Revue d'Histoire des Mathématiques

Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy

Jean-Pierre Lubet

Tome 16 Fascicule 1 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `revues@smf.ens.fr` / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
16 (2010), p. 63–131

CALCUL SYMBOLIQUE ET CALCUL INTÉGRAL DE LAGRANGE À CAUCHY

JEAN-PIERRE LUBET

RÉSUMÉ. — Dans un mémoire publié en 1774, Lagrange utilise des méthodes reposant sur l'analogie des puissances positives et des différences, et des puissances négatives et des sommes, qui lui permettent, notamment, d'obtenir diverses formules d'intégration. D'autres auteurs s'engagent alors dans cette voie. Les problèmes de calcul intégral jouent un rôle important dans le développement de diverses formes de calcul symbolique et celui-ci fait la preuve de son efficacité dans ce domaine : il permet de généraliser ou de retrouver rapidement des résultats anciens, introduit de la clarté dans des pratiques d'intégration numérique, unifie les procédures d'intégration des divers types d'équations linéaires, et conduit à la résolution de nouvelles équations aux dérivées partielles. Cependant, les notations et les fondements mêmes des nouveaux procédés restent longtemps l'objet d'interrogations. Dans les années 1820, Cauchy apporte une réponse conforme à sa conception de la rigueur : en utilisant la formule intégrale de Fourier, il donne aux symboles d'opération une signification précise, et il traite par ce moyen les divers types d'équations linéaires à coefficients constants.

Texte reçu le 1er février 2005, révisé le 4 septembre 2009, accepté le 27 novembre 2009.

J.-P. LUBET, 7 allée du Tardenois, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.
Courrier électronique : jplubet@club-internet.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A50, 01A55, 34–03, 35–03, 39–03, 47–03.

Mots clefs : Calcul symbolique, calcul intégral, équations différentielles linéaires, analogie, Lagrange, Laplace, Lorgna, Prony, Bürmann, Lacroix, Arbogast, Français, Servois, Herschel, Babbage, Fourier, Poisson, Cauchy.

Key words and phrases. — Symbolic calculus, integral calculus, linear differential equations, analogy, Lagrange, Laplace, Lorgna, Prony, Bürmann, Lacroix, Arbogast, Français, Servois, Herschel, Babbage, Fourier, Poisson, Cauchy.

Abstract (Symbolic calculus and integral calculus, from Lagrange to Cauchy)
In a paper published in the year 1774, Lagrange used methods which were based on the analogy of positive powers and differences, and negative powers and integrals, which enabled him to obtain various formulae of integration. Then other authors entered into this way. Problems of integral calculus played an important part in the development of various methods of symbolical calculus and this one proved his efficiency in this matter: it made it possible to generalize or to quickly re-find former results, it introduced clarity into practices of numerical integration, it unified procedures of integration of different types of linear equations, it led to the solving of new partial differential equations. However the notations and the foundations themselves of the new processes remained for a long time subjects of interrogations. In the 1820s, Cauchy provided an answer in accordance with his conception of rigour: by using Fourier's integral formula, he gave the symbols of operation a precise meaning, and thus he dealt with the different types of linear equations with constant coefficients.

INTRODUCTION

En 1695, à l'occasion d'échanges avec Jean Bernoulli, Leibniz introduit la notation exponentielle d^n pour désigner les différentielles d'ordres successifs, et il traduit la réciprocité de l'intégration et de la différentiation par les notations $d^{-1} = \int$ et $d^{-n} = \int^n$. Leibniz et Jean Bernoulli utilisent ce nouveau point de vue pour retrouver la formule de développement en série de l'intégrale $\int y\,dx$ (dite formule de Bernoulli), que les deux mathématiciens avaient d'abord établie par d'autres moyens. La voie semble alors ouverte vers un calcul sur les symboles d'opérations, analogue à celui qui affecte habituellement les quantités. Mais il faut attendre 1774 et la publication par Lagrange de son mémoire « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables » pour trouver une utilisation systématique de cette analogie entre les puissances positives et les différences, et les puissances négatives et les intégrales. Des travaux sur ce que l'on appelle souvent le calcul symbolique (ou calcul des opérations) vont alors s'ensuivre à la fin du XVIII^e^ et au début du XIX^e^ siècle, en liaison avec le développement du calcul différentiel et intégral et les recherches sur ses fondements.

De nombreuses études ont été consacrées à l'histoire du calcul symbolique dans cette période ; on peut citer, notamment, L. Novy [1968], E. Koppelman [1971], L.A. Lusternik et S. Petrova [1972], S. Petrova [1993],

M. Panza [1992], J.-P. Friedelmeyer [1994], M.-J. Durand-Richard [1985; 1998], P. Allaire et R. Bradley [2002]. L'attention des historiens s'est particulièrement concentrée sur deux aspects de cette histoire : ses rapports avec les recherches sur les fondements du calcul différentiel ; son rôle dans le développement d'une algèbre abstraite au XIX^{e} siècle. Même s'il a été abordé par certains auteurs (notamment Koppelman et Petrova), un aspect semble cependant mériter d'être développé davantage : les interactions entre calcul intégral et calcul symbolique. Si le calcul intégral va apparaître à partir du milieu du XIX^{e} siècle comme l'un des domaines privilégiés d'application de l'algèbre symbolique, il a aussi été, dès le XVIII^{e} siècle l'un des moteurs du développement de cette algèbre. Nous nous proposons donc de traiter ce thème de manière systématique sur l'ensemble de la période allant de Lagrange à Cauchy, en prenant en compte la diversité des savants impliqués, dont plusieurs restent encore peu connus.

1. LAGRANGE ET LA « NOUVELLE ESPÈCE DE CALCUL »

On sait que dans son mémoire *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, publié en 1774, Lagrange considère que, pour toute fonction u, on peut écrire le développement en série entière suivant

$$u(x+\xi) = u + u'\xi + \frac{u''\xi^2}{2} + \frac{u'''\xi^3}{2\cdot 3} + \frac{u^{(4)}\xi^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots, \tag{1.1}$$

où ξ est un accroissement quelconque de la variable x et où les symboles $u', u'', u''', \ldots$ désignent des fonctions de x seulement. Ces fonctions dérivent les unes des autres comme u' dérive de u : c'est-à-dire que u'' est aussi le coefficient de ξ dans le développement de $u'(x+\xi)$, u''' est le coefficient de ξ dans le développement de $u''(x+\xi)$, etc. Le calcul différentiel est alors défini comme le passage de la fonction u à ses dérivées successives, le calcul intégral étant à l'inverse le passage des dérivées aux fonctions primitives. Lagrange affirme que sa conception des calculs différentiel et intégral est ainsi « indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes » [Lagrange 1774, p. 443]. En recourant à des valeurs de ξ infiniment petites, les fonctions $u', u'', u''', \ldots$ peuvent s'interpréter comme des quotients différentiels, et la formule (1.1) s'écrit

$$u(x+\xi) = u + \frac{du}{dx}\xi + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{\xi^2}{2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{\xi^3}{2\cdot 3} + \cdots \tag{1.2}$$

Cependant, dans sa plus grande partie, le mémoire est consacré à l'utilisation de l'analogie entre les puissances positives et les différences, et les puissances négatives et les intégrales [1]. Dès le début, Lagrange évoque à ce sujet les écrits de Leibniz, notamment un mémoire [2] de 1710 où celui-ci comparait le développement du binôme et la formule de différentiation d'un produit. Par exemple à l'ordre trois, il mettait en parallèle les identités suivantes, où apparaissent les mêmes coefficients numériques

$$p^3(x+y) = 1p^3x + 3p^2x\,p^1y + 3p^1x\,p^2y + 1p^3y,$$
$$d^3(xy) = 1d^3x + 3d^2x\,dy + 3dx\,d^2y + 1d^3y,$$

le symbole p^e signifiant que l'on prend la puissance e-ième de l'expression qui suit.

Dans cette lignée, Lagrange, rapprochant les coefficients numériques dans la formule de Taylor (1.2) et ceux que l'on obtient en développant en série la fonction exponentielle, adopte la notation formelle

$$\Delta u = u(x+\xi) - u(x) = e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1, \tag{1.3}$$

en posant la règle suivante :

> « après l'avoir développée [la formule] suivant les puissances de du, on applique les exposants de ces puissances à la caractéristique d pour indiquer des différences du même ordre que les puissances, c'est-à-dire qu'on change du^λ en $d^\lambda u$ » [Lagrange 1774, p. 450].

Pour simplifier l'exposé, nous donnons les formules dans le cas d'une variable unique, mais les calculs de Lagrange portent le plus souvent sur le développement de fonctions $u(x, y, z, t, \dots)$ de plusieurs variables, car ses méthodes symboliques lui paraissent particulièrement efficaces

> « pour découvrir différents théorèmes généraux concernant les différentiations et les intégrations des fonctions de plusieurs variables, théorèmes dont la

---

1 Pour une analyse détaillée de cet aspect du mémoire, voir M. Panza [1992, chap. III.4].

2 Pour une traduction française et un commentaire de ce mémoire, voir [Parmentier 1989, p. 409–421].

plupart sont nouveaux, et auxquels il serait d'ailleurs très difficile de parvenir par d'autres voies » [Lagrange 1774, p. 442].

De la formule (1.3), que l'on va noter ici (T_1), Lagrange déduit plusieurs autres identités en jouant sur l'analogie en question : nous en présentons l'essentiel dans le tableau ci-dessous. La réciprocité des fonctions logarithme et exponentielle permet d'obtenir (E_1). L'utilisation de (E_1) et (T_1) conduit à la formule d'interpolation de Gregory-Newton (G_1), laquelle concerne le passage des différences $\Delta x = \xi$, aux différences $\Delta' x = \xi'$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (T_{-\lambda})\quad \Sigma^{\lambda} u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)^{-\lambda}\Big|_{\bullet} & \\
 & (T_{\lambda})\quad \Delta^{\lambda} u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)^{\lambda}\Big|_{\bullet} \arrow[u] & \\
 & (T_1)\quad \Delta u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)\Big|_{\bullet} \arrow[u] \arrow[dl] & \\
(E_1)\quad \frac{du}{dx}\xi = \log(1+\Delta u)|_{\bullet} \arrow[rr] \arrow[d] & & (G_1)\quad \Delta' u = \left[(1+\Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1\right]\Big|_{\bullet} \arrow[d] \\
(E_{\lambda})\quad \frac{d^{\lambda}u}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda} = [\log(1+\Delta u)]^{\lambda}|_{\bullet} \arrow[d] & & (G_{\lambda})\quad \Delta'^{\lambda} u = \left[(1+\Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1\right]^{\lambda}\Big|_{\bullet} \arrow[d] \\
(E_{-\lambda})\quad \frac{\int^{\lambda} u dx^{\lambda}}{\xi^{\lambda}} = [\log(1+\Delta u)]^{-\lambda}|_{\bullet} & & (G_{-\lambda})\quad \Sigma'^{\lambda} u = \left[(1+\Delta u)^{\frac{\xi'}{\xi}} - 1\right]^{-\lambda}\Big|_{\bullet}
\end{tikzcd}
$$

Le signe $|_{\bullet}$ indique que les seconds membres doivent subir les transformations prescrites par Lagrange : développement en série, puis changement des exposants de puissance en indices de différentiation.

Dans chacune des trois familles d'identités — (T), (E), (G) —, mises en évidence par Lagrange, l'étape ultime fournit, à partir des formules de différentiation, des formules d'intégration, acquises par un simple changement du signe de l'indice λ, en posant $d^{-1} = \int$ et $\Delta^{-1} = \Sigma$.

Lagrange s'attache à donner les formules de récurrence qui permettent de calculer les coefficients qui apparaissent dans les développements en série des seconds membres des diverses identités. Il s'arrête un moment sur la formule (E_{-1}), qu'il écrit sous la forme

$$\frac{\int u\,dx}{\xi} = \Sigma u + \mu u + \nu\Delta u + \varpi\Delta^2 u + \chi\Delta^3 u + \cdots$$

Elle peut être utilisée pour calculer une valeur approchée de l'aire sous une courbe à l'aide de la somme et des différences successives des ordonnées équidistantes ; par rapport à d'autres moyens utilisés dans ce but, cette formule, selon Lagrange, présente l'avantage de faire connaître la loi des termes successifs et de faire intervenir les différences $\Delta^n u$, lesquelles décroissent en général lorsque l'indice n augmente.

Les principes ainsi dégagés sont ensuite mis en œuvre sur des exemples. Des développements en séries sont utilisés pour obtenir des différentielles $d^\lambda u$ dont l'expression va permettre de passer aux intégrales par la transformation de λ en $-\lambda$. En posant $u = xy$, il obtient ainsi la formule de Leibniz pour la différentiation d'un produit

$$d^\lambda(xy) = y\,d^\lambda x + \lambda\,dy\,d^{\lambda-1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2}d^2y\,d^{\lambda-2}x + \cdots$$

Le passage aux exposants négatifs lui fournit alors plusieurs formules d'intégration résultant de divers choix opérés pour x et y. Il obtient notamment le développement

$$\int^\lambda y\,dx^\lambda = \frac{x^\lambda y}{1\cdot 2\cdots\lambda} - \lambda\frac{x^{\lambda+1}dy}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+1)\,dx} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}\,\frac{x^{\lambda+2}\,d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+2)\,dx^2} - \cdots,$$

qui généralise la formule de développement en série de l'intégrale $\int y\,dx$ donnée par Jean Bernoulli en 1694.

Le calcul symbolique, résultant de l'utilisation de l'analogie entre les puissances positives et les différences, permet à Lagrange de retrouver des formules connues du calcul différentiel par des méthodes algébriques uniformes. À partir de là, l'extension à l'analogie entre les puissances négatives et les intégrales lui donne facilement des formules de calcul intégral, déjà connues ou non, la conception du calcul intégral considéré comme inverse du calcul différentiel se traduisant par un simple changement de signe des exposants. Le calcul symbolique joue donc ici un rôle heuristique pour trouver de nouvelles formules. Cependant, Lagrange souligne alors que cette méthode, tout en donnant des résultats dont on peut *a posteriori* vérifier l'exactitude, n'est pas rigoureuse et qu'il ne voit pas comment la rendre telle.

2. LES PREMIERES RÉACTIONS AU MÉMOIRE DE LAGRANGE

2.1. *Laplace : essais de justification*

Laplace réagit rapidement à la publication du mémoire de Lagrange. Dans un ajout intitulé « Sur les fonctions » à un mémoire essentiellement consacré à la mécanique céleste [1776, p. 314–321], puis dans un mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles [1780], son objectif consiste à essayer de justifier par des méthodes classiques les formules obtenues par Lagrange par le moyen du calcul symbolique (voir Gillispie [1997, chap. 9] et Panza [1992, chap. III.4.c].

Dans un deuxième temps, Laplace va donner une nouvelle justification du calcul symbolique, à l'aide de sa théorie des fonctions génératrices présentée dans son « Mémoire sur les suites » [1782]. À une suite $x \to y_x$, il associe formellement la fonction $u(t) = \sum y_x t^x$ (qu'il nomme génératrice) et il utilise le calcul sur les séries pour en déduire des résultats sur les suites. Ainsi, la suite des différences finies $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$ a pour fonction génératrice le produit de la fonction génératrice u de y_x par $(\frac{1}{t} - 1)$ et, par conséquent, la suite des differences finies itérées $\Delta^n y_x$ a pour fonction génératrice $u(\frac{1}{t} - 1)^n$.

Plus généralement, la suite ${}^1\Delta y_x = y_{x+i} - y_x$, des différences finies avec un accroissement i, a pour fonction génératrice $u(\frac{1}{t^i} - 1)$. En écrivant celle-ci sous la forme $u[(1 + \frac{1}{t} - 1)^i - 1]^n$ et en développant formellement l'expression suivant les puissances de $(\frac{1}{t} - 1)$ à l'aide de la formule du binôme, Laplace remarque que l'on peut écrire [3]

$$ {}^1\Delta^n y_x = \Big[(1 + \Delta y_x)^i - 1\Big]^n, \tag{2.1} $$

[3] Dans cet article, les formules mathématiques sont numérotées par section.

« pourvu que, dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ les exposants des puissances de Δy_x, et qu'ainsi, au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta y_x)^m$, on écrive $\Delta^m y_x$ » [1782, p. 35].

De même, un raisonnement sur les fonctions génératrices le conduit à la formule pour les sommes

$$^1\Sigma^n y_x = \left[(1+\Delta y_x)^i - 1\right]^{-n},$$

ce qui montre, remarque-t-il, que la formule (2.1) subsiste si l'on prend des exposants négatifs.

L'utilisation d'accroissements infiniment petits lui donne alors les formules de Lagrange correspondantes pour les différentielles et les intégrales.

Laplace conclut :

> « On voit, au reste, que ces analogies [entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales] tiennent à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puissances successives de $\frac{1}{t} - 1$, sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x, tandis que les quotients de u par ces mêmes puissances sont les fonctions génératrices des intégrales finies de y_x. » [1782, p. 38]

On constate donc que Laplace, plutôt que d'en développer l'usage, essaie surtout de justifier les formules de calcul symbolique, notamment par son calcul sur les fonctions génératrices ; c'est ce dernier calcul qui joue chez lui le rôle essentiel au double plan heuristique et démonstratif pour le calcul intégral [4].

2.2. *Le mémoire de Lorgna*

Dans son mémoire « Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal », publié à Turin, Lorgna, qui ne se satisfait pas des justifications

[4] Une autre méthode importante utilisée par Laplace, dans ses travaux de calcul intégral, consiste à introduire des intégrales définies appelée aujourd'hui des transformées intégrales, notamment les transformées « de Laplace » (voir Deakin [1981]).

indirectes apportées par Laplace au principe de l'analogie utilisé par Lagrange, se donne l'objectif de remonter « à l'origine même et aux premiers développemens des différences et des puissances, [...], pour en saisir la raison directe et fondamentale » [Lorgna 1788, p. 410].

L'idée de Lorgna pour atteindre son objectif est de poser

> « que les caractéristiques Δ, d, Σ, $\int$, dont on se sert dans les calculs ordinaires fini et infinitésimal, soient considérées sous deux différens aspects, c'est-à-dire, tantôt comme des signes représentatifs destinés à marquer les états variés des grandeurs avant lesquels ils se trouvent préfigés, tantôt comme des quantités algébriques » [Lorgna 1788, p. 411].

Pour les distinguer des exposants habituels des puissances, il introduit une dénomination et une notation nouvelles : les exposants des caractéristiques qui marquent les ordres successifs des différences (ou des intégrales) sont appelés des « exposans de variation », et sont notés avec un indice prime ($n_{\prime}$). Par exemple, on aura $\Delta^{1\prime}u = u(x+\xi) - u(x)$, $\Delta^{2\prime}u = \Delta^{1\prime}(\Delta^{1\prime}u)$, etc. Il note aussi avec des exposants de variation les valeurs successives de la fonction u : $u(x) = u^{0\prime}$, $u(x+\xi) = u' = u^{1\prime}$, $u(x+2\xi) = u'' = u^{2\prime}$, etc. (On a donc : $\Delta^{1\prime}u = u^{1\prime} - u^{0\prime}$). Le lien entre les deux espèces d'exposants est réalisé par la relation

$$(a \times b)_{\prime} = a \times (b_{\prime}) = b \times (a_{\prime}),$$

où a et b sont des nombres entiers naturels.

En jouant sur les passages entre les deux espèces d'exposants, Lorgna pense qu'il parvient à justifier l'apparition des coefficients numériques identiques dans la formule du binôme et dans la formule de Gregory-Newton :

> « Il est donc manifeste qu'on peut changer l'équation $(u')^{\lambda} = (u + \Delta u)^{\lambda}$ en l'équation
>
> $$u^{\lambda\prime} = u + \frac{\lambda}{1}\Delta u + \frac{\lambda \cdot \overline{\lambda - 1}}{1 \cdot 2}\Delta^2 u + \text{etc.} \qquad [(2.2)]$$
>
> c'est-à-dire, qu'on peut changer la puissance $(u')^{\lambda}$ du degré λ en valeur variée $u^{\lambda\prime}$ de l'ordre λ, pourvu qu'en suivant la notation établie et déclarée ci-dessus, dans le développement du second membre $(u + \Delta u)^{\lambda}$ tous les termes soient regardés et traités comme des quantités algébriques, et après le développement les

exposans des puissances soient appliqués aux exposans de variation ainsi qu'il est prescrit. » [Lorgna 1788, p. 420]

En réalité, sa démarche n'évite pas la circularité logique.

Après avoir déduit de la formule de Gregory-Newton la formule de Taylor par un passage classique aux infiniment petits, Lorgna consacre une grande partie de son mémoire à l'utilisation du calcul symbolique pour le calcul intégral [Lorgna 1788, p. 430–448]. Comme chez ses prédécesseurs, le principe consiste, pour passer des différences aux sommes, à changer le signe des exposants. Mais les problèmes posés par cette pratique ne sont pas suffisamment pris en compte ; les défauts du mémoire sont particulièrement sensibles lorsque l'auteur veut utiliser avec un nombre λ négatif la formule suivante, donnant $\Delta^\lambda u$, qu'il écrit [Lorgna 1788, p. 432]

$$\Delta^\lambda u = u^\lambda - \frac{\lambda}{1} u^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} u^{\lambda-2} - \text{etc.} \tag{2.3}$$

(les exposants de u au second membre correspondant, en fait, à des exposants de variations u', $u^{2\,\prime}$, etc.).

Par exemple pour $\lambda = -1$, la formule (2.3) donne

$$\sum u = u^{(-1)} + u^{(-2)} + u^{(-3)} + \text{etc.}$$

Au second membre, les indices supérieurs représentent le rang (négatif) de chacun des termes. Or, Lorgna interprète le signe $-$ comme un passage à l'inverse au sens algébrique ordinaire, et il écrit l'égalité sous la forme suivante, qui met en jeu des termes de rang positif

$$\begin{aligned}\sum u &= \frac{1}{u'} + \frac{1}{u''} + \frac{1}{u'''} + \cdots \\ &= \frac{1}{u+\Delta u} + \frac{1}{u + 2\Delta u + \Delta^2 u} + \frac{1}{u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u} + \text{etc.}\end{aligned}$$

Certes, il souligne que c'est un type de formule « qu'on ne saurait peut-être trouver par aucune autre méthode » [Lorgna 1788, p. 432], mais elle repose sur le remplacement erroné de $u^{(-\lambda)}$ par $\frac{1}{u^{(\lambda)}}$ (voir *infra*, section 3.1 la critique d'Arbogast sur ce point). Cela montre que la nature exacte des objets notés $(u^{a\,\prime})^b$ n'est pas claire pour Lorgna.

Plus loin, il indique : « pour multiplier les essais de ce calcul naissant, je vais en déduire une expression entièrement nouvelle de l'intégrale finie $\sum u$ » [Lorgna 1788, p. 442]. Il va, en effet, parvenir à des résultats de calcul intégral intéressants à partir de la formule (2.3). Dans le second membre de celle-ci, il remplace chacun des $u^{(\lambda-i)}$ par son expression déduite du développement (2.2) de $u^{\lambda\prime}$ figurant dans une citation *supra*, soit

$$u^{(\lambda-i)} = u + \frac{\lambda - i}{1}\Delta u - \frac{(\lambda-i)(\lambda-i-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u + \cdots$$

Il obtient ainsi une relation de la forme (en modernisant les notations)

$$\Delta^\lambda u = \sum_{k\geqslant 0} A_k^\lambda \Delta^k u, \tag{2.4}$$

où les coefficients A_λ^k sont exprimés sous forme de série.

Pour les valeurs entières et positives de λ, seul le coefficient A_λ^λ est non nul, il est égal à 1 et la formule se réduit à l'identité $\Delta^\lambda u = \Delta^\lambda u$. Mais, Lorgna constate qu'il n'en est pas de même si λ est « rompu, ou même sourd, tant positif que négatif » [Lorgna 1788, p. 444]. En particulier, pour un exposant entier négatif, le changement de λ en $-\lambda$ dans l'équation (2.3) fournit une expression des intégrales $\sum^\lambda u$.

L'auteur examine de façon précise le cas de l'intégrale $\sum u$. Le résultat obtenu fait intervenir les nombres figurés, qui sont aussi les sommes multiples des entiers successifs ; il peut être présenté de la façon suivante. Pour $\lambda = -p$, les coefficients de la formule (2.2) sont précisément les nombres figurés [5]

$$\begin{aligned} S_p^1 &= 1 + 2 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{1\cdot 2}, \\ S_p^2 &= \sum_{k=1}^{p} S_k^1 = \frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \\ &\vdots \\ S_p^i &= \sum_{k=1}^{p} S_k^{i-1}; \end{aligned}$$

la formule s'écrit donc

$$u^{(-p)} = u - p\Delta u + S_p^1 \Delta^2 u - S_p^2 \Delta^3 u + \cdots \tag{2.5}$$

Soit à calculer l'intégrale $\sum u$, formée de n termes successifs

$$\sum u = u^{(-1)} + u^{(-2)} + \cdots + u^{(-n)};$$

5 Lorgna note Sx, S^2x, S^3x, etc., les sommes successives correspondant à un nombre x de termes [Lorgna 1788, p. 445].

si l'on substitue à chacun des $u^{(-p)}$ son développement en série (2.5), on obtient la formule

$$\sum u = nu - S_n^1 \Delta u + S_n^2 \Delta^2 u - S_n^3 \Delta^3 u - \cdots \tag{2.6}$$

Lorgna remarque alors que, en supposant que les différences deviennent des infiniment petits, on passe de cette formule à celle qu'a donnée Jean Bernoulli en 1694

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2y}{dx^2} - \cdots, \tag{2.7}$$

et il souligne que se trouve ainsi mis en valeur « un admirable accord entre les expressions $\sum u$ et $\int y\,dx$ ainsi qu'il paraissait naturel qu'il dût y en avoir » [Lorgna 1788, p. 447].

Ainsi, le mémoire de Lorgna apporte un perfectionnement au calcul symbolique propre aux différences finies et à leurs intégrales. En adoptant pour les états variés $u(x+\Delta x)$, $u(x+2\Delta x)$, ..., $u(x+n\Delta x)$, la notation exponentielle u', u'', ..., $u^{(n)}$, identique à celle utilisée pour les caractéristiques habituelles, l'auteur a fait une partie du chemin qui permet de concevoir un nouveau type d'opération ; mais sa perception reste insuffisante pour que, dans ce domaine, le recours au calcul algébrique puisse avoir lieu sans confusion. Tout en reconnaissant que ce mémoire de Lorgna constitue une avancée vers l'interprétation des symboles des opérations comme des quantités algébriques, Koppelman [1971, p. 160–161] souligne ses limites et son absence d'influence dans l'histoire du sujet. Cependant, on va voir que le mémoire de Lorgna a été utilisé par Prony dans son cours d'analyse de l'Ecole polytechnique et qu'Arbogast l'a cité et discuté.

2.3. *Les leçons d'Analyse de Prony à l'École polytechnique*

L'École centrale des Travaux publics, qui rapidement prendra le nom d'École polytechnique, est créée à la fin de l'année 1794. Dès 1795, Prony est chargé d'un cours, dont on retrouve l'écho dans les premiers numéros du *Journal de l'École polytechnique*. Officiellement, il s'agissait d'enseigner l'« Analyse appliquée à la mécanique ». En réalité, une partie importante des leçons va concerner le calcul direct et inverse aux différences finies.

Après de longs développements à l'aide des méthodes classiques, Prony ajoute un chapitre intitulé « D'un algorithme particulier fondé sur l'analogie entre les indices de différences et les exposans de puissance » [Prony 1797, p. 536–543]. Il l'introduit ainsi :

> « Je suis arrivé au terme où je m'étais proposé de conduire les élèves dans les méthodes analytiques qui servent de fondement au calcul intégral ; [...]. Les principes que j'ai posés sont rigoureux, et les procédés de calculs qu'on en déduit offrent une marche sûre qui conduit toujours à des résultats vrais ; mais, ajoute-t-il, dans certaines circonstances, on peut, par des considérations indirectes, abréger considérablement les opérations, et même parvenir très-facilement à des conclusions qu'on pourrait à peine se flatter d'obtenir par les procédés ordinaires. » [Prony 1797, p. 536]

C'est dans ce cadre que Prony se propose de présenter aux élèves des exemples figurant dans le mémoire de Lorgna, concernant l'analogie des différences et des puissances. Le statut de ces nouvelles méthodes est clairement fixé par lui : elles peuvent être plus rapides et jouer un rôle heuristique, mais elles ne donnent pas de garantie au plan de la rigueur.

Prony retrouve ainsi les théorèmes fondamentaux du calcul des différences. Par exemple, pour obtenir $\Delta^n z$, il écrit $\Delta^{(n)} z^{(0)} = (\Delta^{(1)} z^0)^{(n)} = (z^{(1)} - z^{(0)})^{(n)}$ et, en utilisant formellement la formule du binôme, il parvient à la relation

$$\Delta^{(n)} z^{(0)} = z^{(n)} - n\, z^{(n-1)} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} z^{(n-2)} - \text{etc.}$$

Puis, il en déduit la formule qui donne l'intégrale de la fonction z, en changeant le signe de n et en appliquant la relation $\Sigma^n z = \Delta^{-n} z$. Cependant, comme Lorgna, il fait l'erreur de remplacer partout $z^{(-k)}$ par $\frac{1}{z^{(k)}}$, ce qui rend la formule erronée. Comme Lorgna aussi, Prony effectue des transformations utilisant la formule (2.4) *supra*, et aboutit alors à une formule intéressante pour $\Sigma^n z$.

Pour conclure ce passage, Prony fait la remarque importante suivante :

> « Ainsi, voilà le problème de l'intégration d'un ordre quelconque réduit à celui de la différenciation ; et comme toute fonction est susceptible d'être différenciée, on pourra, au moyen de la formule précédente, avoir, dans tous les cas, l'intégrale ou exacte, ou sous la forme de série. » [Prony 1797, p. 542]

Bien que défini alors comme l'inverse du calcul différentiel, le calcul intégral apparaissait souvent comme beaucoup plus difficile ; Prony exprime ainsi que l'un des apports espéré du calcul symbolique est d'effacer cette difficulté spécifique en réduisant l'établissement des formules de calcul intégral à un simple changement de signe du nombre n, correspondant à l'ordre, dans les formules de calcul différentiel.

2.4. *Bürmann, les fonctions « intégrantes » et la tentative de réforme des notations*

Vocabulaire et notations sont des centres d'intérêts importants de Heinrich Bürmann [6], professeur à Mannheim. Au cours de l'année 1798, il adresse plusieurs manuscrits à l'Institut de France. Il a en vue une rationalisation de la terminologie et des notations de l'analyse. Ainsi, il note de façon multiplicative, $\varphi\psi$, sans mention de l'argument, la composée de deux fonctions quelconques φ et ψ, il adopte la notation exponentielle pour les itérées φ^n d'une même fonction, les exposants négatifs servant à définir les fonctions réciproques. Il illustre cette notation exponentielle en regroupant des exemples qui concernent à la fois des nombres, des fonctions et des opérateurs

$$a^{\pm n} = 1 : a^{\mp n}, \quad \sin^{\pm n} = A \sin^{\mp n}, \quad \Delta^{\pm n} = \Sigma^{\mp n}, \quad d^{\pm n} = \int^{\mp n}, \ldots$$

Un rapprochement se manifeste ainsi entre des objets de natures différentes, ils sont du ressort d'un même vocabulaire, et peuvent faire l'objet d'opérations identiques.

Les propositions de Bürmann bousculent parfois les usages établis, par exemple il souhaite adopter un vocabulaire spécifique aux différences finies, qui établisse une distinction avec celui des différentielles : on parlera de *différencer* lorsqu'on calcule $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ et le résultat obtenu sera une *différençale*. Une grande attention est portée aux opérations et aux relations de réciprocité qu'elles peuvent entretenir. De même que Δ désigne habituellement l'opération inverse de la somme Σ, Bürmann introduit l'opération *quotient* $\underset{\backslash}{\Delta}$, qui constitue l'inverse du produit Π, et qui

6 Dans ses manuscrits, il francise son nom en signant « Burmane ».

vérifie les relations

$$\underset{\backslash}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}, \quad \Pi f(x) = f(x-\Delta x) \cdot f(x-2\Delta x) \cdot f(x-3\Delta x) \cdots,$$
$$\underset{\backslash}{\Delta} \Pi f(x) = \Pi \underset{\backslash}{\Delta} f(x) = f(x).$$

Les symboles $\int$, $\sum$ et Π correspondent à ce qu'il appelle des *fonctions intégrantes.* « Rappeler ces formes indéfinies à des formes déterminées, exactes ou approximatives, s'appelle *intégrer* », écrit-il [Bürmann 1798, p. 3]. Il ajoute que l'on pourrait en imaginer d'autres pour désigner des fractions continues, des chaînes d'exposants... Il suggère aussi de prendre en considération, dans le calcul intégral, un produit qui serait à la somme $\int$ ce que Π est à la somme Σ, il lui correspondrait alors un quotient et le calcul différentiel et intégral serait finalement doté des quatre opérations de l'arithmétique.

Bürmann utilise la réciprocité des opérateurs Δ et Σ, ainsi que de $\underset{\backslash}{\Delta}$ et Π, pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies [Bürmann 1798, p. 9]. Considérons, par exemple, l'équation du premier ordre qu'il écrit $X = \overset{0}{X} y + \overset{1}{X} y^{1)}$, et que nous écrirons

$$A_x y_x + B_x y_{x+1} = C_x.$$

Le principe de la méthode de résolution est connu depuis Lagrange. Considérant que la fonction y_x est le produit de deux autres fonctions $y_x = p_x z_x$, l'équation s'écrit

$$A_x p_x z_x + B_x p_{x+1}(z_x + \Delta z_x) = C_x,$$

et on impose à la fonction p_x d'être solution de l'équation sans second membre

$$A_x p_x + B_x p_{x+1} = 0.$$

L'équation initiale est alors équivalente au système des deux équations suivantes (écrites avec les symboles d'opérateurs utilisés par Bürmann)

$$\underset{\backslash}{\Delta} p_x = -\frac{A_x}{B_x}, \qquad \Delta z_x = \frac{1}{p_{x+1}} \frac{C_x}{B_x}.$$

La première équation fournit une expression de p_x et de p_{x+1}

$$p_x = \Pi\left(-\frac{A_x}{B_x}\right), \qquad p_{x+1} = -\frac{A_x}{B_x} p_x = -\frac{A_x}{B_x} \Pi\left(-\frac{A_x}{B_x}\right);$$

l'expression de z_x s'en déduit

$$z_x = K - \Sigma\left[-\frac{C_x}{A_x}\cdot\Pi\left(-\frac{B_x}{A_x}\right)\right], \text{ avec } K \text{ constante,}$$

et Bürmann écrit le résultat final sous la forme

$$y_x = \Pi\left(-\frac{A_x}{B_x}\right)\cdot\left\{K - \Sigma\left[-\frac{C_x}{A_x}\cdot\Pi\left(-\frac{B_x}{A_x}\right)\right]\right\}.$$

En matière de fonctions intégrantes, Bürmann souhaite rompre avec la pratique qui consiste à écrire les premiers termes ou facteurs, suivis de points de suspension ; il propose un système de conventions assez pesantes, pour indiquer les variables sur lesquelles portent les intégrations et les bornes entre lesquelles celles-ci doivent être considérées. Il utilise les notations ainsi introduites pour démontrer le théorème qui fait dépendre la résolution d'une équation linéaire aux différences finies d'ordre n de la solution de l'équation homogène associée [Bürmann 1798, p. 9]. Il fournit plusieurs formules de développement en série généralisant la formule de Taylor et une formule de réversion analogue à celle donnée par Lagrange.

Enfin, dans un paragraphe intitulé significativement « Intégrer par différences », Bürmann utilise ses notations pour déterminer une intéressante formule de calcul intégral aux différences finies. Pour une intégrale d'ordre n quelconque, il cherche un développement en série écrit sous la forme

$$\Sigma^n X\,\Delta x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^n \frac{\Delta^p X}{\Delta x^p}.$$

Un raisonnement par récurrence sur l'indice p lui permet d'obtenir la formule [Bürmann 1798, p. 31]

(2.8)
$$\Sigma^n X\ \Delta x^n = n\Sigma^n\Delta x^n\left[\frac{X}{n} - \frac{(x+\Delta x)}{1\cdot(n+1)}\frac{\Delta X}{\Delta x} + \frac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot(n+2)}\frac{\Delta^2 X}{\Delta x^2}\right.$$
$$\left. - \frac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(n+3)}\frac{\Delta^3 X}{\Delta x^3} + \text{etc.}\right]$$

où $n\Sigma^n\Delta x^n = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\cdots(x-n\Delta x+\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$.

De ce résultat, Bürmann déduit immédiatement une expression de l'intégrale $\int^n X\,dx^n$, laquelle se réduit pour $n = 1$ à la formule de Jean Bernoulli (2.7). Il souligne d'ailleurs que la convergence de celle-ci est « précaire et que souvent même elle diverge » [Bürmann 1798, p. 32].

Les travaux de Bürmann ont donné lieu à un rapport de Legendre cosigné par Lagrange. La formule (2.8) y est mentionnée comme un résultat inconnu jusqu'alors. Les autres développements en séries obtenus sont jugés trop proches de résultats existants pour mériter d'être considérés comme des découvertes nouvelles. Les propositions relatives aux notations ne sont pas mentionnées ; on peut penser qu'elles n'avaient pas l'approbation de Legendre qui, dans une lettre à l'auteur [7] indique que les innovations générales en ce domaine ne lui paraissent pas souhaitables, soulignant la clarté qu'ont pu atteindre Euler ou Lagrange par l'utilisation des moyens ordinaires.

Les textes de Bürmann ne seront pas publiés dans les Mémoires de l'Institut, bien qu'ils aient été jugés dignes d'être imprimés. L'auteur les reprendra en partie, avec d'autres développements, dans un texte plus long, comprenant aussi des éléments d'analyse combinatoire et édité par C. F. Hindenburg dans l'un de ses ouvrages [1803]. Les travaux de Bürmann sont symptomatiques de l'importance souvent donnée alors au travail sur le langage symbolique, considéré comme une clé pour le progrès de l'analyse mathématique, avec le souci correspondant d'unification méthodologique ; ils resteront cependant très peu connus, mis à part la formule (2.8) de calcul intégral, grâce au rapport de Legendre ; cette formule servira d'ailleurs de test pour les méthodes de calcul symbolique chez d'autres mathématiciens, notamment Arbogast.

2.5. *Quelques éléments de calcul symbolique dans le traité de Lacroix*

Dans la même période, Lacroix publie en 1800 un *Traité des différences et des séries* qui fait suite aux deux volumes de son *Traité du calcul différentiel*

---

7 Datée du 6 Fructidor an VI, elle se trouve dans la pochette de la séance du 21 Prairial an VI (= 9 juin 1798), aux Archives de l'Académie des sciences de Paris.

et du calcul intégral. L'analogie des puissances et des différences y est introduite à propos du développement de $u(x+n\Delta x)$. L'auteur constate par récurrence que ce développement fait apparaître les coefficients du binôme, puis, il écrit

$$u(x+n\Delta x) = (1+\Delta u)^n,$$

avec la consigne de transformer les puissances $(\Delta u)^k$ en différences $\Delta^k u$ après le développement. Avec des moyens empruntés aux premiers mémoires de Laplace relatifs à cette question, Lacroix démontre aussi la généralisation de la formule de Taylor qu'il écrit sous la forme, donnée par Lagrange,

$$\Delta^m u = \left(e^{\frac{du}{dx}\Delta x} - 1\right)^m .$$

Dans le cadre du calcul inverse aux différences, après avoir établi classiquement la forme du développement de $\Sigma^m u$, il indique :

> « nous ne pouvons nous empêcher de remarquer, entre les intégrales et les puissances négatives, une analogie qui n'est que la continuation de celle que les différences ont avec les puissances positives : en sorte que l'on peut regarder les intégrales comme des différences d'un ordre dont l'exposant est négatif. Il est visible en effet que d'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire
>
> $$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m}$$
>
> pourvu qu'après le développement on change les puissances positives $\frac{du^p}{dx^p}$ en $\frac{d^p u}{dx^p}$, et les puissances négatives $\frac{du^{-p}}{dx^{-p}}$ en $\int^p u\, dx^p$ » [Lacroix 1800, p. 95].

Il en conclut que l'expression de $\Sigma^m u$ est comprise dans celle de $\Delta^m u$ ci-dessus, dont elle se déduit en affectant l'exposant m du signe moins.

Même s'il privilégie la théorie des fonctions génératrices de Laplace, traitée dans un chapitre ultérieur, qui donne une « théorie complète des suites » permettant de retrouver les formules de Lagrange, il indique que « l'analogie des puissances avec les différences est précieuse pour trouver, retenir et généraliser des expressions qui coûteraient beaucoup de peine avec d'autres méthodes » [Lacroix 1800, p. 97]. Il en donne alors de nombreux exemples.

On verra plus loin l'évolution du contenu de ce traité de Lacroix dans la deuxième édition, publiée une vingtaine d'années plus tard.

3. DE NOUVEAUX OBJETS DE CALCUL

3.1. *Un calcul algébrique sur les échelles séparées : Arbogast*

Un pas essentiel dans l'histoire du calcul symbolique va être franchi par Arbogast, dans son ouvrage *Calcul des dérivations*, publié en 1800. Après avoir rappelé quelques éléments de sa théorie générale, qui a été étudiée en détail par Friedelmeyer [1994], nous nous concentrerons sur ce qui concerne le calcul intégral.

Dans la lignée de Lagrange, les fonctions sont assimilées par Arbogast à leur développement en série, et les dérivées sont produites par les termes successifs du développement

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + D\varphi x \cdot \Delta x + \frac{D^2\varphi x}{1\cdot 2}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{D^3\varphi x}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(\Delta x)^3 + \text{etc.} \tag{3.1}$$

La dérivation est d'abord conçue comme l'opération qui, dans le développement d'une fonction, permet de passer d'un terme au suivant. Les différentielles de la fonction[8] $\varphi(x)$ sont définies comme les termes successifs, multipliés par les dénominateurs numériques correspondants, de la série (3.1) donnant la différence $\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

L'essentiel des problèmes de dérivation inverse se trouve regroupé à la fin de l'ouvrage, l'auteur exprimant le souhait d'y appliquer l'ensemble de ses principes pour retrouver des intégrales connues et confirmer ainsi le bien-fondé de son point de vue [Arbogast 1800, p. 328]. L'algébrisation du calcul va souvent permettre la généralisation de résultats antérieurs, et la mise en évidence de procédures communes au calcul différentiel et intégral et au calcul direct et inverse aux différences finies.

Les *dérivées inverses* et leur expression à l'aide des exposants sont ainsi présentées :

> « puisque $D^2 \cdot A$ dérive de $D \cdot A$, $D \cdot A$ de $D^0 \cdot A$ ou A ; en rétrogradant, $D\cdot A = D^{-1}\cdot D^2\cdot A$ sera la dérivée inverse de $D^2\cdot A$; $D^0\cdot A = D^{-1}\cdot D^1\cdot A$ ou A sera la dérivée inverse de $D\cdot A$; donc, en continuant, on aura $D^{-1}\cdot A = D^{-1}\cdot D^0\cdot A$ pour la dérivée inverse de A, $D^{-2}\cdot A$, pour celle de $D^{-1}\cdot A$, et ainsi de suite [...] » [Arbogast 1800, p. 330].

---

8 Arbogast note souvent φx au lieu de $\varphi(x)$.

Dans la formule (3.1), pour obtenir le coefficient de la dérivée $D^n\varphi x$ on doit multiplier par $n+1$ le coefficient de $D^{n+1}\varphi x$; Arbogast observe que cette loi de formation explique l'absence des dérivées d'ordre négatif : le passage de $D^0\varphi x = \varphi x$ au terme d'ordre -1, fait en effet apparaître le facteur 0, et le développement (3.1) continué *vers l'arrière* donnerait

$$\text{etc.} + 2\cdot 1\cdot 0\cdot D^{-3}\varphi(x)\,(\Delta x)^{-3} - 1\cdot 0\cdot D^{-2}\varphi(x)\,(\Delta x)^{-2} \\ + 0\cdot D^{-1}\varphi(x)\,(\Delta x)^{-1} + D^0\varphi(x) + D^1\varphi(x)\cdot\Delta x + \text{etc.}$$

Arbogast introduit alors une nouvelle méthode de calcul : les symboles D, d, Δ, Σ, nommés *échelles,* vont faire l'objet d'un calcul direct, selon un principe que l'auteur appelle la « méthode de séparation des échelles d'opérations ». Il présente ainsi cette méthode dans la préface de l'ouvrage :

> « Considérée généralement, cette méthode consiste à détacher de la fonction des variables, lorsque cela est possible, les signes d'opération qui affectent cette fonction, et à traiter l'expression formée de ces signes mêlés avec des quantités quelconques, expression que j'ai nommée *échelle d'opérations,* à la traiter, dis-je, tout de même que si les signes d'opérations qui y entrent étaient des quantités ; puis à multiplier le résultat par la fonction.
>
> Cette méthode me paraît porter au plus haut degré de simplicité, de clarté et de généralité, l'espèce particulière de calcul qui a pris naissance dans l'analogie observée par Leibniz entre les puissances positives et les différentielles, et entre les puissances négatives et les intégrales ; » [Arbogast 1800, p. viij–ix]

Cette méthode va recevoir une première légitimation avec le cas de la formule de Leibniz donnant la différentielle $d^n(xy)$. Celle-ci est d'abord obtenue par une démonstration classique, puis, Arbogast utilise sa nouvelle méthode. La différentiation totale d'une fonction $\varphi(x,y)$ étant désignée par le symbole d, il définit deux nouveaux symboles : $d^{,1}$ pour la différentiation par rapport à y seulement et $d^{1,}$ pour la différentiation par rapport à x seulement. Il observe que l'on a $d = d^{,1} + d^{1,}$ et que la formule de Leibniz s'obtient en appliquant la formule du binôme directement aux *échelles* ainsi définies

$$d^n = (d^{,1} + d^{1,})^n. \tag{3.2}$$

À partir de là, ce calcul direct sur les caractéristiques d'opération est pratiqué systématiquement, y compris avec des exposants entiers négatifs [9]. L'utilisation d'un exposant négatif dans la relation (3.2) lui permet ensuite d'écrire une généralisation de la formule intégrale de Jean Bernoulli [Arbogast 1800, p. 333], dont le principe figurait dans le mémoire de Lagrange publié en 1774. De même, par exemple, l'intégrale d'ordre n quelconque de la fonction $\varphi(x) = (a + bx + cx^2)^r$ est déduite de l'expression de la dérivée $D^n\varphi$ en changeant le signe de n.

Les identités contenues dans ce mémoire de Lagrange (voir *supra*, section 1) font l'objet d'une attention particulière et sont traitées d'une double manière [Arbogast 1800, p. 343 et suiv.]. Il utilise d'abord des méthodes classiques grâce à une généralisation de la formule de Taylor permettant d'obtenir le développement de $\Delta^l u$, démontrée par récurrence. Il en est de même, pour obtenir ensuite l'expression de $\Sigma^l u$ selon la formule de Maclaurin généralisée, où Arbogast ne fait pas appel à un simple changement de signe de l, mais procède à une démonstration spécifique.

Arbogast note que ces démonstrations ont été, certes, un peu longues mais « qu'elles [lui] paraissent être à l'abri de toute objection et ne laisser aucun nuage », et qu'« elles démontrent les théorèmes tels que Lagrange les a énoncés » [Arbogast 1800, p. 349].

On est donc ici dans le cadre d'une recherche de justification des formules de Lagrange

$$\Delta^l u = (e^{\partial.u\cdot\xi} - 1)^l \qquad \text{et} \qquad \Sigma^l u = (e^{\partial.u\cdot\xi} - 1)^{-l} \ (\text{où } \partial.u = \tfrac{du}{dx}).$$

Cependant, par contraste, sa nouvelle méthode est mise en valeur :

> « Mais on peut simplifier et les démonstrations et les énoncés de ces propositions, en les débarrassant de la condition du changement de $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$ après les développemens. [...] On y parvient en détachant l'échelle de la fonction, comme nous l'avons pratiqué dans ce qui précède. Cette séparation de l'échelle met plus de netteté dans les expressions, plus de facilité dans les calculs et fait en outre arriver facilement à des théorèmes bien plus étendus » [Arbogast 1800, p. 350]

9 Et aussi avec des exposants fractionnaires, voir [Friedelmeyer 1994, p. 209].

La séparation des échelles permet de formaliser le passage de la formule de Taylor aux identités fondamentales $(T_{\pm\lambda})$ et $(E_{\pm\lambda})$ présentes dans le mémoire de Lagrange. Si F représente une fonction ou opération quelconque, algébrique ou transcendante, l'égalité $1+\Delta = e^{\xi\,\partial\cdot}$ entraîne aussi

$$F(1+\Delta)\times u = Fe^{\xi\,\partial\cdot}\times u \qquad \text{[Arbogast 1800, p. 351].}$$

Et différents choix de F transforment successivement cette relation en l'une ou l'autre des identités $(T_{\pm\lambda})$, $(E_{\pm\lambda})$. Sur le plan général, Arbogast fait bien observer que, au second membre, F n'affecte que l'échelle $e^{\xi\partial\cdot}$ et non pas u, et que les expressions $(Fe^{\xi\partial\cdot})\times u$ et $F(e^{\xi\partial\cdot}\times u)$ ne sont pas synonymes. Par contre, la signification de l'*échelle* effectivement représentée par des expressions telles que $F(1+\Delta)$ ou $Fe^{\xi\,\partial\cdot}$ ne fait l'objet d'aucun commentaire. Le lecteur peut supposer que la fonction F étant implicitement conçue comme la somme d'une série, ces expressions sont aussi développables selon les puissances entières de Δ ou de ∂.

Dans le paragraphe où il applique aux suites la méthode directe et inverse des différences, Arbogast introduit une notation qui n'avait pas d'équivalent dans les textes mathématiques antérieurs : les valeurs successives [10] d'une suite ou d'une fonction sont notées à l'aide de la lettre E

$$E^n u = u_n, \qquad E^n\varphi = \varphi(x+n\Delta x).$$

L'application de sa méthode de calcul à ce nouveau symbole $E = 1+\Delta$ donne à Arbogast le moyen de rectifier l'erreur de Lorgna, reproduite par Prony (voir *supra*, sections 2.2 et 2.3). De $\Sigma = \Delta^{-1}$, il déduit, en effet, par un calcul algébrique formel sur les symboles d'opérations [Arbogast 1800, p. 380]

$$\Sigma u = (E-1)^{-1}u = (E^{-1}+E^{-2}+E^{-3}+\text{etc.})u = \left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E^2}+\frac{1}{E^3}+\text{etc.}\right)u\,;$$

d'où, en multipliant tous les termes par u

$$\Sigma u = \frac{u}{E}+\frac{u}{E^2}+\frac{u}{E^3}+\text{etc.} = E^{-1}u+E^{-2}u+E^{-3}u+\text{etc.},$$

expression qui donne $u(x-\Delta x)+u(x-2\Delta x)+u(x-3\Delta x)+\text{etc.}$

Arbogast souligne ainsi que :

10 Encore appelées *États successifs* (ou *états variés*), d'où l'emploi de la lettre E.

> « la séparation des échelles [...] représente un procédé plus simple et en même temps plus sûr que celui qui consiste à considérer les indices $0, 1, 2$, etc. de $\Delta^0 u$, $\Delta^1 u$, $\Delta^2 u$, etc. et ceux des états successifs $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$,etc. comme des exposans de puissances dans les développemens, et à changer, après les développements réduits, ces exposans en indices ; car on pourrrait se tromper sur le moment où le changement doit se faire. » [Arbogast 1800, p. 379]

Ainsi, dans ce cas, le passage aux inverses affecte bien les opérations notées E^n et non pas les nombres $u_n = E^n u$, comme l'écrivaient Lorgna et Prony.

Par ailleurs, la formule de Gregory-Newton est démontrée par le développement du binôme figurant au second membre de la relation $E^n = (1+\Delta)^n$, puis en multipliant les deux membres par la fonction u. Deviennent ainsi inutiles les conventions embarrassées imposées par Lorgna ou Prony pour établir cette formule en transformant des exposants en indices.

On peut aussi obtenir, pour les différences finies, une formule analogue à la formule de Leibniz. Il suffit d'introduire, comme dans le cas des différentielles, les échelles $\Delta^{1,}$ et $\Delta^{,1}$, correspondant aux différences par rapport à x seulement et par rapport à y seulement, respectivement, et on obtient $\Delta = \Delta^{,1} + \Delta^{1,} E^{,1}$.

Avec la méthode d'Arbogast, la formule d'intégration par parties devient une conséquence de l'identité algébrique

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{(a+b)a}, \tag{3.3}$$

dans laquelle on substitue à a et b les opérateurs de différentiation $d^{,1}$ et $d^{1,}$.

De même l'identité algébrique (3.3) appliquée aux échelles $a = \Delta^{,1}$ et $b = \Delta^{1,} E^{,1}$ fournit la formule d'intégration par parties : $\Sigma\varphi(x,y) = \Sigma^{,1}\varphi(x,y) - \Sigma[\Delta^{1,}\Sigma^{,1}\varphi(x, Ey)]$.

Grâce à sa méthode, Arbogast retrouve plus facilement des résultats de calcul intégral aux différences comme la formule de sommation de Lorgna (voir *supra*, section 2.2, formule (2.6)), et celle de Bürmann [Arbogast 1800, p. 387–388].

La méthode de séparation des échelles d'opérations a montré sa capacité à fournir des résultats dans toutes les sortes de calcul aux différences, notamment le calcul intégral, plus simplement et sûrement que l'analogie des différences et des exposants. Elle repose sur la pratique d'un calcul algébrique sur les symboles d'opérations qu'Arbogast justifie seulement en écrivant que « ses procédés [de la méthode] portent avec eux leur démonstration » [Arbogast 1800, p. ix]. Ce type de justification ne va pas satisfaire ses successeurs.

3.2. *Une théorie des expressions analytiques orientée vers le calcul aux dérivées partielles : Brisson*

L'utilisation du calcul symbolique va connaître une extension à une autre partie du calcul intégral avec les travaux de Barnabé Brisson, lequel publie en 1808 un mémoire « Sur l'intégration des équations différentielles partielles »[11]. L'auteur développe une théorie de ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui les opérateurs différentiels linéaires ; il étudie des « expressions analytiques », qu'il note $V(\psi u)$, « contenant la fonction arbitraire ψu d'une manière quelconque, mais au premier degré » [Brisson 1808, p. 194].

Brisson fait explicitement le parallèle entre la théorie qu'il propose de ces opérateurs et la théorie des fonctions analytiques publiée par Lagrange en 1797. De même qu'une fonction analytique donne lieu au développement $f(x+i) = fx + ip + i^2q + i^3r + \text{etc.}$, quand on ajoute à x un accroissement indéterminé i, Brisson établit une expression de la forme

$$V(\psi u \times \pi u) = V(\psi u) \cdot \pi u + V_{\prime}(\psi u) \cdot \frac{d\pi u}{du} + V_{\prime\prime}(\psi u) \cdot \frac{d^2\pi u}{du^2} + V_{\prime\prime\prime}(\psi u) \cdot \frac{d^3\pi u}{du^3} + \text{etc.}, \tag{3.4}$$

quand on multiplie la fonction ψu par la fonction quelconque πu [Brisson 1808, p. 195].

Puis, il met en évidence la loi de « dérivation » $V(\psi u) \to V_{\prime}(\psi u)$ qui permet de rendre compte, dans la formule (3.4), du passage de chaque terme

[11] On trouvera des commentaires sur ce mémoire de Brisson dans l'article de Lusternik et Petrova [1972] et dans celui de Petrova [1993].

au suivant [12]. Apparaît alors une formule dite « de Brisson » analogue à la formule de Taylor

$$V(\psi u \times \pi u) = V(\psi u)\cdot \pi u + V^{(1)}(\psi u).\frac{d\pi u}{du} + \frac{V^{(2)}(\psi u)}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2\pi u}{du^2} + \frac{V^{(3)}(\psi u)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^3\pi u}{du^3} + \cdots$$

Dans le cas d'une fonction $\pi u = u$, cette formule entraîne la relation simple [Brisson 1808, p. 197]

$$V^{(1)}(\psi u) = V(u\psi u) - u\cdot V(\psi u).$$

Pour obtenir ses résultats, Brisson utilise largement l'analogie entre les puissances et les différences. Par exemple [Brisson 1808, p. 199 et suiv.], il recherche pour la dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ un développement en série suivant les puissances de n analogue à celui de l'exponentielle

$$a^n = 1 + n\log a + \frac{n^2}{1\cdot 2}(\log a)^2 + \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log a)^3 + \text{etc.}$$

En considérant les *expressions analytiques*

$$A(u) = \frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.}$$

et

$$\lambda(u) = e^x A(ue^{-x}),$$

puis, en utilisant les itérées de l'opération $u \to \lambda(u)$, il obtient finalement la formule recherchée sous la forme

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u + n\lambda(u) + \frac{n^2}{1\cdot 2}\lambda^2(u) + \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\lambda^3(u) + \text{etc.}$$

Jacques-Frédéric Français lui reprochera de ne pas avoir écrit directement

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u + n\left(\log\frac{d}{dx}\right)(u) + \frac{n^2}{1\cdot 2}\left(\log\frac{d}{dx}\right)^2(u) + \frac{n^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\log\frac{d}{dx}\right)^3(u) + \text{etc.}$$

12 Pour obtenir le résultat, Brisson compare les développements de $V[\psi u\times(\pi u\times\varphi u)]$ et de $V[(\psi u\times\varphi u)\times\pi u]$ comme Lagrange comparait $f[x+(i+o)]$ et $f[(x+o)+i]$ pour déterminer la loi des dérivées de la fonction f.

Et il verra là « une nouvelle preuve des erreurs que peut faire commettre l'analogie des puissances et des différences, lorsqu'on ne détache pas les échelles » [Français 1813, p. 272]. Cette critique n'est guère recevable car, si l'on veut donner un sens à l'*échelle* $\log \frac{d}{dx}$ en faisant intervenir les puissances de $\frac{d}{dx}$, on est conduit à un calcul du type suivant

$$\log \frac{d}{dx} = \log \left[1 + \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n.$$

Il suffit alors de remarquer que la formule de Newton et celle de Leibniz, appliquées respectivement à $\left(\frac{d}{dx} - 1\right)$ et à ye^{-x}, permettent d'écrire

$$e^{-x}\left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n u = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}u),$$

puis

$$e^{-x}\left(\log \frac{d}{dx}\right) u = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \frac{d^n}{dx^n}\right)(e^{-x}u) = \left[\log\left(1 + \frac{d}{dx}\right)\right](e^{-x}u).$$

Et finalement, les *expressions analytiques* mises en œuvre par Brisson sont précisément celles qui permettent d'attribuer un sens à l'*échelle* de Français

$$\left(\log \frac{d}{dx}\right) u = e^x \left[\log\left(1 + \frac{d}{dx}\right)\right](e^{-x}u) = e^x A(ue^{-x}) = \lambda(u).$$

À l'occasion du précédent calcul, Brisson note que l'*expression analytique* $A(u)$ utilisée a pour « dérivée » l'expression

$$A^{(1)}(u) = \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3} - \text{etc.},$$

et il évoque brièvement le calcul inverse, qui pourrait être associé à la dérivation $A \to A^{(1)}$, « comme le calcul intégral se déduit immédiatement du calcul différentiel » [Brisson 1808, p. 201]. Dans l'exemple concerné, l'expression $A^{(1)}(u)$ n'est autre que

$$A^{(1)}(u) = e^{-x} \int ue^x \, dx,$$

et l'auteur souligne que ce calcul intégral d'un nouveau genre aurait ici pour but la recherche de l'expression $A(u)$ vérifiant, pour toute fonction u, la relation

$$A(xu) - xA(u) = e^{-x} \int ue^x \, dx.$$

Les moyens ainsi mis en place permettent l'étude de plusieurs classes d'équations aux dérivées partielles linéaires. En particulier, des équations du type [13]

$$\Sigma A_{\alpha\beta}(x,y)\frac{\partial^{\alpha+\beta}z}{\partial^{\alpha}x\,\partial^{\beta}y}=0,$$

sont résolues à l'aide d'*expressions analytiques* $V(\psi u)$ dans lesquelles u représente une fonction des variables x et y.

Mais, avec des moyens plus élémentaires, Brisson fait aussi plusieurs remarques qui mettent en jeu l'opérateur constituant le premier membre de l'équation aux dérivées partielles à résoudre. Ainsi, lorsque l'opérateur est à coefficients constants il développe la méthode suivante [Brisson 1808, p. 230 et suiv.]. Il associe à l'équation différentielle linéaire $\nabla z = 0$ d'ordre m, l'équation algébrique $\nabla' z = 0$ de degré m. Il suppose que cette dernière équation est décomposée en un produit de m facteurs $\nabla' z = \delta' z \times \delta'_1 z \times \cdots \times \delta'_{m-1} z = 0$, alors : « Que l'on représente aussi par $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}$ les formes que prennent ces facteurs quand on y change les exposans en indices de différenciation, on trouvera $\nabla z = \delta \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_{m-1} z = 0$. » [Brisson 1808, p. 231]

Il note que l'ordre des facteurs dans cette dernière équation peut être modifié, comme il peut l'être dans l'équation $\nabla' z = 0$, et que toute solution d'une équation $\delta_i z = 0$ est aussi solution de l'équation initiale $\nabla z = 0$. Il conclut : « Ces remarques confirment encore l'analogie parfaite qui existe entre les équations différentielles du premier degré à coefficiens constans, et les équations algébriques, et en général entre les opérations du calcul différentiel et celles de l'algèbre. » [Brisson 1808, p. 231]

Cependant, dans les calculs et dans l'expression des solutions, Brisson s'en tient à des opérateurs élevés à des puissances positives. Par exemple, pour résoudre l'équation

$$\xi + \nabla\xi = M,$$

[13] Ici, et dans la section 4.1 *infra*, nous avons modernisé le symbolisme en utilisant, notamment, des ∂ ronds pour les dérivées partielles, au lieu des d droits figurant chez Brisson.

il évite la résolution qui ferait appel à l'opérateur $\frac{1}{1+\nabla}$. Il procède à des substitutions successives

$$\xi = M - \nabla\xi, \quad \xi = M - \nabla M + \nabla^2\xi, \quad \text{etc.},$$

pour écrire finalement la série

$$\xi = M - \nabla M + \nabla^2 M - \nabla^3 M + \text{etc.}$$

Il considère ensuite l'expression $\nabla' M$ obtenue en remplaçant dans ∇M les indices de différentiation par des exposants de puissance, et il fournit une interprétation à la manière de Lagrange : le résultat aurait pu être obtenu par le développement en série entière de

$$\frac{1}{1 + \nabla' M},$$

suivi d'un passage des exposants aux indices.

De nombreux résultats sont obtenus par la recherche de symétries, par la transformation d'indices en exposants, par la transposition de calculs sur les différentielles à des calculs sur les différences finies. En aucun cas la séparation des échelles à la manière d'Arbogast n'est explicitement utilisée. Enfin Brisson transforme certaines de ses séries à l'aide d'intégrales définies, et nous verrons plus loin comment il ouvre ainsi une voie qui sera empruntée ensuite par Fourier, Poisson et Cauchy.

3.3. *Les échelles séparées et les équations différentielles linéaires : Français*

Après la mort d'Arbogast, en 1803, Jacques-Frédéric Français, constatant que le calcul des dérivations ne rencontre pas l'adhésion qu'il mérite, se propose d'exposer la méthode et ses algorithmes, avec la double ambition d'en simplifier les principes et les notations, et d'en étendre les applications. En 1813, il publie dans les *Annales* de Gergonne un « Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent ; avec des applications à l'intégration d'une classe nombreuse d'équations ». En voulant donner de la méthode une justification *a priori*, il invoque les propriétés communes aux constantes et aux *échelles*, mais il n'évite pas la pétition de principe. D'autre part, son zèle dans l'utilisation du procédé d'Arbogast est parfois excessif, et l'on a vu comment il croyait déceler une erreur dans le développement de $\frac{d^n y}{dx^n}$ obtenu par Brisson, au motif qu'il ne faisait pas intervenir *l'échelle séparée* $\log \frac{d}{dx}$.

Cependant l'apport principal de Français est son application systématique de la séparation des échelles à la résolution des équations différentielles linéaires des divers types, domaine que le traité d'Arbogast n'avait pas abordé.

L'équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients constants d'ordre n est écrite à l'aide d'une relation impliquant seulement les *échelles* et les constantes

$$\partial^n + a_1\partial^{n-1} + a_2\partial^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Puis, en utilisant systématiquement le principe déjà présent, on l'a vu, dans le mémoire de Brisson de 1808, il factorise l'équation

$$(\partial - \alpha_1)(\partial - \alpha_2)\cdots(\partial - \alpha_n) = 0.$$

La résolution de l'équation initiale est ainsi ramenée à la résolution des équations d'ordre un $\partial z - \alpha_i z = 0$; cela donne n intégrales particulières dont l'intégrale générale est la somme. Sont aussi traitées par le même moyen les équations aux différences finies, écrites sous la forme

$$\Delta^n + a_1\Delta^{n-1} + a_2\Delta^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Français va alors considérer successivement des équations linéaires à coefficients constants du premier ordre de quatre types différents (équations différentielles ordinaires, aux différences finies, aux différences mêlées, et aux différences partielles). Il les décrit respectivement par leur *équation aux échelles*

$$\partial - a = 0, \qquad \Delta_\xi - a = 0,$$
$$E - a\partial - b = 0, \qquad \partial^{1\prime} = a\partial^{\prime 1} + b.$$

(E est le symbole d'Arbogast de l'état varié, il vérifie $E\varphi x = \varphi(x+1)$; $\partial^{1\prime}$ et $\partial^{\prime 1}$ sont les symboles de dérivation partielle).

Français résout ces équations par des calculs directs sur les *échelles*. La méthode d'intégration est assez lourde, mais elle a le mérite de s'appliquer uniformément aux quatre types d'équations linéaires du premier ordre et Français [1813, p. 256–257] souligne l'intérêt de cette généralité. Nous allons en décrire les différentes étapes, telles qu'elles apparaissent dans le cas de l'équation différentielle ordinaire

$$\partial = a.$$

Cette équation devient d'abord

$$e^{\partial} = e^{a},$$

la formule de Taylor écrite sous la forme $E = e^{\partial}$, permet d'écrire

$$E = e^{a},$$

puis l'auteur élève « les deux membres à une même puissance arbitraire »

$$E^{k} = e^{ak},$$

il fait en sorte d'« avoir l'unité dans le premier membre »

$$1 = e^{ak} E^{-k}, \tag{3.5}$$

puis applique cet opérateur à la fonction φx

$$\varphi x = e^{ka} \varphi(x - k).$$

Dans cette dernière relation, Français remplace d'abord x par k

$$\varphi k = e^{ka} \varphi(0),$$

puis, revenant à une variable notée x, il écrit la solution sous la forme classique

$$\varphi x = C e^{xa}.$$

Il remarque que la constante arbitraire C est la valeur initiale de φx, et conclut : « On voit, d'après cela, comment la forme de la fonction dépend de l'échelle, et comment celle-ci sert à déterminer l'autre. » [Français 1813, p. 256].

Français envisage aussi le cas, plus complexe, où l'équation aux échelles d'ordre n a des racines égales. Pour obtenir l'intégrale complète dans ce cas, il se propose de donner une méthode « plus simple et plus rigoureuse » [Français 1813, p. 259] que celle utilisant l'infini. Il la présente sur l'exemple d'une racine triple où l'on a

$$(\partial - a)^{3} = 0.$$

Il introduit le symbole $\mu = \partial - a$, d'où $\mu^3 = 0$, et il écrit l'état varié sous la forme

$$E = e^{\partial} = e^a e^{\mu} = \left(1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2\right) e^a.$$

Puis, il invoque la « marche ordinaire » de sa méthode pour écrire une première forme de la solution

$$\varphi x = c\left(1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2\right)^x e^{ax}.$$

On constate, en effet, qu'il utilise ici le résultat obtenu dans le cas d'une racine simple, en faisant comme si le symbole μ était une quantité constante.

En exploitant encore la relation $\mu^3 = 0$, il constate que le facteur $(1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2)^x$ peut être développé en une somme de trois termes seulement

$$\left(1 + \mu + \frac{1}{2}\mu^2\right)^x = 1 + \left(\mu + \frac{1}{2}\mu^2\right)\frac{x}{1} + \mu^2 \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2},$$

« valeur que l'on peut mettre, remarque-t-il, sous la forme $1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2$ » [Français 1813, p. 259], et affirme que la fonction

$$\varphi x = c(1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2)e^{ax}$$

satisfait à l'équation proposée « indépendamment des relations qui existent entre μ_1 et μ_2 » [Français 1813, p. 259]. Des explications complémentaires sont ensuite données pour établir que les fonctions $\mu_1 x e^{ax}$ et $\mu_2 x^2 e^{ax}$ sont bien des solutions de l'équation proposée, quelles que soient les constantes μ_1 et μ_2, et que le calcul a bien produit la solution générale attendue.

Dans le texte de Français, les symboles de dérivation $\mu = \partial - a$ et $\mu^2 = (\partial - a)^2$ semblent ainsi changer de statut au cours du calcul, pour devenir finalement des constantes. Afin d'éclaircir ce passage, il est possible d'adapter au cas de l'équation $(\partial - a)^3 = 0$, la méthode décrite ci-dessus pour l'équation $\partial - a = 0$.

Dans ce but, on peut introduire dans la résolution le facteur $e^{(\partial - a)} = 1$. La relation (3.5) s'écrit alors

$$1 = e^{ak} e^{k(\partial - a)} E^{-k}.$$

L'équation $(\partial - a)^3 = 0$ permet de remplacer l'exponentielle par un développement fini

$$1 = e^{ak}\left[1 + k(\partial - a) + \frac{1}{2}k^2(\partial - a)^2\right] E^{-k}.$$

Appliqué à la fonction φ, cet opérateur conduit à la relation

$$\varphi x = e^{ka}\left[1 + k(\partial - a) + \frac{1}{2}k^2(\partial - a)^2\right] \varphi(x - k). \tag{3.6}$$

Convenons de noter respectivement C_0, C_1, C_2 les valeurs initiales des fonctions qui figurent au second membre

$$C_0 = \varphi(0), \qquad C_1 = (\partial - a)\varphi(x-k)|_{(x-k)=0}, \qquad C_2 = \frac{1}{2}(\partial - a)^2\varphi(x-k)|_{(x-k)=0}.$$

En remplaçant x par k dans les deux membres de (3.6), nous obtenons alors

$$\varphi k = e^{ka}(C_0 + kC_1 + k^2C_2),$$

ou encore, si l'on veut exprimer la solution à l'aide de la variable x,

$$\varphi x = e^{xa}(C_0 + xC_1 + x^2C_2),$$

forme habituelle de l'intégrale générale de l'équation différentielle étudiée.

Le texte de Français est obscur parce qu'il n'évoque pas de façon explicite le passage des fonctions dérivées aux valeurs initiales de ces fonctions, mais la « marche ordinaire » de l'auteur permet effectivement, on l'a vu, d'établir de façon directe la solution générale de l'équation $(\partial - a)^3 = 0$.

Quant aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à un, leur équation aux échelles s'écrit en général

$$\begin{array}{llllll} A & + B\partial^{1,} & + C\partial^{2,} & + \cdots & + N\partial^{n,} & \\ & + B_1\partial^{,1} & + C_1\partial^{1,}\partial^{,1} & + \cdots & + N_1\partial^{n-1,}\partial^{,1} & \\ & & + C_2\partial^{,2} & + \cdots & + N_2\partial^{n-2,}\partial^{,2} & \\ & & & + \cdots & + N_n\partial^{,n} & = 0. \end{array}$$

La résolution se ramène aux calculs précédents chaque fois que le premier membre peut être entièrement décomposé en facteurs du premier degré, ce qui n'est pas ici toujours possible. Dans le cas contraire, Français invoque une méthode de retour des suites pour exprimer l'une des échelles en fonction de l'autre sous la forme d'une série entière

$$\partial^{1\,\prime} = \alpha + \beta\partial'^{1} + \gamma\partial'^{2} + \delta\partial'^{3} + \cdots$$

Il finit par mettre en évidence une solution générale constituée à l'aide de n fonctions $f_i y$, où les $f_i y$ sont des fonctions arbitraires de la variable y et où les α_i sont les racines de l'équation

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \cdots + N\alpha^n = 0.$$

Si les résultats obtenus par Français en matière de solutions d'équations aux différences ne sont pas nouveaux, son mémoire montre l'importance pour le calcul intégral de la méthode de calcul symbolique sur les opérations, caractérisée par sa simplicité et son pouvoir unificateur. Comme il le souligne :

> « Notre méthode d'intégration est donc générale, et applicable à tous les cas des équations linéaires, à coefficiens constans ; qu'elles soient aux différences ou aux différentielles, les unes et les autres totales ou partielles, séparées ou mêlées ; mais ce qu'elle a de particulier, c'est son uniformité constante, pour toutes ces espèces différentes d'équation ; uniformité qu'elle ne doit qu'à la séparation des échelles, dont elle est une des applications les plus intéressantes. » [Français 1813, p. 269]

3.4. *Calcul symbolique et quadrature approchée : Servois*

Deux des mémoires publiés par Servois dans les *Annales* de Gergonne doivent retenir notre attention. Le premier est l'« Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel » [1814a], qui a été souvent commenté [14] ; le second est le « Mémoire sur les quadratures » où il fait intervenir le calcul symbolique pour étudier des méthodes d'intégration approchée [1817].

La contribution de Servois dans l'*Essai* est originale d'abord par sa définition de la différentielle inspirée de la formule (E_1) de Lagrange

$$dz = \Delta z - \frac{1}{2}\Delta^2 z + \frac{1}{3}\Delta^3 z - \cdots$$

---

14 Il en est de même de son mémoire [1814b] sur les fondements du calcul différentiel. Sur ces mémoires de 1814, voir, notamment, l'article récent de Bradley [2001], qui comprend également des informations biographiques sur Servois ; voir aussi [Allaire & Bradley 2002].

Les identités (T_1), (E_1), (G_1) sont présentes, déduites les unes des autres par des moyens formels, mais selon un ordre différent de celui que l'on trouvait chez Lagrange. L'*Essai* a une structure déductive qui lui donne une allure très moderne. Servois y définit comme objet d'étude la classe des *fonctions*, entendues en un sens élargi : outre les fonctions ordinaires, il y inclut, en effet, ce qu'il appelle les *fonctions différentielles* que l'on appellerait aujourd'hui des opérateurs (par exemple, la différentielle dz, la différence finie Δz ou l'état varié Ez, que l'on associe à une fonction ordinaire z). La réunion sous le même vocable d'objets *a priori* différents n'est pas une simple affaire de convention : un même calcul va permettre d'établir les propriétés portant sur ce*s* divers objets. Peuvent alors s'appliquer aux fonctions ordinaires, des notations réservées jusque-là aux *fonctions différentielles* : on trouvera ainsi des notations dont les prémices apparaissaient dans l'*Essai* de Bürmann de 1798, telles que $\sin.^{-1} z = \text{Arc.}(\sin. = z)$ ou $e^{e^z} = L^{-2} z$ [Servois 1814a, p. 96].

C'est dans ce large champ de *fonctions*, que Servois introduit une terminologie originale pour prendre en compte des propriétés qui, jusqu'alors, n'avaient pas été isolées par les mathématiciens. Deux fonctions seront dites *commutatives entre elles* si elles donnent des résultats identiques quel que soit l'ordre dans lequel elles s'appliquent à l'argument

$$f\mathrm{f}z = \mathrm{f}fz.$$

Les fonctions seront dites *distributives* si elles vérifient la relation

$$\varphi(x + y + \cdots) = \varphi x + \varphi y + \cdots$$

La formule du binôme et la formule de Gregory-Newton peuvent alors être présentées comme deux cas particuliers d'un même développement, celui de $(f + \mathrm{f})^n$, où f et f sont des fonctions commutatives entre elles et distributives. C'est, pour Servois, la source de l'analogie qu'elles présentent. Il cite sur ce point le rapport des commissaires [15] sur le mémoire qu'il avait présenté à l'Institut :

> « En montrant que c'est à leur nature *distributive*, en général, et *commutatives entre elles* et avec le facteur constant, que les états variés, les différences et les différentielles doivent leurs propriétés et les analogies de leurs développemens

15 Il s'agissait de Legendre et Lacroix, dont le rapport date de 1812.

avec ceux des puissances, (l'auteur) en donne la *véritable origine*, et éloigne cette idée de *séparation des échelles* qu'Arbogast avait imaginée, » [1814b, p. 151–152].

Servois se démarque, en effet, de la méthode d'Arbogast :

« nous ne perdons jamais de vue, dans nos formules, le sujet des fonctions ; et il n'y a ni séparation des échelles ni opérations qui se terminent exclusivement à ces échelles. [...] La belle méthode d'intégrer les équations aux coefficiens constans, publiée dans les *Annales de mathématiques* (tome 3, p. 244 et suiv.) [16], et qui ajoute tant d'intérêt aux formules de l'analogie, ne réclame pas davantage la séparation des échelles, comme il serait aisé de le faire voir. » [Servois 1814b, p. 152]

Cependant, malgré cette dernière remarque, l'*Essai* ne contient pas de développement sur le calcul intégral. C'est dans son « Mémoire sur les quadratures », publié dans les *Annales* en 1817, qu'il va aborder ce domaine.

L'intervention de Servois fait suite à des articles présentant des méthodes de calcul approché des intégrales définies, parus en 1816 et 1817 dans les *Annales*. Trois d'entre eux sont signés de Kramp et un de Bérard. En tout, trois méthodes s'y trouvent exposées, qui ont en commun de chercher à calculer une valeur approchée de l'intégrale $S = \int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant les ordonnées $y_i = f(a_i)$ obtenues à partir d'une subdivision régulière $[a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b]$ de l'intervalle d'intégration. Cependant, leurs approches sont différentes et une opposition assez vive s'est manifestée entre les points de vue de Kramp et de Bérard.

Servois se propose de rapprocher les diverses méthodes en améliorant à la fois leur compréhension théorique et leur efficacité technique. Pour cela, il va notamment utiliser le calcul symbolique. Servois [1817, p. 75] commence par rappeler la formule (E_1) qu'il écrit, en utilisant les notations d'Arbogast

$$dy = \mathrm{Log.}(1 + \Delta)y,$$

16 Il s'agit, bien sûr, du mémoire de Français dont nous avons parlé *supra*, section 3.3.

pour en déduire les identités (E_{-1}) et (T_{-1}) qui fournissent des développements pour les intégrales, à savoir (avec un pas égal à l'unité)

$$\int y\,dx = d^{-1}y = [\log(1+\Delta)]^{-1}y + K$$
$$\text{et } \Sigma y = \Delta^{-1}y = (E-1)^{-1}y = (e^{d}-1)^{-1}y + K,$$

où K est une constante arbitraire.

Kramp [1816a] avait d'abord proposé une procédure s'appuyant sur la méthode des trapèzes, que l'on peut résumer de la façon suivante. Pour une subdivision de $[a, b]$ en six intervalles, quatre approximations peuvent être successivement envisagées : une première valeur T_6 représente l'aire du trapèze limité par les ordonnées extrêmes y_0 et y_6, une seconde T_3 est la somme des aires des deux trapèzes formés sur les intervalles $[a_0, a_3]$ et $[a_3, a_6]$, T_2 et T_1 sont respectivement obtenues en scindant l'intervalle $[a, b]$ en 3, puis, 6 parties égales. Kramp considère que les valeurs T_i ainsi calculées sont celles d'un polynôme pair de degré 6

$$T_i = A + Bi^2 + Ci^4 + Di^6 \qquad (i = 1, 2, 3, 6) \tag{3.7}$$

En général, les termes T_i se rapprochent de la valeur exacte S, lorsque i prend successivement les valeurs décroissantes $i = 6, 3, 2, 1$. La situation suggère que la valeur $T_0 = A$ sera encore meilleure que les précédentes, et qu'elle pourra être choisie comme l'approximation cherchée. Le coefficient A résulte ensuite de l'élimination des 3 coefficients B, C, D entre les 4 équations (3.7), il s'exprime linéairement en fonction des ordonnées y_i.

Servois va rapprocher ce calcul de ce qu'on peut obtenir avec la formule d'Euler-Maclaurin. En posant $\omega = \frac{b-a}{6}$ et en prenant des différences finies $\Delta_i = i\omega$, cette formule permet d'écrire les aires T_i sous la forme de la série suivante

$$\begin{aligned} T_i = \int_a^b f(x)\,dx - i^2\frac{\omega^2 B_1}{1\cdot 2}\left[\frac{df}{dx}\right]_a^b \\ + i^4\frac{\omega^4 B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left[\frac{d^3f}{dx^3}\right]_a^b - i^6\frac{\omega^6 B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left[\frac{d^5f}{dx^5}\right]_a^b + \cdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

où les B_i désignent les nombres de Bernoulli, soit, à l'époque : $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, etc.

Dans cette formule, on peut remplacer la fonction f par le polynôme d'interpolation p de degré 6, ce polynôme vérifie les conditions $p(a_i) = y_i$, les premiers membres T_i restent donc inchangés, les seconds membres s'arrêtent précisément au terme de degré 6. Les équations (3.8) deviennent tout à fait comparables aux équations (3.7), et la méthode d'élimination de Kramp conduit en réalité à calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b p(x)\,dx$, obtenue en remplaçant la fonction f par son polynôme d'interpolation.

Servois souligne que cette interprétation a été rendue possible parce que le nombre 6 présente des diviseurs en quantité suffisante. Une généralisation s'avèrerait impossible, par exemple pour une subdivision de pas $\omega = \frac{b-a}{8}$, il faudrait encore s'en tenir à quatre aires T_i (avec des trapèzes de bases respectives 8ω, 4ω, 2ω, ω), on serait donc obligé de garder 4 termes seulement dans les équations (3.7), mais le polynôme d'interpolation étant alors de degré 7, il faudrait prendre un terme de plus dans la formule d'Euler-Maclaurin, les équations (3.7) et (3.8) ne seraient plus comparables.

Dans un second mémoire [1816b], Kramp a utilisé une méthode reposant sur la formule de Gregory-Newton. Pour un entier n fixé, il effectue les calculs pour un intervalle $[0, n]$ subdivisé en n sous-intervalles de longueur $\omega = 1$, la formule s'écrit alors (on abrège l'écriture ici en notant y la première ordonnée y_0)

$$(3.9) \qquad f(x) = y + \frac{x}{1}\Delta y + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y + \cdots$$

Les $n+1$ ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ étant données, les différences $\Delta^i y$ sont connues jusqu'à l'ordre n. Si l'on ne tient pas compte des différences finies d'ordre supérieur à n, le second membre de la relation (3.9) se réduit au polynôme d'interpolation de degré n. Il fournit une valeur approchée de l'intégrale S sous la forme

$$(3.10) \qquad S_1 = \int_0^n p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta^k y.$$

Pour les valeurs de n allant de 1 à 12, Kramp s'est appliqué à calculer numériquement le système des coefficients a_k, puis, il en a déduit les coefficients

b_k qui permettent un calcul direct de S_1 à l'aide des ordonnées

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} b_k y_k. \tag{3.11}$$

Il signale qu'il aurait aimé poursuivre jusqu'à la valeur $n = 24$, mais que « l'immensité du travail [l']a effrayé » [Kramp 1816b, p. 382], cependant il soupçonne l'existence d'une méthode plus rapide que celle qu'il a utilisée.

Servois observe que l'intégration de la formule (3.9) pratiquée par Kramp conduit en fait au même résultat que l'utilisation de l'identité (E_{-1}). Dans le cas d'un polynôme, l'intégrale indéfinie met en jeu une somme finie

$$\int p(x)\,dx = d^{-1}y = [\log(1+\Delta)]^{-1}y = \Delta^{-1}y + \sum_{k=0}^{n} A_k \Delta^k y + K.$$

Puis l'intégrale définie est écrite à l'aide du symbole de l'*état varié* E

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^n p(x)\,dx = (E^n - 1)\left(\Delta^{-1} + \sum_{k=0}^{n} A_k \Delta^k\right) y \\ &= \Delta^{-1}[(1+\Delta)^n - 1]\left(1 + \sum_{k=0}^{n} A_k \Delta^{k+1}\right) y. \end{aligned}$$

Du développement de cette formule symbolique, Servois tire les relations de récurrence qui permettent de calculer les coefficients a_k de la formule (3.10). Celle-ci peut être transformée dans le but de faire apparaître les ordonnées $y_i = E^i y$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+E)^k y,$$

et le développement des binômes $(1+E)^k$ donne finalement les formules générales qui permettent de trouver les coefficients b_k de la relation (3.11).

Bérard [1816], voulant améliorer les résultats obtenus par Kramp, cherche une valeur approchée qui soit une combinaison linéaire des ordonnées y_i ; pour un nombre pair $n = 2p$, il l'écrit *a priori* sous une forme correspondant à

$$S_2 = A_p y_p + \sum_{k=0}^{p-1} A_k (y_k + y_{2p-k}).$$

Il détermine les coefficients A_k en imposant à la formule de donner le résultat exact lorsque f est exprimée par des monômes de degré

$0, 2, 4 \ldots, 2n$. Kramp critique la méthode sur plusieurs points et conteste certains résultats numériques [1817].

Servois reprend les calculs de Bérard en exprimant les valeurs de y_k à l'aide de la formule de Taylor. Il détermine les coefficients A_k par une méthode élégante et efficace. Il fait justice des accusations lancées par Kramp [1817]. Enfin, il souligne que les calculs qu'il vient de réaliser sont précisément ceux que l'on doit faire pour obtenir par la formule (3.11) l'intégrale du polynôme d'interpolation ; la méthode de Bérard n'est pas différente de la seconde méthode de Kramp et finalement la plupart des procédés soumis au débat ne diffèrent pas sur le fond.

Par ailleurs, Servois reprend un problème résolu par Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral* [1811]. Pour traiter des questions de balistique, Legendre avait cherché des formules d'approximation pour représenter une courbe donnée par son équation intrinsèque (laquelle relie l'abscisse curviligne s et l'angle θ que fait la tangente avec une direction fixe). La méthode mise en œuvre était lourde et gardait un caractère heuristique [Legendre 1811, p. 320–330]. Legendre concluait lui-même ses calculs en soulignant que la simplicité du résultat final laissait penser qu'il pouvait être atteint par « une voie plus directe et moins laborieuse ». Servois reprenant la question, obtient le résultat de Legendre à l'issue d'un calcul général fondé sur la formule d'Euler-Maclaurin et selon un travail méthodique mettant en jeu les propriétés formelles des symboles utilisés [Servois 1817, p. 78–80].

À la fin du *Mémoire sur les quadratures*, l'auteur esquisse une comparaison de différentes méthodes du point de vue de leur efficacité. Contre l'avis de Legendre, il affirme sa préférence pour les procédés reposant sur le polynôme d'interpolation, mais il ne s'appuie pas sur une formulation générale des erreurs de méthode et les arguments restent qualitatifs.

3.5. *La diffusion des nouveaux calculs*

Malgré l'efficacité et les clarifications qu'ils apportent, les procédés de calcul symbolique utilisés par Servois, Français ou Arbogast ne se diffusent guère dans les écrits publiés à Paris par leurs contemporains.

Lacroix fait paraître en 1802 un *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, avec une seconde édition en 1806, où, dans l'appendice, il utilise le calcul symbolique à la manière classique de Lagrange, comme il le faisait dans son grand *Traité*, en 1800 (voir *supra*, section 2.5). Il va étendre son usage du calcul symbolique, pour le calcul aux différences direct ou inverse, dans le tome III de la deuxième édition de son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, qui paraît en 1819. Aux développements sur le calcul intégral contenus dans la première édition de 1800, il ajoute notamment une note, située à la fin du volume, qui concerne précisément les formules dans lesquelles « les caractéristiques d'opérations paraissent se comporter comme des symboles de quantités » ; en citant les noms de Lorgna, Arbogast, Français, Servois, l'auteur évoque les « procédés de calcul qui n'ont pas généralement été adoptés mais qui doivent entrer dans l'histoire de la science » [Lacroix 1819, p. 726]. Ces procédés « paraissent, en effet, peu satisfaisants lorsqu'on ne les appuie que sur de simples analogies ; mais la conformité des résultats qu'on en tire, avec ceux qui sont solidement établis d'ailleurs montrent qu'ils doivent avoir un fondement réel, » [Lacroix 1819, p. 726]. Le mode d'exposition proposé par Servois en 1814, avec les notions de fonctions distributives et commutatives, lui semble aller dans le sens de l'établissement d'un tel fondement et il en donne un aperçu de quelques pages [17].

Cependant, même si l'opinion de Lacroix sur la méthode d'Arbogast apparaît plutôt négative dans cette addition, l'influence de ce dernier se fait sentir dans le corps du texte, où la séparation des échelles est, de fait, à plusieurs reprises utilisée. Ainsi, la formule de Lagrange $\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1$, est aussi écrite $\Delta u = (e^{h\frac{d}{dx}} - 1)u$ [Lacroix 1819, p. 61], puis $\Delta = e^{h\frac{d}{dx}} - 1$ [Lacroix 1819, p. 70].

Certes, le procédé sert surtout à formuler des résultats obtenus par d'autres moyens, et, en particulier, il est peu utilisé pour établir des formules de calcul intégral. Ainsi, pour montrer que le développement en série infinie de $\Sigma^n(PQ)$ fait intervenir les mêmes coefficients que le développement de $(1+x)^{-n}$, Lacroix fait deux calculs [1819, p. 94], là où

[17] Par contre, Lacroix récuse le fondement proposé par Servois pour le calcul différentiel, préférant le recours aux limites, jugées par lui indispensables pour les applications géométriques et mécaniques [Lacroix 1819, p. 732].

Arbogast pratiquait un calcul direct et unique sur les échelles. Cependant, on peut signaler qu'il établit une formule donnant $\Sigma^n u$ à partir de l'expression $(e^{h\frac{d}{dx}} - 1)^{-n}u$ [Lacroix 1819, p. 106].

En fait, cet ouvrage de Lacroix reflète aussi une certaine influence des travaux des mathématiciens anglais publiés depuis la première édition et eux-mêmes influencés par les travaux français sur le calcul symbolique, notamment ceux d'Arbogast (voir *infra* dans ce paragraphe). C'est le cas de Brinkley [1807] et de J. Herschel, coéditeur de la traduction anglaise du *Traité élémentaire* de Lacroix [1816] et auteur d'un appendice sur le calcul aux différences.

Laplace n'adopte pas non plus la méthode de séparation des échelles d'opérations d'Arbogast, considérant que le calcul des fonctions génératrices en « donne à la fois la démonstration et la vraie métaphysique » [Laplace 1811, p. 358]. Dans sa *Théorie analytique des probabilités* [1812/1820], il présente d'ailleurs les identités de Lagrange dans le Livre Premier intitulé « Calcul des fonctions génératrices ». On trouve ensuite une utilisation de la formule d'Euler-Maclaurin pour évaluer une somme de coefficients multinomiaux par une formule asymptotique, qui permet de ramener le calcul d'une somme finie à une intégrale ; et, au moment où elle intervient, Laplace utilise le passage des exposants aux indices de différentielles, en écrivant

$$\begin{aligned}\Sigma y_l &= \frac{1}{e^{\frac{dy_l}{dl}} - 1} = \frac{1}{\frac{dy_l}{dl}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{dy_l}{dl} + \frac{1}{6}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^2 + \cdots\right]}\\ &= \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^0 + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \cdots\\ &= \int y_l\, dl - \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \cdots + \text{cte} \quad \text{[Laplace 1812/1820, p. 150].}\end{aligned}$$

On peut noter que Laplace éprouve parfois des difficultés à traiter clairement certaines situations que, postérieurement, le calcul symbolique sur les opérations va permettre de préciser. C'est le cas lorsque, pour résoudre l'équation aux différences finies

$$y_{x+1,x'+1} - ay_{x,x'+1} - by_{x+1,x'} - cy_{x,x'} = 0,$$

il utilise une fonction génératrice $u(t, t')$ où les deux variables t et t' sont liées par une relation algébrique [Laplace 1812/1820, p. 62]. Il est amené à remettre en question ce calcul dans un *Supplément*, qui indique que les variables d'une telle fonction génératrice doivent toujours rester indépendantes [Laplace 1812/1820, p. 640]. Todhunter [1865, p. 509] montrera comment le recours au calcul symbolique des opérations permet d'éclairer cet épisode [18].

En 1821, les *Annales* de Gergonne publient un mémoire d'un mathématicien peu connu, Henri G. Schmidten, qui pose le problème général de l'intégration des équations linéaires, avec la volonté d'explorer les quatre grands types d'équations : les équations différentielles ordinaires, les équations aux différences finies, aux différences mêlées et aux différences partielles. À plusieurs reprises, l'auteur ramène une équation à la forme $z = U + \mathrm{f}z$, où f est une fonction linéaire de z, contenant des différentielles ou « des différentielles négatives, c'est-à-dire des intégrales » [Schmidten 1821, p. 304]. Puis, selon un principe déjà présent chez Brisson, il exprime la solution par une série dont les termes sont obtenus par des substitutions successives

$$z = U + \mathrm{f}U + \mathrm{f}^2U + \mathrm{f}^3U + \cdots$$

Dans le cas où f est à coefficients constants, il évoque aussi les résultats de Servois et de Français [Schmidten 1821, p. 305]. Mais, en ce qui le concerne, l'auteur n'utilise pas les méthodes du calcul symbolique.

En Allemagne, le *Calcul des dérivations* d'Arbogast retient l'attention de C. F. Hindenburg, qui lui consacre un ouvrage en 1803, dans lequel il donne aussi une place à Bürmann pour que celui-ci expose ses travaux. Cependant, l'objectif d'Hindenburg est essentiellement de comparer sa propre méthode combinatoire à celle d'Arbogast, et d'apprécier l'efficacité de leurs algorithmes respectifs dans le développement des fonctions en série, le calcul intégral n'étant pas considéré [19].

---

18 De même, dans la seconde édition du traité de Boole [1872, p. 53–55] sur le calcul aux différences finies, édition augmentée par J.F. Moulton, l'utilisation du calcul symbolique va permettre d'améliorer une formule de quadrature approchée que Laplace avait établie, dans le tome IV de son *Traité de Mécanique Céleste*, en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin et le polynôme d'interpolation, et en ayant recours aux fonctions génératrices dans certaines étapes du calcul [Laplace 1805, p. 205].

19 Sur la réception des travaux d'Arbogast par l' École combinatoire allemande, voir notamment Friedelmeyer [1994, p. 247–251].

La diffusion du calcul symbolique en Angleterre

C'est en Angleterre, on le sait, que le calcul symbolique a connu une diffusion dont les effets ont été particulièrement importants [20]. Dès 1802, Woodhouse dit son admiration pour les travaux d'Arbogast et il lui emprunte une notation [21] pour écrire les développements en série [Woodhouse 1802, p. 109–116]. Plus généralement, les travaux d'Analyse publiés sur le continent vont être l'objet d'un vif intérêt, et produire une évolution qui va revêtir plusieurs aspects : abandon progressif du calcul fluxionnel de Newton au profit des notations en usage sur le continent, utilisation d'éléments de calcul symbolique, enfin apparition d'un calcul fonctionnel sans équivalent dans les œuvres antérieures.

En 1814, dans un mémoire comportant une mise au point précise sur les questions de notations, Herschel souligne que le symbole de dérivation peut être utilisé comme argument d'une fonction, l'expression obtenue étant alors définie par le développement en série entière de cette fonction, et il illustre ce point de vue en écrivant

$$\frac{1}{1-\frac{d}{dx}} \times y = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.} \quad \text{[Herschel 1814, p. 443].}$$

Dans le même mémoire, il résout l'équation différentielle linéaire sans second membre à coefficients constants écrite à la manière de Français [22], en faisant abstraction de la fonction inconnue, et en factorisant le premier membre [Herschel 1814, p. 467–468]. Cette orientation va se retrouver dans des travaux à visée didactique.

En 1816, Babbage et Herschel publient une traduction du *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix [23]. Ce dernier ouvrage contenait un appendice consacré au calcul des différences finies. Mais les

20 Voir, notamment, E. Koppelman [1971, p. 175–187], J.-P. Friedelmeyer [1994, p. 265–274], M.-J. Durand-Richard [1996 ; 1998].

21 Il s'agit de la notation de la *dérivée divisée*, définie par la relation $\underset{c}{D}^n\varphi x = \frac{D^n\varphi x}{1\cdot 2\cdots n}$, pour n positif.

22 Voir section 3.3 *supra*.

23 On peut supposer que la traduction est réalisée d'après l'édition de 1806 du traité de Lacroix, la première édition contenant une introduction à caractère didactique, dont le texte anglais ne porte pas de trace.

traducteurs n'ont pas jugé cette partie satisfaisante, et ils avertissent qu'elle a été remplacée par un texte original de Herschel.

Herschel introduit un calcul direct sur les symboles d'opérations qui ne figurait pas dans l'ouvrage de Lacroix. Ce calcul commence par l'examen des trois expressions suivantes

$$(1+\Delta)^n u_x,$$
$$\left\{1+\frac{n}{1}\Delta+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2+\text{etc.}\right\}u_x,$$
$$u_x+\frac{n}{1}\Delta u_x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_x+\text{etc.}\,;$$

l'auteur indique qu'elles peuvent être utilisées l'une pour l'autre de façon indistincte, les deux premières étant considérées comme des abréviations de la dernière [Herschel 1816, p. 479]. Puis il étend ce point de vue au cas où $(1+\Delta)^n$ est remplacée par $f(\Delta)$, f étant une fonction développable en série entière. Il note que ce principe de notation peut concerner d'autres caractéristiques telles que d ou $\int$. Il énonce deux propriétés relatives aux opérations sur les symboles : si l'on applique l'opérateur $[f(\Delta)\times F(\Delta)]$ à la fonction u_x, on obtient le même résultat qu'en appliquant l'opérateur $f(\Delta)$ à la fonction $[F(\Delta)]u_x$; et de même l'opérateur $f(\Delta)+F(\Delta)$ appliqué à la fonction u_x conduit à la fonction $f(\Delta)u_x+F(\Delta)u_x$.

Contrairement à Lacroix qui, on l'a vu, utilisait les identités de Lagrange de façon classique, Herschel va procéder par calcul sur les symboles d'opérations ainsi introduits. En particulier pour justifier le passage du théorème de Taylor (T_1) (écrit pour un accroissement $\Delta x=1$)

$$\Delta u_x=\left(e^{\frac{d}{dx}}-1\right)u_x$$

à sa généralisation (T_n)

$$\Delta^n u_x=\left(e^{\frac{d}{dx}}-1\right)^n u_x,$$

il indique que les opérations notées Δ et $\left(e^{\frac{d}{dx}}-1\right)$ étant équivalentes, la répétition n fois de l'opération Δ sera équivalente à l'opération notée $\left(e^{\frac{d}{dx}}-1\right)^n$.

Un soin particulier est apporté à l'introduction du symbole Δ^{-1} : pour Herschel, il pourra être remplacé par le symbole Σ, parce que les opérations représentées par chacun de ces symboles ont le même effet sur des expressions telles que

$$A\Delta^m u_x + B\Delta^n u_x + \cdots$$

Puis Σ^n pourra être assimilé à Δ^{-n}, et les symboles $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-n}$ et $\int^n$ seront susceptibles du même traitement [Herschel 1816, p. 509]. Ces principes sont mis en œuvre pour démontrer la formule d'Euler-Maclaurin généralisée (T_{-n}). De

$$\Delta^n \Sigma^n u_x = u_x,$$

Herschel passe à l'écriture

$$\left(e^{\frac{d}{dx}} - 1\right)^n \Sigma^n u_x = u_x,$$

puis ayant constaté que Σ^n compense exactement l'opération représentée par $\left(e^{\frac{d}{dx}} - 1\right)^n$, il finit par justifier à la fois la formule

$$\Sigma^n u_x = \left(e^{\frac{d}{dx}} - 1\right)^{-n} u_x,$$

et le développement en série que l'on peut en tirer [Herschel 1816, p. 510–511].

Ces éléments de calcul intégral symbolique restent cependant limités ; par exemple, les formules d'intégration par parties concernant $\Sigma^n(uv)$ [Herschel 1816, p. 508–509] ne sont pas obtenues par un calcul direct sur les symboles comme c'était le cas dans le traité d'Arbogast. Mais ce manuel est complété, en 1820, par un recueil d'exercices dans lequel le calcul sur le symbole Δ est utilisé pour sommer de nombreuses séries particulières ; l'auteur utilise même un opérateur exprimé par la notation $\int \frac{d\Delta}{\Delta} \log(1+\Delta)$ [Herschel 1820, p. 73].

Le calcul symbolique sert parfois à élargir la portée des résultats obtenus ; ainsi après avoir résolu une équation aux différences mêlées du type

$$u_{x,y} + a\frac{d}{dy}u_{x-1,y} + b\left(\frac{d}{dy}\right)^2 u_{x-2,y} = 0,$$

l'auteur note que le procédé est indépendant de la nature de l'opération $\frac{d}{dy}$, et qu'il reste valable si, dans l'équation initiale, cette opération est remplacée par « une combinaison linéaire ∇ de différences ou de coefficients différentiels relatifs à y » [Herschel 1820, p. 41].

Dans la même période, Herschel et surtout Babbage vont s'intéresser aux équations fonctionnelles et renouveler le cadre théorique dans lequel elles sont étudiées. Au XVIII^{e} siècle, avec la question de la composition des forces, un exemple particulier d'équation fonctionnelle avait attiré l'attention des mathématiciens [24], tandis que des cas plus généraux s'étaient présentés à eux, à propos d'équations aux dérivées partielles dont les solutions devaient satisfaire à des conditions initiales données ; les méthodes mises en œuvre comprenaient alors un recours au calcul différentiel ou au calcul aux différences finies. En 1813, dans les *Memoirs of the analytical Society*, Herschel [25] reprend plusieurs exemples d'équations déjà traitées par Lagrange, Monge ou Laplace et en fournit des prolongements ou des généralisations. Mais, à la fin de son mémoire [Herschel 1813, p. 111], il souligne qu'il n'a traité que des équations qu'il nomme « du premier ordre » : la fonction inconnue n'y est jamais composée avec elle-même. Par exemple, l'équation

$$[\phi(x)]^2 = \phi(2x) + 2$$

est du premier ordre, par opposition à des équations du second ordre telles que

$$\phi^2(x) = \phi(2x) + 2, \quad \text{ou} \quad \phi[x + \phi(x)] = x.$$

Il ne fait que quelques considérations très limitées sur ces équations d'ordre supérieur, dont il juge la théorie extrêmement difficile.

Babbage va développer l'étude de ce type d'équations dans un double essai [1815 ; 1816]. C'est l'invocation d'un *calcul des fonctions* qui fixe le cadre dans lequel vont être posés et résolus les problèmes : l'opération majeure intervenant dans ce calcul est la composition des fonctions, les notations sont celles que Bürmann avait proposées en 1798, et que Herschel avait déjà adoptées en 1814 : simple juxtaposition $\varphi\psi$ pour la composée, notation exponentielle pour l'itérée f^n, exposants n négatifs pour les fonctions inverses. La démarche est étendue aux fonctions de plusieurs variables avec des notations telles que

$$\psi^{1,2}(x, y) = \psi(x, \psi(x, y)).$$

24 Voir Dhombres [1986].

25 Ce recueil de mémoires a été publié de façon anonyme, les parts respectives prises par Herschel et Babbage ont fait l'objet d'un témoignage *a posteriori* de Babbage (voir [Koppelman 1971, p. 180–181]).

Babbage [1816, p. 191, 229] fait jouer un rôle important à la classe des fonctions α vérifiant l'équation $\alpha^n(x) = x$. Pour une fonction F donnée, il va notamment étudier des équations du type

$$F(x, \psi x, \psi^2 x, \dots, \psi^{n-1} x) = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, \psi\alpha x, \psi\alpha^2 x, \dots, \psi\alpha^{n-1} x) = 0.$$

Un jeu habile de substitutions fournit des méthodes d'investigation appuyées sur la composition des fonctions, avec un recours fréquent à la formule de translation $g = \varphi^{-1} f \varphi$.

En termes généraux, Babbage compare ce calcul des fonctions au calcul algébrique et au calcul différentiel, les uns et les autres présentant une partie directe et une partie réciproque. Cette comparaison concerne des exemples précis d'équations ; ainsi, Babbage [1817, p. 209] note les analogies rencontrées dans la résolution des équations différentielles linéaires et dans la recherche des solutions ψx de l'équation

$$F\psi x + AF\psi\alpha x + BF\psi\alpha^2 x + \cdots + NF\psi\alpha^{n-1} x + X = 0.$$

Il envisage aussi [1816, p. 238] des équations mixtes dans lesquelles la fonction inconnue intervient à la fois par sa dérivée et par un produit fonctionnel $\psi\alpha$

$$F\left(x, \psi x, \psi\alpha x, \frac{d\psi x}{dx}\right) = 0. \tag{3.12}$$

À de nombreuses reprises, il souligne l'importance et la fécondité de la notation fonctionnelle ; ses réflexions vont s'élargir pour prendre en compte la puissance du langage symbolique [Babbage 1827] [26].

En 1821, Gergonne fait lui-même une présentation détaillée, dans ses *Annales*, du contenu d'un mémoire de Babbage sur les équations fonctionnelles, publié en 1820, mémoire qu'il classe dans la rubrique « Analise algébrique ». Il indique que son but était ainsi de présenter « sous une forme tout-à-fait élémentaire, et conséquemment accessible à toutes les classes de lecteurs, les premiers linéamens d'un genre de spéculations analitiques encore peu connu et cultivé en France, et qui paraît susceptible de beaucoup d'extension et d'intérêt » [Babbage 1821, p. 102].

---

26 Sur le lien entre les travaux de Babbage et ceux du groupe des *Idéologues* en France, voir E. L. Ortiz [2007], qui souligne aussi l'importance de certaines équations de type (3.12) résolues par Babbage.

Cependant, la question du calcul symbolique est en train de se poser en France dans un contexte nouveau. Les problèmes issus de la Physique ont conduit à des équations aux dérivées partielles dont la résolution est devenue un enjeu important.

4. L'INTERVENTION DES INTÉGRALES DÉFINIES

4.1. *Les intégrales définies et le calcul intégral*

Dans la lignée d'Euler et, surtout, de Laplace [1782; 1785] [27], les travaux de calcul intégral du début du XIXe siècle utilisent de plus en plus les intégrales définies, notamment pour exprimer les solutions des équations aux dérivées partielles.

C'est le cas, en particulier dans le mémoire de Brisson (cf. *supra* section 3.2), où l'auteur précise que son but principal a été « de résoudre les équations différentielles partielles linéaires par des séries que l'on pût facilement envelopper sous des intégrales définies » [1808, p. 253]. Il y parvient notamment lorsque les coefficients de l'équation dépendent d'une seule des deux variables indépendantes, soit

$$\sum M_{gh}(y)\,\frac{\partial^{g+h} z}{\partial x^g\,\partial y^h} = 0.$$

Brisson recherche d'abord les solutions qui peuvent s'écrire sous la forme $e^{\alpha x} W(y, \alpha)$, celles-ci dépendant d'une équation différentielle ordinaire faisant intervenir la seule variable y. Les fonctions W ainsi obtenues donnent accès à des solutions plus générales, exprimées sous la forme d'une série, avec une fonction arbitraire π

$$z = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k W(y,\alpha)}{\partial \alpha^k} \cdot \frac{d^k \pi x}{dx^k}. \tag{4.1}$$

[27] Voir, notamment, Deakin [1981].

Enfin, la solution est écrite à l'aide d'une intégrale définie portant sur les séries [28]

$$U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k \pi x}{dx^k} \quad \text{et} \quad V(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^k} \frac{\partial^k W(y,\alpha)}{\partial \alpha^k} = -se^{\alpha s} \int W(y,\alpha) e^{-\alpha s} d\alpha.$$

Puis Brisson ouvre une autre voie en remarquant que la série (4.1) peut être représentée par une intégrale définie si la fonction W s'exprime par une intégrale définie portant sur un produit contenant une exponentielle, telle que

$$W(y,\alpha) = \int e^{\alpha P} Q\, dp, \tag{4.2}$$

où P et Q doivent être indépendantes de α. La solution (4.2) se met alors sous la forme

$$\begin{aligned} z &= e^{\alpha x} \int e^{\alpha P} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!} \frac{d^k \pi}{dx^k} \right) Q\, dp \\ &= e^{\alpha x} \int e^{\alpha P} Q \cdot \pi(x+P)\, dp. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs, sans perdre en généralité, fixer $\alpha = 0$, pour obtenir en définitive

$$z = \int Q \cdot \pi(x+P)\, dp.$$

L'auteur ne cache pas que la principale difficulté sera de trouver les fonctions P et Q qui permettent d'exprimer W sous la forme (4.2). Cependant, comme exemple où la méthode est utilisable, il résout ainsi l'équation du mouvement d'une chaîne pesante fixée à son extrémité supérieure [29]. On verra plus loin que l'intérêt de cette idée de Brisson apparaîtra pleinement lorsqu'on disposera de la formule intégrale de Fourier [Cauchy 1825b, p. 561].

---

28 Il utilise la méthode de Parseval qui, en 1806, publie un résultat à l'origine du théorème qui porte aujourd'hui son nom. Ainsi, pour $T(s) = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 + \cdots$ et $T'(s) = a + b\frac{1}{s} + c\frac{1}{s^2} + d\frac{1}{s^3} + \cdots$, Parseval affirme que, en utilisant la formule de Moivre, la série $Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots$ peut s'exprimer par une intégrale qui, avec des notations modernes, s'écrirait $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [T(e^{iu})T'(e^{iu}) + T(e^{-iu})T'(e^{-iu})]\, du$.

29 Le résultat sera réexaminé par Poisson [1823] ; celui-ci montrera que cela ne constitue pas une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles considérée.

L'intégrale définie dite « de Fourier »[30] va jouer, en effet, un rôle particulièrement important pour notre sujet en donnant la possibilité de représenter les fonctions par des formules intégrales, par exemple sous la forme

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(u) \cos qu \, \cos qx \, du dq.$$

Figurant dès 1811 dans un mémoire de Fourier sur la théorie de la chaleur, ce type de formule intégrale apparaît aussi, indépendamment semble-t-il, dans des travaux de Cauchy et de Poisson sur des équations aux dérivées partielles linéaires de la physique, en1815 et 1816.

Poisson publie en 1820 un mémoire sur plusieurs équations aux dérivées partielles linéaires du 2$^{\text{e}}$ ordre, liées à des problèmes de Physique, dans lequel il utilise des formes de calcul symbolique. Par exemple, à partir des dérivées partielles de la fonction V, il introduit un opérateur δ en définissant ce qu'il appelle des *notations abrégées* telles que

$$\delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \quad \text{et} \quad \delta^n V = \frac{d^2\delta^{n-1}V}{dx^2} + \frac{d^2\delta^{n-1}V}{dy^2} + \frac{d^2\delta^{n-1}V}{dz^2}.$$

Mais là où il pourrait utiliser la séparation des échelles prônée par Arbogast, il continue à invoquer l'analogie des puissances et des différences à la manière de Lagrange. Ainsi, pour obtenir le développement de $\delta^n V$ en fonction des dérivées partielles de V, il introduit des constantes g, h, k, écrit $\delta^n V$ sous la forme

$$\delta^n V = (g^2 + h^2 + k^2)^n V,$$

et donne la consigne de développer le second membre, puis de remplacer les produits $g^i h^{i'} k^{i''}$ par les symboles de dérivation $\frac{d^{i+i'+i''}}{d^i x \, d^{i'} y \, d^{i''} z}$ [Poisson 1820, p. 132]. Des résultats fondamentaux sont obtenus par des calculs élégants concernant l'intégrale de fonctions $f(u,v)$ dont les coefficients doivent être considérés tantôt comme des constantes g, h, k, tantôt comme des symboles de dérivation $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$. Mais à la fin du mémoire, Poisson va

30 Sur l'histoire de cette formule et de ses démonstrations, on peut consulter S. Annaratone [1997] ; sur l'ensemble des travaux de Fourier pendant cette période, voir I. Grattan-Guinness [1990, p. 584–619].

proposer une autre méthode, fondée sur l'utilisation de la fonction exponentielle. Ainsi, concernant l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

il recherche des solutions sous la forme

$$\varphi = \Sigma A e^{tp+gx+hy+kz},$$

en imposant la relation algébrique $p^2 = g^2 + h^2 + k^2$. Il retrouve ainsi des solutions exprimées sous forme d'intégrales définies, qu'il avait d'abord mises en évidence par d'autres moyens [31].

En 1822, Fourier publie sa *Théorie analytique de la chaleur* où il développe le contenu d'un mémoire qu'il avait présenté en 1811. Dans les ajouts figure en particulier une section intitulée « Comparaison des intégrales » [1822, p. 461 et suiv.] ; l'auteur y revient sur la plupart des équations aux dérivées partielles considérées dans le traité et les résout successivement par plusieurs méthodes. La première consiste à introduire des éléments de calcul symbolique et est d'abord appliquée à l'équation de diffusion de la chaleur

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dv}{dt}. \tag{4.3}$$

Au moyen d'intégrations par parties successives, Fourier [1822, p. 465] met en évidence une solution qu'il exprime à l'aide d'une fonction c de la variable x et de ses dérivées successives

$$v = c + tc'' + \frac{t^2}{2}c^{\mathrm{IV}} + \frac{t^3}{2\cdot 3}c^{\mathrm{VI}} + \frac{t^4}{2\cdot 3\cdot 4}c^{\mathrm{VIII}} + \text{etc.}$$

Posant $c = \varphi x$, il propose d'écrire la solution sous la forme

$$v = e^{tD^2}\cdot \varphi x, \tag{4.4}$$

31 A. Dahan Dalmedico a commenté ce mémoire, important pour l'étude mathématique de la propagation des ondes, en notant aussi son intérêt pour l'histoire du calcul symbolique. Le rapportant aux travaux antérieurs de Fourier et surtout de Cauchy, elle indique qu'il « donne le véritable point de départ de l'algébrisation des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants [...] ». [Dahan Dalmedico 1992, p. 179].

puis il explicite cette notation en indiquant qu'il faudra développer l'exponentielle suivant les puissances de D, écrire $\frac{d^i}{dx^i}$ au lieu de D^i « en considérant i comme indice de différentiation » [1822, p. 468], pour obtenir enfin

$$v = \varphi x + t\frac{d^2}{dx^2}\varphi x + \frac{t^2}{2}\frac{d^4}{dx^4}\varphi x + \frac{t^3}{2\cdot 3}\frac{d^6}{dx^6}\varphi x + \text{etc.} \tag{4.5}$$

Il souligne la souplesse de la notation abrégée ainsi introduite : en dérivant par rapport à t l'expression de v fournie par (4.4) on peut en effet vérifier, sans écrire les séries, que v est solution de l'équation (4.3)

$$\frac{dv}{dt} = D^2 e^{tD^2}\cdot\varphi x = D^2 v = \frac{d^2}{dx^2}\cdot v.$$

Pour d'autres équations, Fourier utilise des opérateurs composés tels que $D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$, ou $D = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d^4}{dx^4} + c\frac{d^6}{dx^6} + \cdots$ Il fait intervenir certains d'entre eux dans les arguments de fonctions élémentaires. Par exemple [1822, p. 470], l'équation

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}$$

est écrite

$$\frac{d^2v}{dt^2} = Dv,$$

et Fourier en déduit directement une solution qu'il exprime sous la forme $v = \cos(t\sqrt{-D})\varphi$, φ désignant une fonction arbitraire des variables x et y. Cette notation est fondée sur les développements en série et la transformation des exposants en indices de différentiation.

Fourier conclut ce passage de sa *Théorie* en indiquant que l'intérêt essentiel de ces « expressions abrégées » est qu'« elles suppléent à des calculs plus composés » [1822, p. 473]. E. Koppelman [1971, p. 164] a remarqué que Fourier utilise le calcul symbolique pour vérifier des résultats déjà obtenus par ailleurs. Cette partie de l'œuvre de Fourier retiendra particulièrement l'attention des mathématiciens anglais. En 1839, elle sera évoquée par Duncan Gregory lorsque celui-ci voudra utiliser le calcul symbolique pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles ; mais Gregory y trouvera encore une certaine timidité dans le recours à ce calcul et, surtout, il regrettera le peu d'empressement de ses collègues français à s'engager dans la voie qui avait alors été ouverte [Gregory 1839, p. 62].

D'ailleurs, dans le traité de Fourier lui-même, les éléments de calcul symbolique occupent une place limitée et la section sur la « comparaison des intégrales » est surtout consacrée aux méthodes utilisant des intégrales définies. En particulier, l'équation de diffusion de la chaleur (4.3) est traitée par ces méthodes. À cet effet, l'auteur réutilise le développement en série (4.5) dans lequel il remplace $\varphi(x)$ par

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\cos(px-p\alpha).$$

Les dérivations successives font alors apparaître les facteurs $p^2, p^4, p^6, \dots,$ et l'on a

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\varphi(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp\left(1-\frac{p^2t}{1}+\frac{p^4t^2}{1\cdot 2}-\frac{p^6t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\right)\cos(px-p\alpha).$$

La sommation met finalement en évidence le facteur e^{-p^2t} et la solution s'écrit

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,e^{-p^2t}\,\cos(px-p\alpha).$$

Dans tous ces travaux, le recours aux intégrales définies manifeste plusieurs de ses avantages. Il permet de transférer les opérations de dérivation sur des fonctions telles que l'exponentielle ou les fonctions trigonométriques, les dérivations successives se traduisant alors algébriquement à l'aide des puissances d'un même facteur. Il permet d'exprimer les solutions par des formules où s'introduisent les fonctions définissant les conditions initiales ou les conditions aux limites des problèmes de Physique concernés. Mais d'autre part, on aura noté que, chez les auteurs précédents, le procédé n'exclut pas l'utilisation des séries ou — comme chez Poisson — le recours à l'analogie des puissances et des différences avec des échanges entre constantes et symboles de dérivation.

4.2. *Les mémoires perdus de Brisson et l'approche de Cauchy du calcul symbolique*

Dans sa présentation globale de l'analyse mathématique, dans son cours de l'École polytechnique [32], Cauchy introduit, dès 1817, des changements importants par rapport à la tradition, dont plusieurs vont concerner notre

32 Voir Gilain [1989].

sujet. Il rejette l'emploi formel des séries et impose une condition de convergence numérique pour leur utilisation. De façon générale, refusant de « recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre » [1821a, p. ij], il ne veut utiliser les formules algébriques que sous la condition qu'elles aient un sens lorsqu'on y remplace les lettres par des *quantités réelles*. Dans le domaine du calcul intégral, l'intégrale définie, construite directement comme limite des sommes $S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(x_{k+1} - x_k)$, devient la notion première dont l'existence implique celle des primitives [1823]. Ainsi, l'intégration n'est plus conçue simplement comme l'opération inverse de la différentiation [33].

Dans la même période, Cauchy publie plusieurs mémoires sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants. Dans l'un d'entre eux [1821b], il utilise largement la formule intégrale de Fourier, qui est écrite, pour la première fois, avec une exponentielle imaginaire ; par exemple, pour une fonction de deux variables, il vient

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint e^{[\alpha(\mu-x)+\beta(\nu-y)]\sqrt{-1}} f(\mu,\nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu,$$

où α et β varient entre $-\infty$ et $+\infty$, et μ et ν entre des limites quelconques, pourvu que ces limites comprennent les valeurs attribuées à x et y.

Les conditions initiales étant définies par la fonction $f(x,y) = \varphi(x,y,0)$, les solutions sont recherchées sous la forme

$$\varphi(x,y,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint e^{\theta t} e^{[\alpha(\mu-x)+\beta(\nu-y)]\sqrt{-1}} f(\mu,\nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu. \tag{4.6}$$

Pour une équation linéaire aux dérivées partielles dont la fonction inconnue est $\varphi(x,y,t)$, la méthode de résolution consiste à remplacer respectivement φ par 1 ; $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ldots$ par $\theta, \theta^2, \ldots$; $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dxdt} \ldots$ par $\alpha\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$, $-\alpha^2$, $\theta\alpha\sqrt{-1}, \ldots$ Le problème est ainsi ramené à la résolution d'une équation algébrique

$$F(\theta,\alpha,\beta) = 0.$$

[33] Pour le calcul d'intégrales définies, il a d'ailleurs eu l'occasion de s'opposer à Poisson qui restait attaché au primat des primitives ; voir Belhoste [1991, p. 122].

Mais, le mémoire ne comporte pas de calcul direct sur les symboles de dérivation
$$\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \ldots$$
Par exemple, l'équation
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$
conduit à l'équation algébrique
$$\theta = -\alpha^2 - \beta^2;$$
le report de cette valeur de θ dans l'intégrale (4.6) fournit une expression de la solution sous la forme
$$\varphi(x, y, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint e^{-(\alpha^2+\beta^2)t} e^{[\alpha(\mu-x)+\beta(\nu-y)]\sqrt{-1}} f(\mu, \nu)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu.$$

La méthode est utilisée pour la résolution de plusieurs équations issues de la Physique. Dans la présentation de son mémoire, Cauchy rappelle que l'utilisation des exponentielles dans la résolution des équations aux dérivées partielles a d'abord présenté l'inconvénient de ne pas se prêter immédiatement à la détermination des fonctions arbitraires. La formule intégrale de Fourier a permis de lever cet obstacle, mais il évoque aussi — sans formuler ici de jugement — les méthodes qui ont utilisé des développements en séries ou des expressions symboliques déduites de l'analogie des puissances et des différences ; il renvoie sur ce point au mémoire de Poisson [1820], et à deux mémoires de Brisson : celui qui a été publié en 1808, et un mémoire manuscrit, probablement celui adressé à l'Académie au cours de l'année 1821 (voir *infra*).

Un nouveau mémoire de Brisson, « Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites », présenté à l'Académie des sciences en novembre 1823, et dont Cauchy est rapporteur, va jouer un rôle important dans cette histoire. Alors que des oppositions entre les membres de la commission retardent la publication du rapport [34], Cauchy, sans attendre, présente à l'Académie, le 27 décembre 1824, un mémoire qui sera publié seulement en 1850, sous le titre « Mémoire sur le calcul intégral » ; il y donne les réflexions que lui ont suggérées ce travail de Brisson

34 Voir Belhoste [1991, p. 123].

et le travail antérieur, de 1821. Les textes remis par Brisson à l'Académie en 1821 et en 1823 semblent aujourd'hui perdus et la source d'informations sur leur contenu est constituée par le rapport de Cauchy, finalement lu le 13 juin 1825, ainsi que par les références que celui-ci a pu y faire dans divers écrits, notamment dans deux mémoires présentant sa conception du calcul symbolique [1825a ; 1827a ; 1827b].

Dès son mémoire de 1821, apparaissait le programme de Brisson, consistant à intégrer par des méthodes symboliques uniformes les divers types d'équations linéaires (programme dont on a vu que c'était déjà celui de Français en 1813). Pour cela, il utilisait alors une adaptation de la théorie des fonctions génératrices. Cauchy va profiter de l'occasion pour exposer ses critiques à l'égard de cette théorie de Laplace, dans le mémoire qu'il présente à l'Académie en décembre 1824 [1824/1850, § I] ; il souligne, en particulier, que les séries utilisées pour représenter les fonctions génératrices sont souvent divergentes et donc, pour lui, n'ont pas de somme [1824/1850, p. 197].

Dans son mémoire de 1823, Brisson développe le même programme d'intégration des équations linéaires ; il « considère successivement les équations ordinaires aux différences finies ou infiniment petites, mêlées ou non mêlées, et les équations aux différences partielles d'un ordre quelconque à coefficients constants avec ou sans dernier terme variable » [Cauchy 1825b, p. 562]. Mais il a changé de méthode : « il présente les intégrales de ces équations sous forme symbolique ; puis il indique divers moyens de transformer les expressions trouvées en séries ou en intégrales définies » [Cauchy 1825b, p. 562]. Pour exprimer ainsi les expressions symboliques, Brisson utilise la formule intégrale de Fourier [Cauchy 1825b, p. 563].

Certes, Cauchy regrette que Brisson ne fixe pas avec suffisamment de précision le sens des formules utilisées, mais, il tient compte de « l'élégance de [la] méthode et de l'importance des objets auxquels elle s'applique » [1825b, p. 565], et il émet un avis favorable sur le mémoire de Brisson, avis que l'Académie suivra finalement.

Cet avis positif n'est pas de pure forme car, comme on l'a déjà indiqué, le mémoire de Brisson de 1823 a suscité rapidement des travaux de Cauchy[35], auxquels celui-ci fait d'ailleurs allusion dans son rapport en indiquant qu'il s'est agi, pour lui, d'utiliser les avantages de la notation symbolique mais en lui donnant, dans tous les cas, une « interprétation claire et précise » [1825b, p. 564]. Dans ces travaux, Cauchy reprend le programme de Brisson d'intégration uniforme des divers types d'équations linéaires à coefficients constants et l'idée d'utiliser la formule intégrale de Fourier pour donner un sens précis aux expressions symboliques.

Cauchy [1825a] va ainsi traiter par des moyens sensiblement identiques les quatre types d'équations linéaires à coefficients constants

$$\left\{\begin{aligned} D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y &= g(x),\\ \Delta^n y + a_1 \Delta^{n-1} y + a_2 \Delta^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} \Delta y + a_n y &= g(x),\\ D_x^n z + a_1 D_x^{n-1} D_y z + a_2 D_x^{n-2} D_y^2 z + \cdots + a_{n-1} D_x D_y^{n-1} z + a_n D_y^n z &= g(x,y),\\ \Delta_x^n z + a_1 \Delta_x^{n-1} \Delta_y z + a_2 \Delta_x^{n-2} \Delta_y^2 z + \cdots + a_{n-1} \Delta_x \Delta_y^{n-1} z + a_n \Delta_y^n z &= g(x,y), \end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

avec les opérateurs de dérivation $Dy = \frac{dy}{dx}$ pour la fonction $y = f(x)$ et $D_x^i D_y^j z = \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}$ pour la fonction $z = f(x,y)$.

Cauchy écrit la première de ces équations sous la forme $F(D) \cdot y = g(x)$, où F représente un polynôme de degré n. En utilisant la formule intégrale de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} f(\lambda)\, d\alpha d\lambda,$$

il peut écrire le premier membre de l'équation sous la forme

$$F(D) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} F(\alpha\sqrt{-1}) f(\lambda)\, d\alpha d\lambda.$$

35 Trois écrits de Cauchy de cette époque sont directement concernés : le mémoire présenté à l'Académie des sciences le 27 décembre 1824, imprimé seulement en 1850, sous le titre « Mémoire sur le calcul intégral » ; le mémoire « Sur l'analogie des puissances et des différences, et sur l'intégration des équations linéaires », lithographié en 1825 ; le mémoire « Sur l'analogie des puissances et des différences », publié dans ses *Exercices de mathématiques* en 1827.

Pour les autres types d'équations linéaires, il obtient un premier membre de la même forme générale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}\varphi(\alpha)f(\lambda)\,d\alpha d\lambda, \tag{4.8}$$

où $\varphi(\alpha)$ pourra représenter un polynôme mais aussi une fonction plus générale ; Cauchy note $\varphi(\alpha)f(\overline{x})$ cette expression[36].

Ainsi, on a, par exemple, $F(\Delta)f(x) = \varphi(\alpha)f(\overline{x})$, avec $\varphi(\alpha) = F(e^{h\alpha\sqrt{-1}} - 1)$.

Pour résoudre les équations (4.7), Cauchy donne deux méthodes, déjà employées par Brisson, et qu'il reproduit « avec quelques modifications » [1827a, p. 209]. La première est une méthode de factorisation de l'opérateur $F(D)$, utilisant la relation

$$\varphi(\alpha)[\chi(\alpha)f(\overline{x})] = [\varphi(\alpha)\chi(\alpha)]f(\overline{x}),$$

que Cauchy a établie à l'aide de la représentation intégrale (4.8).

Ainsi, en décomposant le polynôme caractéristique

$$F(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = (r-r_1)(r-r_2)\cdots(r-r_n),$$

le problème de l'intégration de l'équation se ramène à la résolution d'équations successives d'ordre un. Par exemple, pour la première des équations (4.7), on se ramène à

$$\begin{aligned}(D-r_1)y_{n-1} &= g(x)\\ (D-r_2)y_{n-2} &= y_{n-1}\\ &\vdots\\ (D-r_{n-1})y_1 &= y_2\\ (D-r_n)y &= y_1.\end{aligned}$$

La seconde méthode est fondée sur l'écriture de la solution de l'équation $F(D)\cdot y = g(x)$ sous la forme $y = \frac{1}{F(D)}\cdot g(x)$ et utilise la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{F(r)}$. Dans le cas de racines r_i distinctes,

---

36 Dans le mémoire de 1827, Cauchy utilise cette notation pour opérer une distinction entre ce produit symbolique et le produit numérique ordinaire (lequel figure d'ailleurs à l'intérieur de l'intégrale sous la forme $\varphi(\alpha)f(\lambda)$).

Cauchy note la solution sous la forme symbolique

$$y = \frac{g(x)}{F(D)} = \left(\frac{1}{F'(r_1)} \frac{1}{D - r_1} + \frac{1}{F'(r_2)} \frac{1}{D - r_2} + \cdots + \frac{1}{F'(r_n)} \frac{1}{D - r_n} \right) g(x).$$

Cette méthode ramène donc aussi la résolution à celle d'équations du 1$^{\text{er}}$ ordre du type $(D - r_i)z = g(x)$; d'où finalement la solution

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{F'(r_1)} \left\{ C_1 + \int_0^x e^{-r_1 x} g(x)\, dx \right\} + \cdots + \frac{e^{r_n x}}{F'(r_n)} \left\{ C_1 + \int_0^x e^{-r_n x} g(x) dx \right\}.$$

Dans le cas où le polynôme $F(r)$ présente des racines multiples, on doit considérer l'équation

$$(D - r)^p y = g(x).$$

Cauchy utilise alors une formule de translation déduite de l'intégrale (4.8)

$$F(D)[g(x)] = e^{rx} F(D + r)[e^{-rx} g(x)],$$

d'où il peut tirer la solution

$$y = \frac{g(x)}{(D - r)^p} = e^{rx} \frac{1}{D^p} [e^{-rx} g(x)] = e^{rx} \int \cdots \int e^{-rx} g(x)\, dx^p.$$

[Cauchy 1827b, p. 238]

Pour davantage de détail sur ces travaux de Cauchy de la seconde moitié des années 1820, nous renvoyons le lecteur à S. Petrova [1993].

CONCLUSION

Si l'intérêt de ces travaux de Cauchy a été souligné [37], leur auteur est aussi souvent considéré comme ayant déterminé l'arrêt du développement du calcul symbolique sur le continent, par ses exigences excessives de rigueur [38]. Cependant, on peut remarquer que Cauchy va continuer, tout au long de sa vie, à utiliser, de temps en temps, des éléments de calcul symbolique, notamment dans ses travaux de calcul intégral. Sans vouloir être exhaustif, on peut citer les mémoires [Cauchy 1835 ; 1840 ;

37 En particulier, Petrova [1993] a remarqué la présence de résultats souvent attribués à Heaviside.

38 Voir Koppelman [1971, p. 167].

1844; 1854] [39]. Dans ces mémoires, le calcul symbolique sur les opérations est souvent utilisé pour former des séries exprimant formellement les solutions cherchées, séries dont il étudie ensuite les conditions de convergence pour qu'elles représentent réellement une fonction numérique satisfaisant à l'équation. Mais le champ du calcul symbolique reste limité dans les travaux de Cauchy où il n'a pas vraiment d'autonomie. On peut ainsi penser que les orientations principales de Cauchy en analyse, rompant avec la tradition lagrangienne, ont sans doute incité ses contemporains et ses successeurs français à la prudence dans le recours au calcul symbolique ; en tout cas, on constate un arrêt, en France, des recherches sur les propriétés des opérations, telles qu'elles apparaissaient dans les travaux d'Arbogast, Brisson, Français ou Servois.

On notera qu'à Amsterdam, en 1837, Rehuel Lobatto [40] publie trois mémoires qui forment un ensemble très complet sur le calcul symbolique et ses applications au calcul intégral. L'auteur se réfère très explicitement à la séparation des échelles d'Arbogast, et obtient des résultats pour lesquels il cite les travaux de Lacroix, Laplace, Fourier ou Poisson ; mais ceux de Cauchy ne sont pas évoqués. Cependant, sur le continent, ces écrits de Lobatto restent, dans leurs méthodes et dans leurs objectifs, une initiative isolée.

En regard de la France, la situation va être toute autre en Grande-Bretagne. La tradition de l'analyse algébrique, avec l'usage des méthodes symboliques, amorcée, on l'a vu, dès le début du XIXe siècle sous l'influence de Lagrange et de ses disciples, va se perpétuer et s'amplifier avec une nouvelle génération de mathématiciens : D. Gregory [41] et G. Boole, notamment. Ils connaissent les travaux de Cauchy et utilisent certains de ses résultats, mais ils contestent explicitement sa conception de l'analyse [42]. Les méthodes symboliques de calcul sur les opérations vont continuer à prendre, chez ces mathématiciens, une place considérable,

39 Pour ceux liés aux équations de la physique mathématique, voir les travaux d'Amy Dahan Dalmedico [1992, p. 206–211, 383–389].

40 I. H. Stamhuis [1988] a donné un article biographique concernant Lobatto, où elle insiste particulièrement sur ses apports en matière de calcul sur les assurances vie.

41 Voir le récent article de Allaire et Bradley [2002] sur D. Gregory.

42 On retiendra en particulier, les positions de G. Peacock, exprimées en 1833 dans son *Report on the recent Progress and present State of Affairs of certain Branches of Analysis* ; voir à ce sujet [Durand-Richard 1985, p. 570–573].

notamment dans le domaine du calcul intégral. Dans cette période, paraissent aussi des ouvrages didactiques exclusivement consacrés au calcul symbolique ([Carmichael 1855], [Pearson 1850]), et des traités de calcul intégral [Boole 1859; 1860; 1865] [43] qui contiennent plusieurs chapitres utilisant le calcul symbolique et qui connaîtront plusieurs éditions.

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, la pratique du calcul symbolique et les réflexions qu'il a pu susciter vont aussi fournir un terrain propice au développement d'une algèbre abstraite [44], dans laquelle les calculs concernent de nouveaux objets : logique de Boole, quaternions de Hamilton, théorie des invariants de Cayley et Sylvester.

À partir des années 1880, les travaux de l'ingénieur anglais Heaviside sur le calcul des opérations appliqué aux équations différentielles ou aux dérivées partielles de l'électrotechnique vont montrer l'efficacité du calcul symbolique pour le calcul intégral et ses applications [45]. Cela contribuera à stimuler les recherches mathématiques pour en établir rigoureusement les fondements [46], ce que permettra le développement d'une théorie des opérateurs différentiels linéaires dans le cadre d'une nouvelle analyse, l'analyse fonctionnelle [47].

Remerciements

Je remercie vivement Christian Gilain pour son active collaboration dans les différentes étapes de l'élaboration de cet article.

---

43 Boole attribue à Lobatto la première étude complète des équations linéaires à coefficients constants par des moyens symboliques, mais il indique que cette théorie a été redécouverte de façon indépendante par les mathématiciens anglais au cours des deux années qui ont suivi [Boole 1860, p. 108].

44 Voir Novy [1968] et Koppelman [1971].

45 Voir Petrova [1987].

46 Voir Lützen [1979].

47 Voir, notamment, Pincherle [1912].

BIBLIOGRAPHIE

Allaire (Patricia R.) & Bradley (Robert E.)

[2002] Symbolical Algebra as a Foundation for Calculus : D. F. Gregory's Contribution, *Historia Mathematica*, 29 (2002), p. 395–426.

Annaratone (Silvia)

[1997] Les premières démonstrations de la formule intégrale de Fourier, *Revue d'histoire des mathématiques*, 3 (1997), p. 99–136.

Arbogast (Louis-François-Antoine)

[1800] *Du calcul des dérivations*, Strasbourg, 1800.

Babbage (Charles)

[1815] An Essay towards the Calculus of Functions, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 105 (1815), p. 389–423.

[1816] An Essay towards the Calculus of Functions, Part. II, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 106 (1816), p. 179–256.

[1817] Observations on the Analogy which subsists between the Calculus of Functions and other branches of Analysis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 107 (1817), p. 197–216.

[1821] Des équations fonctionnelles [texte traduit et présenté par Gergonne], *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 12 (1821), p. 73–103.

[1827] On the Influence of Signs in mathematical Reasoning, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 2 (1827), p. 325–377.

Belhoste (Bruno)

[1991] *Augustin-Louis Cauchy — a biography*, Springer, 1991.

Bérard (Joseph-Balthazard)

[1816] Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1815-1816), p. 101–116.

Boole (George)

[1859] *A Treatise on differential Equations*, London, 1859.

[1860] *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge, 1860.

[1865] *A Treatise on differential Equations. Supplementary Volume by the late G. Boole*, Cambridge, 1865.

[1872] *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge, 2e édition, ed. by. J. F. Moulton, 1872.

BRADLEY (Robert E.)

[2001] The Origins of Linear Operator Theory in the Work of François-Joseph Servois, *Proceedings of the Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics*, 14 (2001), p. 1–21.

BRINKLEY (John)

[1807] An Investigation of the general Term of an important Series in the inverse Method of finite Differences, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 97 (1807), p. 114–132.

BRISSON (Barnabé)

[1808] Sur l'intégration des équations différentielles partielles, *Journal de l'École polytechnique*, 14e cahier (1808), p. 191–261.

BÜRMANN (Heinrich)

[1798] Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum, 1798 ; manuscrit, Archives de l'Académie des sciences de Paris, pochette de la séance du 21 Prairial an VI (= 9 juin 1798).

[1803] Essai de caractéristique combinatoire, 1803 ; [Hindenburg 1803, p. 1–130].

CARMICHAEL (Robert)

[1855] *A Treatise on the Calculus of Operations : designed to facilitate the Processes of the differential and integral Calculus and the calculus of finite Differences*, London, 1855.

CAUCHY (Augustin-Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974 ; 27 vol. (séries I et II).

[1821a] *Cours d'analyse de l'École polytechnique. Première partie : analyse algébrique*, Paris, 1821 ; [*Œuvres*, (II) 4].

[1821b] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles, à coefficients constants et avec un dernier terme variable, *Bulletin de la Société philomatique*, 1821, p. 101–112 et 145–152 ; [*Œuvres*, (II) 2, p. 253–266 et p. 267–275].

[1823] *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823 ; [*Œuvres*, (II) 4].

[1824/1850] Mémoire sur le calcul intégral, *Mémoires de l'Académie des sciences*, 22 (1824/1850) ; [présenté le 27 décembre 1824] ; [*Œuvres*, (I) 2, p. 195–281].

[1825a] *Sur l'analogie des puissances et des différences, et sur l'intégration des équations linéaires*, lithographie, 1825 ; [*Œuvres*, (II) 15, p. 23–40].

[1825b] Rapport sur un mémoire de Barnabé Brisson sur l'« Intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites » (13 juin 1825), 1825 ; [*Œuvres*, (II) 15, p. 560–565].

[1827a] Sur l'analogie des puissances et des différences, *Exercices de mathématiques*, 1827 ; [*Œuvres*, (II) 7, p. 198–235].

[1827b] Addition au mémoire précédent, *Exercices de mathématiques*, 1827 ; [*Œuvres*, (II) 7, p. 236–254].

[1835] *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles*, lithographie, Prague, 1835 ; [*Œuvres*, (II) 11, p. 399–465].

[1840] Mémoire sur l'emploi des équations symboliques dans le calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 17 (1840) ; [*Œuvres*, (I) 8, p. 28–38].

[1844] Mémoire sur quelques formules relatives aux différences finies, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 19 (1844) ; [*Œuvres*, (I) 8, p. 324–336].

[1854] Sur l'induction en Analyse et sur l'emploi des formules symboliques, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 39 (1854) ; [*Œuvres*, (I) 12, p. 177–186].

Dahan Dalmedico (Amy)

[1992] *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École française*, Paris : Éditions du choix, 1992.

Deakin (Michael A. B.)

[1981] The Development of the Laplace Transform, 1737-1937. I. Euler to Spitzer, 1737-1880, *Archive for History of Exact Sciences*, 25 (1981), p. 343–390.

Dhombres (Jean)

[1986] Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liées à l'évolution du concept de fonction, *Archive for History of Exact Sciences*, 36 (1986), p. 91–181.

Durand-Richard (Marie-José)

[1985] *George Peacock (1791-1858) : la synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des réformes*, Thèse, EHESS, Paris, 1985.

[1996] L'École algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance, dans Goldstein (C.), Gray (J.) & Ritter (J.), éd., *L'Europe mathématique — Histoires, Mythes, Identités*, Paris : Éditions de la M.S.H., 1996, p. 445–477.

[1998] Transfert de certains outils de l'analyse mathématique entre la France et la Grande-Bretagne, *La Lettre de la Maison Française d'Oxford*, 9 (1998), p. 117–148.

Fourier (Joseph)

[1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822 ; *Œuvres de Fourier*, t. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1888.

FRANÇAIS (Jacques-Frédéric)
[1813] Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1812-1813), p. 244–272.

FRIEDELMEYER (Jean-Pierre)
[1994] Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIII^e siècle, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 43 (1994).

GILAIN (Christian)
[1989] Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique, *Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'École polytechnique*, 5 (1989), p. 3–46 ; et *Documents*, p. 47–145.

GILLISPIE (Charles C.)
[1997] *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 : a life in exact science*, Princeton : Princeton Univ. Press, 1997.

GRATTAN-GUINESS (Ivor)
[1990] *Convolutions in French mathematics, 1800-1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.

GREGORY (Duncan Farquharson)
[*Writings*] *The mathematical Writings of Duncan Farquharson Gregory*, Cambridge : Deighton, 1865.
[1839] On the Solution of Partial Differential Equations, *Cambridge Mathematical Journal*, 1 (1839), p. 123 et suiv. ; [Gregory 1865, p. 62–72].

HERSCHEL (John F. William)
[1813] On equations of differences, and their application to the determination of functions from given conditions, *Memoirs of the analytical Society*, (65–114) 1813.
[1814] Consideration of various Points of Analysis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 104 (1814), p. 440–467.
[1816] Appendix : on Differences and Series, 1816 ; [Lacroix 1816, p. 465–579].
[1820] *A Collection of the Applications of the Calculus of Differences*, Cambridge, 1820.

HINDENBURG (Carl Friedrich)
[1803] *Über combinatorishe Analysis und Derivations-Calcul*, Leipzig, 1803.

KOPPELMAN (Elaine)

[1971] The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra, *Archive for History of Exact Sciences*, 8 (1971), p. 155–242.

KRAMP (Chrétien)

[1816a] Formules nouvelles, pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable, entre deux limites données quelconques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 6 (1815-1816), p. 281–302.

[1816b] Deuxième recueil de formules servant à intégrer toute différentielle quelconque proposée, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 1815-1816, p. 372–387.

[1817] Sur la manière d'intégrer, par approximation, entre deux limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816-1817), p. 241–252.

LACROIX (Sylvestre-François)

[1800] *Traité des différences et des séries, faisant suite au Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris, 1800.

[1802] *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, 1802 ; 2e édition, revue et corrigée, Paris, 1806.

[1816] *An elementary Treatise on the differential and integral Calculus* (translated from the French by Babbage, Peacock, Herschel), Cambridge, 1816.

[1819] *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, 2e édition, tome III (contenant un traité des différences et des séries), Paris, 1819.

LAGRANGE (Joseph-Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres de Lagrange*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867–1892.

[1774] Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, *Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1772*, 1774, p. 185–221 ; [*Œuvres*, III, p. 441–476].

LAPLACE (Pierre-Simon)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes de Laplace*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1878–1912.

[1776] Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre et sur les fonctions, *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des Sciences par divers savants et lus dans ses assemblées (savants étrangers), année 1773*, 1776, p. 503–540 ; [*Œuvres*, VIII, p. 279–321].

[1780] Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, année 1777*, 1780, p. 99–122 ; [*Œuvres*, IX, p. 313–335].

[1782] Mémoire sur les suites, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, année 1779*, 1782, p. 207–309 ; [*Œuvres*, X, p. 1–89].

[1785] Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, année 1782*, 1785, p. 1–88 ; [*Œuvres*, X, p. 209–291].

[1805] *Traité de mécanique céleste,* 2^e^ partie, livres 8–10, 1805 ; [*Œuvres*, IV].

[1811] Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, *Mémoires de l'Institut,* 11 (1810-1811), p. 279–347 ; [*Œuvres*, XII, p. 357–412].

[1812/1820] *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812/1820 ; 3^e^ édition, 1820 ; [*Œuvres*, VII].

LEGENDRE (Adrien-Marie)

[1811] *Exercices de calcul intégral*, tome 1, Paris, 1811.

LOBATTO (Rehuel)

[1837a] *Mémoire sur la théorie des caractéristiques employées dans l'analyse mathématique*, Amsterdam, 1837.

[1837b] *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles et aux différences finies*, Amsterdam, 1837.

[1837c] *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires partielles à trois variables*, Amsterdam, 1837.

LORGNA (Antonio Maria)

[1788] Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal, *Mémoires de l'Académie des sciences de Turin*, 3 (1786–87), (1788), p. 409–448.

LUSTERNIK (Lazar A.) & PETROVA (Svetlana S.)

[1972] Les premières étapes du calcul symbolique, *Revue d'histoire des sciences,* 15 (1972), p. 201–206.

LÜTZEN (Jesper)

[1979] Heaviside's Operational Calculus and the Attempts to Rigorise it, *Archive for History of Exact Sciences*, 21 (1979), p. 161–200.

NOVY (Lubos)

[1968] L'école algébrique anglaise, *Revue de synthèse* (III) 49–52 (1968), p. 211–222.

ORTIZ (Eduardo L.)

[2007] Babbage and French *Idéologie* : Functional Equations, Language, and the analytical Method, dans Parshall (K.) & Gray (J.), éd., *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1950)*, 2007, p. 13–47.

PANZA (Marco)

[1992] La forma della quantità, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 38–39 (1992).

PARMENTIER (Marc)

[1989] *G. W. Leibniz, la naissance du calcul différentiel* (contenant 26 articles des *Acta Eruditorum*, traduits, avec introductions et notes), Paris : Vrin, 1989.

PARSEVAL (Marc-Antoine)

[1806] Sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre à coefficients constants (lu le 16 Germinal an VII), *Mémoires présentés à l'Institut des sciences, lettres et arts, par divers savans. Sciences mathématiques et physiques*, 1 (1806), p. 638–648.

PEARSON (James)

[1850] *The elements of the calculus of finite differences : treated on the method of separation of symbols*, 2^{e} édition, Cambridge, 1850.

PETROVA (Svetlana S.)

[1987] Heaviside and the Development of the Symbolic Calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 37 (1987), p. 1–23.

[1993] Cauchy et le calcul symbolique, *Sciences et techniques en perspective*, 26 (1993), p. 148–154.

PINCHERLE (Salvatore)

[1912] Équations et opérations fonctionnelles, dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées,* édition française d'après l'édition allemande, sous la direction de Jules Molk t. II, vol. 5, Gauthier-Villars et Teubner, 1912.

POISSON (Siméon-Denis)

[1820] Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France année 1818* (II) 3 (1820), p. 121–176.

[1823] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles, *Journal de l'École polytechnique,* 19^{e} cahier (1823), p. 215–248.

PRONY (Gaspard-C.-F.-Marie Riche de)

[1797] Suite des leçons d'Analyse. Des suites récurrentes considérées comme résultant du développement des fractions rationnelles ; rapprochement de la théorie qui résulte de ces considérations et de celle déduite du calcul intégral ; propriétés générales des suites récurrentes, *Journal de l'École polytechnique,* 4^{e} cahier (1797) (Vendémiaire, Brumaire, Frimaire an IV, Paris, an V), p. 459–569.

SCHMIDTEN (Henri Gerner)
[1821] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1820-1821), p. 269–316.

SERVOIS (François-Joseph)
[1814a] Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 5 (1814-1815), p. 93–140.
[1814b] Réflexions sur les divers systèmes d'exposition du calcul différentiel et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 5 (1814-1815), p. 141–170.
[1817] Mémoire sur les quadratures, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817-1818), p. 73–115.

STAMHUIS (Ida H.)
[1988] A Nineteenth Century Dutch Mathematician : Rehuel Lobatto (1797-1866), *Nieuw Archief voor Wiskunde* (IV) 6 (1988), p. 227–245.

TODHUNTER (Isaac)
[1865] *A History of the Mathematical Theory of Probability, from the time of Pascal to that of Laplace*, 1865 ; réimpr. New York : Chelsea Publishing Company, 1949.

WOODHOUSE (Robert)
[1802] On the Independence of the analytical and geometrical Methods of Investigation ; and on the Advantages to be derived from their Separations, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 92 (1802), p. 85–125.