] *Quesiti et inventioni diverse* ; 1re éd. Venise : Venturino Ruffinelli, 1546 ; 2e éd. Venise : N. de Bascarini, 1554.
[1556] *La Seconda parte del General trattato di numeri et misure*, Venise : C. Troiano dei Navo, 1556.
[1560] *La Sesta parte del General trattato di numeri et misure*, Venise : C. Troiano dei Navo, 1560.