Revue d'Histoire des Mathématiques

Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin

Sabine Rommevaux-Tani

Tome 20 Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `revues@smf.ens.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 80 €; prix public hors Europe : 89 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

 Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
20 (2014), p. 171–209

IRRATIONALITÉ DES NOMBRES, IRRATIONALITÉ DES LIGNES SELON MICHAEL STIFEL ET SIMON STEVIN

Sabine Rommevaux-Tani

Résumé. — Nous examinons dans cet article les interprétations numériques de la classification des lignes irrationnelles présentée par Euclide au livre X des *Éléments*, que proposent les deux algébristes de la Renaissance, Michael Stifel et Simon Stevin. Nous comparons ces interprétations en en soulignant les ressemblances et les différences et nous les replaçons dans le projet d'une arithmétique générale porté par les deux auteurs.

Abstract (Irrationality of numbers, irrationality of lines according to Michael Stifel and Simon Stevin)

In this paper we study numerical interpretations of the classification of irrational lines presented by Euclid in Book X of the *Elements*, interpretations that were given by Michael Stifel and Simon Stevin, two algebrists of the Renaissance. We emphasise the similarities and the differences between their interpretations, and we place them in the context of a general arithmetical project proposed by the two authors.

Le rôle qu'ont pu jouer les algébristes dans l'étude des nombres radicaux et dans l'interprétation numérique du livre X des *Éléments* d'Euclide est relativement bien connu pour la tradition arabe [Ben Miled 1999; 2005; Farès 2009; Rashed 1984]. Il l'est beaucoup moins pour la tradition

Texte reçu le 23 août 2013, modifié le 27 avril 2014, accepté le 21 mai 2014.
S. Rommevaux-Tani, CNRS, UMR 7219, laboratoire SPHERE.
Classification mathématique par sujets (2010) : 01A40.
Mots clefs : Stifel, Stevin, Euclide, irrationalité.
Key words and phrases. — Stifel, Stevin, Euclid, irrationality.
J'ai commencé cette étude à l'occasion d'un séjour à All Souls College (Oxford), de janvier à juin 2012. Je remercie les collègues du College pour les conditions exceptionnelles de travail qu'ils m'ont offertes.

latine de la Renaissance européenne. Nous nous proposons de combler en partie cette lacune, en présentant ici la traduction numérique que font deux éminents algébristes du XVI^{e} siècle, Michael Stifel et Simon Stevin, de la théorie euclidienne de l'irrationalité des lignes[1].

Le projet de ces deux auteurs doit être replacé dans l'économie de leurs ouvrages. La relecture du livre X des *Éléments* se trouve chez Stifel au livre II de son *Arithmetica integra* [Stifel 1544], qui est consacré aux nombres irrationnels[2]. Après s'être interrogé sur le statut de ces nombres (nous y reviendrons plus loin), Stifel propose une classification des nombres irrationnels, généralisation de la classification euclidienne des lignes irrationnelles ; ces différents types de nombres irrationnels serviront ensuite à la traduction numérique du livre X des *Éléments.* Dans ce livre II, on trouve aussi l'exposé des différentes opérations sur les nombres irrationnels. Le livre I était consacré, quant à lui, aux opérations sur les nombres entiers et sur les fractions, aux progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques, avec en appendice certaines règles classiques des arithmétiques pratiques. Le livre III s'ouvre sur la « règle d'algèbre », c'est-à-dire la mise en équation des problèmes par le choix d'une inconnue, et leur résolution ; il se poursuit par l'exposé des opérations sur les nombres cossiques (c'est-à-dire les puissances de l'inconnue) et la recherche des racines des équations du second degré. Ainsi, ces trois exposés, sur les nombres entiers et fractionnaires, sur les nombres irrationnels ou radicaux, sur les nombres cossiques, forment ce que Stifel nomme une « arithmétique entière ». Face à ceux qui contesteraient que les nombres irrationnels soient de vrais nombres, Stifel se doit de justifier leur étude dans le cadre d'une arithmétique, même qualifiée d'entière. Pour cela il souligne qu'ils sont utiles, voire indispensables, notamment en géométrie. Quoi de mieux, alors, que de montrer que les nombres irrationnels sont au fondement du livre X d'Euclide ?

Sous le titre d'*Arithmetique*[3] [Stevin 1585a], Stevin présente lui aussi un exposé qui dépasse très largement le cadre de l'étude des nombres entiers.

---

1 Cette étude, ainsi que mes traductions du texte de Stifel, doivent beaucoup aux discussions que j'ai pu avoir avec mes collègues et amis Odile Kouteynikoff, Marie-Hélène Labarthe, François Loget et Maryvonne Spiesser lors du séminaire sur l'algèbre à la Renaissance que j'ai organisé à Tours entre 2006 et 2011.

2 Le titre de ce livre est le suivant « Liber secundus, de numeris irrationalibus » [Stifel 1544, f^{o} 103^{r}].

3 L'*Arithmetique* de Simon Stevin a été publiée une première fois à Leyde, chez Christophe Plantin, en 1585, suivie par *Les quatre premiers livres d'algebre de Diophante d'Alexandrie, traduicts en langue Françoise & expliquez par Simon Stevin de Bruges* [Stevin 1585a]. On trouve relié dans le même volume et publié la même année chez le même éditeur, *La Pratique d'arithmetique,* suivie de *La regle d'interest avec ses tables,* de

Mais comme nous le verrons, pour Stevin, les nombres radicaux sont des nombres à part entière, au même titre que les entiers ou les fractions. L'ouvrage de Stevin se divise en deux parties, une première partie de définitions, une seconde partie de propositions. Comme chez Stifel, les opérations sur les nombres radicaux et leurs composés se trouvent présentées entre les opérations sur les nombres entiers et fractionnaires, dits nombres Arithmétiques, et les opérations sur les quantités algébriques, qui forment avec les radicaux et leurs composés, ce que Stevin nomme les nombres Géométriques. La structure de l'exposé vise à souligner le parallélisme que l'on peut établir entre ces différents types de nombres et les opérations que l'on peut définir sur eux. Et les nombres radicaux, même s'ils sont étudiés dans le cadre d'une arithmétique, renvoient bien évidemment à la géométrie et peuvent servir à la lecture du livre X des *Éléments*, comme Stevin le montre dans son « Traité des incommensurables grandeurs, avec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide » [Stevin 1585b].

Ainsi, pour Stifel et Stevin, l'étude des nombres radicaux et l'application qu'on peut en faire pour une lecture du livre X des *Éléments* (qui chez Euclide est un livre de géométrie) trouvent naturellement leur place dans un projet global d'une « grande » arithmétique, dans laquelle ils insèrent l'algèbre, dont les méthodes permettent aussi bien de résoudre des problèmes d'arithmétique que de géométrie.

Stifel et Stevin ne sont pas les seuls algébristes du XVI^e siècle à proposer une relecture du livre X des *Éléments*. Il vaudrait aussi la peine d'étudier les présentations des nombres irrationnels et leur utilisation pour l'étude des lignes irrationnelles que font Niccolo Tartaglia au livre 11 de la deuxième partie de son *General trattato di numeri, et misure* (publié à Venise en 1556) ou Christoph Clavius dans son *Algebra* (publiée à Rome en 1608)[4]. Mais il nous a semblé qu'il était utile de comparer ici les exposés de Stifel et de Stevin, car, si l'un comme l'autre se proposent de rendre la lecture du livre X des *Éléments* d'Euclide plus aisée grâce aux nombres, si le point de départ de leur étude est le même (partir des racines carrées de nombres de la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a}+b$ pour retrouver les différents nombres irrationnels correspondant aux lignes irrationnelles euclidiennes), leurs démarches ne sont pas identiques, comme nous allons le montrer.

La disme et d'un *Traicté des incommensurables grandeurs, avec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide* (la numérotation des pages recommence donc au début pour cette seconde partie) [Stevin 1585b]. Voir aussi la rédition, augmentée par Albert Girard [1625].

4 Je me propose d'en faire l'objet d'un prochain article.

1. L'UTILISATION DES NOMBRES REND LA LECTURE DU LIVRE X DES *ÉLÉMENTS* PLUS AISÉE

Dans l'utilisation que Stifel et Stevin font des nombres irrationnels pour décrire les différentes lignes irrationnelles présentées par Euclide au livre X des *Éléments*, l'un comme l'autre poursuivent un même but avoué, permettre une meilleure compréhension de ce livre, jugé bien souvent obscur et difficile.

Ainsi, Stifel écrit au commencement du chapitre v du livre II de son *Arithmetica integra*, chapitre dans lequel il se propose de montrer ce qu'Euclide aurait pu conclure de l'exposé qu'il vient de faire sur les nombres irrationnels et l'usage que ce dernier aurait pu faire de ces nombres[5] :

> Le livre X d'Euclide (que beaucoup estiment être de loin plus difficile que les autres livres de ses *Éléments*, de même qu'il est beaucoup plus long qu'eux), je le rendrai, moi, par ce chapitre, très bref et très facile, et aussi complet [...][6].

Stifel n'explique pas davantage son projet, alors que Stevin est plus explicite. Ainsi, dans son *Arithmetique* il évoque une première fois le livre X dans le long commentaire qui suit la définition XXXI de ce qu'il appelle le « nombre Geometrique ». Dans une des parties de ce commentaire il explique « qu'il ni a aucuns nombres absurdes, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds » [Stevin 1585a, p. 33] (nous y reviendrons plus loin) ; il écrit alors :

> [...] faut sçavoir que ceste absurde opinion de nombres absurds, que ce ne seroient pas nombres, &c. a tellement obscurci la doctrine des incommensurables grandeurs, que la difficulté du dixiesme livre d'Euclide (qui traicte de ceste matiere) est à plusieurs devenu en horreur, voire iusques a l'appeler la croix des mathematiciens, matiere trop dure à digerer, & en laquelle n'apperçoivent aucune utilité. [Stevin 1585a, p. 36–37]

Il se propose donc, « dans un traicté particulier », de rendre « faciles & claires (à [s]on auis) en 3 problemes seulement, lez difficiles & obscures propositions dudict Dixiesme, qui en contient selon Zambert 118 » [Stevin 1585a, p. 37]. Il consacre en effet un traité aux grandeurs incommensurables, « avec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide ». Dans l'adresse « Au lecteur », qui ouvre ce traité, il revient sur la difficulté du livre X :

---

5 Ce chapitre a pour titre : « Quid Euclides collegerit ex praedictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit. » [Stifel 1544, f° 111r]

6 « Librum Euclidis decimum (quem multi, alijs elementorum suorum libris, longe difficiliorem esse existimant, sicut illis alijs multo est prolixior) ego brevissimum facilimumque hoc capite reddam, atque integrum [...] ». [Stifel 1544, f° 111r]

> Apres que nous avions veu & reveu le Dixiesme livre d'Euclide, traictant des Incommensurables Grandeurs ; aussi leu et releu plusieurs commentateurs sur le mesme, desquels aucuns le iugeoient pour la plus profonde et incomprehensible matiere de la Mathematique, les autres que ce sont propositions trop obscures, & la croix des Mathematiciens ; Et qu'outre cela ie me persuadois (quelle follie ne faict l'opinion commettre aux hommes ?) d'entendre ceste matiere par ses causes, & qu'elle n'a en soi telles difficultez comme l'on estime vulgairement, ie me suis adonné d'en descripre ce traicté. [Stevin 1585b, p. 162]

Il explique plus loin que si le livre X est si difficile, c'est parce que les nombres irrationnels en sont absents, alors même que leur étude est à l'origine de la classification des lignes irrationnelles proposée par Euclide :

> [...] il reste encore de dire qu'elle est la cause de l'obscurité dudict dixiesme livre : Il faut doncques sçavoir, que les inventeurs des propositions du mesme, se proposoient nombres binomiaux, & par les qualitez qu'ilz trouvoient en leurs noms [...] ils ont descript des lignes de semblable qualité : Outre ce, par les operations des extractions des racines des nombres binomiaux [...] ils ont colligé semblables extractions de racines d'icelles binomies lignes, & par les qualitez des racines de ceux la, aussi descript semblables qualitez de ceux ci. [...] Or ceci leur estant ainsi notoire en toutes les douze especes de binomies lignes, & de leurs racines, ils en ont descript diverses propositions : *Mais ils en ont detenu les nombres, qui leur avoient este guide asseurée, pour comprendre parfaictement la propriété d'icelles lignes, sans lesquels nombres, ils ne pouvoient rien effectuer & nous ont ainsi laissé ces lignes imparfaictes* [...]. [Stevin 1585b, p. 164–166 ; c'est moi qui souligne]

Ainsi, Stevin se propose de retrouver les différentes propriétés des lignes irrationnelles étudiées par Euclide au livre X à l'aide des nombres irrationnels ; c'est aussi ce que fait Stifel.

2. L'ÉXPOSÉ DE STIFEL SUR L'IRRATIONALITÉ

2.1. *Les définitions du livre X selon Stifel*

Dans le chapitre III du livre II de son *Arithmetica integra*, Stifel commente les définitions du livre X des *Éléments* d'Euclide. Les premiers mots de ce chapitre sont les suivants : « Le dixième livre des *Éléments de géométrie* d'Euclide a pour but de traiter complètement des nombres irrationnels »[7]. Cette remarque ne peut manquer de surprendre si l'on se souvient que le livre X des *Éléments* propose une classification des lignes irrationnelles,

---

7 « Ad integram tractationem numerorum irrationalium, pertinet liber decimus elementorum Geometriae Euclidis. » [Stifel 1544, f° 105r]

que c'est un livre de géométrie, dans lequel aucun nombre irrationnel n'est utilisé, ni même mentionné[8]. Nous verrons comment, dans ce contexte, Stifel se propose d'expliciter le projet euclidien en introduisant les nombres irrationnels.

À propos de la première définition du livre X, il remarque que :

> D'abord il [Euclide] mentionne les quantités quand il dit : des quantités pour lesquelles on a une quantité qui les mesure sont dites commensurables, comme $\sqrt{24}$ nombre $\sqrt{216}$ et $\sqrt{600}$ etc. Et celles pour lesquelles on n'a pas une quantité commune qui les mesure sont dites incommensurables comme $\sqrt{18}$ et $\sqrt[4]{162}$.[9]

Pour cette première définition, Stifel parle de quantités, reprenant le vocabulaire utilisé par Campanus dans sa version des *Éléments* d'Euclide [Busard 2005], qu'il cite à plusieurs reprises. Dans son commentaire à la définition du rapport (définition 3 du livre V), qui pour Campanus est une relation entre deux quantités de même genre, ce dernier explique que « le propre de la quantité est l'égal et l'inégal selon elle-même », renvoyant à Aristote[10]. Et toujours dans ce même commentaire Campanus évoque les nombres, les lignes, les surfaces, les corps, les lieux et les temps[11], qui sont donc toutes des quantités, les nombres étant des quantités discrètes et les autres des quantités continues. Pour le livre X, on peut penser que les quantités en jeu sont (pour Campanus et à sa suite Stifel) d'une part les nombres et d'autre part les grandeurs géométriques que sont les lignes, les

---

8 On trouve une présentation partielle de ce livre X en annexe.

9 « Primo meminit quantitatum, dicens : Quantitates quibus fuerit una quantitas eas numerans, commensurabiles dicuntur. Ut √ʒ216 & √ʒ600, numerat √ʒ24 &c. Quibus vero non fuerit una quantitas communis eas numerans, dicuntur incommensurabiles, ut √ʒ18 & √ʒʒ162. » [Stifel 1544, f° 105^r] Nous reproduisons ici, aussi fidèlement que possible, en utilisant les polices disponibles, les notations cossiques utilisées par Stifel : √ʒ représente une racine carrée, √ꝯ une racine cubique et √ʒʒ une racine quatrième.

10 « Quantitatis autem proprium est secundum ipsam equale vel inequale dici ut vult Aristoteles in predicamentis » [Busard 2005, 160]. On peut lire dans *Les catégories* d'Aristote (6b26) : « Mais ce qui est le caractère propre de la quantité, c'est qu'on peut lui attribuer l'égal et l'inégal » [Aristote 1997, 28].

11 « Cuius diffinitionis intellectus est quod proportio est habitudo duarum quantitatum ad invicem que attenditur in eo quod una est maior aut minor alia vel sibi equalis. Per hoc patet quod oportet eas esse eiusdem generis ut duos numeros aut duas lineas aut duas superficies aut duo corpora aut duo loca aut duo tempora. » [Busard 2005, 160]. Toujours dans le même chapitre des *Catégories*, Aristote avait expliqué que la quantité est soit discrète, soit continue ; du premier type sont les nombres entiers, du second les lignes, les surfaces, les corps, mais aussi les temps et les lieux [Aristote 1997, 20].

surfaces et les corps. Euclide parle quant à lui de μέγεθος (grandeur), notion qu'il ne définit pas, mais Bernard Vitrac explique qu'elle s'oppose à celle de multitude comme la quantité continue s'oppose à la quantité discrète[12]. Ainsi, seules les grandeurs géométriques seraient objets du livre X pour Euclide, et pas les nombres entiers.

Remarquons que Stifel illustre immédiatement cette première définition à l'aide d'exemples en nombres radicaux. Il donne ensuite un critère permettant de déterminer si deux quantités sont commensurables ou non :

> Étant données deux quantités, si de la division de l'une par l'autre on obtient un quotient rationnel, alors ces deux quantités seront commensurables [...] Si le quotient obtenu à partir de la division de l'une par l'autre est irrationnel, ces deux quantités seront incommensurables[13].

Ce critère ne se trouve pas chez Euclide, qui n'introduit pas l'opération de division des grandeurs dans les *Éléments* et par conséquent ne peut pas relier l'éventuelle commensurabilité des grandeurs à la rationalité de leur quotient. Stifel propose les exemples suivants : $\sqrt{72600}$ divisé par $\sqrt{2904}$ donne $\sqrt{25}$ ou 5, donc les deux nombres sont commensurables ; de même pour $\sqrt{72600}$ et $\sqrt{46464}$, dont le quotient fait $\sqrt{1+\frac{9}{16}}$ ou $1+\frac{1}{4}$. Par contre $\sqrt{48}$ et $\sqrt{8}$ sont incommensurables, car leur quotient vaut $\sqrt{6}$, qui est irrationnel[14].

Stifel poursuit en commentant la définition des lignes commensurables en puissance :

> Ensuite, il [Euclide] mentionne les lignes lorsqu'il dit : « sont dites commensurables en puissance des lignes dont une surface commune mesure les carrés »[15].

C'est bien la définition euclidienne, mais il ajoute :

---

12 Voir [Euclide 1994, p. 13–32 et 57].

13 « Positis duabus quantitatibus, si ex divisione unius per alteram, proveniat quotiens rationalis, tunc quantitates illae duæ, erunt commensurabiles, seu (quod idem est) communicantes. [...] Si vero ex divisione unius per alteram fiat quotiens irrationalis, erunt duae quantitates illæ incommensurabiles, seu (quod idem est) non communicantes. » [Stifel 1544, f° 106r]

14 « Ut dum divido $\sqrt{ʒ}72600$ per $\sqrt{ʒ}2904$, tunc producitur $\sqrt{ʒ}25$, id est 5. Sunt ergo quantitates illæ ad inuicem commesurabiles. Sic dum divido $\sqrt{ʒ}72600$ per $\sqrt{ʒ}46464$, producitur $\sqrt{ʒ}1\,\frac{9}{16}$, id est $1\frac{1}{4}$. Sunt ergo quantitates illæ etiam commensurabiles. [...] Ut dum divido $\sqrt{ʒ}48$ per $\sqrt{ʒ}8$, prodicitur quotiens ille irrationalis $\sqrt{ʒ}6$. Ergo quantitates illæ sunt incommensurabiles. » [Stifel 1544, f° 106r]

15 « Secundo meminit linearum, dicens : [Linee potentia commensurabiles dicuntur, quarum quadrata numerat una communis superficies] » [Stifel 1544, f° 106r]. Les crochets sont dans le texte de Stifel.

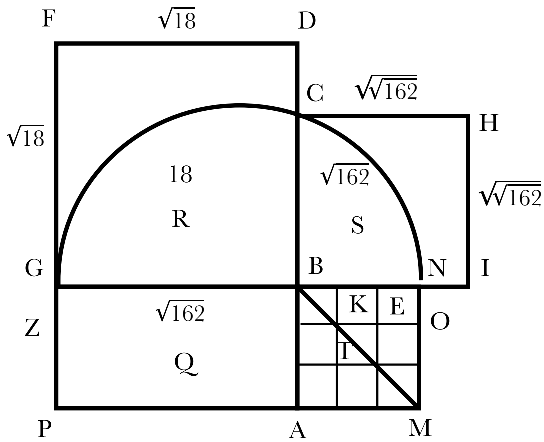


FIGURE 1. Reproduction fidèle de la figure de Stifel [1544, f° 105v]

> C'est comme s'il disait : nous parlons d'une manière de la commensurabilité et de l'incommensurabilité des quantités abstraites (c'est-à-dire des nombres irrationnels) et nous parlons d'une autre manière des mêmes quantités quand elles sont concrétisées[16] dans les lignes »[17].

Ce commentaire est l'élément central de l'exposé de Stifel. On doit le mettre en regard d'une figure que Stifel pose et commente dans ce même chapitre, figure sur laquelle, dit-il « apparaît tout ce qui doit être dit au sujet des définitions, comme on pourrait le voir dans un miroir »[18].

Je ne m'arrêterai pas ici sur cette figure ; je signale seulement qu'on y trouve différentes lignes et surfaces auxquelles sont associés des nombres entiers ou des nombres radicaux, qui permettent d'illustrer les définitions euclidiennes. Par exemple, Stifel explique que le petit carré E mesure à la fois le carré de côté AB, qui vaut $9 \cdot E$, et le carré de côté BD, qui vaut

16 J'ai choisi de traduire « *contrahuntur* » par « sont concrétisées », afin de garder le balancement entre quantités abstraites et quantités concrètes ou entre abstraction des quantités et concrétisation des quantités dans les lignes, rendu en latin par les verbes « abstrahere » et « contrahere ».

17 « Quasi dicat : aliter loquimur de commensurabilitate & incommensurabilitate quantitatum (id est, numerorum irrationalium) abstractarum : atque aliter loquimur de eisdem, quando contrahuntur ad lineas. » [Stifel 1544, f° 106r]

18 « Volo hic à principio huius tractationis meæ ponere figuram (ut pagina versa vides) in qua omnia quæ de definitionibus dicenda veniunt, tanquam in speculo quodam inspicere possis. » [Stifel 1544, f° 105r]

18·E, de sorte que ces deux carrés sont dit commensurables entre eux[19]. Plus loin, au chapitre v, lorsqu'il définit différents types de nombres irrationnels, il renvoie de nouveau à cette figure, comme nous le verrons.

Pour en revenir au commentaire précédent, Stifel dit que les objets du livre X sont les nombres irrationnels que l'on envisage de deux manières : soit abstraitement, soit en lien avec des lignes géométriques. Dans ce dernier cas, ces nombres sont dits être concrétisés dans ces lignes.

2.2. *Ce qu'est un nombre irrationnel pour Stifel*

Au chapitre I du livre II, Stifel s'interroge sur l'essence des nombres irrationnels[20]. Le chapitre commence par ces mots : « On se demande avec raison au sujet des nombres irrationnels si ce sont de vrais nombres ou s'ils sont fictifs »[21]. On peut résumer sa réponse ainsi. Tout d'abord, on peut remarquer que les nombres irrationnels apparaissent dans les démonstrations géométriques, et ils sont utiles, voire indispensables, quand les nombres rationnels ne suffisent pas ; ce sont donc de vrais nombres, car leurs effets dans les démonstrations sont « réels, certains et constants »[22]. Toutefois, on peut rétorquer que les nombres irrationnels ne sont pas de vrais nombres car, d'une part, on ne peut pas les soumettre à la numération et, d'autre part, on ne peut pas les comparer aux nombres rationnels, le rapport entre un nombre irrationnel et un nombre rationnel n'étant pas plus connaissable que celui entre l'infini et le fini[23] ; de plus, si les

---

19 « Quadratum illud modicum, signatum litera E, est mensura communis quadrati lineæ AB, & quadrati lineæ BD. Ergo quadrata nominatarum linearum sunt commensurabilia. Numerat autem quadratum E, prædicta illa quadrata, quemadmodum unitas numerat quemlibet numerum rationalem : scilicet dum E numerat quadratum maius, facit 18, & ex minore facit 9. » [Stifel 1544, f° 105v]

20 Le titre du chapitre est : « De essentia numerorum irrationalium ». [Stifel 1544, f° 103r]

21 « Merito disputatur de numeris irrationalibus, an veri sint numeri, an ficti. » [Stifel 1544, f° 103r]

22 « Quia enim in Geometricis figuris probandis, ubi nos rationales numeri destituunt, irrationales succedunt, probantque præcise ea, quæ rationales numeri probare non poterant, certe ex demonstrationibus quas nobis exhibent, movemur et cogimur fateri, eos vere esse, videlicet ex effectibus eorum, quos sentimus esse reales, certos, atque constantes. » [Stifel 1544, f° 103r]

23 « At alia movent nos ad diversam assertionem, ut videlicet cogamur negare, numeros irrationales esse numeros. Scilicet, ubi eos tentaverimus numerationi subijcere, atque numeris rationalibus proportionari, invenimus eos fugere perpetuo, ita ut nullus eorum in seipso præcise apprehendi possit [...] Non autem potest dici numerus verus, qui talis est ut præcisione careat, & ad numeros veros nullam cognitam habeat proportionem. [...] Sitque non minus incerta proportio numeri irrationalis ad rationalem numerum, quam infiniti ad finitum. » [Stifel 1544, f° 103r]

nombres irrationnels étaient de vrais nombres, ce seraient des entiers ou des fractions, or ce n'est pas le cas[24]. Finalement Stifel ne tranche pas entre ces deux opinions contraires assez communes.

Mais à la suite de ce chapitre, Stifel se demande ce qu'Euclide pensait des nombres irrationnels[25]. Il estime connaître son opinion :

> Euclide nie clairement, dans la proposition 5 de son livre X, que les nombres irrationnels sont des nombres : « le rapport entre deux quantités communicantes [c'est-à-dire commensurables] est, dit-il, comme celui d'un nombre à un nombre ». Il s'ensuit de manière certaine que le rapport entre deux quantités non communicantes n'est pas comme celui d'un nombre à un nombre. Ainsi, de même que le rapport de $\sqrt{24}$ à $\sqrt{6}$ est comme le rapport d'un nombre à un nombre, à savoir de 4 à 2, de même le rapport de $\sqrt{24}$ à $\sqrt{8}$ est comme le rapport d'un non-nombre (*non numerus*) à un nombre, à savoir de $\sqrt{12}$ à 2. [...] Il apparaît donc assez clairement qu'Euclide nie que les nombres irrationnels soient des nombres[26].

Rappelons, de nouveau, qu'Euclide ne parle jamais de nombres irrationnels et qu'il n'y a aucun exemple numérique dans le livre X des *Éléments*[27].

Pour confirmer l'affirmation selon laquelle Euclide nierait que les nombres irrationnels soient de vrais nombres, Stifel renvoie à Campanus, en notant :

> De là, Campanus, qui a compris Euclide, a affirmé que la proposition 11 du livre II d'Euclide ne peut être prouvée par les nombres. Or Campanus était trop savant pour ignorer que la onzième proposition pouvait être prouvée par les

---

24 « Deinde, si numeri irrationales essent numeri veri, tunc aut essent integri, aut essent fracti. [...] Quod autem numeri irrationales non sint numeri integri facile ostenditur. Quilibet enim numerus irrationalis, cadit inter duos aliquos numeros immediatos. [...] Item nullus numerus irrationalis potest esse numerus fractus. Impossibile enim est, ut ex multiplicatione numeri fracti, in se, fiat numerus integrus. Sed numeri irrationales multiplicatione sui in se, faciunt numeros integros. » [Stifel 1544, f^{o} 103$^{r\text{-}v}$]

25 Le titre du chapitre II est le suivant : « Quid Euclides senserit de numeris irrationalibus ». [Stifel 1544, f^{o} 104^{r}]

26 « Plane negat Euclides, propositione quinta sui decimi, numeros irrationales esse numeros. Omnium, inquit, duarum quantitatum communicantium est proportio tanquam numeri ad mumerum. Sequitur certe, proportionem duarum quantitatum non communicantium, non esse tanquam numeri ad numerum. Ut sicut proportio √ʒ24 ad √ʒ6, est proportio tanquam numeri ad numerum, videlicet tanquam 4 ad 2 : sic proportio √ʒ24 ad √ʒ8, est proportio, tanquam non numeri ad numerum, videlicet tanquam √ʒ12 ad 2. [...] Satis igitur patet Euclidem negare numeros irrationales esse numeros. » [Stifel 1544, f^{o} 104$^{r\text{-}v}$]

27 On ne trouve pas non plus de traduction numérique du livre X dans la version de Campanus des *Éléments* qui est utilisée par Stifel.

nombres irrationnels, mais il a nié ce qu'Euclide nie, à savoir que les nombres irrationnels sont des nombres[28].

Dans la proposition II. 11, il est demandé de diviser une ligne donnée de sorte que le rectangle contenu par la ligne entière et une de ses parties soit égal au carré construit sur l'autre partie. Ainsi, une ligne AB étant donnée, on veut diviser AB au point C tel que $\text{rect}(\text{AB}, \text{AC}) = \text{quad}(\text{CB})$[29]. La transcription de cet énoncé en nombres donne : trouver a et b tels que $a(a+b) = b^2$; ce qui revient à résoudre l'équation du second degré : $x^2 + bx = b^2$, dont l'unique racine positive est $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})b$, l'autre étant $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})b$. À la fin de la démonstration de la proposition II. 11, Campanus écrit ceci :

> Et ne t'efforce pas de le faire dans les nombres, car il est impossible qu'un nombre soit divisé comme le demande ici la proposition 11, [...][30].

Ainsi, selon Stifel, Euclide et à sa suite Campanus affirmeraient que les nombres irrationnels ne sont pas de vrais nombres. Et il ajoute :

> Cependant Euclide n'a pas voulu qu'ils ne soient absolument rien, puisqu'il en est fait un bel usage comme images des nombres [*imago numerorum*], en particulier dans son livre X où il en traite sous un double aspect, à savoir, dans les premières propositions, il en traite en tant qu'abstraits, sous le nom de quantités, et dans les autres propositions de ce livre, il en traite en tant que concrets, selon un ordre juste et beau[31].

Il remarque que, dans le livre X, comme nous l'avons dit, certaines définitions et certaines propositions traitent des quantités, les autres s'occupent des lignes et des surfaces. Il en déduit que l'objet du livre X est le même dans tous les cas, le nombre irrationnel, qui est examiné sous deux aspects : selon qu'il est abstrait — et Stifel parle alors de quantité — ou

---

28 « Hinc Campanus, qui Euclidem intellexit, asservit propositionem undecimam secundi libri Euclidis, non posse probari per numeros. Doctior autem fuit Campanus, quam ut ignoraverit undecimam illam posse probari per numeros irrationales : sed negavit hoc quod Euclides negat, videlicet quod numeri irrationales sint numeri. » [Stifel 1544, fº 104ᵛ]

29 Il s'agit du problème bien connu de division d'une ligne en extrême et moyenne raison. On note $\text{quad}(\text{CB})$ le carré construit sur CB et $\text{rect}(\text{AB}, \text{AC})$ le rectangle construit sur les lignes AB et AC.

30 « Ad hoc autem faciendum in numeris non labores quod est impossibile numerum sic dividi, ut hec undecima proponit, [...]. » [Busard 2005, p. 104]

31 « Nec tamen Euclides voluit eos omnino esse nihil, cum eis pulchre usus sit, tanquam numerorum imaginibus, præsertim in suo decimo, ubi eos sub duplici consideratione tractavit, videlicet in propositionibus prioribus, tractavit eos tanquam abstractos, nomine quantitatum : & in reliquis propositionibus libri illius, tractavit eos tanquam contractos, recto videlicet & pulchro ordine. » [Stifel 1544, fº 104ᵛ]

selon qu'il est concrétisé dans les objets géométriques. On retrouve ici le balancement que l'on avait noté plus haut à propos des définitions du livre X.

Voici la justification que donne Stifel de cette assertion :

> En effet, Euclide semble indiquer assez clairement et en premier lieu dans les définitions, que sous le vocable de quantités il ne veuille pas traiter ici des lignes, des surfaces et des corps en général mais plutôt des nombres irrationnels abstraits qu'il traitera ensuite en tant que concrets. En effet, d'une part il parle de la commensurabilité et de l'incommensurabilité des quantités, et d'autre part de la commensurabilité et de l'incommensurabilité des lignes, de sorte qu'il semble avoir signifié avec soin que les lignes ne sont pas à comprendre ici sous le vocable de quantité. Mais s'il ne veut pas que les lignes soient comprises sous ce terme, que veut-il ? Veut-il que ce soit les corps et les surfaces ? Mais il n'est fait aucune mention des corps dans tout le livre X. Et il ne s'occupe pas non plus de traiter des surfaces dans le livre X, si ce n'est dans la mesure où la considération de ce qui doit être dit au sujet des lignes l'y contraint[32].

2.3. *Détermination des lignes irrationnelles par Stifel*

Continuons notre lecture de l'*Arithmetica integra* de Stifel et abordons le chapitre IV du livre II dans lequel sont décrites les espèces des nombres irrationnels abstraits[33]. La lecture de ce passage n'est pas aisée pour celui qui est accoutumé au vocabulaire euclidien, puisque Stifel reprend les mêmes vocables mais avec un sens élargi. Stifel distingue ainsi cinq espèces principales :

1) Les nombres irrationnels médiaux ou irrationnels simples : ce sont les racines sourdes des nombres rationnels, de la forme $\sqrt[p]{a}$[34].

---

32 « Quod enim Euclides vocabulo quantitatis noluerit lineas, superficies, atque corpora generaliter, hoc loco tractare, sed potius abstractos numeros irrationales, quos postea tractaret contractos, videtur ipse satis indicare, & primo in definitionibus. Aliter enim loquitur de commensurabilitate & incommensurabilitate quantitatum, atque aliter de commensurabilitate & incommensurabilitate linearum, ut studiose significasse videatur, lineas non comprehendi sub quantitatis vocabulo, eo loco. Si autem lineas non vult comprehendi sub eo nomine, quid tum volet ? Num corpora & superficies ? At corporum nullam facit mentionem per totum librum decimum. Et ne quidem superficies curat in decimo tractare, nisi quantum ratio dicendorum de lineis ipsum cogit. » [Stifel 1544, f° 104v]

33 Le titre du chapitre IV est : « De speciebus numerorum irrationalium ». [Stifel 1544, f° 108v]

34 « Prima species vocatur Simplicium, et hæc continet Mediales. Sunt autem mediales numeri, quædam radices surdæ, numerorum rationalium, & subdividuntur in species infinitas. Prima medialium species continet quadrate mediales, quorum signum est √ʒ. [...] Secunda medialum species continet cubice mediales, horum signum est √ꝃ [...]. » [Stifel 1544, f^os 108v–109r] Stifel énumère ainsi les douze premières racines, de la racine carrée à la racine treizième.

Pour Euclide une ligne médiale est le côté d'un carré égal à un rectangle contenu par deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement[35]. Ainsi, soit le rectangle ABCD formé par AB et BC exprimables et commensurables en puissance seulement et soit E une droite exprimable de référence, on a par exemple : $\mathrm{AB} = p \cdot \mathrm{E}$ et $\mathrm{BC} = p\sqrt{q} \cdot \mathrm{E}$, où p et q sont des entiers ou des fractions. Alors, le carré égal au rectangle ABCD a pour côté $p\sqrt[4]{q} \cdot \mathrm{E}$. Ainsi, les nombres médiaux de Stifel généralisent les lignes médiales d'Euclide à d'autres racines que la racine quatrième.

2) Les nombres irrationnels composés sont ceux pour lesquels on a deux sous-espèces (dans la composition, le premier terme est toujours plus grand que le second) :

– les bimédiaux : $\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b}$;

– les binomiaux : $\sqrt[p]{a} + n$ ou $m + \sqrt[q]{b}$ ou $\sqrt[p]{a} + \sqrt[q]{b}$.[36]

Là encore, Stifel généralise les définitions euclidiennes. En effet, Euclide distingue parmi les bimédiales, les bimédiales premières et les bimédiales deuxièmes. Les premières sont composées de deux droites médiales commensurables en puissance seulement et contenant une aire exprimable. Soit E une droite exprimable de référence, les binomiales premières sont de la forme $k(\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{p^3}) \cdot \mathrm{E}$, où p est entier ou fractionnaire [Euclide 1956, 85]. Quant aux binomiales deuxièmes, elles sont elles aussi composées de deux droites médiales commensurables en puissance seulement mais contenant une aire médiale ; ce sont les lignes de la forme $k(\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q^2/p}) \cdot \mathrm{E}$, où k, p et q sont des entiers ou des fractions [Euclide 1956, 87]. Et enfin, les binomiales sont des lignes irrationnelles composées de deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement et sont de la forme $k(1 + \sqrt{p}) \cdot \mathrm{E}$ où k, p sont des entiers ou des fractions [Euclide 1956, 84].

35 Voir notre Annexe.

36 « Secunda species numerorum irrationalium, vocatur Compositorum : & habet duas subspecies. Prima vocatur bimedialium, & fit ex additione medialis numeri ad medialem, eiusdem speciei medialium. Ut √ʒ12+√ʒ8, item √tȼ12+√tȼ6 [...]. Secunda species compositorum, vocatur binomialium : & fit ex additione medialis numeri ad rationalem, vel ad medialem, alterius tamen speciei medialium. Exemplum primi 6+√ʒ12, item √ʒ12+2. Exemplum secundi √ʒ12+√tȼ12, item √ʒ12+√ʒʒ12, &c. » [Stifel 1544, f[os] 109[v]–110[r]]

3) Les racines carrées des composés : $\sqrt{\sqrt[p]{a}+\sqrt[p]{b}}$ ou $\sqrt{\sqrt[p]{a}+n}$ ou $\sqrt{m+\sqrt[p]{b}}$ ou $\sqrt{\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}}$.[37]

4) les nombres irrationnels dits « comme pour les composés » (*tanquam compositorum)*, qui eux aussi sont divisés en deux sous-espèces :

– les résidus bimédiaux : $\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}$;

– les résidus binomiaux : $\sqrt[p]{a}-n$ ou $m-\sqrt[q]{b}$ ou $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$.[38]

5) Les nombres irrationnels dits racines des nombres « comme pour les composées » : $\sqrt{\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}}$ etc.[39]

Stifel illustre longuement chacune de ces espèces d'exemples numériques.

Il explique ensuite (au chapitre v) l'usage que selon lui Euclide a fait de ces espèces de nombres irrationnels au livre X[40]. Il va ainsi dérouler, à partir de certains des nombres irrationnels qu'il vient de définir[41], la détermination des différentes lignes irrationnelles dont traite Euclide (les médiales, les irrationnelles obtenues par adjonction que sont les binomiales, les bimédiales premières et deuxièmes, les majeures, les droites

---

37 « Tertia species irrationalium numerorum, vocatur radicalium compositorum. Sunt enim numeri irrationales speciei illius, radices quadratæ compositorum numerorum. Ut √ʒ · √ʒ12 + √ʒ8. Item √ʒ · 6 + √ʒ12. &c. » [Stifel 1544, f° 110r]

38 « Quarta species irrationalium numerorum vocatur, tanquam compositorum. Quanquam enim (ut rationem vocabuli reddam) numeri speciei huius, non fiant per additionem sicut compositi, sed per subtractionem : tamen sunt per omnia similes compositis, ut Euclides prolixe probat. Subdividitur ergo etiam ista species, in duas subspecies. Prima vocatur residualium bimedialium : et fit ex subtractione medialis à mediali, eiusdem speciei medialium. Ut √ʒ12 – √ʒ6, item √tȼ24 – √tȼ18. Et sic de alijs. Secunda species numerorum irrationalium tanquam compositorum, vocatur residualium binomialium : & fit ex subtractione. Primo, medialis numeri à rationali, ut 12 – √ʒ140. Secundo, rationalis à mediali : ut √ʒ200 – 12. Tertio, medialis à mediali, alterius speciei : ut √ʒ12 – √tȼ60, item √tȼ12 – √ʒʒ18, item √ʒ12 – √ʒʒ80. Et sic de alijs. » [Stifel 1544, f° 110r]

39 « Quinta species irrationalium numerorum, vocatur radicalium tanquam compositorum. Sunt enim numeri speciei illius, radices quadratæ numerorum tanquam compositorum, ut √ʒ · √ʒ12 – √ʒ8, item √ʒ · 6 – √ʒ6, item √ʒ · √ʒ12 – 2, item √tȼ60 – √ʒʒ200. Et sic de alijs. » [Stifel 1544, f° 110v]

40 Le titre du chapitre v est le suivant : « Quid Euclides collegerit ex prædictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit ». [Stifel 1544, f° 111r]

41 Nous avons vu que Stifel généralise les définitions euclidiennes ; il remarque alors avec justesse que seules les racines carrées et les racines quatrièmes interviennent dans les lignes étudiées par Euclide au livre X : « Atque ita ex infinitis speciebus medialium duæ solummodo species exceptæ sunt, videlicet species medialium quadrate, ut ex ea statueretur species linearum rationalium secunda, & species medialium zensizensice, ut ex ea statueretur species prima linearum irrationalium. » [Stifel 1544, f° 111v]

pouvant produire une aire composée d'une exprimable et d'une médiale, les droites pouvant produire une aire composée de deux médiales ; puis les irrationnelles correspondantes obtenues par retranchement[42]).

Tout d'abord, Stifel explique qu'Euclide divise l'ensemble des nombres rationnels (c'est-à-dire les entiers et les fractions) en deux espèces : les nombres carrés et les nombres non-carrés[43]. Par concrétisation de ces nombres dans des carrés, c'est-à-dire en considérant des carrés ayant ces nombres pour surface, puis leurs côtés, on obtient deux espèces de lignes, soit rationnelles en longueur (provenant de nombres rationnels qui sont des carrés), soit rationnelles en puissance (provenant de nombres rationnels qui ne sont pas des carrés). Par exemple, les entiers 9 et 18 concrétisés dans les carrés T et R de la figure précédente (voir figure 1) donnent deux lignes rationnelles de natures différentes : la ligne de mesure 3, qui est rationnelle en longueur, et la ligne de mesure $\sqrt{18}$, qui est rationnelle en puissance seulement[44].

Si on concrétise dans des carrés des nombres irrationnels médiaux quadratiquement (selon la nomenclature de Stifel ce sont les nombres du type $\sqrt{a}$), on obtient comme côtés des lignes appartenant à la première espèce de lignes irrationnelles définies par Euclide, c'est-à-dire les médiales. Par exemple, le nombre $\sqrt{162}$ donne la ligne médiale de mesure $\sqrt[4]{162}$[45].

Dans un troisième temps, Stifel considère parmi les nombres bimédiaux qu'il a définis précédemment, ceux qui sont composés de deux racines carrées, auxquels il adjoint les nombres binomiaux qui sont sommes d'un nombre rationnel et d'une racine carrée : soient les nombres du type $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}+b$ (là encore le premier terme du composé est plus grand que le second). Il renomme l'ensemble de ces nombres « nombres

42 On trouve les définitions de ces droites en annexe à cet article.

43 « Primo divisit Euclides universos numeros rationales, in quadratos, & non quadratos. » [Stifel 1544, fº 111^{v}]

44 « Atque ita ex duabus illis speciebus suis, contraxit numeros ad superficies quadratas. Et sic mox invenit suas species illas duas, linearum rationalium. Ut 9 & 18 (figuræ quam posui cap. 3) contracti ad superficies T R, faciunt latera 3 & $\surd\mathfrak{z}18$. » [Stifel 1544, fº 111^{v}]

45 « Secundo, numeros, ex specie illa medialum quadrate, receptos, contraxit ad superficies quadratas (ut in figura nostra vides medialem numerum $\surd\mathfrak{z}162$ contractum ad superficiem signatam literam S) & vidit latus quadrati, facere numerum zenzizensice medialem (videlicet $\surd\mathfrak{zz}162$) & sic recepta est illa alia species medialium numerorum, ut ex ea statueretur species prima irrationalium linearum. » [Stifel 1544, fº 111^{v}]

binomiaux »[46] (ce changement de vocabulaire n'aide pas à la compréhension du texte, mais est nécessaire pour coller au vocabulaire euclidien). Il remarque alors que l'on peut diviser ces nombres binomiaux en deux genres, selon qu'ils sont des carrés de nombres binomiaux ou non[47]. Et, donc, dans chacun des deux genres il y trois sous-espèces : $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+b$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$[48].

Par concrétisation dans des carrés des nombres binomiaux de la première espèce (nombres du type $a+\sqrt{b}$, qui sont des carrés de nombres binomiaux), on obtient comme côtés les six lignes irrationnelles, binomiales premières, deuxièmes, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes et sixièmes. Stifel n'entre pas dans les détails ; il se contente de donner un exemple pour chaque cas, sans chercher à caractériser ce qui distingue ces sous-espèces de binomiales[49]. Ainsi, il dit qu'à partir de $97+\sqrt{2352}$ (à corriger en $97+$

[46] « Tertio transivit ad speciem numerorum irrationalium compositam. Et primo recepit ex bimedialibus, illos qui quadrate essent bimediales : sed illos noluit vocari bimediales, at eos vocavit binomiales. [...] Secundo, ex binomialibus recepit aliquos, videlicet illos, quos vidit esse compositos, ex uno numero rationali, et ex altero quadrate mediali. » [Stifel 1544, f° 111v]

[47] Plus loin, au chapitre x, Stifel donne un critère permettant de reconnaître si un nombre binomial est un carré ou non. Soit $d_1 + d_2$ un tel nombre, c'est un carré si $\frac{d_2^2-d_1^2}{d_1^2}$ est un nombre carré (« Si differentia quadratorum particularum habuerit proportionem, ad quadratum particulæ maioris, tanquam numeri quadrati ad numerum quadratum, erit binomium (aut residuum) huiusmodi particularum absque dubio quadratum. Si autem talis proportio, non sit proportio tanquam numeri quadrati ad numerum quadratum, non erit binomium tale quadratum, nec residuum tale quadratum erit. » ([Stifel 1544, f° 127r-v]). Dans le même chapitre, à la suite, il propose un algorithme pour déterminer la racine d'un nombre binomial donné (nous y reviendrons plus loin).

[48] « Binomia illa sua Euclides divisit primo in duo genera. Ad primum genus rejecit omnia quæ essent quadrata [...] ; quæ vero non essent quadrata binomia, constituit sub genere secundo binomiorum. Sub utroque autem genere binomiorum, constituit tres species. Primam, quæ contineret binomia constituta, ex parte rationali maiore, & mediali parte minore. Secundam, quæ contineret ea quæ ex parte rationali minore, & ex parte mediali maiore essent constituta. Tertiam, quæ contineret ea quæ ex duabus partibus medialibus constituta essent. » [Stifel 1544, f°s 111v–112r]

[49] « 1. Binomiales autem numeros primæ speciei, contraxit ad superficies quadratas, viditque latera quadratorum illorum, esse binomiales lineas, modo primæ, modo secundæ, modo tertiæ, modo quartæ, modo quintæ, modo sextæ speciei. Ut ex 97 + √ʒ2352, fit 7 + √ʒ48. Et ex 34 + √ʒ1152, fit √ʒ18 + 4. Et ex 98 + √ʒ9600, fit √ʒ50 + √ʒ48. Et ex 7 + √ʒ48, fit 2 + √ʒ3. Et ex 30 + √ʒ756, fit √ʒ21 + 3. Et ex 32 + √ʒ768, fit √ʒ24 + √ʒ8. [...] Et hæ sunt sex binomialium linearum subspecies, comprehensæ sub secunda specie irrationalium linearum Euclidis. » [Stifel 1544, f° 112r]

$\sqrt{9408}$) on obtient $7+\sqrt{48}$ pour la première binomiale[50] ; à partir de $34+\sqrt{1152}$ on obtient $\sqrt{18}+4$ pour la deuxième[51] ; à partir de $98+\sqrt{9600}$ on obtient $\sqrt{50}+\sqrt{48}$ pour la troisième[52] ; à partir de $7+\sqrt{48}$, on obtient $2+\sqrt{3}$ pour la quatrième[53] ; à partir de $30+\sqrt{876}$ (à corriger en $30+\sqrt{756}$) on obtient $\sqrt{21}+3$ pour la cinquième[54] et à partir de $32+\sqrt{768}$, on obtient $\sqrt{24}+\sqrt{8}$ pour la sixième[55].

Maintenant, en concrétisant des nombres binomiaux de la deuxième espèce (nombres du type $\sqrt{a}+b$, carrés de nombres binomiaux) dans des carrés, on obtient des lignes associées à des sommes de racines quatrièmes $\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}$ telles que $\sqrt[4]{c}\cdot\sqrt[4]{d}$ est rationnel. Par exemple $\sqrt{18}+4$ donne $\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}$ avec $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}$[56]. On a les lignes qu'Euclide appelle bimédiales premières.

Enfin, en concrétisant des nombres binomiaux de la troisième espèce (nombres du type $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, carrés de nombres binomiaux) on trouve les lignes bimédiales secondes, associées à des sommes de racines quatrièmes

---

50 Par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à 7 est commensurable à E, la ligne associée à $\sqrt{48}$ est incommensurable à E et $\sqrt{7^2-(\sqrt{48})^2}=1$, commensurable à 7. Voir en annexe les définitions des lignes binomiales premières, deuxièmes, etc., ainsi que le schéma résumant les propriétés que doivent remplir les deux lignes composant la ligne irrationnelle afin qu'elle soit de l'une ou l'autre sous-espèce.

51 Par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à $\sqrt{18}$ est incommensurable à E, la ligne associée à 4 est commensurable à E et $\sqrt{(\sqrt{18})^2-4^2}=\sqrt{2}$, commensurable à $\sqrt{18}$ $(=3\sqrt{2})$.

52 Par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à $\sqrt{50}$ est incommensurable à E, la ligne associée à $\sqrt{50}$ est incommensurable à E et $\sqrt{(\sqrt{50})^2-(\sqrt{48})^2}=\sqrt{2}$, commensurable à $\sqrt{50}$ $(=5\sqrt{2})$.

53 En fait, on obtient une binomiale première, car par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à 2 est commensurable à E, la ligne associée à $\sqrt{3}$ est incommensurable à E et $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$, commensurable à 2.

54 Par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à $\sqrt{21}$ est incommensurable à E, la ligne associée à 3 est commensurable à E et $\sqrt{(\sqrt{21})^2-3^2}=\sqrt{12}$, incommensurable à $\sqrt{21}$.

55 Par rapport à la droite E posée comme unité, la ligne associée à $\sqrt{24}$ est incommensurable à E, la ligne associée à 3 est incommensurable à E et $\sqrt{(\sqrt{24})^2-(\sqrt{8})^2}=4$, incommensurable à $\sqrt{24}$.

56 « 2. Binomiales numeros secundæ speciei, contractos ad superficies quadratas, vidit facere latera facientia numeros bimediales zensizensice. Et tales (ut partes compositionis) inter se multiplicatæ, semper faciunt numerum rationalem simpliciter. Ut ex √ʒ18 + 4, fit √ʒʒ8 + √ʒʒ2. » [Stifel 1544, f° 112r]

$\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d}$ telles que $\sqrt[4]{c}\cdot\sqrt[4]{d}$ est un nombre médial quadratique (de la forme $\sqrt{e}$). Par exemple $\sqrt{50}+\sqrt{48}$ donne $\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{8}$ avec $\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt{12}$[57].

À ce stade, Stifel a donc montré comment obtenir à partir des nombres irrationnels, les droites médiales, les droites binomiales (et ses six sous-espèces), les droites bimédiales premières et deuxièmes. Il lui reste à déterminer les majeures, les droites pouvant produire une aire composée d'une exprimable et d'une médiale et les droites pouvant produire une aire composée de deux médiales. C'est là que sa méthode semble, dans un premier temps, trouver sa limite.

Stifel considère les nombres binomiaux qui ne sont pas des carrés de binomiaux. Il y a là encore trois espèces, respectivement de la forme : $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+b$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Par concrétisation de tels nombres dans des carrés, il affirme qu'il obtient les trois espèces de lignes irrationnelles qu'il lui reste à définir. Il donne les exemples suivants :

$6+\sqrt{2}$ donne $\sqrt{6+\sqrt{2}}$, qui, selon Stifel, correspondrait à une droite majeure.

$\sqrt{6}+2$ donne $\sqrt{\sqrt{6}+2}$, qui correspondrait à une droite pouvant produire une aire composée d'une exprimable et d'une médiale.

Et $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ donne $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, qui correspondrait à une droite pouvant produire une aire composée de deux médiales[58].

Stifel explique alors que, dans le deuxième cas, on appelle à juste titre la ligne dont la mesure est $\sqrt{\sqrt{6}+2}$ « droite pouvant produire une aire composée d'une exprimable et d'une médiale » car le carré sur elle, qui

---

57 « 3. Binomiales numeros tertiæ specieie, contractos ad superficies quadratas, vidit habere latera facientia numeros bimediales zensizensice. Et tales quidem, qui partium multiplicatione inter se, faciant semper numerum medialem quadrate. Ut ex √ȝ50 + √ȝ48, fit √ȝȝ18 + √ȝȝ8. Ex talibus igitur lineis, constituit quartam speciem irrationalium linearum, easque lineas vocavit Bimediales secundas, nam priores vocavit Bimediales primas. » [Stifel 1544, f° 112r]

58 « 4. Binomiales numeros quartæ speciei, contractos ad superficies quadratas, vidit habere latera, facientia radices binomiorum quartorum. Et tales lineas vocauit, lineas maiores. Fecitque ex eis, speciem linearum suarum irrationalium quintam. Ut ex 6 + √ȝ2, fit √ȝ · 6 + √ȝ2. 5. Binomiales numeros quintæ speciei contractos ad superficies quadratas, vidit habere latera, facientia radices binomiorum quintorum. Ut ex √ȝ6 + 2, fit √ȝ · √ȝ6 + 2. Et tales lineas uocavit potentes rationale & mediale. [...] 6. Binomiales numeros sextæ speciei, contractos ad superficies quadratas, vidit habere latera, facientia radices binomiorum sextorum. Ut ex √ȝ6 + √ȝ2, fit √ȝ · √ȝ6 + √ȝ2. Et ex lineis, huiusmodi numeros ferentibus, constituit septimam speciem linearum suarum irrationalium. Vocavitque lineas huiusmodi, potentes duo medialia. » [Stifel 1544, f° 112v]

a pour aire $\sqrt{6}+2$, est bien composé d'une médiale, $\sqrt{6}$, et d'une exprimable, 2[59]. Même chose pour la troisième ligne associée à $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, dont le carré, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, est la somme de deux médiales.

Mais ces lignes irrationnelles sont définies par Euclide comme sommes de lignes incommensurables en puissance, telles que, selon le cas, la somme de leurs carrés est exprimable ou médiale, et le rectangle contenu par elle aussi selon les cas exprimable ou médiale. Pour pouvoir montrer que les lignes considérées ici par Stifel appartiennent bien aux trois espèces de lignes irrationnelles définies par Euclide, il faut mettre les nombres irrationnels sous la forme d'une somme de deux irrationnels. Stifel ne le fait pas ici mais nous l'apprend, plus loin, aux chapitres X et XII.

En effet, au chapitre X, il nous explique comment trouver la racine carrée d'un nombre binomial (ou d'un nombre résidu) qui admet une racine binomiale (ou résidu), et au chapitre XII, il montre que le même algorithme s'applique aux nombres binomiaux (ou résidus) qui n'ont pas de racines carrées binomiales (ou résidus), mais dont on veut exprimer la racine carrée comme somme ou différence de deux racines carrées. L'algorithme est le suivant[60] : si $d_1 \pm d_2$ est un tel nombre (avec $d_1 > d_2$), on commence par diviser le nombre par 2 : $\frac{1}{2}d_1 \pm \frac{1}{2}d_2$. On considère la différence des carrés, $(\frac{1}{2}d_1)^2 - (\frac{1}{2}d_2)^2$, dont on ajoute puis retranche la racine à $\frac{1}{2}d_1$.

Alors

$$\sqrt{d_1 \pm d_2} = \sqrt{\frac{1}{2}d_1 + \sqrt{(\frac{1}{2}d_1)^2 - (\frac{1}{2}d_2)^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}d_1 - \sqrt{(\frac{1}{2}d_1)^2 - (\frac{1}{2}d_2)^2}}.$$

---

59 « Patetque satis appellationis huius ratio, vel ex ipsa pictura numeri : scilicet √ʒ · √ʒ6 + 2 in se ductus quadrate, facit √ʒ6 + 2. Vides certe, ut potentia hæc contineat rationalem numerum 2, & medialem numerum √ʒ6. » [Stifel 1544, f$^{\mathrm{o}}$ 112$^{\mathrm{v}}$]

60 « Primo. Pro binomio aut residuo tuo (de quo radix est extrahenda) pone dimidium eius. Secundo. Recipe quadrata particularum dimidij illius sic positi, eaque quadrata subrahe ab invicem, & radicem relicti illius serva. Tertio. Recipe maiorem particulam dimidij (tui binomij, aut residui, primo positi loco sui integri) eamque primo adde ad radicem prius servatam, & radix quadrata, illius aggregati erit particula prima radicis quam quæris. Quarto. Eandem radicem relicti prius servatam, subtrahe à priore illa particula maiore (illius dimidij, quod primo posueras, loco sui integri, dum dimidiares tuum binomium, aut residuum). Et radix quadrata illius relicti novissimi, erit particula secunda radicis quam quæris. Duabus ergo particulis tuæ radicis inventæ interpone signum additorum vel subtractorum. Nam si sit radix binomij, interponendum est signum +. Si autem sit radix residui, tunc interponendum est signum −. » [Stifel 1544, f$^{\mathrm{os}}$ 127$^{\mathrm{v}}$–128$^{\mathrm{r}}$]

Stifel reprend cet algorithme au chapitre XII pour déterminer les racines des nombres $24+\sqrt{552}$, $\sqrt{208}+8$ et $\sqrt{128}+\sqrt{92}$ et montrer qu'on obtient l'une des trois espèces de lignes irrationnelles cherchées[61].

En effet : $\sqrt{24+\sqrt{552}} = \sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}}$, avec $\sqrt{12+\sqrt{6}} \cdot \sqrt{12-\sqrt{6}} = \sqrt{138}$, qui est médial et $(12+\sqrt{6})+(12-\sqrt{6}) = 24$, qui est rationnel. Ainsi la ligne est majeure.

$\sqrt{\sqrt{208}+8} = \sqrt{\sqrt{52}+6} + \sqrt{\sqrt{52}-6}$, avec $\sqrt{\sqrt{52}+6} \cdot \sqrt{\sqrt{52}-6} = 4$, qui est rationnel et $(\sqrt{52}+6)+(\sqrt{52}-6) = 2\sqrt{52}$, qui est médial. Ainsi la ligne est une droite pouvant produire une aire contenue par une exprimable et une médiale.

$\sqrt{\sqrt{128}+\sqrt{92}} = \sqrt{\sqrt{32}+3} + \sqrt{\sqrt{32}-3}$, avec $\sqrt{\sqrt{32}+3} \cdot \sqrt{\sqrt{32}-3} = \sqrt{23}$, qui est médial et $(\sqrt{32}+3)+(\sqrt{32}-3) = 2\sqrt{32}$, qui est médial. Ainsi la ligne est une droite pouvant produire une aire contenue par deux médiales.

Finalement Stifel a obtenu les différentes espèces de lignes irrationnelles par adjonction qu'Euclide traite dans le livre X. Les déterminations sont les mêmes pour obtenir les espèces de lignes irrationnelles par retranchement, à partir des nombres résidus.

61 « Ut sub hac radice maiore √ʒ · 24 + √ʒ552, latent hæ duæ radices √ʒ · 12 + √ʒ6, & √ʒ · 12 – √ʒ6. Hæ, inquam, sunt duæ radices, potentia incommensurabiles [...] superficiemque medialem continentes, quarum quadrata pariter accepta, sint rationale » [Stifel 1544, f° 134$^{\mathrm{v}}$] ; « Sed de resolutione potentium mediale & rationale dicendum est, quanquam modus huiusmodi resolutionum, nihil variet à regula data capite 10 de extractionibus radicum quadratarum ex binomijs et residuis quadratis. Ut si resolvenda hæc radix potens, mediale & rationale, √ʒ · √ʒ208 + 8. [...] √ʒ · √ʒ52 + 6 est pars resolutionis maior. [...]. Huius radix quadrata, quæ est √ʒ · √ʒ52 – 6, est pars resolutionis minor. Hæ vero partes resolutionis, respondent propositioni 28 [...]. Sunt enim potentialiter incommensurabiles, quia differunt specie : & continent superficiem rationalem, quia multiplicatione sua inter se faciunt 4. Et ambo quadrata earum pariter accepta, sunt mediale : nam √ʒ52 + 6 ad √ʒ52 – 6 addita, faciunt √ʒ52. » [Stifel 1544, f$^{\mathrm{os}}$ 138$^{\mathrm{v}}$–139$^{\mathrm{r}}$] ; « In resolutionibus radicum, venientium à binomijs sextæ speciei (quæ uocantur potentes duo medialia) consideranda venit propositio 29 decimi. Illi enim propositioni respondere debent partes resolutionis. Ut sit resolvenda hæc radix potens duo medialia √ʒ · √ʒ128 + √ʒ92 : erunt partes resolutionis illius hæ : √ʒ · √ʒ32 + 3, & √ʒ · √ʒ32 — 3. Sunt autem hæ partes iuxta propositionem 29 primo incommensurabiles potentia, quia sunt irrationales specie differentes. Secundo, continent superficiem medialem hanc, √ʒ23 [...]. Tertio, quadrata earum ad se addita, faciunt hoc mediale, √ʒ128. » [Stifel 1544, f° 140$^{\mathrm{r\text{-}v}}$]

3. L'ÉXPOSÉ DE STEVIN SUR L'IRRATIONALITÉ

3.1. *Le statut des nombres irrationnels*

Nous avons remarqué que Stifel semble refuser aux nombres irrationnels le statut de « vrais » nombres ; en tout cas il attribue cette opinion à Euclide. Stevin, quant à lui, soutient « que racine quelconque est nombre » [Stevin 1585a, p. 30], ce qu'il argumente ainsi :

> Mais passant tout ceci, nous respondrons à son propos, prouvants que la $\sqrt{8}$, est nombre en ceste sorte : La partie est de la mesme matiere qu'est son entier ; Racine de 8 est partie de son quarré 8 : Doncques $\sqrt{8}$ est de la mesme matiere qu'est 8 : Mais la matiere de 8 est nombre ; Doncques la matiere de $\sqrt{8}$ est nombre : Et par consequent est nombre. [Stevin 1585a, p. 31][62]

Par ailleurs, Stevin affirme « qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irreguliers, inexplicables, ou sourds » [Stevin 1585a, p. 33]. Il fait alors la remarque que par définition la diagonale d'un carré de côté 2 est dite rationnelle, car elle est commensurable en puissance au côté, alors que $\sqrt{8}$ est dit irrationnel, ce qui pour lui est contradictoire :

> [...] prenons le costé et diagonale d'un quarré, qui sont lignes entre eux [...] incommensurables, toutesfois ny diagonale, ny costé (abstraict de nombre) n'est ligne absurde ou irrationnelle, l'incommensurance doncques des quantitez, n'est pas l'absurdité d'icelles, mais c'est plustost leur naturelle mutuelle habitude. L'adversaire[63] me replique qu'il y a des lignes rationnelles, & irrationnelles (desquelles traicte Euclide en son dixiesme livre) les definitions desquelles (selon Campane defi. 5 & 7 que Zambert met la 7 & 8) sont telles : *Toute ligne droicte proposée s'appelle rationnelle. Et les lignes à icelle incommensurables, se nomment irrationnelles.* Donc il conclud que les nombres explicans ces lignes irrationnelles, sont nombres irrationnels. Je respons qu'il est notoire que cest argument soit inartificiel consistant en seule authorité, à laquelle il faut preferer l'irrefutable raison, qui est : Premierement que desmonstrerons contradiction en cette sorte : Soit ligne proposée la diagonale (car la definition dict de toute ligne) d'un quarré duquelle le costé est 2 : Or ceste ligne proposée (dict il) est rationnelle, & le nombre explicant sera de même qualité ; parquoi le nombre explicant ceste ligne qui est $\sqrt{8}$ sera rationnel : & d'autre part dict que $\sqrt{8}$ est irrationnelle, ce qui est contradiction. Au second nous pouvons demonstrer

62 Stevin utilise ici le même argument qu'il avait présenté plus haut afin de démontrer que l'unité est un nombre, s'opposant ainsi aux auteurs de l'Antiquité qui en faisaient le principe du nombre : « La partie est de mesme matiere qu'est son entier, Unité est partie de multitude d'unitez, Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez ; Mais la matiere de multitude d'unitez est nombre, doncques la matiere d'unité est nombre » [Stevin 1585a, p. 2^r].

63 L'« adversaire » auquel fait allusion Stevin ici est une figure rhétorique et ne renvoie à aucun auteur en particulier.

(mesmes selon le dire de l'adversaire) que nulle ligne n'est par soi irrationnelle : car s'il dict que c'est celle là (à sçavoir diagonale ou costé de quarré) qu'on explique par nombre Arithmetique[64] ; & l'autre irrationnelle, s'ensuit que selon l'attribution du nombre Arithmeticque, le costé pourra l'une fois estre rationnel, autrefois irrationnel ; doncques il ne l'est pas par soi, mais en respect d'un nombre dont il y a ici question [Stevin 1585a, p. 34–35].

Stevin remarque ici avec justesse que les lignes ne sont pas *a priori* rationnelles ou irrationnelles ; la rationalité ou l'irrationalité comme la commensurabilité ou l'incommensurabilité sont des propriétés relatives.

3.2. *Classification des nombres irrationnels*

Voyons maintenant comment Stevin calque sur la classification euclidienne des lignes irrationnelles son exposé des nombres irrationnels dans l'*Arithmetique*. Il commence par définir la commensurabilité et l'incommensurabilité des nombres (définitions XXXVII et XXXVIII) : sont commensurables les nombres pour lesquels il existe un nombre, unité comprise[65], qui en soit une mesure commune et incommensurables ceux qui n'ont pas une telle commune mesure[66]. Ce faisant, il reformule en termes de nombres les définitions euclidiennes énoncées en termes de grandeurs. Par « nombres » il faut entendre ici les nombres rationnels (les entiers et les fractions) et les racines des nombres rationnels : comme exemples de nombres commensurables, Stevin donne 7 et 9, puis $\sqrt{27}$

---

64 Dans l'*Arithmetique*, Stevin propose la définition suivante du nombre Arithmétique (définition VI) [Stevin 1585a, p. 6^r] : « Nombre Arithmetique est celui qu'on explique sans adiectif de grandeur ». Dans l'explication qui suit, il précise qu'on doit ainsi faire la différence entre les nombres expliqués par un adjectif de grandeur, « comme les nombres quarrez, cubiques, racines, quantitez &c. lesquels nous appellons nombres Geometriques », et les nombres expliqués sans adjectif de grandeur, « comme un, deux, trois, trois cincquiesmes, &c. » [Stevin 1585a, p. 6^v] Par exemple, 9 peut être considéré pour lui-même, c'est alors un nombre Arithmétique. Il peut aussi être considéré selon la place qu'il occupe dans une série géométrique. Ainsi, dans la série géométrique de raison 3, 9 est considéré comme nombre Géométrique « carré » ; mais dans la série géométrique de raison 9, il est nombre Géométrique « côté ». Stevin accompagne ces définitions de représentations géométriques, à l'aide de lignes, carrés, cubes et empilement de cubes [Stevin 1585a, p. 12–13]. Rappelons que les nombres radicaux ne font pas partie des nombres Arithmétiques mais des nombres Géométriques.

65 Nous avons vu, note 62, que pour Stevin l'unité est un nombre comme les autres.

66 « Definition XXXVII. Nombres commensurables sont ceux ausquels existe quelque nombre qui leur soit commune mesure. [...] Definition XXXVIII. Nombres incommensurables sont ceux ausquels n'existe quelque nombre qui leur soit commune mesure. » [Stevin 1585a, p. 41]

et $\sqrt{3}$, et il propose 4 et $\sqrt{6}$ comme exemple de nombres incommensurables.

À la définition XXXIX, Stevin introduit le « multinomie radical », comme étant le « nombre consistant de plusieurs nombres incommensurables » [Stevin 1585a, p. 43]. Il donne l'exemple de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$. Un « binomie radical » est bien entendu composé de deux termes, un « trinomie » de trois, etc. Stevin introduit ensuite les vocables de « multinomie conioinct », lorsque les termes qui composent le multinomie, et qu'on appelle « noms », sont liés par des signes $+$, et « multinomie disioinct », lorsque les termes sont liés par des signes $-$ [Stevin 1585a, p. 44–45].

Stevin explique alors qu'il existe douze espèces de binomies (composés de deux termes conjoints ou disjoints ; Euclide parle quant à lui des six espèces de lignes binomiales, composées de deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement, auxquelles sont associées les six espèces d'apotomés, obtenues par retranchement d'une ligne à une autre ligne) :

> Il y a douze especes de binomies, desquelles les 6 sont conioinctes, & 6 disioinctes ; & chascune sixaine a deux sortes ; desquelles les trois sont telles, que la difference des potences quarrées de leurs noms, tient racine quarrèe à son maieur nom commensurable. Les autres trois binomies sont telles, que la difference des potences quarrées de leur noms tient racine à son maieur nom incommensurable ; Et de chascun de ces trois binomies, les deux ont chascun un nom à nombre Arithmeticque commensurable, mais le troisiesme a ses deux noms, à nombre Arithmeticque incommensurables. [Stevin 1585a, p. 46]

Il résume la situation dans le schéma de la fig. 2[67] [Stevin 1585a, p. 47] :

Suivent alors les définitions des douze binomies. Nous n'allons pas toutes les examiner. Prenons la première :

> Definition XLV : Quand le maieur nom d'un binomie conioinct, est à nombre Arithmeticque commensurable, & que la difference de leurs quarrez tient racine quarrée au maieur nom commensurable, il s'appelle binomie premier. [Stevin 1585a, p. 47–48]

Soient a et b incommensurables entre eux, avec $a > b$. On considère le nombre $a + b$. On suppose que a est commensurable à un nombre Arithmétique donné, c'est-à-dire que a est soit un entier, soit une fraction. Et on suppose par ailleurs que $\sqrt{a^2 + b^2}$ est commensurable à a ; c'est donc soit un entier, soit une fraction.

Rappelons ici la définition de la ligne binomiale première dans les *Éléments* d'Euclide :

---

67 On retrouve, dans une disposition différente, le schéma donné en annexe pour les six sous-espèces de lignes binomiales chez Euclide.

- Le binomie a 12 especes, desquelles les
  - Six sont conioinctes, des mesmes les
    - Trois sont, desquelles la difference des potences quarrees, tient racine au maieur nom commensurable, des mesmes
      - Les deux ont un nom à nombre Arithmetique commensurable, desquels
        - L'une est celle de laquelle le maieur nom est à nombre Arithmetique commensurable
        - L'autre de laquelle le moindre nom est à nombre Arithmetique commensurable
      - La troisiesme a les deux noms à nombre arithmetique incommensurable[s]
    - Trois sont desquelles la difference des potences quarrees tient racine au maieur nom incommensurable, des mesmes
      - Les deux ont un nom à nombre Arithmetique commensurable, desquelles
        - L'une est celle de laquelle le maieur nom est à nombre Arithmetique commensurable
        - L'autre est celle de laquelle le moindre nom est à nombre Arithmetique commensurable
      - La troisiesme a les deux noms à nombre arithmetique incommensurables
  - Six sont disioinctes, & reçoivent subdivisions semblables à celles des conioinctes

FIGURE 2.

> Une droite exprimable étant présupposée ainsi qu'une binomiale divisée en ses termes désignés telle que le terme le plus grand soit, en puissance, plus grand que le plus petit par un [carré] sur une [droite] commensurable en longueur avec lui-même, si, dans ce cas, le plus grand terme est commensurable en longueur avec la [droite] exprimable proposée, que la [droite] entière soit appelée binomiale première. [Euclide 1998, p. 231]

L'énoncé de Stevin est la simple traduction arithmétique de l'énoncé géométrique d'Euclide. Les énoncés des autres espèces de binomies sont du même type.

Comme nombre binomie premier, Stevin donne l'exemple de $3+\sqrt{5}$, qu'il présente ainsi :

Explication	
Soit binomie conioinct	$3 + \sqrt{5}$
Quarrez des nombres	$\begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$
Leur difference.	4
Sa racine.	2

Par ce que le maieur nom 3 du binomie conioinct, est au nombre Arithmeticque commensurable, & que la difference 4 des quarrez des deux noms tient racine quarrée 2, au maieur nom 3 commensurable, le binomie donné $3+\sqrt{5}$, s'appelle le premier. [Stevin 1585a, p. 48]

Plus loin, dans la seconde partie de l'*Arithmetique*, composée d'une série de problèmes, Stevin va expliquer comment construire les douze espèces de binomies (c'est le problème XXXVIII). Prenons de nouveau l'exemple du premier binomie :

Construction du premier binomie.	
Quelque deux nombres de la quantité du 35. prob.[68]	$\begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$
Leur reste	6
Quelque nombre Arithmetique	3
Son quarré	9
Puis ledict 8 donne ledict 6, combien ledict 9 ? faict	$6\frac{3}{4}$
Sa racine quarrée est	$\sqrt{6\frac{3}{4}}$

Je di que le quatriesme et dernier en l'ordre, à sçavoir, $3 + \sqrt{6\frac{3}{4}}$ font le premier binomie requis. [Stevin 1585a, p. 185]

Stevin ne donne aucune autre explication relative à cet exemple bien choisi. Il considère en fait deux nombres produits ab et cd tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Il calcule leur différence $ab - cd$. Il choisit un nombre Arithmétique quelconque k (k est entier ou fractionnaire, comme a, b, c, et d) et il détermine x tel que $ab - cd$ est à ab comme x est à k^2. Donc $x = k^2(\frac{ab-cd}{ab})$. Le nombre cherché est alors $k+k\sqrt{\frac{ab-cd}{ab}}$. Pour que ce nombre soit un premier binomie, il faut que les deux parties du nombre soient incommensurables entre elles, c'est-à-dire que $\sqrt{\frac{ab-cd}{ab}}$ soit irrationnel, ce qui est le cas, en particulier, si ab n'est pas un carré et $ab - cd$ non plus, ce que ne précise pas Stevin, mais qui est vrai pour 8 et 2[69]. Par ailleurs, il faut aussi que la différence des carrés des parties du nombre soit un carré ; cette différence vaut

68 Dans le problème XXXV on considère deux nombres, 8 et 2, obtenus comme produits de 4 par 2 et de 2 par 1, tels que 4 à 2 et 2 à 1 aient le même rapport.

69 Cette remarque vaut aussi pour les constructions du binomie deuxième et du binomie troisième qui sont fondées sur ces mêmes nombres 8 et 2, obtenus comme précédemment. Par contre, pour la construction du binomie cinquième, Stevin part des

$k^2 - k^2(\frac{ab-cd}{ab}) = k^2(\frac{cd}{ab})$. On voit donc que la construction proposée par Stevin, même si elle est exacte, n'est pas totalement satisfaisante, puisqu'il n'explicite pas son choix des nombres a, b, c et d[70].

Stevin propose ainsi, pour chaque espèce de binomies, une construction, déroulée de manière algorithmique sur un exemple. Jusqu'ici on reste dans le contexte de l'arithmétique, le lien avec les lignes irrationnelles étudiées par Euclide au livre X n'est pas fait.

Ce lien va apparaître au problème XXXIX, lorsque Stevin propose : « Estant donné multinomie radical : Trouver sa racine requise » [Stevin 1585a, p. 189]. Il propose alors à peu de choses près le même algorithme que Stifel. Prenons l'exemple du nombre binomie quatrième :

Exemple IIII. de l'extraction de racine quarrée, de binomie quatriesme.

Explication du donné. Soit donné binomie quatriesme $5 + \sqrt{}12$. *Explication du requis.* Il faut trouver sa racine quarrée.

Construction.

Le quarré du maieur nom donné	25
Duquel soubstraict le quarré du moindre nom donné	12
Reste	13
Son quart par regle	$3\frac{1}{4}$
Sa racine quarrée	$\sqrt{}3\frac{1}{4}$
A laquelle aiousté la moitié du maieur nom donné	$2\frac{1}{2}$
Faict	$2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4}$
Sa racine est	$\sqrt{}bino{\cdot}2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4}$
La moitié du maieur nom donné	$2\frac{1}{2}$
Du mesme soubstraict le cincquiesme en l'ordre	$\sqrt{}3\frac{1}{4}$
Reste	$2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$
Sa racine est	$\sqrt{}bino{\cdot}2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$

Je di, que le huictiesme & dernier en l'ordre, à sçavoir $\sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4} + \sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$, est la racine requise[71]. [Stevin 1585a, p. 192–193]

---

nombre 6 et 3 tels que 6 et 3 ne sont pas des carrés, mais $6 + 3 = 9$ l'est (il le dit explicitement au problème XXXVII). Il construit alors le nombre $2 + 2\sqrt{\frac{6+3}{6}} = 2 + \sqrt{6}$. Le fait que $6+3$ soit un carré mais pas 6 implique qu'on a bien la somme de nombres incommensurables entre eux.

70 La construction proposée par Stevin ici n'est pas celle d'Euclide dans la proposition X. 48. Ce dernier choisit en effet de bâtir sa construction à partir de deux grandeurs AC et CB tels que leur somme AB ait à BC le rapport d'un carré à un carré et n'ait pas à AC le rapport d'un carré à un carré.

71 La racine est donc $\sqrt{2 + \frac{1}{2} + \sqrt{3 + \frac{1}{4}}} + \sqrt{2 + \frac{1}{2} - \sqrt{3 + \frac{1}{4}}}$.

Dans une « NOTA », Stevin précise le nom et la nature de la ligne irrationnelle correspondant au nombre irrationnel ainsi trouvé ; c'est la majeure :

> NOTA. La ligne respondante à ceste racine de quatriesme binomie, s'appelle par Euclide proposi. 39. livre 10. *linea maior*, & a deux proprietez ; la premiere, que le rectangle contenu soubs les deux parties, de laquelle la ligne est composée, sera *medium* ; c'est à dire, que ce sera une superficie, de laquelle la quantité s'expliquera, par quelque racine à son quarré incommensurable, qui est en cest exemple $\sqrt{}3$, lequel se prouve en multipliant $\sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4}$ (qui se refere à l'une partie de ladicte ligne) par $\sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$ (qui se refere à l'autre partie de ladicte ligne) desquels le produict, par le 40 probleme, est $\sqrt{}3$ comme dessus. La seconde proprieté de ceste *linea maior*, est que le rectangle composé des deux quarrez, descripts desdictes ses deux parties, faict une superfice, qu'Euclide appelle *rationale* ; c'est à dire que le nombre l'explicant, sera nombre Arithmetique, car il est en cest exemple 5, lequel se prouve ainsi : Le quarré de l'une partie $\sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4}$, est $2\frac{1}{2} + \sqrt{}3\frac{1}{4}$, & le quarré de l'autre partie $\sqrt{}bino \cdot 2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$ est $2\frac{1}{2} - \sqrt{}3\frac{1}{4}$, lesquels deux quarrez ensemble, par le suivant 42 probleme, font 5, comme dessus. [Stevin 1585a, p. 193]

De la même manière Stevin explique, en reprenant la terminologie latine de Zamberti[72], que la ligne correspondant à la racine du premier binomie est la *linea ex binis nominibus* (la binomiale), celle correspondant à la racine du deuxième binomie est la *linea ex binis mediis primae* (la bimédiale première), que pour la racine du troisième binomie on a la *linea ex binis mediis secunda* (la bimédiale deuxième), pour celle du cinquième binomie la *linea rationale mediumque potens* (la ligne pouvant produire une aire composée d'une médiale et d'une exprimable) et enfin pour celle du sixième binomie la *linea bina media potens* (la ligne pouvant produire une aire composée de deux médiales)[73]. Ainsi, Stevin retrouve toutes les lignes irrationnelles présentées par Euclide au livre X. Dans le *Traicté des incommensurables grandeurs*, il dira pourquoi il conserve les noms latins de certaines lignes irrationnelles : « NOTA. Nous mettons ici les noms de quelques lignes & superfices en Latin, parce qu'ils ne sont en François guerres en use, aussi qu'ils n'y semblent fort necessaires » [Stevin 1585b, p. 191].

---

72 Stevin fait explicitement référence à Zamberti pour la *linea ex binis nominibus*, dans la « Nota I », p. 190.

73 Voir à la fin de l'annexe, les liens établis par Euclide entre les six sous-espèces de binomies et les autres lignes irrationnelles.

3.3. *Parallélisme entre grandeurs, nombres et lignes*

Stevin revient sur les nombres irrationnels et leurs liens avec les lignes étudiées par Euclide au livre X de ses *Éléments*, dans le *Traicté des incommensurables grandeurs*. Dans une adresse « Au lecteur » Stevin explique son propos. Puis le traité est composé de deux parties : la première partie présente, après une courte introduction, cinq définitions ; la deuxième partie énonce trois problèmes, assortis de corollaires et de commentaires. Suit un « Appendice des incommensurables grandeurs. En laquelle est sommairement declaré, le contenu du Dixiesme Livre d'Euclide ».

Dans l'introduction de la première partie Stevin critique la proposition X. 2 d'Euclide selon laquelle « Si de deux grandeurs inegales données, l'on coupe tousiours la moindre de la maieure, & que la reste ne mesure iamais sa grandeur prcedente : Telles grandeurs sont incommensurables » [Stevin 1585b, p. 171]. Il reproche à cette proposition de ne pas être effective — « nous ne pouvons cognoistre par telle experience, l'incommensurance de deux grandeurs proposées » — car elle suppose de mettre en œuvre un processus infini[74].

Suivent les cinq définitions :

> DEFINITION I. Grandeurs incommensurables sont celles, desquelles les nombres les explicans[75] sont incommensurables.
> DEFINITION II. Multinomie grandeur est celle, qu'on explique par multinomie nombre[76].
> DEFINITION III. Binomie grandeur est celle, qu'on explique par binomie nombre ; & Trinomie grandeur, qu'on explique par trinomie nombre, & ainsi par ordre des autres.
> DEFINITION IIII. Binomie ligne première est celle, qu'on explique par binomie nombre premier ; Et binomie ligne seconde qu'on explique par binomie nombre second ; Et ainsi par ordre des autres iusques à la douziesme.
> DEFINITION V. Racine quarrée de ligne, est la ligne moienne proportionnelle entre la ligne donnée nombre expliquée, & la ligne respondante à l'unité de la donnée. [Stevin 1585b, p. 172–173]

---

74 « [...] encore qu'il nous fust possible, de soubstraire par action, plusieurs cent mille fois la moindre grandeur de la maieure, & le continuer plusieurs milliers d'annees, toutesfois (estant les deux nombres proposez incommensurables) l'on travailleroit eternellement, demeurant tousiours ignorant, de ce qui à la fin en pourroit encore avenir ; Ceste maniere donc de cognition n'est pas legitime, [...] » [Stevin 1585b, p. 171]

75 Aux grandeurs considérées ici peuvent être associé des nombres (rationnels ou irrationnels), si une unité de mesure a été préalablement choisie.

76 Dans le *Traicté des incommensurables grandeurs*, Stevin ne reprend pas l'expression « multinomie radicale » qu'il avait introduite dans l'*Arithmetique*, et parle seulement de « multinomie », mais c'est bien à cela qu'il renvoie.

Dans ces énoncés, Stevin établit un parallélisme strict entre nombres d'une part, grandeurs et lignes d'autre part[77]. Et il justifie ainsi ce choix du recours aux nombres pour définir les différentes espèces de lignes :

> Veu que les plus propres definitions, sont celles qui expliquent le mieux l'essence du defini, & que l'incommensurance des grandeurs, est trouvée, & seulement notoire par les nombres, nous userons des nombres en ces definitions, comme le plus commode instrument à tel effect. [Stevin 1585b, p. 171]

L'incommensurabilité des grandeurs ne peut s'expliquer qu'à partir des nombres. Ainsi, dans l'adresse « Au lecteur », Stevin donnait l'exemple de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré pour illustrer son affirmation que certaines propositions géométriques ne peuvent pas être démontrées dans le seul champ de la géométrie, de même que certaines propositions arithmétiques sont rendues plus simples par le recours à la géométrie :

> [...] faut sçavoir, que comme beaucoup des theoremes des nombres se descripvent souvent par la cognoissance des grandeurs, lesquels theoremes nous seroient difficiles, voire aucunefois impossibles de trouver par les simples nombres [...][78] ainsi se trouvent au contraire souvent propositions des grandeurs, par le moien des nombres, lesquelles propositions ne se pourroient inventer par les seules grandeurs. Par exemple nous sçavons que 1 est incommensurable a $\sqrt{2}$, Mais comme 1 à $\sqrt{2}$, ainsi le costé du quarré à sa diagonale, parquoi le costé du quarré est incommensurable à sa diagonale, ce qui nous seroit impossible de sçavoir sans les nombres. [Stevin 1585b, p. 162–163]

3.4. *Construction des lignes irrationnelles*

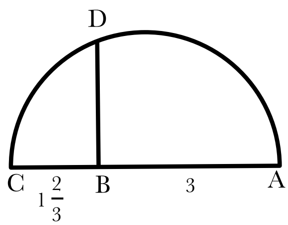
Après avoir donné les définitions des différentes espèces de lignes à partir des espèces de nombres, Stevin propose trois problèmes, qui permettent, selon lui, d'expliquer entièrement le livre X. Le premier est le suivant : « Estant donnée ligne droicte, & deux nombres : Trouver une ligne droicte en telle raison à la donnée, comme le nombre au nombre » [Stevin 1585b, p. 174], c'est-à-dire, une ligne droite E étant donnée, ainsi que deux nombres a et b, déterminer une droite D telle que D est à E comme a à b. Stevin le démontre à partir de plusieurs exemples : les nombres donnés sont successivement $\sqrt{5}$ et 3 ; $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{10}+\sqrt[4]{15}+2$ et $\sqrt{7}$; $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ et $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Prenons le premier exemple :

---

77 Remarquons que, comme Euclide, Stevin commence par donner des définitions sur les grandeurs, avant de passer aux lignes.

78 Il donne l'exemple de la résolution des équations du 3e degré.



Exemple I.

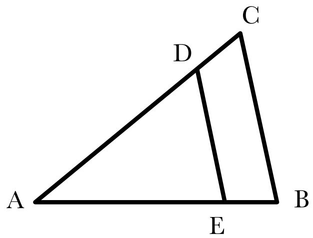
Explication du donné. Soit donné la ligne AB, & les nombre donnez $\sqrt{}5$ & 3. *Explication du requis.* Il faut trouver une ligne en telle raison à la AB, comme $\sqrt{}5$ à 3. *Construction.* On prendra les potences quarrees des nombres donnez, qui sont 9 & 5, puis on produira AB en C, ainsi que AB aie telle raison à BC, comme 9 à 5, puis se trouvera la ligne moienne proportionnelle entre AB, & BC, par la 13 proposition du 6ᵉ livre d'Euclide, qui soit BD.

Je di que BD est la ligne requise, aiant telle raison à la AB, comme $\sqrt{}5$ à 3. *Demonstration.* Posons que AB soit 3 ; Mais comme 9 à 5, ainsi (par la construction) AB 3 à BC, doncques BC, faict $1\frac{2}{3}$, mais le rectangle de AB 3, en BC $1\frac{1}{2}$ faict 5, pour le quarré de BD (car BD est moienne proportionnelle entre AB & BC par la construction) parquoi BD faict $\sqrt{}5$. Il y a doncques telle raison de BD, à AB, comme de $\sqrt{}5$ à 3, ce qu'il falloit demonstrer. [Stevin 1585b, p. 174–175].

Le lien entre cette construction et le livre X des *Éléments* est énoncé dans les corollaires qui suivent, où Stevin explique comment construire une ligne irrationnelle correspondant à un nombre multinomie donné. Prenons l'exemple du premier corollaire :

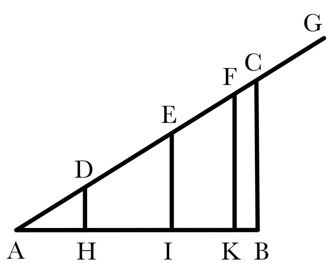
Il est manifeste par les precedens, comment l'on pourra faire une multinomie ligne, conforme au multinomie nombre donné, sans prescripte mesure[79]. Par exemple, l'on veut faire quelque multinomie ligne de $\sqrt{}6 + \sqrt{}5 + \sqrt{}7$; Ie mects quelque ligne à plaisir AB, posant quelle valle $\sqrt{}6$, puis ie trouve à la mesme, la ligne BC, par le I exemple, en telle raison à la AB, comme $\sqrt{}5$ à $\sqrt{}6$, puis CD, en telle raison à AB, comme $\sqrt{}7$ à $\sqrt{}6$; & la ligne ABCD, sera la multinomie ligne conforme au nombre donné. [Stevin 1585b, p. 179].

79 C'est-à-dire que l'on construit la multinomie sans imposer de condition sur la ligne qui est au point de départ de la construction. Dans le deuxième corollaire, par contre, il s'agit de construire une ligne multinomie à partir d'une ligne donnée, qui soit égale à l'une des parties (ou noms) de la multinomie (« Il est aussi notoire, comment l'on pourra faire une multinomie selon quelque son nom donné »). Et dans le troisième corollaire, la ligne à partir de laquelle on effectue la construction est donnée *a priori* (« Il appert qu'on pourra faire une binomie ligne selon quelque mesure donnée »).



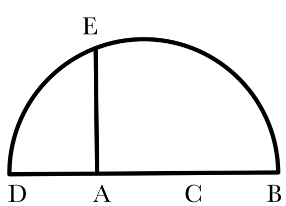
Le deuxième problème demande « De la ligne droicte donnée, couper partie requise » [Stevin 1585b, p. 181], c'est-à-dire, une ligne droite AB étant donnée, déterminer sa n-ième partie, que n soit rationnel ou irrationnel. Stevin remarque qu'Euclide le fait à la proposition VI. 9, mais uniquement pour une partie rationnelle (Euclide mène la démonstration dans le cas particulier où l'on souhaite construire le tiers de la ligne donnée). La démonstration de Stevin est basée sur le même principe que celle d'Euclide, si ce n'est qu'il demande qu'on prenne la $\sqrt{\frac{1}{3}}$-ième partie. Le principe de la construction est le suivant : si l'on souhaite retrancher de AB sa n-ième partie, on considère une ligne AC de longueur $1/n$ faisant un angle quelconque avec AB. Par le premier problème, on détermine AD telle que AD soit à AC comme 1 à n. On mène alors la ligne DE parallèle à la ligne CB ; la ligne AE est la ligne cherchée.

Dans le corollaire I, Stevin explique :



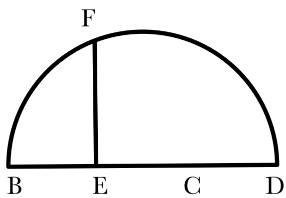
> Il est manifeste par ce probleme, comment l'on trouvera les noms de toute multinomie ligne donnée, par exemple de AB faisant $\sqrt{8} + 3 + \sqrt{\sqrt{15}} + \sqrt{10} - \sqrt{5}$. Car l'on feroit quelque multinomie ligne (par le premier Corollaire du premier probleme) conforme au multinomie nombre donné, laquelle soit AC, les noms de laquelle soient AD $\sqrt{8}$, DE 3, EF $\sqrt{\sqrt{15}}$, FG $\sqrt{10}$, GC $\sqrt{5}$, puis on menera la ligne CB, & ses paralleles FK, EI, DH, de sorte que AH $\sqrt{8}$, HI 3, IK $\sqrt{\sqrt{15}}$, KB $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ seroyent les noms requis. [Stevin 1585b, p. 182–183]

Le troisième et dernier problème demande : « Estant donnée ligne nombre expliquée : Trouver sa racine quarré » [Stevin 1585b, p. 183], c'est-à-dire, selon la définition donnée plus haut, trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre la ligne donnée et l'unité.



Supposons que la ligne donnée AB soit associée au nombre binomie $a + b$. On détermine, grâce au deuxième problème, un point C sur AB tel que AC soit de mesure a (donc CB $= b$). Puis, par le premier problème, on détermine la ligne DA telle que AD soit à AC comme 1 à a (donc AD vaut l'unité). Puis, grâce à la proposition VI. 13 d'Euclide, on construit la ligne AE, moyenne proportionnelle entre AD et AB. AE a bien pour mesure $\sqrt{a+b}$[80].

Dans la « NOTA III » qui suit ce problème, Stevin explique que grâce à ces trois problèmes, on peut construire toutes les lignes irrationnelles proposées par Euclide au livre X. Il y ajoute un dernier exemple : il construit dans un premier temps la ligne binomie de mesure $\sqrt{12}+2$ (qui est une binomie cinquième[81]), à partir d'une ligne de mesure $\sqrt{3}$ (par le premier problème). Puis il construit la ligne binomie qui vaut $\sqrt{\sqrt{12}+2}$ (par le troisième problème). Il remarque alors que $\sqrt{\sqrt{12}+2} = \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Il se propose donc de découper la ligne trouvée en deux parties correspondant aux deux noms de la binomie (par le deuxième problème). Il ne précise pas alors quelle est la nature de ligne irrationnelle ainsi construite[82].



> NOTA III. Nous avions promis au commencement de ce traicté d'exhiber la maniere des constructions des douze binomies lignes avec leurs racines descriptes au 10e livre d'Euclide, ce que nous avons abondamment faict aux trois precedens problemes, non seulement de binomies, mais de noms en multitude infinie. Toutesfois nous donnerons en plus grande evidence, encore un exemple propre de binomie ligne cinquiesme, par la construction de laquelle toutes les autres seront encore plus manifestes, en ceste sorte : *Il y a quelque ligne A faisant* $\sqrt{3}$*, l'on requiert une binomie ligne cincquiesme, divisee en ses noms, de* $\sqrt{12}+2$*, à sçavoir telle* $\sqrt{12}+2$*, comme A faict* $\sqrt{3}$ *; Puis l'on veut que de telle binomie ligne s'extraict racine quarrée, & que la mesme racine soit divisée, en les parties*

80 « *Explication du donné.* Soit donnée la ligne AB, de laquelle la quantité soit $\sqrt{8} + \sqrt{\sqrt{15}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{255}}} + 4 - \sqrt{\sqrt{80}}$. *Explication du requis.* Il faut trouver sa racine quarrée. *Construction.* On coupera par le precedent 2 probleme, quelque nom de la ligne donnée AB, soit AC, respondant à $\sqrt{8}$. Puis on trouvera par le 1 probleme quelque ligne droicte en telle raison à la AC, comme 1 à $\sqrt{8}$, qui soit la ligne AD ; Puis se trouvera par le 13 probleme du 6e livre d'Euclide, la ligne moienne proportionnelle entre DA & AB, qui soit AE. Ie di que AE est la racine quarrée requise de AB. *Demonstration.* Veuque AE est la moienne ligne proportionnelle entre la ligne donnée AB, & la DA, respondante à l'unité de ladicte AB, s'ensuit par le precedente 5e definition, que AE est la racine quarrée de AB, ce qu'il falloit demonstrer. *Conclusion.* Estant doncques donné ligne nombre expliquée, nous avons trouvé sa racine quarrée, ce qu'il falloit faire. » [Stevin 1585b, p. 183–184]

81 En effet, $\sqrt{12}$ est irrationnel, 2 est rationnel et $\sqrt{(\sqrt{12})^2-(2)^2} = \sqrt{8}$, qui est incommensurable à $\sqrt{12}$.

82 Il s'agit d'une droite pouvant produire une aire contenue par une médiale et une exprimable car $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$, qui est rationnel et $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2 = 2\sqrt{3}$, qui est médial.

> *de laquelle elle est composée.* L'on trouvera par le precedent premier probleme la ligne BC, en telle raison à la ligne A, comme $\sqrt{}12$ à $\sqrt{}3$, puis la ligne CD, en telle raison à la A, comme 2 à $\sqrt{}3$, & BCD, sera la binomie ligne requise. Puis se tirera sa racine par le 3e probleme, qui soit EF. Or à fin de diviser ceste racine EF en les parties de laquelle elle est composée, i'extrais premierement racine quarrée du nombre $\sqrt{}12 + 2$, qui est (par le 39 probleme de nostre Arithmetique) $\sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 + \sqrt{}2 + \sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 - \sqrt{}2$. Il faut doncques que l'une partie de ceste ligne soit de $\sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 + \sqrt{}2$, & l'autre $\sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 - \sqrt{}2$, parquoi divisée la ligne EF, par le second probleme en G, ainsi que EG, aie telle raison à GF, comme $\sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 + \sqrt{}2$ à $\sqrt{}bino \cdot \sqrt{}3 - \sqrt{}2$, l'on aura le requis. [...][83] [Stevin 1585b, p. 185–186]

Ainsi se termine la deuxième partie du *Traicté des incommensurables grandeurs.*

4. CONCLUSION

Nous espérons que, grâce à cette étude, nous avons pu montrer que si les propriétés qui sont au fondement de exposés de Stifel et Stevin sont les mêmes, leurs approches diffèrent, ce que nous pouvons résumer ainsi :

Stifel commence par proposer une classification des nombres irrationnels qui est une généralisation de la classification que l'on peut déduire de celle des lignes irrationnelles considérées par Euclide au livre X des *Éléments.* Seuls quelques uns sont alors utiles pour la détermination des lignes irrationnelles euclidiennes et ce sont uniquement ceux-là que Stifel étudie dans son traité : les nombres de la forme $\sqrt{a}$, qui, concrétisés dans des surfaces carrées, donnent comme côtés les médiales, et les nombres binomiaux de la forme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + b$ et , $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ qui, concrétisés dans des surfaces carrées, permettent de retrouver les six autres espèces de lignes irrationnelles par adjonction, de même que les résidus de la forme $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - b$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ permettent de retrouver les six espèces de lignes irrationnelles par retranchement. Et donc Stifel remarque à juste titre :

> L'extraction des racines des binomiaux et des résidus est telle qu'elle suffit à elle seule à résoudre toutes les difficultés du livre X d'Euclide en entier. Et si tu veux que je dise en peu de mots ce que contient ce dixième livre, écoute. Il contient premièrement les médiales quadratiques et leurs racines. Il contient deuxièmement les binomiaux et leurs racines. Il contient troisièmement les résidus et leurs racines. Et ainsi, tu as tout le dixième livre[84].

---

83 Les italiques sont dans le texte original.

84 « Radicum extractio ex binomijs et residuis, res talis est ac tanta, ut sola sufficiat ad expediendas omnes difficultates totius decimi Euclidis. Et si vis, ut brevi sententia dicam, quid habeat ille decimus, audi. Habet primo medialia quadrate, & eorum

Stevin, dans l'*Arithmetique*, traite uniquement des nombres irrationnels ; les lignes n'apparaissent qu'incidemment. Il prend explicitement comme point de départ de sa construction les douze sous-espèces de nombres binomiaux par addition et soustraction, qu'il définit en traduisant en termes arithmétiques les définitions géométriques d'Euclide des six sous-espèces de lignes binomiales et des six sous-espèces d'apotomés correspondantes. Il obtient ensuite les autres espèces de nombres binomiaux en prenant les racines carrées de ces douze sous-espèces.

Signalons qu'aussi bien l'exposé de Stifel que celui de Stevin permettent de comprendre pourquoi il n'y a que treize espèces de lignes irrationnelles chez Euclide[85] : la médiale, six espèces obtenues comme racines carrées des six sous-espèces de nombres binomiaux par addition (quelle que soit la manière dont on définit ces sous espèces : distinction entre nombres carrés et non-carrés chez Stifel ; distinction à partir de la nature des termes des nombres binomiaux et de la nature de la différence des carrés des termes, chez Stevin), puis six espèces par retranchement, obtenus comme racines carrées des six sous-espèces de nombres binomiaux par soustraction.

À ce stade, l'obtention des lignes irrationnelles à partir des nombres reste théorique. Mais Stevin, dans son *Traicté des incommensurables grandeurs*, nous explique comment construire en pratique une ligne irrationnelle dont la mesure est donnée à l'aide d'un nombre irrationnel quelconque (pas seulement binomial) ; les irrationnelles décrites par Euclide apparaissent alors comme cas particuliers de ces constructions. Chez Stifel, on ne trouve pas une telle construction des lignes irrationnelles, car si celles-ci apparaissent comme le côté d'un carré dont la surface est un nombre donné, il ne dit pas comment construire en pratique ces carrés. Il propose

---

radices. Habet secundo binomia, & eorum radices. Habet tertio residua, & eorum radices. Sic itaque habes totum decimum. » [Stifel 1544, f° 127r]

85 C'est beaucoup plus difficile à expliquer dans le contexte purement géométrique d'Euclide, d'autant que ce dernier commence par introduire les six espèces de lignes irrationnelles par adjonction et les six par retranchement avant de décrire les six sous-espèces de binomiales et les six sous-espèces d'apotomé dont les précédentes sont les racines (voir à ce sujet le commentaire de Bernard Vitrac, [Euclide 1998, p. 51–63]). En inversant l'ordre de l'exposé, comme le font Stifel et Stevin, la justification est plus aisée. Toutefois, Bernard Vitrac m'a fait remarquer qu'un avantage de l'ordre adopté par Euclide est que l'unicité de la décomposition pour les lignes par adjonction et par retranchement était donnée d'emblée (aux propositions X. 42 à 47 et X. 79 à 84). Cette question de l'unicité de la décomposition n'est pas posée par Stevin. Elle l'est par Stifel, mais seulement lorsqu'il reprend l'ensemble des propositions euclidiennes et qu'il en donne une traduction arithmétique.

toutefois des exemples de constructions de lignes irrationnelles (sans passer nécessairement par des carrés) sur quelques cas particuliers[86].

Et au bout du compte, si Stifel relit l'ensemble des propositions du livre X des *Éléments* qu'il illustre à l'aide des nombres irrationnels (chapitres XIV à XXIX), Stevin se contente de dire qu'après la lecture de son *Arithmetique* on a en main tous les éléments permettant une meilleure compréhension du livre X et il le montre pour quelques propositions seulement dans son *Traicté des incommensurables grandeurs.*

5. ANNEXE

QUELQUES RÉSULTATS DU LIVRE X DANS LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE UTILES À LA COMPRÉHENSION DES EXPOSÉS DE STIFEL ET STEVIN[87]

– Définition 1 : « Sont dites commensurables les grandeurs qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables celles pour lesquelles aucune commune mesure ne peut être produite ».

– Définition 2 : « Des droites sont, en puissance, commensurables, quand les carrés décrits sur elles sont mesurés par la même aire, et incommensurables, quand aucune aire, commune mesure aux carrés décrits sur elles, ne peut être produite ».

– Définition 3 : « Cela étant supposé, il est démontré que par rapport à une droite proposée, il existe des droites, infinies en multitude, commensurables ou incommensurables avec elle, les unes en longueur seulement, les autres aussi en puissance. D'une part donc, que la droite proposée soit appelée exprimable, et celles qui sont commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, exprimables ; d'autre part, que celles qui sont incommensurables avec elle soient appelées irrationnelles ».

– Définition 4 : « Et que d'une part soit appelé exprimable le carré décrit sur la droite proposée et exprimables les aires commensurables avec celui-ci, irrationnelles d'autre part celles qui sont incommensurables avec celui-ci et irrationnelles les droites pouvant les produire : s'il s'agit de carrés, les côtés eux-mêmes, s'il s'agit de certaines autres figures rectilignes, celles qui décrivent des carrés qui leur sont égaux ».

---

86 Par exemple, les six-sous espèces de binomiales [Stifel 1544, f^{os} 167^{v}–168^{r}].

87 Je reprends ici la traduction de Bernard Vitrac [Euclide 1998].

Les propositions 1 à 16 présentent des propriétés des grandeurs commensurables et incommensurables. Vient ensuite la classification des lignes irrationnelles. On a alors :

– les lignes médiales, qui sont les côtés des carrés égaux à des rectangles contenus par deux lignes exprimables, commensurables en puissance seulement[88] : $\mathrm{quad}(M) = \mathrm{rect}(d_1, d_2)$ avec d_1 et d_2 exprimables, commensurables en puissance seulement[89]

– puis les six lignes obtenues par adjonction de deux lignes, soit :

1) les lignes binomiales[90] ;

2) les lignes bimédiales premières[91] ;

3) les lignes bimédiales deuxièmes[92] ;

4) les majeures[93] ;

5) les lignes pouvant produire une aire composée d'une exprimable et d'une médiale[94] ;

6) les lignes pouvant produire une aire composée de deux médiales[95] ;

---

88 Proposition X. 21 : « « Le rectangle contenu par des droites exprimables, commensurables seulement en puissance, est irrationnel et la [droite qui] peut le produire est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée médiale. »

89 Reprenant les notations de B. Vitrac, on note $\mathrm{quad}(M)$ le carré sur la droite M et $\mathrm{rect}(d_1, d_2)$ le rectangle formé par d_1 et d_2.

90 Prop. X. 36 : « Si sont composées deux [droites] exprimables, commensurables en puissance seulement, la [droite] entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée binomiale. »

91 Prop. X. 37 : « Si sont composées deux [droites] médiales commensurables en puissance seulement contenant une [aire] exprimable, la droite entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée bimédiale première. »

92 Prop. X. 38 : « Si sont composées deux [droites] médiales commensurables en puissance seulement contenant une [aire] médiale, la [droite] entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée bimédiale deuxième. »

93 Prop. X. 39 : « Si sont composées deux droites incommensurables en puissance produisant d'une part l'[aire] composée des carrées sur elles, exprimable, d'autre part celle [contenue] par elles, médiale, la [droite] entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée majeure. »

94 Prop. X. 40 : « Si sont composées deux droites incommensurables en puissance produisant d'une part l'[aire] composée des carrés sur elles, médiale, d'autre part celle [contenue] par elles, exprimable, la [droite] entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée [droite] pouvant [produire une aire composée] d'une exprimable et d'une médiale. »

95 Prop. X. 41 : « Si sont composées deux droites incommensurables en puissance produisant et l'[aire] composée des carrés sur elles, médiale, et celle [contenue] par elles, médiale, et de plus incommensurable avec celle composée des carrés sur elles, la [droite] entière est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée [droite] pouvant [produire une aire composée de] deux médiales. »

– et enfin les six lignes correspondant aux six lignes précédentes obtenues par retranchement d'une ligne à une autre.

On peut résumer les différentes propriétés des lignes obtenues par adjonction de deux lignes, dans le tableau suivant :

d_1, d_2	$\mathrm{rect}(d_1, d_2)$	$\mathrm{quad}(d_1) + \mathrm{quad}(d_2)$	$d_1 + d_2$
exprimables, com. en p. seult			binomiale
médiales, com. en p. seult	exprimable		bimédiale première
médiales, com. en p. seult	médiale		bimédiale deuxième
incom. en p.	médiale	exprimable	majeure
incom. en p.	exprimable	médiale	droite pouvant produire une aire composée d'une médiale et d'une exprimable
incom. en p.	médiale	médiale	droite pouvant produire une aire composé de deux médiales

Par ailleurs, Euclide définit six sous-espèces de lignes binomiales[96], comme on peut le voir dans le schéma suivant[97] :

Soit E droite exprimable de référence, soit une droite $D = d_1 + d_2$, $d_1 > d_2$ avec d_1 et d_2 incommensurables en eux, et soit u, telle que $\mathrm{quad}(u) = \mathrm{quad}(d_1) - \mathrm{quad}(d_2)$.

96 Voir la seconde série de définitions, qui précèdent la proposition 48 : « 1. Une droite exprimable étant présupposée ainsi qu'une binomiale divisée en ses termes désignés telle que le terme le plus grand soit, en puissance, plus grand que le plus petit par un [carré] sur une [droite] commensurable en longueur avec lui-même, si, dans ce cas, le plus grand terme est commensurable en longueur avec la [droite] exprimable proposée, que la [droite] entière soit appelée binomiale première. 2. Et si le plus petit terme est commensurable en longueur avec la [droite] exprimable proposée, qu'elle soit appelée binomiale deuxième. 3. Et si aucun des deux termes n'est commensurable en longueur avec la [droite] exprimable proposée, qu'elle soit appelée binomiale troisième. 4. Alors ensuite, si le plus grand terme est, en puissance, plus grand que le plus petit par un [carré] sur une [droite] incommensurable en longueur avec lui-même, si, dans ce cas, le plus grand terme est commensurable en longueur avec la [droite] exprimable proposée, qu'elle soit appelée binomiale quatrième. 5. Et si [c'est] le plus petit, [binomiale] cinquième. 6. Et si [ce n'est] aucun des deux, [binomiale] sixième. »

97 J'ai repris ce schéma du commentaire de Bernard Vitrac [Euclide 1998, p. 65].

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \mathrm{comm}(E, d_2) & \text{impossible} \\
 & \mathrm{comm}(E, d_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathrm{incomm}(E, d_2) & \text{binomiale 1} \\
\mathrm{comm}(d_1, u) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \\
 & & \mathrm{comm}(E, d_2) & \text{binomiale 2} \\
 & \mathrm{incomm}(E, d_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathrm{incomm}(E, d_2) & \text{binomiale 3} \\
 & & & \\
 & & \mathrm{comm}(E, d_2) & \text{impossible} \\
 & \mathrm{comm}(E, d_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathrm{incomm}(E, d_2) & \text{binomiale 4} \\
\mathrm{incomm}(d_1, u) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \\
 & & \mathrm{comm}(E, d_2) & \text{binomiale 5} \\
 & \mathrm{incomm}(E, d_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \mathrm{incomm}(E, d_2) & \text{binomiale 6}
\end{tikzcd}
$$

Ces définitions étant posées, Euclide énonce, à partir de la proposition X. 48, les propriétés des différentes lignes. Ce sont celles qui énoncent un lien entre les six sous-espèces de lignes binomiales et les autres lignes irrationnelles, soit les propositions 54 à 59 (et leurs converses, les propositions 60 à 65), qui sont au cœur des exposés de Stifel et de Stevin :

Prop. X. 54 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale première, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée binomiale. »

Prop. X. 55 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale deuxième, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée bimédiale première. »

Prop. X. 56 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale troisième, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée bimédiale deuxième. »

Prop. X. 57 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale quatrième, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée majeure ».

Prop. X. 58 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale cinquième, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée [droite] pouvant [produire] une exprimable et une médiale. »

Prop. X. 59 : « Si une aire est contenue par une [droite] exprimable et par une binomiale sixième, la [droite] pouvant produire cette aire est irrationnelle, celle appelée [droite] pouvant [produire] deux médiales. »

Pour résumer, ces propositions nous expliquent que si on considère D une ligne binomiale, dont la mesure est le nombre irrationnel d, la ligne I de mesure $\sqrt{d}$ est une des lignes irrationnelles décrites par Euclide. Ainsi, si D est une binomiale première, I est une binomiale ; si D est une binomiale deuxième, I est une bimédiale première, etc.

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE
[1997] *Organon. I. Catégories II. De l'interprétation ; traduction nouvelle et notes par J. Tricot*, Paris : Vrin, 1997.

BEN MILED (Marouane)
[1999] Les commentaires d'al-Māhānī et d'un anonyme, du livre X des *Éléments* d'Euclide, *Arabic Sciences and Philosophy*, 9(1) (1999), p. 89–156.
[2005] *Opérer sur le continu*, Carthage : Académie Tunisienne Beït al-Hikma, 2005.

BUSARD (Hubert L. L.)
[2005] *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, Wiesbaden : Franz Steiner Verlag, 2005.

EUCLIDE
[1956] *The Thirteen Books of The Elements. Volume 3 (Books X-XIII), Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*, New York : Dover Publications, 1956.
[1994] *Les Éléments. Volume 2. Livres V à IX, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac*, Paris : Presses Universitaires de France, 1994.
[1998] *Les Éléments. Volume 3. Livre X, Traduction et commentaires par Bernard Vitrac*, Paris : Presses Universitaires de France, 1998.

FARÈS (Nicolas)
[2009] La notion d'irrationalité selon un mathématicien du xᵉ siècle : Abū Jaᶜfar al-Khāzin, *Lebanese Science Journal*, 10(2) (2009), p. 113–123.

GIRARD (Albert)
[1625] *Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges*, Leyde : chez Bonaventure & Abraham Elsevier, 1625.

RASHED (Roshdi)
[1984] *Entre arithmétique et algèbre. Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris : Les Belles Lettres, 1984.

STEVIN (Simon)
[1585a] *Arithmetique. Les quatre premiers livres d'algebre de Diophante d'Alexandrie, traduicts en langue Françoise & expliquez par Simon Stevin de Bruges*, Leyde : chez Christophe Plantin, 1585.
[1585b] *La Pratique d'arithmetique. La regle d'interest avec ses tables. La disme. Traicte des incommensurables grandeurs, auec une Appendice de l'explication du Dixiesme livre d'Euclide*, Leyde : chez Christophe Plantin, 1585.

STIFEL (Michael)
[1544] *Arithmetica integra*, Norimbergae : apud Iohan. Petreium, 1544.