MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALAIN PIRIOU

Problèmes paraboliques et opérateurs pseudo-différentiels

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 279-283

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__279_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 279-283.

PROBLÈMES PARABOLIQUES ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS (*)

par

Alain PIRIOU

1 . INTRODUCTION. Soient I_1 un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant o , et M' une variété C^∞ de dimension n-1 ; les points génériques de I_1, M', $M = I_1 \times M'$ sont respectivement notés x_1, x', $x = (x_1, x')$; on considère deux fibrés E,F sur M, de même dimension, et un opérateur différentiel

$$P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$$

parabolique au sens de Petrovski et de degré m , relativement à un poids a_1 sur la variable de temps x_1 ; rappelons que ceci signifie que P s'écrit localement $(P_{j,k}(x, D_x))$, avec :

$$P_{j,k}(x, D_x) = \sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| \leqslant m} p_{j,k,\alpha}(x) \; D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x'}^{\alpha'} \quad , \text{ et}$$

$$\mathrm{Det}\left(\sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| = m} p_{j,k,\alpha}(x) \; (\xi_1 + i\eta_1)^{\alpha_1} \, \xi'^{\alpha'}\right) \neq o \qquad \text{lorsque}$$

$\xi_1 \in R$, $\eta_1 \leqslant o$, $\xi' \in R^{n-1}$ sont non tous nuls.

Soit Ω un ouvert régulier de $M = I_1 \times M'$, ayant, dans M, un bord $\partial\Omega$ nulle part tangent à x_1 = constante. Donnons nous un champ de vecteurs N, transverse à $\partial\Omega$, dirigé vers l'intérieur de Ω , sans composante sur l'axe x_1 ; si $u \in C^\infty(\bar\Omega)$, on pose $\gamma u = (\gamma_o u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$, avec $\gamma_k u = \left[(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial N})^k u\right]_{|\partial\Omega}$;
soient G_j (j=1,...,J) des fibrés sur $\partial\Omega$, et

$B : C^\infty(\partial\Omega, \underset{m}{\oplus} E) \to C^\infty(\partial\Omega, \overset{J}{\underset{j=1}{\oplus}} G_j)$ un opérateur différentiel ; enfin on fixe $t \in I_1$ tel que $t > o$, on pose $\Omega_t = \Omega \cap \{x_1 < t\}$, et on considère le problème aux limites mixte :

$$(1) \begin{cases} Pu = f \text{ dans } \Omega_t \\ B(\gamma u) = g \text{ dans } \partial\Omega_t \\ f, g, u \text{ distributions nulles pour } x_1 < o \end{cases}$$

De tels problèmes ont été étudiés en particulier dans [1] , [15] , où on utilise des estimations convenables dans les espaces de Sobolev. On se propose ici, en introduisant une classe convenable d'opérateurs pseudo-différentiels, de traiter (1)

(*) Ce texte est un résumé des articles [13], [14] .

directement dans le cadre des distributions, et d'en décrire les noyaux résolvants.

2 . OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DE VOLTERRA. Dans tout ce qui suit, a_1 est un entier > 1 fixé. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}$, disignons par $L^d_{a_1}(U)$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels Q dans U définis localement par un symbole $q(x,\xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ admettant un développement asymptotique $q(x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} q_j(x,\xi)$ $(|\xi| \to \infty)$ où q_j vérifie

$$(2) \begin{cases} q_j \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)) \\ q_j(x,\lambda^{a_1}\xi_1, \lambda\xi') = \lambda^{d-j} \; q_j(x,\xi) \quad \text{pour} \quad x \in U, \; \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \; \lambda > 0 . \end{cases}$$

Les propriétés habituelles de calcul symbolique pour la composition, la transposition, l'existence des paramètrix restent valables pour ces opérateurs (voir [7], [8]) ; de plus :

Proposition. Soit $x : U \to \tilde{U}$ un difféomorphisme de la forme $(x_1,x') \mapsto (x_1,x'(x_1,x'))$; si $Q \in L^d_{a_1}(U)$, alors le transporté de Q par x est dans $L^d_{a_1}(\tilde{U})$.

Notons qu'au voisinage de tout point de $\partial\Omega$, il existe une carte θ de M :

$\theta : \mathcal{U} \subset M \to U \subset \mathbb{R}^n$ de la forme

$(x_1,x') \mapsto (x_1,\theta'(x_1,x'))$, et telle que

$\theta(\mathcal{U} \cap \Omega) = U \cap \{x_n > 0\}$

$\theta(\mathcal{U} \cap \partial\Omega) = U \cap \{x_n = 0\}$

θ transporte N en $\frac{\partial}{\partial x_n}$

En utilisant pour $\partial\Omega$ les cartes $\theta_{|\mathcal{U}\cap\partial\Omega}$, la proposition précédente permet de définir naturellement les classes $L^d_{a_1}(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ lorsque $X = M$ ou $\partial\Omega$, et lorsque $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont deux fibrés sur X.

Définition. $V^d_{a_1}(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ désigne la sous-classe des opérateurs $Q \in L^d_{a_1}(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ dont le noyau $\mathcal{N}(x,y)$ est nul pour $x_1 < y_1$, ou encore, des opérateurs $Q \in L^d_{a_1}(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui possèdent la propriété de Volterra selon x_1, en ce sens que $u(x_1,x') = 0$ pour $x_1 < T$ implique $(Qu)(x_1,x') = 0$ pour $x_1 < T$ ($T \in I_1$ arbitraire).

On démontre :

Proposition. Pour qu'une suite $(q_j) j \geq 0$ de fonctions q_j vérifiant (2) soit le symbole d'un opérateur $Q \in V^d_{a_1}$, il faut et il suffit que, pour tout $j \geq 0$, $q_j(x,\xi)$ admette un prolongement $q_j(x,\xi_1 + i\eta_1, \xi')$ dans

$\dot{U} = \{x \in U, \xi_1 \in \mathbb{R}, \eta_1 \leqslant 0, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\xi_1 + i\eta_1, \xi') \neq 0\}$, holomorphe par rapport à $\xi_1 + i\eta_1$ $(\eta_1 < 0)$, et C^∞ par rapport à (x,ξ), avec des dérivées continues dans $\dot{U}$.
Nous résumerons (2) et la propriété précédente de prolongement pour q_j en écrivant $q_j \in \sigma_{d-j}(U)$

Corollaire. Soit $Q \in V^d_{a_1}(X, \mathfrak{F}, \mathfrak{G})$. Pour que Q admette une paramétrix à droite dans $V^{-d}_{a_1}(X, \mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ (c. a. d. pour qu'il existe $S \in V^{-d}_{a_1}(X, \mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ tel que $QS - I$ soit un opérateur régularisant), il faut et il suffit qu'il existe $s_o \in \sigma_{-d}$ tel que $q_o(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi')\, s_o(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') = I$ dans $\dot{U}$.
On a un résultat analogue en remplaçant droite par gauche.

Considérons maintenant une matrice $Q = (Q_{\ell,k})$ d'opérateurs $Q_{\ell,k} \in V^{s_k - t_\ell}_{a_1}(X, \mathfrak{F}_k, \mathfrak{G}_\ell)$ $(\ell = 1,\dots,L ; k = 1,\dots,K ; s_k, t_\ell \in \mathbb{R}, \mathfrak{F}_k, \mathfrak{G}_\ell$ fibrés sur X). Localement, appelons symbole principal de Q la matrice $q_o = (q^{(o)}_{\ell,k})$, où $q^{(o)}_{\ell,k}$ est la composante de degré $s_k - t_\ell$ dans le symbole de $Q_{\ell,k}$; nous dirons que Q est <u>parabolique à droite</u> si, localement au voisinage de tout $x \in X$, il existe une matrice $s_o = (s^{(o)}_{k,\ell})$, avec $s^{(o)}_{k,\ell} \in \sigma_{t_\ell - s_k}(U)$, et

$$q_o(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi')\, s_o(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') = I \quad \text{dans } \hat{U}.$$ On définit de même la <u>parabolicité à gauche</u>.

Le corollaire précédent implique alors :
<u>Théorème</u>. Soit $Q = (Q_{\ell,k})$ une matrice d'opérateurs $Q_{\ell,k} \in V^{s_k - t_\ell}_{a_1}(\partial\Omega, \mathfrak{F}_k, \mathfrak{G}_\ell)$; si Q est parabolique à droite (resp. : à gauche), il existe une matrice $S = (S_{k,\ell})$ d'opérateurs $S_{k,\ell} \in V^{t_\ell - s_k}_{a_1}(\partial\Omega, \mathfrak{G}_\ell, \mathfrak{F}_k)$ telle que $Q S u = u$ (resp. : $S Q u = u$) pour toute $u \in \prod_{\ell=1}^{L} \mathcal{D}'(\partial\Omega, \mathfrak{G}_\ell)$ nulle pour $x_1 < 0$ (resp : pour toute $u \in \prod_{k=1}^{K} \mathcal{D}'(\partial\Omega, \mathfrak{F}_k)$ nulle pour $x_1 < 0$). On a un résultat analogue quand $\partial\Omega$ est remplacée par $M = I_1 \times M'$, mais il faut alors se restreindre à $x_1 < t$ $(t \in I_1, t > 0$, fixé) et à $x' \in$ compact fixé de M'.

3 . <u>DISCUSSION DES PROBLEMES AUX LIMITES</u>. Revenons aux notations de l'introduction ; P est alors parabolique à gauche et à droite au sens de la définition précédente ; on peut donc considérer $T_1, T_2 \in V^{-m}_{a_1}(M, F, E)$ tels que

$P\,T_1\,u = u$ dans Ω_t , pour toute $u \in \mathcal{D}'_+(M_t, F)$

$T_2\,P\,u = u$ pour toute $u \in \mathcal{D}'_+(M_t, E)$ nulle en dehors de $\bar{\Omega}$

(on a posé $M_t = M \cap \{x_1 < t\}$, et l'indice + signifie que les distributions considérées sont nulles pour $x_1 < o$).

Supposons que f admette un prolongement $\tilde{f} \in \mathcal{D}'_+(M_t, F)$ tel que $T_1\,\tilde{f}_{|\Omega_t}$ ait des traces sectionnelles jusqu'à l'ordre $m-1$; en remplaçant u par $u - T_1\,\tilde{f}_{|\Omega_t}$, on voit qu'il suffit de discuter le problème

$$(1')\quad \begin{cases} P\,u = o \text{ dans } \Omega_t \\ B\,(\gamma u) = g \text{ dans } \partial\Omega_t \,. \end{cases}$$

Ce problème a un sens dès que u est prolongeable en $\tilde{u} \in \mathcal{D}'\,(M_t, E)$ (car, en choisissant alors un prolongement $\tilde{u}$ nul en dehors de $\bar{\Omega}_t$, et une paramétrix T de type compact pour l'opérateur différentiel P , on obtient, modulo une fonction C^∞

$$u = [T\text{ (Distribution portée par } \partial\Omega_t)]_{|\Omega_t} \;,$$

et il est bien connu - voir [3] , [11] - que le second membre de cette égalité admet des traces sectionnelles de tout ordre) ; soit alors u^o le prolongement canonique de u par o dans $M_t \setminus \bar{\Omega}_t$; $P\,(u^o)$ est une multi-couche sur $\partial\Omega_t$ qui ne dépend que de P et de γu , et que nous noterons $\tilde{P}\,(\gamma u)$; considérons les opérateurs $C_i : C^\infty(\partial\Omega, \oplus_m E) \to C^\infty(\partial\Omega, \oplus_m E)$ $(i = 1,2)$ définis par $C_i v = \gamma\,T_i\,\tilde{P}v$; on a $C_i = (C^{(i)}_{k,\ell})_{o \leqslant k,\,\ell \leqslant m-1}$ avec $C^{(i)}_{k,\ell} \in V^{k-\ell}_{a_1}(\partial\Omega, E, E)$, et :

<u>Théorème</u>. (i) Suppossons la matrice $B\,C_1$ parabolique à droite pour $o \leqslant x_1 \leqslant t$; soit A_1 un inverse à droite de $B\,C_1$.
Alors $u = (T_1\,\tilde{P}\,A_1\,g)_{|\Omega_t}$ est solution de (1') .

(ii) Supposons la matrice $\begin{pmatrix} I - C_2 \\ B \end{pmatrix}$ parabolique à gauche pour $o \leqslant x_1 \leqslant t$; soit A_2 un inverse à gauche de $\begin{pmatrix} I - C_2 \\ B \end{pmatrix}$; alors toute distribution u prolongeable à travers $\partial\Omega_t$ et vérifiant (1') coincide avec $[T_2\,\tilde{P}\,A_2(o, g)]_{|\Omega_t}$.

<u>Remarques</u> 1) Si $\sum_{j=1}^{J} \dim G_j = \frac{m}{2} \dim E$, alors les hypothèses (i) et (ii) du théorème précédent sont équivalentes, et vérifiées si et seulement si la condition habituelle de Shapiro-Lopatinski est satisfaite.

2) Il est facile de retrouver la discussion de (1) dans les espaces de Sobolev anisotropes en utilisant les estimations correspondantes pour les opérateurs pseudo-différentiels T_i, A_i et pour les noyaux de Poisson $T_i \tilde{P}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. AGRANOVICH et M.I. VISIK - Uspechi Matem. Nauk, XIX, 3, 53-161. Russiam Math. Surveys, 19, (1964), 53-157.

[2] L. HÖRMANDER - Proceedings of Synposia in pure Math. 10, AMS (1967), 138-183.

[3] L. HÖRMANDER - Ann. of Math., 83, (1966), 129-209.

[4] L. HÖRMANDER - Cours à Stanford University (Juillet 1967).

[5] L. HÖRMANDER - Springer - Verlag (1964).

[6] L. HÖRMANDER - Fourier Integral Operators (à paraître).

[7] C. HUNT et A. PIRIOU - Comptes Rendus, Série A (1969), 28-31.

[8] C. HUNT et A. PIRIOU - Comptes Rendus, Série A (1969), 214-217.

[9] P. KRÉE - Exposé au Séminaire Bourbaki, Novembre 1965.

[10] P. KRÉE - Ann. Inst. Fourier, 19,1 (1969), 179-194.

[11] P. KRÉE - Annali di Matematica, (IV), LXXXIII (1969), 113-132.

[12] J.E. LEWIS - Journal of Math. Analysis and Applications, 26, (1969), 479-511.

[12] J.L. LIONS et E. MAGENES - Dunod (Paris), (1968), tome 2.

[13] A. PIRIOU - Ann. Inst. Fourier, 20,1, (1970).

[14] A. PIRIOU - Ann. Inst. Fourier, 21,1, (1971), 59-78.

[15] M.I. VISIK et G.I. ESKIN - Mat. Sbornik, 71 (113), (1966), 162-190.

Département de Mathématiques
U. E. R. M. S. T.
Parc Valrose, Avenue Valrose
06 - NICE.