

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARIE-CLAUDE ARNAUD

**Type des points fixes des difféomorphismes
symplectiques de $T^n \times \mathbb{R}^n$**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 48 (1992)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1992_2_48__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TYPE DES POINTS FIXES DES DIFFÉOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

Marie-Claude ARNAUD

Résumé . – On s'intéresse aux points fixes des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) de l'anneau de dimension $2n$ $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ génériques en topologie C^r et proches en topologie C^r d'un difféomorphisme complètement intégrable faiblement monotone (toutes ces notions seront définies par la suite). Plus précisément, nous regardons quels types de points fixes apparaissent (sont-ils hyperboliques, complètement elliptiques, elliptiques hyperboliques?).

Nous montrons que les résultats obtenus dépendent de la torsion du difféomorphisme complètement intégrable que nous perturbons et que, curieusement, alors qu'on peut minorer la dimension elliptique des points fixes, on ne peut en général rien dire de leur dimension hyperbolique.

Nous donnons une application de ce résultat concernant les points périodiques qui s'accumulent sur un point périodique elliptique d'un difféomorphisme symplectique générique de classe C^4 d'une variété symplectique quelconque (en utilisant le théorème de Birkhoff-Lewis).

Abstract . – We are interested in the fixed points of the exact symplectic C^r -diffeomorphisms ($1 \leq r \leq \infty$) of the $2n$ -dimensional annulus $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ which are generic in the C^r -topology and C^r -close to a completely integrable weakly monotone diffeomorphism. More precisely, we are looking at the types of this fixed points (are they hyperbolic, completely elliptic, elliptic hyperbolic?).

We prove that the results depend on the torsion of the completely integrable diffeomorphism which we are perturbing. We can find a lower bound of the elliptic dimensions of the fixed points, but we can say nothing in general about their elliptic dimensions.

Using the Birkhoff-Lewis' theorem, we apply this results to the periodic points accumulating on an elliptic periodic point of every generic symplectic C^4 -diffeomorphism of a symplectic manifold.

Table des Matières

	page
Résumé & Abstract	1
Table des matières	3
Remerciements	5
Notations	7
1- Introduction	11
2 - Quelques lemmes techniques et des applications immédiates	15
3 - Analogie des inégalités de Morse pour les dimensions elliptiques	23
4 - Contre-exemples concernant les dimensions hyperboliques	27
5 - Contre-exemples dans le cas où la torsion est indéfinie	37
6 - Remarques sur les perturbations à un paramètre	45
7 - Le cas $n = 2$	51
8 - Application au théorème de Birkhoff-Lewis	55
Références bibliographiques	63

Je voudrais remercier Michel Herman qui m'a proposé de réfléchir sur le type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, ce qui m'a permis d'écrire cet article qui coïncide avec le premier chapitre de ma thèse. Il m'a aussi indiqué un lemme technique qui permet de simplifier le calcul des valeurs propres des matrices symplectiques, lemme que j'ai largement utilisé tout au long de cet article. Enfin, c'est lui qui m'a montré comment voir qu'il y a accumulation de points périodiques hyperboliques au voisinage de tout point périodique elliptique d'un difféomorphisme symplectique générique de classe C^4 .

Je remercie aussi Jean-Christophe Yoccoz qui est à l'origine de la partie concernant les familles à un paramètre de difféomorphismes symplectiques et qui m'a utilement conseillée pour la rédaction des résultats ici exposés.

NOTATIONS

Si A est un ensemble fini, $\text{Card}(A)$ est le cardinal de A ;

Si A et B sont deux ensembles tels que $B \subset A$, alors $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$;

Si A, B sont deux ensembles et $f : A \rightarrow B$ est une application, si $C \subset A$, alors $f|_C$ est la restriction de f à C ;

Si A, B sont deux ensembles et $f : A \rightarrow B$ est une application, si $C \subset B$ et si $f(A) \subset C$, alors $c|f$ est la corestriction de f à C .

\mathbf{N} est l'ensemble des entiers naturels;

\mathbf{Z} est l'anneau des entiers relatifs;

Si $(G, +)$ est un groupe abélien et H un sous-groupe, G/H désigne le quotient de G par la relation d'équivalence \mathfrak{R} où : $(x \mathfrak{R} y)$ ssi $((x - y) \in H)$.

\mathbf{R} est l'espace réel de dimension 1;

$|\cdot|$ désigne la valeur absolue sur \mathbf{R} ;

\mathbf{R}^n est l'espace réel de dimension n ;

$\|\cdot\|$ désigne sur \mathbf{R}^n la norme euclidienne standard;

Généralement, on écrira un élément de \mathbf{R}^n : $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$.

$[\cdot]$ désigne la partie entière;

$\text{Sup}(a, b)$ (resp. $\text{Inf}(a, b)$) désigne le réel le plus grand (resp. petit) de a et b ;

$\text{Sup}A$ (resp. $\text{Inf}A$) désigne la borne supérieure (resp. inférieure) de A .

\mathbf{C} est l'espace complexe de dimension 1;

$|\cdot|$ désigne le module sur \mathbf{C} ;

\mathbf{C}^n est l'espace complexe de dimension n ;

$U^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1;

$i \in \mathbf{C}$ est une racine de -1 ;

Si $z \in \mathbf{C}$, $\text{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z et $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z .

\mathbf{T} est le tore de dimension 1 i.e. $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$;

\mathbb{T}^n est le tore de dimension n i.e. $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$;

Généralement, on écrira un élément de $\mathbb{T}^n : \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$;

Si η est une application de \mathbb{T}^n vers \mathbb{R}^n , on notera Γ_η son graphe, qui est donc dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$;

On dira alors que η est l'équation du tore Γ_η .

On considère \mathbb{R}^{2n} muni des coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$; un **polyanneau** de \mathbb{R}^{2n} est alors un ensemble de la forme : $E = \{(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n); \forall i \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_1^2 \leq (p_i - p_{i,0})^2 + (q_i - q_{i,0})^2 \leq \epsilon_2^2\}$ où ϵ_1, ϵ_2 sont réels et $(p_{1,0}, \dots, p_{n,0}, q_{1,0}, \dots, q_{n,0}) \in \mathbb{R}^{2n}$;

On considère ensuite $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ muni des coordonnées $(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n)$; un **polyanneau** de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est alors un ensemble de la forme : $B = \{(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n); \forall i \in \{1, \dots, n\}, \epsilon_1 \leq |r_i - r_{i,0}| \leq \epsilon_2\}$ où ϵ_1, ϵ_2 et $r_{i,0}$ sont réels;

une **bande ouverte** de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est alors un ensemble de la forme :

$$V = \{(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n); \forall i \in \{1, \dots, n\}, |r_i| \leq \epsilon\}$$

où ϵ est réel.

On travaillera dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et on notera :

d est la différentielle extérieure, définie donc sur les formes;

${}^{\text{t}}d$ désignera la dualité qui a une 1-forme associe le vecteur dual pour le produit scalaire standard;

${}^{\text{t}}d$, défini sur les 0-formes, désignera donc le gradient pour le produit scalaire standard;

D désignera l'application linéaire tangente;

Les composantes suivant les coordonnées angulaires et radiales seront définies comme suit :

$$D = (\partial/\partial\theta, \partial/\partial r);$$

Hess signifiera hessien.

$M(\mathbf{K}, \mathbf{p} \times \mathbf{q})$ où \mathbf{K} est un anneau et p et q sont des entiers positifs désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbf{K} à p lignes et q colonnes;

Si \mathbf{K}^p et \mathbf{K}^q sont chacun munis d'une norme que nous noterons sans distinguer $\|\cdot\|$, et si $M \in M(\mathbf{K}, p \times q)$, on définit : $\|M\| = \text{Sup}\{\|Mv\|; \|v\| = 1\}$;

Si $M \in M(\mathbf{K}, p \times q)$, **rang**(M) est le rang de M , **Ker**(M) est son noyau, **Trace**(M) est sa trace et ${}^{\text{t}}M$ est sa transposée;

Si $M \in M(\mathbf{K}, n \times n)$, **det**(M) est le déterminant de M ;

Si $M \in M(\mathbb{R}, n \times n)$, **exp**(M) est l'exponentielle de M ;

I désigne la matrice identité de $M(\mathbb{R}, n \times n)$; I_p désignera la matrice identité de $M(\mathbb{R}, p \times p)$;

Si $S \in M(\mathbb{R}, n \times n)$ est une matrice symétrique définie positive, $S^{1/2}$ désignera l'unique matrice définie positive telle que son carré est S ;

\oplus signifiera "somme directe", pour des matrices comme pour des espaces vectoriels;

dim désignera la dimension pour des espaces vectoriels.

On définit sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ la 1-forme λ de Liouville par : $\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} r_i d\theta_i$;

On munit alors $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ de la forme symplectique $\omega = -d\lambda$;

Si H est alors un hamiltonien (c'est-à-dire une application de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ vers \mathbb{R}) de classe C^1 de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, le **champ de vecteur hamiltonien associé à H** , noté X_H , est le champ de vecteur tel que : $dH = \omega(X_H, \cdot)$. En particulier, en coordonnées, $X_H = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$

Si V est une variété de classe C^1 , et si $x \in V$, $T_x V$ désigne l'espace tangent en x à V et TV désigne l'espace tangent à V .

Si A et B sont deux variétés de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), $C^r(A, B)$ désigne l'ensemble des applications de classe C^r de A vers B ;

Supposons que B soit \mathbb{R}^n ou \mathbb{T}^n et considérons $f \in C^r(A, B)$. Alors,

$\|f\|_{C^0} = \|f\| = \text{Sup}\{\|f(x)\|; x \in A\}$ et on définit :

$\|f\|_{C^r} = \text{Sup}\{\|D^k f\|; 0 \leq k \leq r\}$ pour $r \neq \infty$;

On munit alors $C^r(A, B)$ de la topologie associée à cette norme si $r \neq \infty$ et $C^\infty(A, B)$ de la topologie induite par la famille de normes;

Toujours dans le cas où B est \mathbb{R}^n ou \mathbb{T}^n , si $f_t \in C^r(A, B)$, on aura :

$-f_t = o(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|f_t\|$ tend vers 0 quand t tend vers 0;

$-f_t = O(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|f_t\|$ est borné quand t tend vers 0;

$-f_t = o_{C^r}(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|f_t\|_{C^r}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ($r \neq \infty$);

$-f_t = O_{C^r}(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|f_t\|_{C^r}$ est borné quand t tend vers 0 ($r \neq \infty$);

Si de plus $f|_V$ désigne la restriction de f à V :

$-f_t = o_V(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|(f_t)|_V\|$ tend vers 0 quand t tend vers 0;

$-f_t = O_V(t^k)$ si $t^{-k} \cdot \|(f_t)|_V\|$ est borné quand t tend vers 0;

On définit de même $o_V^{C^r}(t^k)$ et $O_V^{C^r}(t^k)$ pour $r \neq \infty$;

De plus, si $C \subset C^r(A, B)$, $\text{Adh}_r(C)$ désigne l'adhérence de C dans $C^r(A, B)$ pour la topologie précisée ci-dessus;

Si A et B sont des variétés de classe C^1 et si f et g sont dans $C^1(A, B)$, si $x \in A$, alors on écrira : $f \sim g$ en x pour : f est équivalente à g en x . Parfois, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on n'écrira pas "en x ".

1. INTRODUCTION

Commençons par quelques définitions :

Soit x un point périodique de période $\mu \in \mathbf{N}$ d'un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété de classe C^1 . Alors, x est :

- (de type) **complètement elliptique** si $DF^\mu(x)$ est conjuguée à une somme directe de rotations;
- (de type) **hyperbolique** si $DF^\mu(x)$ a toutes ses valeurs propres de module différent de 1;
- (de type) **elliptique** \times **hyperbolique** si $DF^\mu(x) = E \oplus H$ où E est complètement elliptique et H est hyperbolique et si on n'est pas dans un des deux cas décrits ci-dessus.

De même, soit x un point critique d'un hamiltonien H de classe C^2 d'une variété symplectique de classe C^2 . Alors, x est :

- (de type) **complètement elliptique** si $\exp(DX_H(x))$ est complètement elliptique;
- (de type) **hyperbolique** si $\exp(DX_H(x))$ est hyperbolique;
- (de type) **elliptique** \times **hyperbolique** si $\exp(DX_H(x))$ est elliptique \times hyperbolique.

De plus, si F est un difféomorphisme de classe C^r de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$), alors F est :

- **exact symplectique** si $F^*\lambda - \lambda$ est une 1-forme exacte;
- **faiblement monotone** si, si on a posé $F(\theta, r) = (\Theta, R)$, alors au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial r}$ est une matrice inversible;
- **complètement intégrable** si F s'écrit sous la forme : $F(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r)$ où $\ell \in C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et où $\ell(0) = 0$ (remarquons qu'avec ces notations, si F est de plus symplectique, on a forcément $\ell = {}^t d\tau$ où $\tau \in C^{r+1}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ i.e. ℓ est exacte).

De même, si H est un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$), alors H est :

- **faiblement monotone** si, au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}$ est une matrice inversible;
- **complètement intégrable** si H ne dépend pas de $\theta \in \mathbf{T}^n$ et si $\frac{\partial H}{\partial r}(0) = 0$ et $H(0) = 0$.

Par la suite, on s'intéressera à des difféomorphismes exacts symplectiques F de classe C^r (resp. des hamiltoniens H de classe C^{r+1}) de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proches en topologie C^1

de F_0 difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. proches en topologie C^2 de H_0 hamiltonien de classe C^{r+1}) faiblement monotone et complètement intégrable. Remarquons que dans ce cas, F (resp. H) est aussi faiblement monotone.

Dans cette situation, suivant [4] ou [2], on montre que F (resp. H) a des points fixes (resp. critiques) près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$:

1. F (resp. H) a un tore de classe C^r radialement transformé proche en topologie C^1 de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, c'est-à-dire il existe $\eta \in C^r(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ proche en topologie C^1 de 0 tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \Theta(\theta, \eta(\theta)) = \theta \text{ où on a posé } F(\theta, r) = (\Theta, R)$$

(resp. $\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \frac{\partial H}{\partial r}(\theta, \eta(\theta)) = 0$). Ceci se démontre en utilisant le théorème des fonctions implicites, que l'on peut appliquer car F_0 (resp. H_0) est faiblement monotone.

2. Les points fixes de F (resp. critiques de H) près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ s'écrivent alors $(\theta, \eta(\theta))$ où $R(\theta, \eta(\theta)) = \eta(\theta)$ (resp. où $\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta, \eta(\theta)) = 0$). Cette dernière égalité peut encore s'écrire $dL(F)(\theta) = 0$ (resp. $dl(H)(\theta) = 0$) où on a posé $\mathbf{L}(F)(\theta) = S(\theta, \eta(\theta))$ pour $dS(\theta, r) = Rd\Theta - rd\theta$ (resp. $\mathbf{l}(H)(\theta) = H(\theta, \eta(\theta))$).

$L(F)$ (resp. $l(H)$) est la **fonction radiale** de F (resp. H). Elle est de classe C^{r+1} et a des points critiques sur \mathbb{T}^n . Aussi, F (resp. H) a des points fixes (resp. critiques) près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

Remarquons que sur un ouvert dense en topologie C^r de difféomorphismes exacts symplectiques (resp. en topologie C^{r+1} de hamiltoniens) faiblement monotones, la fonction radiale de F (resp. H) est de Morse :

LEMME 1.1 . – Soit $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Dans un voisinage en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}), petit en topologie C^1 (resp. en topologie C^2) des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r < \infty$) faiblement monotones complètement intégrables (resp. des hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r < \infty$) faiblement monotones complètement intégrables), la propriété “ $L(F)$ est de Morse” (resp. $l(H)$ est de Morse) décrit un ouvert dense en topologie C^r (resp. C^{r+1}).

Démonstration du lemme 1.1 . – Rappelons déjà que l'ensemble des fonctions de Morse de classe C^{r+1} ($1 \leq r < \infty$) définies sur une variété M de classe C^{r+1} et compacte est un ouvert dense en topologie C^{r+1} de $C^{r+1}(M, \mathbb{R})$. La démonstration de ce résultat utilise des théorèmes de transversalité dus à R. Thom et on peut en trouver une démonstration dans [3]

1) Déjà, la propriété “ $L(F)$ est de Morse” (resp. $l(H)$ est de Morse) est ouverte en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}) car l'application $(F \rightarrow dL(F))$ (resp. $(H \rightarrow l(H))$) est continue pour les topologies $C^r \rightarrow C^r$ (resp. $C^{r+1} \rightarrow C^{r+1}$) et l'ensemble des fonctions de Morse de classe C^{r+1} définies sur \mathbb{T}^n est un ouvert en topologie C^{r+1} de $C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$.

2) De plus, cette propriété est dense. En effet, si F est un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable (resp. si H est un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de

$\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable) et si $\varphi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$, si on pose :

$F(\varphi)(\theta, r) = (\theta, r + {}^l d\varphi(\theta))$ (resp. $H(\varphi)(\theta, r) = \varphi(\theta)$), alors :

$$L(F(\varphi) \circ F) = L(F) + \varphi \text{ (resp. } l(H + H(\varphi)) = l(H) + \varphi).$$

On conclut alors car l'ensemble des fonctions de Morse de classe C^{r+1} définies sur \mathbb{T}^n est dense en topologie C^{r+1} dans $C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$. ■

De plus, une autre propriété décrit un tel ouvert dense :

LEMME 1.2 . - Soit $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Dans un voisinage en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}), petit en topologie C^1 (resp. en topologie C^2) des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotones complètement intégrables (resp. des hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotones complètement intégrables), la propriété : “aux points fixes de F près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, DF a des valeurs propres distinctes” (resp. “aux points critiques de H près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, DX_H a des valeurs propres distinctes”) décrit un ouvert dense en topologie C^r (resp. C^{r+1}).

Rappelons aussi que pour tout compact K de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, sur un ouvert dense en topologie C^r (resp. C^{r+1}), DF (resp. DX_H) a en tout point fixe (resp. critique) de K des valeurs propres distinctes; ceci est démontré dans [7].

En conséquence, quand nous supposerons F (resp. H) **générique** (ce que nous ferons parfois, mais pas toujours), cela signifiera que F (resp. H) a une fonction radiale de Morse et qu'aux points fixes de F près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ (resp. aux points critiques de H près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$), DF (resp. DX_H) a des valeurs propres distinctes. Remarquons alors que dans ce cas “être générique” sera une propriété ouverte et dense en topologie C^r (resp. C^{r+1}).

Dans tous les cas, nous chercherons le type des points fixes de F (resp. critiques de H) près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

Une des motivations est qu'on sait que pour $n = 1$, il existe génériquement tous les types de points fixes (resp. critiques), et qu'il existe un rapport entre la signature du Hessian de la fonction radiale et le type du point fixe (resp. critique) considéré.

Nous verrons que pour $n \geq 2$, la situation est différente. Nous commencerons par démontrer quelques lemmes techniques permettant de simplifier le calcul des valeurs propres de DF (resp. DX_H) aux points fixes (resp. critiques). Nous en déduirons immédiatement que quand la torsion (que nous définirons plus tard) est indéfinie et au moins pour $n = 2$, il semble difficile d'obtenir une conclusion intéressante. Ceci sera traité en partie 2.

Par contre, on verra que quand la torsion est définie, on a un “analogue des inégalités de Morse” pour les dimensions elliptiques des points fixes (resp. critiques). Les inégalités que l'on trouvera ensuite quand la torsion est indéfinie seront moins fortes. Ceci sera traité en partie 3.

Nous construirons alors des contre-exemples pour les dimensions hyperboliques dans le cas où la torsion est définie. Ceci sera traité en partie 4.

Nous construirons ensuite des contre-exemples dans le cas où la torsion est indéfinie. Ceci sera traité en partie 5.

Par contre, dans le cas où la torsion est définie, nous constaterons que si on s'intéresse à des familles à un paramètre génériques de difféomorphismes (resp. hamiltoniens) à torsion définie, on a un analogue des inégalités de Morse pour les dimensions elliptiques et hyperboliques. Ceci sera traité en partie 6.

Enfin, nous traiterons en exemple le cas $n = 2$; puis, nous montrerons en quoi tous ces résultats s'appliquent aux points périodiques s'accumulant sur un point périodique elliptique d'un difféomorphisme de classe C^r ($r \geq 4$) symplectique générique de \mathbb{R}^{2n} . Ceci achèvera ce chapitre et tiendra dans les parties 7 et 8.

2. QUELQUES LEMMES TECHNIQUES ET DES APPLICATIONS IMMÉDIATES

LEMME 2.1 (M. Herman) . - Soit M une matrice symplectique de $M(\mathbb{R}, 2n \times 2n)$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des matrices de $M(\mathbb{R}, n \times n)$ avec $\det(b) \neq 0$.

Alors :

(λ est une valeur propre de M et $\text{rang}(M - \lambda I) = j + n$)

ssi

($\text{rang}(M_\lambda) = j$ où $M_\lambda = b^{-1}a + db^{-1} - \lambda b^{-1} - \lambda^{-1} {}^t b^{-1}$).

Démonstration du lemme 2.1 . - On utilise les relations : ${}^t ac = {}^t ca$; ${}^t bd = {}^t db$; ${}^t da - {}^t bc = I$; elles sont vraies car M est symplectique. Elles nous permettent de calculer $M^* = P^{-1}MP$ où :

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ db^{-1} & I \end{pmatrix}$$

On trouve alors :

$$M^* = \begin{pmatrix} a + bdb^{-1} & b \\ -{}^t b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre (v_1, v_2) de M^* associé à la valeur propre λ vérifie alors : $v_2 = -\lambda^{-1} {}^t b^{-1} v_1$; $(b^{-1}a + db^{-1} - \lambda b^{-1} - \lambda^{-1} {}^t b^{-1})v_1 = 0$. ■

LEMME 2.2 . - Soit F un difféomorphisme exact symplectique faiblement monotone de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme de classe C^r exact symplectique faiblement monotone complètement intégrable. Soit η l'équation du tore radialement transformé de F et $\varphi = L(F)$.

Alors, en un point fixe $(\theta, \eta(\theta))$ de F et si on pose $M = DF(\theta, \eta(\theta))$, on a avec les mêmes notations que dans le lemme précédent :

$$M_\lambda = D^2\varphi(\theta) + (1 - \lambda)b^{-1} + (1 - \lambda^{-1}){}^t b^{-1}.$$

Démonstration du lemme 2. 2 . - Posons $F(\theta, r) = (\Theta, R)$.

Alors, $\Theta(\theta, \eta(\theta)) = \theta$ et donc en dérivant : $D\eta(\theta) = -b^{-1}(a - I)$.

De plus : ${}^t d\varphi(\theta) = R(\theta, \eta(\theta)) - \eta(\theta)$ donc en dérivant :

$$D^2\varphi(\theta) = c - db^{-1}(a - I) + b^{-1}(a - I) = db^{-1} + b^{-1}a - {}^t b^{-1} - b^{-1}. \quad \blacksquare$$

LEMME 2. 3 . - Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable. Soit η l'équation du tore radialement transformé de H et posons $f := l(H)$.

Alors, en un point critique $(\theta, \eta(\theta))$ de H :

(λ est une valeur propre de $DX_H(\theta, \eta(\theta))$) et $\text{rang}(DX_H(\theta, \eta(\theta)) - \lambda I) = j + n$

ssi

$$(\text{rang}(m_\lambda) = j \text{ où } m_\lambda = \lambda^2 b^{-1} + \lambda(D\eta(\theta) - {}^t D\eta(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\theta)) \text{ où on a posé : } b := \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(\theta, \eta(\theta)).$$

Démonstration du lemme 2. 3 . -

Notons :

$$DX_H(\theta, \eta(\theta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial r}(\theta, \eta(\theta)) & \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(\theta, \eta(\theta)) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}(\theta, \eta(\theta)) & -\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \theta}(\theta, \eta(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Posons $p = \begin{pmatrix} I & 0 \\ {}^t ab^{-1} & I \end{pmatrix}$ et $m = pDX_H(\theta, \eta(\theta))p^{-1}$. Alors :

$$m = \begin{pmatrix} a - b {}^t ab^{-1} & b \\ {}^t ab^{-1} a + c & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre (v_1, v_2) associé à la valeur propre λ vérifie donc :

$$\lambda v_2 = ({}^t ab^{-1} a + c)v_1 ; (\lambda^2 b^{-1} - \lambda(b^{-1} a - {}^t ab^{-1}) - ({}^t ab^{-1} a + c))v_1 = 0.$$

Or, $\frac{\partial H}{\partial r}(\theta, \eta(\theta)) = 0$ donc en dérivant : $D\eta(\theta) = -b^{-1}a$.

Et $f(\theta) = H(\theta, \eta(\theta))$ donc en dérivant $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\theta) = -c - {}^t ab^{-1}a$. \blacksquare

COROLLAIRE 2. 1 . - Soit F un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable et x un point fixe de F .

Alors, il existe P polynome de degré n tel que :

(λ est une valeur propre de $DF(x)$) ssi $(P(2 - \lambda - \lambda^{-1}) = 0)$.

Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable et x un point critique de H .

Alors, il existe p polynome de degré n tel que :

(λ est valeur propre de $DX_H(x)$) ssi $(p(\lambda^2) = 0)$

Démonstration du corollaire 2. 1 . - Il suffit de remarquer que $\det(M_\lambda)$ est un polynome de degré $2n$ en λ, λ^{-1} et que $M_{\frac{1}{\lambda}} = {}^t M_\lambda$ d'où $\det(M_{\frac{1}{\lambda}}) = \det(M_\lambda)$. On peut alors écrire $\det(M_\lambda) = P(2 - \lambda - \lambda^{-1})$ où P est un polynome de degré égal à n .

De même, $\det(m_\lambda)$ est un polynôme de degré $2n$ en λ et $m_{-\lambda} = {}^t m_\lambda$ d'où $\det(m_{-\lambda}) = \det(m_\lambda)$. Aussi, on peut écrire $\det(m_\lambda) = p(\lambda^2)$ où p est un polynôme de degré n . ■

L'intérêt de ce corollaire réside dans les remarques suivantes :

- Si $x = 2 - \lambda - \lambda^{-1}$ pour λ non nul, alors :

$(\lambda = 1)$ ssi $(x=0)$;

$(\lambda \in U^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\})$ ssi $(x \in [0, 4])$;

$(\lambda \in \mathbb{R})$ ssi $(x \in \mathbb{R} - [0, 4])$;

$(\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbb{R} \cup U^1))$ ssi $(x \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$.

- Si $\mu = \lambda^2$, alors :

$(\lambda = 0)$ ssi $(\mu = 0)$;

$(\lambda \in i\mathbb{R})$ ssi $(\mu < 0)$;

$(\lambda \in \mathbb{R})$ ssi $(\mu > 0)$;

$(\lambda \in \mathbb{C} - (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}))$ ssi $(\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$.

On s'est donc ramené à étudier la réalité et le signe des racines de polynômes réels de degré n . Pour les hamiltoniens, c'est évident alors qu'en ce qui concerne les difféomorphismes exacts symplectiques, il faut remarquer que comme on travaille au voisinage des difféomorphismes complètement intégrables, λ est proche de 1 et donc x est proche de 0. **Notons d'ailleurs que dans les cas que nous considérerons, nous ne répèterons plus que x est de module plus petit que 4, mais cela sera toujours implicitement supposé.**

Afin d'appliquer ces résultats, donnons quelques définitions :

DÉFINITION 2.1 . - Soit F un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété V de classe C^1 et x un point périodique de période μ de F . Soit E (resp. H) le sous-espace vectoriel de dimension maximale de $T_x V$ invariant par $DF^\mu(x)$ tel que $DF^\mu(x)|_E$ (resp. $DF^\mu(x)|_H$) soit complètement elliptique (resp. hyperbolique).

Alors, $\dim(E)$ est la **dimension elliptique** de x et $\dim(H)$ est la **dimension hyperbolique** de x .

Soit H un hamiltonien de classe C^2 d'une variété symplectique de classe C^2 et x un point critique de H .

Alors, la **dimension elliptique** (resp. **hyperbolique**) de x pour H est la dimension elliptique (resp. hyperbolique) de 0 pour $\exp(DX_H(x))$.

DÉFINITION 2.2 . - Soit F un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par $F(\theta, r) = (\Theta, R)$.

La torsion de F est $b = \frac{\partial \Theta}{\partial r}$.

F sera dit à **torsion définie** (resp. **définie positive**, **définie négative**, **indéfinie**, de **signature** (p,q)) si ${}^t b + b$ est définie (resp. définie positive, définie négative, indéfinie, de signature (p,q)).

Soit H un hamiltonien de classe C^2 de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$.

La torsion de H est $b = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}$.

Elle est donc toujours symétrique, et on peut lui accoler tous les termes qualifiant les matrices symétriques.

PROPRIÉTÉ 2.1 . – Soit F un difféomorphisme exact symplectique générique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable .

Alors, F a au moins 2^{n-1} points fixes de dimension elliptique au moins 2 et au moins 2^{n-1} points fixes de dimension hyperbolique réelle au moins 2 .

Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable.

Alors, H a au moins 2^{n-1} points critiques de dimension elliptique au moins 2 et au moins 2^{n-1} points critiques de dimension hyperbolique réelle au moins 2 .

Rappelons qu'on avait précisé dans la partie 1 que :

(F est générique) ssi ($L(F)$ est de Morse et aux points fixes, DF a des valeurs propres distinctes).
(H est générique) ssi ($l(H)$ est de Morse et aux points critiques, DX_H a des valeurs propres distinctes).

Démonstration de la propriété 2.1 . – Il suffit de remarquer que $L(F)$ (resp. $l(H)$) est de Morse et donc a au moins 2^{n-1} points critiques en lesquels son Hessien est de déterminant strictement négatif et au moins 2^{n-1} points critiques en lesquels son Hessien est de déterminant strictement positif.

Or, le terme constant de P où P est défini par $P(2-\lambda-1/\lambda) = \det(M_\lambda)$ (resp. de p où p est défini par $p(\lambda^2) = \det(m_\lambda)$) est $\det(D^2L(F))$ (resp. $\det(D^2l(H))$) et son coefficient dominant est $\det b^{-1}$ où b désigne la torsion. ■

PROPRIÉTÉ 2.2 . – Soit F un difféomorphisme exact symplectique générique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^1 de F_0 difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable. On suppose que la torsion b de F est symétrique et définie.

Alors, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, il existe au moins $\binom{n}{j}$ points fixes de dimension elliptique $2j$ et de dimension hyperbolique $2(n-j)$. De plus, en un point fixe de F près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, toutes les valeurs propres de DF sont dans $\mathbb{U}^1 \cup \mathbb{R}$.

Soit H un hamiltonien générique de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable . On suppose que H est à torsion b définie et que le tore radialement transformé par H est lagrangien.

Alors, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, il existe au moins $\binom{n}{j}$ points critiques de dimension elliptique

2j et de dimension hyperbolique $2(n-j)$. De plus, en un point critique près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, toutes les valeurs propres de DX_H sont dans $i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$.

Remarque 2.1 . - Dans cet énoncé, on peut noter que **générique**, terme dont la définition a été donnée précédemment, définit une propriété qui est effectivement générique en topologie C^r dans l'ensemble des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ qui sont proches des difféomorphismes exacts symplectiques faiblement monotones complètement intégrables et qui ont une torsion définie.

Remarquons aussi que si $n=1$, la torsion est une matrice 1×1 et donc est toujours définie; de plus, le tore radialement transformé, étant une courbe, est toujours lagrangien. Nous verrons que ce n'est plus toujours le cas quand $n \geq 2$.

Démonstration de la propriété 2.2 . - Quitte à changer F en F^{-1} , on peut supposer que b est définie positive. Ainsi $b^{1/2}$ est définie et $M_\lambda = xb^{-1} + D^2L(F)$ où x désigne $(2 - \lambda - 1/\lambda)$ est équivalente à $xI + b^{-1/2}D^2L(F)b^{-1/2}$. Or, $L(F)$ étant de Morse, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, il existe au moins $\binom{n}{j}$ points critiques en lesquels $D^2L(F)$ est de signature $(j, n-j)$, ce qui permet de conclure.

De même, quitte à changer H en $-H$, on peut supposer b définie positive. Si $\mu = \lambda^2$, m_λ est équivalente à $\mu I + b^{+1/2}D^2l(H)b^{+1/2}$ et $l(H)$ est de Morse. ■

Remarque 2.2 . - On avait vu dans la démonstration du lemme 2.2 que si F est un difféomorphisme exact symplectique faiblement monotone de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme de classe C^r exact symplectique faiblement monotone complètement intégrable, si η est l'équation du tore radialement transformé de F et si en un point $(\theta, \eta(\theta))$ on note :

$DF(\theta, \eta(\theta)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont dans $M(\mathbb{R}, n \times n)$; alors $D\eta(\theta) = -b^{-1}a + b^{-1}$ où $b^{-1}a$ est symétrique puisque F est symplectique. Aussi, pour F :

(le tore radialement transformé est lagrangien) ssi (la torsion b est symétrique).

PROPRIÉTÉ 2.3 . - Il existe F_0 un difféomorphisme exact symplectique de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ faiblement monotone complètement intégrable à torsion indéfinie et une suite de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ tendant vers F_0 en topologie C^∞ sans point fixe complètement elliptique. Il existe également une suite de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ tendant vers ce même F_0 en topologie C^∞ sans point fixe hyperbolique.

Il existe H_0 un hamiltonien de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ faiblement monotone complètement intégrable à torsion indéfinie et une suite de hamiltoniens de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ tendant en topologie C^∞ vers H_0 sans point critique complètement elliptique. Il existe aussi une suite de hamiltoniens de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ tendant en topologie C^∞ vers H_0 sans point critique hyperbolique.

COROLLAIRE 2.3 . - Soit H_0 et F_0 comme dans la proposition 2.3. Il existe un ouvert Ω_1 (resp. Ω_2) en topologie C^r ($1 \leq r \leq \infty$) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ faiblement monotones tel que :

- tout élément de Ω_1 (resp. Ω_2) n'a pas de point fixe complètement elliptique (resp. hyperbolique);
- $F_0 \in \text{Adh}_\infty(\Omega_1)$ (resp. $F_0 \in \text{Adh}_\infty(\Omega_2)$).

Il existe un ouvert U_1 (resp. U_2) en topologie C^{r+1} ($1 \leq r \leq \infty$) de hamiltoniens de classe C^r de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ faiblement monotones tel que :

- tout élément de U_1 (resp. U_2) n'a pas de point critique complètement elliptique (resp. hyperbolique);
- $H_0 \in \text{Adh}_\infty(U_1)$ (resp. $H_0 \in \text{Adh}_\infty(U_2)$).

Remarquons que les contre-exemples que nous allons ici construire sont en fait analytiques.

Démonstration de la proposition 2.3 . - Posons : $F_0(\theta, r) = (\theta + Br, r)$ où $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ où on suppose de plus que a, b, d sont des entiers vérifiant :

$$ad - b^2 < 0; \quad -\left(b - \frac{a+d}{2}\right) > |a-d|; \quad b^2 - ad < (1/8)[2|a-d|.2^{1/2} - |b - \frac{a+d}{2}|]^2.$$

Par exemple, on peut poser $a = 80, b = -102$ et $d = 125$.

Posons alors $F_\epsilon(\theta, r) = (\theta + Br, r + \frac{\epsilon}{2} d(\|g\|^2)(\theta + Br))$ où $g(\theta_1, \theta_2) = (2 + \cos(2\Pi\theta_1) + \cos(2\Pi\theta_2), 2 + \sin(2\Pi\theta_1) + \sin(2\Pi\theta_2))$.

Le tore radialement transformé par F_ϵ est $r = 0$.

On a : $L(F_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} \|g\|^2$. La différentielle est :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\epsilon}{2} \|g\|^2\right) &= {}^t Dg \cdot g = 2\Pi \begin{pmatrix} -\sin(2\Pi\theta_1) & \cos(2\Pi\theta_1) \\ -\sin(2\Pi\theta_2) & \cos(2\Pi\theta_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \cos(2\Pi\theta_1) + \cos(2\Pi\theta_2) \\ 2 + \sin(2\Pi\theta_1) + \sin(2\Pi\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= 2\Pi \begin{pmatrix} -(\sin(2\Pi\theta_1))(2 + \cos(2\Pi\theta_1) + \cos(2\Pi\theta_2)) + (\cos(2\Pi\theta_1))(2 + \sin(2\Pi\theta_1) + \sin(2\Pi\theta_2)) \\ -(\sin(2\Pi\theta_2))(2 + \cos(2\Pi\theta_1) + \cos(2\Pi\theta_2)) + (\cos(2\Pi\theta_2))(2 + \sin(2\Pi\theta_1) + \sin(2\Pi\theta_2)) \end{pmatrix} \\ &= 2\Pi \begin{pmatrix} 2(\cos(2\Pi\theta_1) - \sin(2\Pi\theta_1)) + \sin(2\Pi(\theta_2 - \theta_1)) \\ 2(\cos(2\Pi\theta_2) - \sin(2\Pi\theta_2)) + \sin(2\Pi(\theta_1 - \theta_2)) \end{pmatrix} \\ &= 2\Pi \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_1)) + \sin(2\Pi(\theta_2 - \theta_1)) \\ 2\sqrt{2} \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_2)) + \sin(2\Pi(\theta_1 - \theta_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les points critiques de $L(F_\epsilon)$ sont donc les couples (θ_1, θ_2) qui vérifient :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_1)) + \sin(2\Pi(\theta_2 - \theta_1)) = 0 \\ 2\sqrt{2} \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_2)) + \sin(2\Pi(\theta_1 - \theta_2)) = 0 \end{cases}$$

Donc, en un tel point critique : $\sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_1)) + \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_2)) = 0$.

Aussi, on a : $\theta_1 = \theta_2 + 1/8$ ou $\theta_1 = 1/4 - \theta_2$. Examinons ces deux cas :

si $\theta_1 = \theta_2 + 1/8$: $\sin 2\Pi(1/8 - \theta_1) = \sin 2\Pi(1/8 - \theta_2) = 0$. Aussi, les deux points critiques que l'on trouve sont : $(-3/8, 1/8)$ et $(1/8, -3/8)$.

si $\theta_1 = 1/4 - \theta_2 : 2\sqrt{2} \sin(2\Pi(\frac{1}{8} - \theta_1)) + \sin(4\Pi(\frac{1}{8} - \theta_1)) = 0$. Aussi, les points critiques que l'on trouve sont : $(1/8, 1/8)$ et $(-3/8, -3/8)$.

F_ε a donc quatre points fixes au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$. En ces points fixes, notons : $c_i = \cos 2\Pi\theta_i = \sin 2\Pi\theta_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.

On calcule alors :

$$D^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta) = 8\Pi \begin{pmatrix} -c_1(2+c_2) & c_1c_2 \\ c_1c_2 & -c_2(2+c_1) \end{pmatrix}$$

Or, pour F_ε , $M_{\lambda,\varepsilon} = \varepsilon D^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta) + xB^{-1}$ (où $x = 2 - \lambda - \lambda^{-1}$) est équivalente à la matrice $xI + \varepsilon BD^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta)$.

On s'est donc ramené à chercher les valeurs propres de :

$$-\varepsilon BD^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta) = 8\Pi^2\varepsilon \begin{pmatrix} c_1(2a+c_2(a-b)) & c_2(2b+c_1(b-a)) \\ c_1(2b+c_2(b-d)) & c_2(2d+c_1(d-b)) \end{pmatrix}$$

qui a pour déterminant $DetB \cdot Det(\varepsilon BD^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta)) = 128\Pi^4\varepsilon^2c_1c_2(2+c_1+c_2)(ad-b^2)$ qui est du signe de $(-c_1c_2)$ car $(ad-b^2)$ est négatif (B est indéfinie) et $|c_1| < 1$, $|c_2| < 1$.

Aussi, si $c_1c_2 > 0$, i.e. si $\theta \in \{(1/8, 1/8), (-3/8, -3/8)\}$, on a affaire à un point fixe elliptique \times hyperbolique pour F_ε .

Si $c_1c_2 < 0$, posons $c_1 = -c_2 = c$. La trace de $-\varepsilon BD^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta)$ est alors $8\Pi^2\varepsilon[2(a-d)c + (b - \frac{a+d}{2})]$ est du signe de $(-\varepsilon)$ car $|c| = \sqrt{2}$. Le discriminant réduit du polynôme caractéristique de $-\varepsilon BD^2(\frac{1}{2}\|g\|^2)(\theta)$ est donc $\Delta' = 16\Pi^4\varepsilon^2[(2(a-d)c + (b - \frac{a+d}{2}))^2 + 8(ad-b^2)]$ et est positif et donc :

si $\varepsilon > 0 : \theta \in \{(1/8, -3/8), (-3/8, 1/8)\}$ correspond à un point fixe complètement elliptique. F_ε a donc au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ deux points fixes elliptiques \times hyperboliques et deux points fixes complètement elliptiques.

si $\varepsilon < 0 : \theta \in \{(1/8, -3/8), (-3/8, 1/8)\}$ correspond à un point fixe hyperbolique. F_ε a donc au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ deux points fixes elliptiques \times hyperboliques et deux points fixes hyperboliques.

Pour construire les contre-exemples pour les hamiltoniens, posons : $H_\varepsilon(\theta, r) = (1/2)({}^t rBr + \varepsilon\|g(\theta)\|^2)$ où B et g ont été définis précédemment.

Alors, le tore radialement transformé par H_ε est $\{r = 0\}$ et $l(H_\varepsilon) = (1/2)\varepsilon\|g\|^2$. Aussi, comme précédemment, l'ensemble des points critiques de $l(H_\varepsilon)$ pour $\varepsilon \neq 0$ est $\{1/8, -3/8\}^2$.

De plus, pour H_ε , $m_{\lambda,\varepsilon} = \lambda^2 B^{-1} + (1/2)\varepsilon D^2(\|g\|^2)(\theta)$ est équivalente à $[\lambda^2 + \frac{1}{2}\varepsilon BD^2(\|g\|^2)(\theta)]$. Comme précédemment, on s'est ramené à chercher les valeurs propres de $(1/2)\varepsilon BD^2(\|g\|^2)(\theta)$ et on obtient donc les contre-exemples cherchés :

si $\varepsilon > 0 : H_\varepsilon$ a au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ deux points fixes elliptiques \times hyperboliques et deux points fixes hyperboliques.

si $\varepsilon < 0 : H_\varepsilon$ a au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ deux points fixes elliptiques \times hyperboliques et deux points fixes complètement elliptiques. ■

3. ANALOGUE DES INÉGALITÉS DE MORSE POUR LES DIMENSIONS ELLIPTIQUES

PROPOSITION 3.1 . – Soit F un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable ($1 \leq r \leq \infty$) défini par $F(\theta, r) = (\theta + l_1(\theta, r), r + l_2(\theta, r))$ qui est :

- 1) faiblement monotone;
- 2) à torsion de signature $(q, n - q)$;
- 3) générique;
- 4) tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \|D^2\varphi(\theta)\| < 2\|[(\frac{\partial l_1}{\partial r})^{-1} + (\frac{\partial l_2}{\partial r})^{-1}]^{-1}\|^{-1}(\theta, \eta(\theta))$$

où η est l'équation du tore radialement transformé et $L(F) = \varphi$.

Alors, si $D^2\varphi(\theta_0)$ a pour signature $(p, n-p)$ en θ_0 tel que $d\varphi(\theta_0) = 0$, la dimension elliptique du point fixe $(\theta_0, \eta(\theta_0))$ est au moins $2|p - q|$.

L'“hypothèse” 1) est vérifiée dès que F est proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme faiblement monotone et en fait, ici, nous nous contentons de la rappeler, sans imposer de contrainte supplémentaire.

L'“hypothèse” 4 signifie juste que φ est suffisamment proche de 0 en topologie C^2 , ce qui est vérifié si F est proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique.

L'hypothèse 2), elle, sert juste à nommer la signature de la torsion.

Démonstration de la proposition 3.1 . – Pour $\nu \in [0, \Pi]$, posons :

$$R_\nu = M_{e^{i\nu}} = D^2\varphi(\theta_0) + (1 - e^{i\nu})b^{-1} + (1 - e^{-i\nu})^t b^{-1}$$

Ceci définit un chemin continu de matrices hermitiennes donc diagonalisables à valeurs propres réelles, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 = D^2\varphi(\theta_0) \text{ est de signature } (p, n - p); \\ R_\Pi = D^2\varphi(\theta_0) + 2[(\frac{\partial l_1}{\partial r})^{-1} + (\frac{\partial l_2}{\partial r})^{-1}] \text{ est de signature } (q, n - q) \text{ par 4).} \end{array} \right.$$

Aussi, il existe $|p - q|$ valeurs de ν dans $[0, \Pi]$ (comptées avec la dimension de $Ker(R_\nu)$) telles que $Ker(R_\nu) \neq \{0\}$. Si de plus on considère les opposées de ces valeurs de ν , on obtient la conclusion voulue. ■

COROLLAIRE 3. 1. 1. – Soit F un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable ($1 \leq r \leq \infty$) vérifiant les hypothèses 1), 3), 4) de la proposition 3. 1 et à torsion définie.

Alors, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, F a au moins $\binom{n}{p} + \dots + \binom{n}{n}$ points fixes de dimension elliptique au moins $2p$.

En particulier, F a au moins un point fixe totalement elliptique.

Démonstration du corollaire 3. 1. 1. – On applique la proposition 3. 1 en remarquant que si φ est une fonction de Morse, alors, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, φ a au moins $\binom{n}{p}$ points critique en lesquels le Hessien de φ est exactement de signature $(p, n - p)$, c'est-à-dire que φ a au moins $\binom{n}{p} + \dots + \binom{n}{n}$ points critiques tels que le Hessien de φ soit une matrice avec au moins p valeurs propres positives. ■

COROLLAIRE 3. 1. 2. – Soit F un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ proche en topologie C^1 d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable ($1 \leq r \leq \infty$) vérifiant les hypothèses 1), 3), 4) de la proposition 3.1.

– Si la torsion de F est de signature $(q, n - q)$, F a un point fixe de dimension elliptique au moins $2\text{Sup}\{q, n - q\}$.

– F a un point fixe de dimension elliptique au moins $2[(n + 1)/2]$.

PROPOSITION 3. 2. – Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable qui est :

- 1) faiblement monotone;
- 2) à torsion de signature $(q, n - q)$;
- 3) générique;
- 4) tel que, si η est l'équation du tore radialement transformé et $l(H) = f$:

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^n, \|D^2 f(\theta)\| + \|D\eta(\theta) - {}^t D\eta(\theta)\| < \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(\theta, \eta(\theta)) \right\|^{-1}$$

Alors, si $D^2 f(\theta_0)$ a pour signature $(n - p, p)$ en θ_0 tel que $Df(\theta_0) = 0$, la dimension elliptique du point critique $(\theta_0, \eta(\theta_0))$ est au moins $2|p - q|$.

Démonstration de la proposition 3. 2. – Pour $t \in \mathbb{R}_+$, posons :

$$r_t = m_{it} = -t^2 b^{-1} + it(D\eta(\theta) - {}^t D\eta(\theta)) + D^2 f(\theta)$$

où b est la torsion de H .

Ceci définit un chemin continu de matrices hermitiennes, donc diagonalisables à valeurs propres réelles, tel que :

$$\begin{cases} r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\theta_0) \text{ est de signature } (n - p, p); \\ r_1 = -b^{-1} + i(D\eta(\theta_0) - {}^t D\eta(\theta_0)) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\theta_0) \text{ est de signature } (n - q, q) \text{ par 4).} \end{cases}$$

Aussi, il existe $|p - q|$ valeurs de t dans $\mathbf{R}_+ - \{0\}$ (comptées avec la dimension de $Ker(r_t)$) telles que $Ker(r_t) \neq \{0\}$. Si de plus on considère les opposées de ces valeurs de t , on obtient la conclusion voulue. ■

COROLLAIRE 3. 2. 1. - Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable et vérifiant les hypothèses 1), 3) et 4) de la proposition 3. 2 et à torsion définie.

Alors, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, H a au moins $\binom{n}{p} + \dots + \binom{n}{n}$ points critiques de dimension elliptique au moins $2p$.

En particulier, H a au moins un point critique complètement elliptique.

Ce corollaire se démontre comme le corollaire 3. 1. 1.

COROLLAIRE 3. 2. 2. - Soit H un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) proche en topologie C^2 d'un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable et vérifiant les hypothèses 1), 3) et 4) de la proposition 3. 2.

- Si la torsion de H est de signature $(q, n - q)$, H a un point critique de dimension elliptique au moins $2\text{Sup}\{q, n - q\}$;

- H a un point critique de dimension elliptique au moins $2[(n + 1)/2]$.

4. CONTRE-EXEMPLES CONCERNANT LES DIMENSIONS HYPERBOLIQUES

Nous allons commencer par décrire une méthode permettant de construire beaucoup d'exemples de M_λ et m_λ différents.

Nous nous contenterons dans cette partie de traiter le cas de la torsion définie, réservant le cas où la torsion est indéfinie pour la partie 5. En effet, les méthodes dans les deux cas sont les mêmes, mais le cas où la torsion est définie est le plus simple.

Pour cela, on énonce plusieurs lemmes techniques.

LEMME 4. 1. - Soit F_0 un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable donné par : $F_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$ où $\tau \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Soit $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ une fonction de classe C^{r+1} petite en topologie C^2 et F_1 un difféomorphisme exact symplectique de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par : $F_1(\theta, r) = (\theta + g(\theta), (I + {}^t Dg(\theta))^{-1}r)$.

Alors, $F = F_0 \circ F_1$ est exact symplectique faiblement monotone et si η est l'équation du tore radialement transformé par F et $\varphi = L(F)$, on a :

$$- \eta(\theta) = (I + {}^t Dg(\theta))({}^t d\tau)^{-1}(-g(\theta));$$

$$- \varphi(\theta) = {}^t(-g(\theta));$$

$$\text{où on a posé : } {}^t dt = ({}^t d\tau)^{-1}.$$

Dans ce lemme, on introduit de l'antisymétrie dans la torsion du difféomorphisme F à l'aide de F_1 .

Démonstration du lemme 4. 1. - On a donc :

$$F(\theta, r) = (\theta + g(\theta) + {}^t d\tau((I + {}^t Dg(\theta))^{-1}r), (I + {}^t Dg(\theta))^{-1}r)$$

Le tore radialement transformé d'équation η vérifie donc : $g(\theta) + {}^t d\tau((I + {}^t Dg(\theta))^{-1}\eta(\theta)) = 0$ d'où $\eta(\theta) = (I + {}^t Dg(\theta)){}^t dt(-g(\theta))$.

La fonction radiale vérifie donc : ${}^t d\varphi(\theta) = (I + {}^t Dg(\theta))^{-1}\eta(\theta) - \eta(\theta)$; soit : ${}^t d\varphi(\theta) = -{}^t Dg(\theta){}^t dt(-g(\theta))$ et donc $\varphi = {}^t(-g)$. ■

LEMME 4.2. - Soit F_2 le difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) défini par : $F_2(\theta, r) = (\theta, r - {}^t d(t(-g))(\theta))$ et $G = F_2 \circ F$.

Alors, G est exact symplectique faiblement monotone, G a le même tore radialement transformé que F et celui-ci est invariant point par point, et on a de plus, si b désigne la torsion de G :

$$b^{-1}(\theta, \eta(\theta)) = (I + {}^t Dg(\theta))(D^2 t)(-g(\theta))$$

A l'aide de F_2 , on rend le tore radialement transformé fixe (la fonction radiale $L(G)$ est identiquement nulle).

Démonstration du lemme 4.2. - Comme F_2 laisse la coordonnée suivant \mathbf{T}^n fixe, il est clair que G a même tore radialement transformé que F .

De plus, si on note $F(\theta, r) = (\Theta, R)$, alors :

${}^t dL(G)(\theta) = R(\theta, \eta(\theta)) - {}^t d(t(-g))(\theta) - \eta(\theta) = {}^t dL(F) - {}^t d(t(-g))(\theta) = 0$. On peut aussi calculer en $(\theta, \eta(\theta))$:

$$DG(\theta, \eta(\theta)) = DF_2(\Theta, R) \circ DF_0(\theta + g(\theta), dt(-g(\theta))) \circ DF_1(\theta, (I + {}^t Dg(\theta))(dt)(-g(\theta)))$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^2(t(-g))(\theta) & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & D^2\tau(dt(-g(\theta))) \\ 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I + Dg(\theta) & 0 \\ X & (I + {}^t Dg(\theta))^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & D^2\tau(dt(-g(\theta))) \\ D^2(t(-g))(\theta) & X \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I + Dg(\theta) & 0 \\ X & (I + {}^t Dg(\theta))^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & D^2\tau(dt(-g(\theta)))(I + {}^t Dg(\theta))^{-1} \\ X & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où "X" désigne des termes que l'on n'a pas calculés, ce qui donne bien la torsion cherchée. ■

Remarque 4.1. - Avec les mêmes notations que dans les lemmes précédents, on avait déjà remarqué que Γ_η est lagrangien ssi b est symétrique (c.f. la remarque 2. 1). Supposons au contraire que l'antisymétrisée de $D\eta$ soit de rang maximal aux points fixes :

$$D\eta(\theta) - {}^t D\eta(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

où les α_i sont distincts et non nuls avec éventuellement une valeur propre nulle si n est impair. Dans ce cas, Γ_η n'est pas lagrangien. Comme $D\eta(\theta) = -b^{-1}a + b^{-1}$ où $b^{-1}a$ est symétrique, l'antisymétrisée de b est aussi de rang maximal.

Supposons alors que la symétrisée de b soit définie (la torsion est définie); on a alors, si on pose $b^{-1} = S + N$ où S est symétrique définie et N antisymétrique :

$$M_\lambda = (1 - \lambda)b^{-1} + (1 - \lambda^{-1}){}^t b^{-1} = (\lambda^{-1} - 1)[(\lambda - 1)S + (\lambda + 1)N]$$

Supposons par exemple que S est définie positive. Alors :

$$\det(M_\lambda) = (\lambda^{-1} - 1)^n \det S \det[(\lambda - 1)I + (\lambda + 1)S^{-1/2}NS^{-1/2}]$$

Or, les valeurs propres de $S^{-1/2}NS^{-1/2}$ sont imaginaires pures. Donc $\det(M_\lambda)$ s'annule pour $\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = i\alpha \in i\mathbb{R}$, i.e. $\lambda = \frac{1 + i\alpha}{1 - i\alpha}$ est de module 1.

Aussi, aux points fixes de G , Γ_η est normalement elliptique (au moins pour n pair). Cela pourrait nous aider à construire des contre-exemples pour lesquels en tout point fixe, la dimension elliptique est au moins $2[n/2]$, mais nous ferons mieux en fait puisque nous construirons des exemples tels qu'en tout point fixe, la dimension hyperbolique sera au plus 2.

LEMME 4.3 . - Soit $\psi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ une application petite en topologie C^2 ($1 \leq r \leq \infty$) et soit F_3 le difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par : $F_3(\theta, r) = (\theta, r + {}^t d\psi(\theta))$. On suppose alors que g est nulle en tout point critique de ψ et on définit $H = F_3 \circ G$.

Alors, H est un difféomorphisme de classe C^r exact symplectique faiblement monotone, H a le même tore radialement transformé que G , la même torsion et sa fonction radiale est ψ .

On a donc :

$$M_\lambda = D^2\psi(\theta) + (1 - \lambda)(I + {}^t Dg(\theta))(D^2t)(-g(\theta)) + (1 - \lambda^{-1})(D^2t)(-g(\theta))(I + Dg(\theta))$$

Aussi, aux points fixes de H :

$$M_\lambda = D^2\psi(\theta) + (1 - \lambda)(I + {}^t Dg(\theta))(D^2t)(0) + (1 - \lambda^{-1})(D^2t)(0)(I + Dg(\theta))$$

Remarque 4.2 . - A l'aide de F_3 , on rend $L(H)$ de Morse et donc H générique (On choisit ψ de Morse).

Démonstration du lemme 4.3 . - Comme H laisse les coordonnées suivant \mathbb{T}^n fixes, il est clair que H a le même tore radialement transformé que G .

Posons $G(\theta, r) = (\Theta, R)$ et $DG(\theta, r) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors :

$$DH(\theta, r) = DF_3(\Theta, R) \circ DG(\theta, r) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^2\psi(\Theta) & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & b \\ X & X \end{pmatrix}$$

H a donc même torsion que G .

On a : ${}^t dL(H)(\theta) = R(\theta, \eta(\theta)) + {}^t d\psi(\theta) - \eta(\theta) = {}^t d\psi(\theta)$; donc $L(H) = \psi$. ■

LEMME 4.4 . - Notons C_r l'ensemble des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotones complètement intégrables à torsion définie positive. Alors, pour un sous-ensemble dense en topologie C^r de C_r , si $F_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$, on a : $(D^2\tau(0))^{1/2} \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$.

Ce lemme va nous permettre d'exprimer de façon plus simple M_λ dans certains cas :

COROLLAIRE 4. 1 . - Supposons que $(D^2\tau(0))^{-1/2} = (1/\alpha)Z$ où $Z \in M(\mathbf{Z}, n \times n)$ est symétrique définie positive.

Soit $\psi_1 \in C^{r+1}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ petite en topologie C^2 et de Morse, soit $g_1 \in C^{r+1}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ petite en topologie C^2 et nulle en tout point critique de ψ_1 , et posons : $g(\theta) = (D^2\tau(0))^{+1/2}(1/\alpha)g_1(Z\theta)$; $\psi(\theta) = (1/\alpha^2)\psi_1(Z\theta)$.

Alors, ψ est de Morse, l'ensemble des points critiques de ψ est, si C_1 est l'ensemble des points critiques de ψ_1 :

$$C = Z^{-1}(C_1) + (Z^{-1}(\mathbf{Z}^n))/(\mathbf{Z}^n).$$

Et, aux points fixes de H , on a pour $H : M_\lambda = (D^2\tau(0))^{-1/2}.P_\lambda.(D^2\tau(0))^{-1/2}$ où on définit :

$$P_\lambda = D^2\psi_1(Z\theta) + (1-\lambda)(I + {}^t Dg_1(Z\theta)) + (1-(1/\lambda))(1 + Dg_1(Z\theta))$$

Remarque 4. 3 . - Choissant ψ_1 de Morse, on pourra bien sûr trouver sans difficulté g_1 de classe C^r (et même analytique) nulle sur C_1 et choisir Dg_1 comme on en aura besoin pour construire des contre-exemples.

Démonstration du corollaire 4. 1 . - Par définition, $\psi(\theta) = (1/\alpha^2)\psi_1(Z\theta)$ et donc $D\psi(\theta) = (1/\alpha^2)D\psi_1(Z\theta)Z = (1/\alpha).D\psi_1(Z\theta).(D^2\tau(0))^{-1/2}$; θ est donc un point critique de ψ si et seulement si $Z\theta$ est un point critique de ψ_1 , ce qui prouve bien que C est l'ensemble des points critiques de ψ .

De plus, $D^2\psi(\theta) = (D^2\tau(0))^{-1/2}.D^2\psi_1(Z\theta).(D^2\tau(0))^{-1/2}$ et donc ψ est bien de Morse.

Et : $Dg(\theta) = (D^2\tau(0))^{+1/2}.Dg_1(Z\theta).(D^2\tau(0))^{-1/2}$.

Aussi, à l'aide du lemme 4. 3, on peut exprimer :

$$M_\lambda = D^2\psi(\theta) + (1-\lambda)(I + {}^t Dg(\theta))(D^2\tau(0)) + (1-\lambda^{-1})(D^2\tau(0))(I + Dg(\theta))$$

$$= (D^2\tau(0))^{-1/2}[D\psi_1(Z\theta) + (1-\lambda)(I + {}^t Dg_1(Z\theta)) + (1-\lambda^{-1})(I + Dg_1(Z\theta))][D^2\tau(0)]^{-1/2}. \blacksquare$$

Faisons maintenant une construction analogue pour les hamiltoniens :

LEMME 4. 5 . - Soit I_r , l'ensemble des hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrables à torsion définie positive .

Alors, pour un sous-ensemble dense en topologie C^r de I_r :

$$\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2}(0)\right)^{1/2} \in M(\mathbf{Q}, n \times n)$$

Nous pouvons grâce à ce lemme exprimer m_λ simplement dans certains cas.

COROLLAIRE 4. 2 . - Soit H_0 un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable à torsion définie positive.

On suppose que $\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2}(0)\right)^{1/2} = \frac{1}{\alpha}Z$ où $Z \in M(\mathbf{Z}, n \times n)$ est symétrique définie positive.

Soit $\psi_1 \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ petite en topologie C^2 et de Morse, soit $\eta_1 \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ petite en topologie C^2 et nulle en tout point critique de ψ_1 , et posons :

$$\eta(\theta) = (D^2 H_0(0))^{-1/2} (1/\alpha) \eta_1(Z\theta); \quad \psi(\theta) = (1/\alpha^2) \psi_1(Z\theta); \quad H(\theta, r) = H_0(r - \eta(\theta)) + \psi(\theta).$$

Alors, H est aussi faiblement monotone, son tore radialement transformé est d'équation η , sa fonction radiale est ψ et aux points critiques de H , on a pour H :

$$m_\lambda = (D^2 H_0(0))^{-1/2} \cdot p_\lambda \cdot (D^2 H_0(0))^{-1/2} \text{ où on définit :}$$

$$p_\lambda = \lambda^2 I + \lambda(D\eta_1(Z\theta) - {}^t D\eta_1(Z\theta)) + D^2 \psi_1(Z\theta)$$

Démonstration du corollaire 4.2 . - Un point (θ, r) du tore radialement transformé par H vérifie : $\frac{\partial H}{\partial r}(\theta, r) = 0$, c'est-à-dire : $\frac{\partial H_0}{\partial r}(r - \eta(\theta)) = 0$ i.e. comme H_0 est complètement intégrable : $r = \eta(\theta)$.

De plus : $l(H)(\theta) = H(\theta, \eta(\theta)) = \psi(\theta)$.

On calcule alors : $m_\lambda = \lambda^2 b^{-1} + \lambda(D\eta(\theta) - {}^t D\eta(\theta)) + D^2 \psi(\theta)$ où b désigne la torsion et on obtient bien le résultat cherché. ■

Nous allons maintenant construire des contre-exemples à l'aide de ces lemmes :

PROPOSITION 4.1 . - Soit F_0 un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable à torsion définie donné par : $F_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$ (et donc $\tau \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est strictement concave ou strictement convexe au voisinage de 0) .

Alors, il existe un ouvert Ω en topologie C^r de difféomorphismes exacts symplectiques génériques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que :

- $F_0 \in \text{Adh}_r(\Omega)$;

- tout point fixe de tout élément de Ω près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ est de dimension hyperbolique au plus 2.

Démonstration de la proposition 4.1 . - Quitte à remplacer F_0 par F_0^{-1} , on peut supposer la torsion définie positive. De plus, en utilisant le lemme 4.4, on peut supposer que $(D^2 \tau(0))^{1/2} \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$. Remarquons aussi qu'il suffit de trouver une suite de difféomorphismes exacts symplectiques génériques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tendant vers F_0 en topologie C^r et telle que tout point fixe de tout élément de la suite près de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ est de dimension hyperbolique au plus 2.

On reprend les mêmes notations que dans le corollaire 4.1 et on pose : $\psi_1(\theta) = -\frac{\varepsilon}{4\Pi^2} (\cos 2\Pi\theta_1 + \dots + \cos 2\Pi\theta_n)$ où $0 < \varepsilon < 1/2$.

L'ensemble des points critiques de ψ_1 est $\{0, 1/2\}^n$.

On impose alors à g_1 d'être nul en ces points critiques, et en ces points critiques, on impose des valeurs à Dg_1 , décrites ci-dessous :

soit $\theta \in \{0, 1/2\}^n$, posons donc $I = \{i; \theta_i = 0\}$ et $J = \{i; \theta_i = 1/2\} = \{1, \dots, n\} - I$. On impose alors :

$$\left(\frac{\partial g_{1,i}}{\partial \theta_j}(\theta) \right)_{(i,j) \in I^2} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec une valeur propre nulle si $\text{Card}(I)$ est impair. On suppose que les α_i sont non nuls, positifs, distincts, inférieurs à 1 et que : $\forall i \in I, \alpha_i^2 > \varepsilon + (\varepsilon/4)$.

$$\left(\frac{\partial g_{1,i}}{\partial \theta_j}(\theta) \right)_{(i,j) \in J^2} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & \\ -\beta_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec une valeur propre nulle si $\text{Card}(J)$ est impair. On suppose que les β_j sont non nuls, distincts, positifs et que : $\forall (i, j) \in I \times J, \beta_j > \alpha_i$

On complète ensuite par des zéros pour obtenir $Dg_1(\theta)$.

Trois types de matrices peuvent ainsi intervenir pour $Dg_1(\theta)$:

si n est impair : $n = 2(k + m) + 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & \\ -\beta_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

si n est pair : $n = 2(k + m)$:

$$\left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & \\ -\beta_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$n = 2(k + m + 1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & & \\ -\beta_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Aussi, dans M_λ , seuls quatre types de matrices interviennent le long de la diagonale et donc quatre types de facteurs interviennent dans $\det(M_\lambda)$ (où on note $x = 2 - \lambda - \lambda^{-1}$ et où, rappelons le : $(\lambda - \lambda^{-1})^2 = x(x - 4)$) :

1) $P_{\alpha}^{+}(x) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda - \lambda^{-1} + \varepsilon & (\lambda - \lambda^{-1})\alpha \\ -(\lambda - \lambda^{-1})\alpha & 2 - \lambda - \lambda^{-1} + \varepsilon \end{pmatrix} = (x + \varepsilon)^2 + \alpha^2 x(x - 4)$
 $= (1 + \alpha^2)x^2 - 2(2\alpha^2 - \varepsilon)x + \varepsilon^2$; le discriminant réduit est : $\Delta' = \alpha^2(4\alpha^2 - 4\varepsilon - \varepsilon^2) > 0$ car on a supposé $\alpha^2 > \varepsilon + \varepsilon^2/4$. Donc P_{α}^{+} a deux racines réelles, distinctes, positives car leur produit est $\varepsilon^2/(1 + \alpha^2) > 0$ et leur somme est $2(2\alpha^2 - \varepsilon)/(1 + \alpha^2) > 0$, différentes de 0 et ε .
 De plus, si $\alpha \neq \alpha^*$, on a $P_{\alpha}^{+} - P_{\alpha^*}^{+} = (\alpha^2 - \alpha^{*2})x(x - 4)$ et donc les racines de P_{α}^{+} et de $P_{\alpha^*}^{+}$ sont distinctes.

2) $P_{\beta}^{-}(x) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda - \lambda^{-1} - \varepsilon & (\lambda - \lambda^{-1})\beta \\ -(\lambda - \lambda^{-1})\beta & 2 - \lambda - \lambda^{-1} - \varepsilon \end{pmatrix}$
 $= (x - \varepsilon)^2 + \beta^2 x(x - 4) = (1 + \beta^2)x^2 - 2(2\beta^2 + \varepsilon)x + \varepsilon^2$
 Le discriminant réduit est : $\Delta' = \beta^2(4\beta^2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2) > 0$ car on a supposé $1 > \varepsilon > 0$.
 Donc P_{β}^{-} a deux racines réelles, distinctes, positives car leur produit est $\varepsilon^2/(1 + \beta^2) > 0$ et leur somme est $2(2\beta^2 + \varepsilon)/(1 + \beta^2) > 0$, différentes de 0 et ε . De plus, si $\beta \neq \beta^*$, on a $P_{\beta}^{-} - P_{\beta^*}^{-} = (\beta^2 - \beta^{*2})x(x - 4)$ et donc les racines de P_{β}^{-} et de $P_{\beta^*}^{-}$ sont distinctes.
 Si $\beta > \alpha$, supposons que P_{α}^{+} et P_{β}^{-} aient une racine commune x_0 . Soit x_{α} (resp. x_{β}) l'autre racine de P_{α}^{+} (resp. P_{β}^{-}). Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 x_{\alpha} = \frac{\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} > \frac{\varepsilon^2}{1 + \beta^2} = x_{\beta} x_0 \text{ donc } x_{\alpha} > x_{\beta}; \\ x_{\alpha} + x_0 = 2 \frac{2\alpha^2 - \varepsilon}{1 + \alpha^2} = 2(2 - \frac{2 + \varepsilon}{1 + \alpha^2}) < 2(2 - \frac{2 - \varepsilon}{1 + \beta^2}) = 2 \frac{2\beta^2 + \varepsilon}{1 + \beta^2} = x_{\beta} + x_0 \text{ donc } x_{\alpha} < x_{\beta} \end{array} \right.$$

d'où une contradiction. Donc P_{α}^{+} et P_{β}^{-} ont des racines distinctes.

3) $\det(2 - \lambda - \lambda^{-1} - \varepsilon) = 2 - \lambda - \lambda^{-1} - \varepsilon = x - \varepsilon$ admet ε comme racine.

4) $\det(2 - \lambda - \lambda^{-1} + \varepsilon) = 2 - \lambda - \lambda^{-1} + \varepsilon = x + \varepsilon$ admet $-\varepsilon$ comme racine.

Aussi, en tout point fixe, $\det(M_{\lambda})$ a au moins $2(n - 1)$ racines de module 1 distinctes et en chaque point fixe, les valeurs propres de DH sont distinctes, ce qui permet de conclure. ■

PROPOSITION 4.2 . - Soit H_0 un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable strictement convexe ou strictement concave au voisinage de 0

Alors, il existe un ouvert U en topologie C^{r+1} de hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ génériques tel que :

- $H_0 \in \text{Adh}_{r+1}(U)$;
- tout point critique de tout élément de U près de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$ est de dimension hyperbolique au plus 2.

Démonstration de la proposition 4.2 . - Quitte à changer H_0 en $(-H_0)$, on peut supposer H_0 convexe. De plus, en utilisant le lemme 4.5, on peut supposer que $(D^2 H_0(0))^{-1/2} = (1/\alpha)Z$ où $Z \in M(\mathbf{Z}, n \times n)$. Comme pour les difféomorphismes, on cherche une suite de hamiltoniens génériques qui sont des contre-exemples et tendent vers H_0 en topologie C^{r+1} .

On reprend les mêmes notations que dans le corollaire 4. 2 , et on prend le même ψ_1 que dans la démonstration de la proposition 4. 1 . En un point critique $\theta \in \{0, 1/2\}^n$ de ψ_1 , on pose encore : $I = \{i; \theta_i = 0\}$ et $J = \{1, \dots, n\} - I$ et on impose $D\eta_1(\theta)$ en tout point critique θ de ψ_1 :

$$\left(\frac{\partial \eta_{1,i}}{\partial \theta_j}(\theta) \right)_{(i,j) \in I^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} \text{ avec une valeur propre nulle si Card}(I) \text{ est impair. On}$$

suppose que les α_i sont non nuls, positifs, distincts et inférieurs à 1.

$$\left(\frac{\partial \eta_{1,i}}{\partial \theta_j}(\theta) \right)_{(i,j) \in J^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2} \\ -\frac{\beta_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} \text{ avec une valeur propre nulle si Card}(J) \text{ est impair. On}$$

suppose que les β_j sont non nuls, distincts et positifs. On suppose aussi que : $\forall j \in J, \beta_j > 2\varepsilon^{1/2}$ et que : $\forall (i, j) \in I \times J, \beta_j^2 - 2\varepsilon \neq \alpha_i^2 + 2\varepsilon$.

On complète ensuite par des zéro pour obtenir $D\eta_1(\theta)$.

Trois types de matrices peuvent ainsi intervenir pour $D\eta_1(\theta)$:

si n est impair : $n = 2(k + m) + 1$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2} \\ -\frac{\beta_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

si n est pair : $n = 2(k + m)$:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2} \\ -\frac{\beta_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$n = 2(k + m + 1)$:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1}{2} \\ -\frac{\alpha_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2} \\ -\frac{\beta_1}{2} & 0 \\ & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aussi, dans m_λ , seuls quatre types de matrices interviennent le long de la diagonale et donc quatre types de facteurs interviennent dans $\det(m_\lambda)$ (où on note $\mu = \lambda^2$)

1) $P_\alpha^+(\mu) = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 + \varepsilon & \lambda\alpha \\ -\lambda\alpha & \lambda^2 + \varepsilon \end{pmatrix} = (\mu + \varepsilon)^2 + \alpha^2\mu = \mu^2 + (\alpha^2 + 2\varepsilon)\mu + \varepsilon^2$ Le discriminant réduit est : $\Delta' = (\alpha^2 + 2\varepsilon)^2 - (2\varepsilon)^2 > 0$.

Donc P_α^+ a deux racines réelles, distinctes, négatives car leur produit est $\varepsilon^2 > 0$ et leur somme est $-(\alpha^2 + 2\varepsilon) < 0$, différentes de 0 et $-\varepsilon$.

De plus, si $\alpha \neq \alpha^*$, on a $P_\alpha^+ - P_{\alpha^*}^+ = (\alpha^2 - \alpha^{*2})\mu$ et donc les racines de P_α^+ et de $P_{\alpha^*}^+$ sont distinctes.

$$2) P_\beta^-(\mu) = \det \begin{pmatrix} \lambda^2 - \varepsilon & \lambda\beta \\ -\lambda\beta & \lambda^2 - \varepsilon \end{pmatrix} = (\mu - \varepsilon)^2 + \beta^2\mu = \mu^2 + (\beta^2 - 2\varepsilon)\mu + \varepsilon^2$$

Le discriminant réduit est : $\Delta' = (\beta^2 - 2\varepsilon)^2 - (2\varepsilon)^2 > 0$ car on a supposé $\beta^2 > 4\varepsilon$.

Donc P_β^- a deux racines réelles, distinctes, négatives car leur produit est $\varepsilon^2 > 0$ et leur somme est $-(\beta^2 - 2\varepsilon) < 0$, différentes de 0 et $-\varepsilon$.

De plus, si $\beta \neq \beta^*$, on a $P_\beta^- - P_{\beta^*}^- = (\beta^2 - \beta^{*2})\mu$ et donc les racines de P_β^- et de $P_{\beta^*}^-$ sont distinctes. Si de plus, $\beta^2 - 2\varepsilon \neq \alpha^2 + 2\varepsilon$, les racines de P_α^+ et P_β^- sont distinctes.

$$3) \det(\lambda^2 - \varepsilon) = \lambda^2 - \varepsilon = \mu - \varepsilon \text{ admet } \varepsilon \text{ comme racine.}$$

$$4) \det(\lambda^2 + \varepsilon) = \lambda^2 + \varepsilon = \mu + \varepsilon \text{ admet } (-\varepsilon) \text{ comme racine.}$$

Aussi, en tout point critique, $\det(m_\lambda)$ a au moins $2(n-1)$ racines imaginaires pures distinctes et en chaque point critique, les valeurs propres de DX_H sont distinctes, ce qui permet de conclure.



Ces deux dernières propositions nous permettent de conclure que les propositions de la partie 3 sont optimales quand la torsion est définie : on peut minorer les dimensions elliptiques d'après la partie 3, mais on ne peut à priori rien dire sur les dimensions hyperboliques.

5. CONTRE-EXEMPLES DANS LE CAS OU LA TORSION EST INDÉFINIE

Nous allons maintenant exploiter les méthodes de constructions de contre-exemples exposées dans la partie 4 pour construire des contre-exemples dans le cas où la torsion est indéfinie. Rappelons en effet que les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 ne supposaient pas que la torsion était définie, et nous allons pouvoir les utiliser dans cette partie.

La première proposition expose comment, à partir de certains “contre-exemples” au voisinage en topologie C^r d’un certain difféomorphisme exact symplectique “linéaire” de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable de torsion de signature $(q, n-q)$, on peut construire des “contre-exemples” au voisinage de tout difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable de torsion de signature $(q, n-q)$.

PROPOSITION 5.1 . - Notons $C_{r,q}$ (resp. $I_{r,q}$) l’ensemble des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. hamiltoniens de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotones complètement intégrables à torsion de signature $(q, n - q)$.

Supposons qu’il existe F_0 dans $C_{r,q}$ (resp. H_0 dans $I_{r,q}$) défini par $F_0(\theta, r) = (\theta + Br, r)$ (resp. $H_0(\theta, r) = (1/2)^t r Br$) où B est symétrique non dégénérée et $\varepsilon > 0$ tels que tout voisinage en topologie C^r de F_0 (resp. tout voisinage en topologie C^{r+1} de H_0) contienne un difféomorphisme exact symplectique (resp. hamiltonien) générique ayant au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ des points fixes (resp. critiques en lesquels pour tous la torsion est B) dont les dimensions elliptiques décrivent exactement l’ensemble $E \subset \{0, 2, \dots, 2n\}$ et dont les distances des n-uplets de coordonnées sur \mathbb{T}^n pris deux à deux (pour la distance usuelle) sont toutes plus grandes que ε .

Alors, il existe un ouvert U en topologie C^r (resp. Ω en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques (resp. hamiltoniens) génériques tel que tout élément de U (resp. Ω) a au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ des points fixes (resp. critiques) dont les dimensions elliptiques décrivent exactement l’ensemble E et tel que $C_{r,q}$ (resp. $I_{r,q}$) soit inclus dans l’adhérence en topologie C^r de U (resp. l’adhérence en topologie C^{r+1} de Ω).

Démonstration de la proposition 5.1 . -

- 1) On considère F_0 et B comme dans l’énoncé.

Il existe donc une suite $(F_{0,i})$ de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tendant vers F_0 en topologie C^r et telle que pour tout i , l'ensemble des dimensions elliptiques des points fixes de $F_{0,i}$ au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ soit exactement E et tels que les distances des n -uplets des coordonnées des points fixes de $F_{0,i}$ suivant \mathbb{T}^n pris deux à deux vérifient les hypothèses de la proposition.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note alors φ_i la fonction radiale et b_i la torsion (où on posera $b_i^{-1} = B^{-1} + m_i$) de $F_{0,i}$. Sur le tore radialement transformé par $F_{0,i}$, on a alors : φ_i et m_i tendent vers 0 quand i tend vers l'infini.

Soit alors G_0 un élément de $C_{r,q}$: $G_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$ où $\tau \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

De façon analogue à ce que nous avons fait dans le lemme 4.4, on montre aisément qu'on peut trouver $P \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$ telle que ${}^t PBP$ soit aussi proche qu'on le veut de $D^2\tau(0)$. Il suffit donc de supposer que $D^2\tau(0) = {}^t PBP$ où $P \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$.

Ayant un tel P , on peut écrire : $(D^2\tau(0))^{-1} = (1/\alpha^2){}^t ZB^{-1}Z$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et où $Z \in M(\mathbb{Z}, n \times n)$.

On pose alors : $\forall i \in \mathbb{N}, \psi_i(\theta) = (1/\alpha^2)\varphi_i(Z\theta)$ et $g_i(\theta) = Z^{-1}h_i(Z\theta)$ où $h_i \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ est nulle aux points critiques de φ_i et où en tout point critique θ_i de φ_i , on impose : $Dh_i(\theta_i) = B^t m_i(\theta_i)$.

Définissons alors deux difféomorphismes exacts symplectiques $F_{1,i}$ et $F_{2,i}$ de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ par : $F_{1,i}(\theta, r) = (\theta + g_i(\theta), (I + {}^t Dg_i(\theta))^{-1}r)$ et $F_{2,i}(\theta, r) = (\theta, r + {}^t d[\psi_i - t(-g_i)](\theta))$ où on définit $t \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ par ${}^t dt = ({}^t dr)^{-1}$.

On considère alors $H_i = F_{2,i} \circ F_0 \circ F_{1,i}$; alors, ψ_i tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$ en topologie C^{r+1} et on peut aussi s'arranger pour que g_i tende vers 0 en topologie C^{r+1} . On peut donc s'arranger pour que H_i tende vers F_0 en topologie C^r quand i tend vers l'infini.

Alors, on a vu dans les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 que H_i a pour fonction radiale ψ_i et que si l'équation du tore radialement transformé par H_i est η_i et si on note B_i la torsion de H_i , alors on a pour tout $\theta \in \mathbb{T}^n$: $B_i^{-1}(\theta, \eta_i(\theta)) = (I + {}^t Dg_i(\theta))(D^2t)(-g_i(\theta))$.

Or, d'après la définition de g_i , on a en un point critique θ de ψ_i : $Dg_i(\theta) = Z^{-1}Dh_i(Z\theta)Z = Z^{-1}B^t m_i(Z\theta)Z$; donc en un point critique de ψ_i , on a : $B_i^{-1}(\theta, \eta_i(\theta)) = (1/\alpha^2)(I + {}^t Zm_i(Z\theta)B^t Z^{-1}){}^t ZB^{-1}Z = (1/\alpha^2){}^t Z(B^{-1} + m_i(Z\theta))Z$;

On peut donc écrire : en un point critique de ψ_i , on a pour H_i $M_{\lambda,i} = (1/\alpha^2){}^t ZP_{\lambda,i}Z$ où $P_{\lambda,i} = D^2\varphi_i(Z\theta) + (1-\lambda)(B^{-1} + m_i(Z\theta)) + (1-\lambda^{-1})(B^{-1} + {}^t m_i(Z\theta))$.

Aussi, en un point θ critique de ψ_i , $M_{\lambda,i}$ est équivalente à $P_{\lambda,i}$ qui elle est en fait la matrice correspondante pour $F_{0,i}$ en $Z\theta$. Aussi, l'ensemble des types des points fixes de H_i est le même que l'ensemble des types des points fixes de $F_{0,i}$.

Ceci nous permet de conclure dans le cas des difféomorphismes.

2) On considère H_0 et B comme dans l'énoncé.

Il existe donc une suite $(H_{0,i})$ de hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tendant vers H_0 en topologie C^{r+1} et telle que pour tout i , l'ensemble des dimensions elliptiques des points critiques de $H_{0,i}$ au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ soit exactement E et tels que les distances des n -uplets des

coordonnées des points critiques de $H_{0,i}$ suivant \mathbb{T}^n pris deux à deux vérifient les hypothèse de la proposition.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note alors φ_i la fonction radiale, b_i la torsion et h_i l'équation du tore radialement transformé de $H_{0,i}$; on écrira en particulier : $Dh_i - {}^t Dh_i = 2m_i$. Sur le tore radialement transformé par $H_{0,i}$, on a alors : φ_i et m_i tendent vers 0 quand i tend vers l'infini et b_i tend vers B quand i tend vers l'infini.

Soit alors h_0 un élément de $I_{r,q}$: $h_0(\theta, r) = h_0(r)$.

De façon analogue à ce que nous avons fait dans le lemme 4. 5, on montre aisément qu'on peut trouver $P \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$ telle que ${}^t PBP$ soit aussi proche qu'on le veut de $D^2 h_0(0)$. Il suffit donc de supposer que $D^2 h_0(0) = {}^t PBP$ où $P \in M(\mathbb{Q}, n \times n)$.

Ayant un tel P , on peut écrire : $(D^2 h_0(0))^{-1} = (1/\alpha^2) {}^t ZB^{-1}Z$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et où $Z \in M(\mathbb{Z}, n \times n)$.

On pose alors : $\forall i \in \mathbb{N}, \psi_i(\theta) = (1/\alpha^2) \varphi_i(Z\theta)$ et $\eta_i(\theta) = (1/\alpha^2) {}^t Z\gamma_i(Z\theta)$ où $\gamma_i \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ est nulle aux points critiques de φ_i et où en tout point critique θ_i de φ_i , on impose : $D\gamma_i(\theta_i) = m_i(\theta_i)$.

Définissons alors le hamiltonien $h_{0,i}$ de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ par : $h_{0,i}(\theta, r) = H_0(r - \eta_i(\theta)) + \psi_i(\theta)$. Alors, ψ_i tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$ en topologie C^{r+1} et on peut aussi s'arranger pour que η_i tende vers 0 en topologie C^{r+1} . On peut donc s'arranger pour que $h_{0,i}$ tende vers h_0 en topologie C^{r+1} quand i tend vers l'infini.

Alors, $h_{0,i}$ a pour fonction radiale ψ_i et l'équation du tore radialement transformé par $h_{0,i}$ est η_i et si on note B_i la torsion de $h_{0,i}$, alors on a pour tout $\theta \in \mathbb{T}^n$ point critique de ψ_i :

$$B_i^{-1}(\theta, \eta_i(\theta)) = \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2}(0)\right)^{-1} = (1/\alpha^2) {}^t ZBZ;$$

$$D\eta_i(\theta) = (1/\alpha^2) {}^t ZD\gamma_i(Z\theta)Z = (1/\alpha^2) {}^t Zm_i(Z\theta)Z;$$

$$D^2 \psi_i(\theta) = (1/\alpha^2) {}^t ZD^2 \varphi_i(Z\theta)Z.$$

On peut donc écrire : en un point critique de ψ_i , on a pour $h_{0,i}$ $m_{\lambda,i} = (1/\alpha^2) {}^t Zp_{\lambda,i}Z$ où $p_{\lambda,i} = D^2 \varphi_i(Z\theta) + 2\lambda m_i(Z\theta) + \lambda^2 B^{-1}$.

Aussi, en un point θ critique de ψ_i , $m_{\lambda,i}$ est équivalente à $p_{\lambda,i}$ qui elle est en fait la matrice correspondante pour $H_{0,i}$ en $Z\theta$. Aussi, l'ensemble des types des points critiques de $h_{0,i}$ est le même que l'ensemble des types des points critiques de $H_{0,i}$.

Ceci nous permet de conclure dans le cas des hamiltoniens. ■

Cette proposition va nous permettre de construire des contre-exemples au voisinage de tous les difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. tous les hamiltoniens de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotones complètement intégrables à partir de contre-exemples au voisinage d'un seul difféomorphisme (resp. hamiltonien) .

On peut par exemple déduire de cette proposition et de la propriété 2. 3 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5. 1. 1 . - Soit F_0 (resp. H_0) un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. un hamiltonien de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable à torsion indéfinie. Alors :

1) Il existe un ouvert U_1 (resp. Ω_1) en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. hamiltoniens de classe C^{r+1}) faiblement monotones de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ contenant F_0 (resp. H_0) dans son adhérence en topologie C^r (resp. C^{r+1}) et tel que tout élément de U_1 (resp. de Ω_1) n'a pas de point fixe (resp. critique) complètement elliptique.

2) Il existe un ouvert U_2 (resp. Ω_2) en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. hamiltoniens de classe C^{r+1}) faiblement monotones de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ contenant F_0 (resp. H_0) dans son adhérence en topologie C^r (resp. C^{r+1}) et tel que tout élément de U_2 (resp. de Ω_2) n'a pas de point fixe (resp. critique) hyperbolique.

On peut aussi écrire le corollaire :

COROLLAIRE 5. 1. 2 . - Soit F_0 (resp. H_0) un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. un hamiltonien de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable.

Alors, il existe un ouvert U (resp. Ω) en topologie C^r (resp. en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. hamiltoniens de classe C^{r+1}) faiblement monotones de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ contenant F_0 (resp. H_0) dans son adhérence en topologie C^r (resp. C^{r+1}) et tel que tout élément de U (resp. de Ω) présente tous les types de points fixes (resp. critiques) au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$.

Démonstration du corollaire 5. 1. 2 . - On va appliquer la proposition 5. 1 .

1) Tout d'abord, on considère un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable F_0 défini par : $F_0(\theta, r) = (\theta + Br, r)$ où : $B = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_{n-q} \end{pmatrix}$ où I_q désigne la matrice identité de $M(\mathbb{R}, q \times q)$.

On définit alors F_ε un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ par $F_\varepsilon(\theta, r) = (\theta + Br, r + \varepsilon^t d\varphi(\theta + Br))$ où ε est un petit paramètre réel et où $\varphi(\theta) = \cos(2\Pi\theta_1) + 2\cos(2\Pi\theta_2) + \dots + n\cos(2\Pi\theta_n)$. Alors, F_ε est générique et présente tous les types de points fixes, ce qui permet de conclure avec la proposition 5. 1.

2) Ensuite, avec les mêmes notations que ci-dessus, on considère les hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ définis par : $H_\varepsilon(\theta, r) = (1/2)^t rBr + \varepsilon\varphi(\theta)$.

On conclut encore à l'aide de la proposition 5. 1. ■

De ce dernier corollaire on peut encore déduire :

COROLLAIRE 5. 1. 3 . - Soit F_0 (resp. H_0) un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. un hamiltonien de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable.

Alors, il existe aussi près que l'on veut en topologie C^r de F_0 (resp. en topologie C^{r+1} de H_0) un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. un hamiltonien de classe C^{r+1})

de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ générique ayant un point fixe (resp. critique) complètement elliptique et un point fixe (resp. critique) hyperbolique.

Nous allons maintenant faire des constructions analogues à celles faites dans les propositions 4. 1 et 4. 2 afin d'appliquer encore la proposition 5. 1.

PROPOSITION 5. 2 . - Pour tout r vérifiant $1 \leq r \leq \infty$ et tout $q \in \{0, \dots, n\}$, il existe un ouvert U_q en topologie C^r (resp. Ω_q en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. de hamiltoniens de classe C^{r+1}) de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotones tel que :

- $\text{Adh}_r(U_q)$ contient tous les difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotones complètement intégrables (resp. $\text{Adh}_{r+1}(\Omega_q)$ contient tous les hamiltoniens de classe C^{r+1} de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotones complètement intégrables) à torsion de signature $(q, n - q)$.

- La dimension elliptique de tout point fixe (resp. critique) de tout élément de U_q (resp. Ω_q) est au plus $2\text{Sup}\{q, n - q\}$.

Cette proposition prouve en particulier que les inégalités sur les dimensions elliptiques données dans les propositions 3. 1 et 3. 2 sont optimales (même dans le cas où la torsion est indéfinie).

Démonstration de la proposition 5. 2 . - Encore une fois, nous allons utiliser la proposition 5. 1. Remarquons que quitte à changer les difféomorphismes en leurs inverses, on peut supposer que $q \geq n - q$, ce que nous supposerons dans la démonstration.

1) Soit F_0 le difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable défini par : $F_0(\theta, r) = (\theta + Br, r)$ où B est de signature $(q, n - q)$ de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, B présente $(n - q)$ blocs 2×2 indéfinis et $2q - n$ "1" sur la diagonale.

On considère ensuite des difféomorphismes F_ε exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ définis par, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ petit : $F_\varepsilon(\theta, r) = (\theta + Br, r + \varepsilon^t d\varphi(\theta + Br))$ où $\varphi(\theta) = (4\Pi^2)^{-1}(\cos(2\Pi\theta_1) + 2 \cos(2\Pi\theta_2) + \dots + n \cos(2\Pi\theta_n))$.

Alors, pour F_ε , on a : $M_{\varepsilon, \lambda} = \varepsilon D^2\varphi(\theta) + xB^{-1}$ où $x = 2 - \lambda - \lambda^{-1}$. Or, si θ est un point critique de φ où l'on pose $\varepsilon i \cos(2\Pi\theta_i) = c_i$, les seuls facteurs intervenant dans $\det(M_{\varepsilon, \lambda})$ sont :

- (n-q) termes de la forme $(c_{2i}c_{2i-1} - x^2)$ où $i \in \{1, \dots, n - q\}$;

- n-2(n-q) termes de la forme $(c_j + x)$ où $j \in \{n - q + 1, \dots, n\}$.

Or, si $c_{2i}c_{2i-1} > 0$, $(c_{2i}c_{2i-1} - x^2)$ a une racine positive et une racine négative en x , ce qui correspond à deux valeurs de λ hyperboliques réelles et deux valeurs de λ elliptiques (comme précédemment, on choisit ε suffisamment petit de telle sorte que les racines λ de $\det(M_\lambda)$ vérifient $|x| < 4$).

Si au contraire $c_{2i}c_{2i-1} < 0$, $(c_{2i}c_{2i-1} - x^2)$ a deux racines imaginaires pures, ce qui correspond à quatre valeurs de λ hyperboliques complexes.

De plus, si $c_j > 0$, $(c_j + x)$ a une racine négative, ce qui correspond à deux valeurs de λ hyperboliques réelles.

Si au contraire $c_j < 0$, $(c_j + x)$ a une racine positive, ce qui correspond à deux valeurs de λ elliptiques.

De toute façon, pour $i \in \{1, \dots, n - q\}$, $(c_{2i}c_{2i-1} - x^2)$ a au plus une racine positives, donc $\det(M_{\varepsilon,\lambda})$ a au moins 2(n-q) racines hyperboliques et donc a au plus $2q = 2\text{Sup}\{q, n - q\}$ racines elliptiques.

2) On reprend les mêmes notations qu'en 1) pour B et φ . Soit H_0 le hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable défini par : $H_0(\theta, r) = (1/2)^t r B r$. On considère ensuite les hamiltoniens H_ε exacts symplectiques de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ définis par, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ petit : $H_\varepsilon(\theta, r) = H_0(r) + \varepsilon\varphi(\theta)$.

Alors, pour H_ε , on a : $m_{\varepsilon,\lambda} = \varepsilon D^2\varphi(\theta) + \lambda^2 B^{-1}$. Or, si θ est un point critique de φ où l'on pose $\varepsilon i \cos(2\Pi\theta_i) = c_i$, les seuls facteurs intervenant dans $\det(M_{\varepsilon,\lambda})$ sont :

- (n-q) termes de la forme $(c_{2i}c_{2i-1} - \lambda^4)$ où $i \in \{1, \dots, n - q\}$;

- n-2(n-q) termes de la forme $(c_j + \lambda^2)$ où $j \in \{n - q + 1, \dots, n\}$.

Or, si $c_{2i}c_{2i-1} > 0$, $(c_{2i}c_{2i-1} - \lambda^4)$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires pures.

Si au contraire $c_{2i}c_{2i-1} < 0$, $(c_{2i}c_{2i-1} - \lambda^4)$ a quatre racines dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

De plus, si $c_j > 0$, $(c_j + \lambda^2)$ a deux racines imaginaires pures.

Si au contraire $c_j < 0$, $(c_j + \lambda^2)$ a deux racines réelles.

De toute façon, pour $i \in \{1, \dots, n - q\}$, $(c_{2i}c_{2i-1} - \lambda^4)$ a au plus deux racines imaginaires pures, donc $\det(m_{\varepsilon,\lambda})$ a au moins 2(n-q) racines hyperboliques et donc a au plus $2q = 2\text{Sup}\{q, n - q\}$ racines elliptiques. ■

Remarquons que dans cette dernière proposition, les contre-exemples que nous construisons présentent des valeurs propres hyperboliques **complexes**. On peut se demander si on peut construire de tels contre-exemples dont toutes les valeurs propres hyperboliques sont réelles. J'ignore la réponse à cette question.

PROPOSITION 5.3 . - Pour tout r vérifiant $1 \leq r \leq \infty$, il existe un ouvert U en topologie C^r (resp. Ω en topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r (resp. de hamiltoniens de classe C^{r+1}) faiblement monotones de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que :

– $\text{Adh}_r(U)$ contient tous les difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotones complètement intégrables (resp. $\text{Adh}_{r+1}(\Omega)$ contient tous hamiltoniens de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe C^{r+1} faiblement monotones complètement intégrables).
 – La dimension hyperbolique de tout point fixe (resp. critique) de tout élément de U (resp. Ω) est au plus 4.

Quand la torsion était définie (c.f. les propositions 3.1 et 3.2) ou quand n était égal à 2 (c.f. le corollaire 5. 1. 1), on pouvait rendre la dimension hyperbolique plus petite que 2. Il me semble que cela doit être vrai dans tous les cas (en tout cas, rien ne s’y oppose a priori), mais le contre-exemple que je construis ne permet de majorer les dimensions hyperboliques que par 4.

Démonstration de la proposition 5.3 . – Nous allons encore une fois utiliser la proposition 5. 1.

1) Soit F_0 le difféomorphisme exact symplectique de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotone complètement intégrable défini par $F_0(\theta, r) = (\theta + Br, r)$ où : $B = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ O & -I_{n-q} \end{pmatrix}$. Soit $\psi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ de Morse et $g \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ s’annulant aux points critiques de ψ . On définit alors deux difféomorphismes exacts symplectiques F_1 et F_2 de classe C^r de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ par : $F_1(\theta, r) = (\theta + g(\theta), (I + {}^t Dg(\theta))^{-1}r)$ et $F_2(\theta, r) = (\theta, r + {}^t d(\psi - t(-g))(\theta))$ où $t \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifie ${}^t dt = ({}^t d\tau)^{-1}$.

On considère alors $G = F_2 \circ F_0 \circ F_1$. D’après les lemmes 4. 1, 4. 2 et 4. 3, on sait que la fonction radiale de G est ψ , et que sa torsion b vérifie, si η est l’équation du tore radialement transformé : $b^{-1}(\theta, \eta(\theta)) = (I + {}^t Dg(\theta))(D^2\tau)^{-1}(0)$.

On suppose alors que $\psi(\theta) = \varepsilon(\cos(2\Pi\theta_1) + \dots + \cos(2\Pi\theta_n))$. De plus, aux points critiques de ψ , on impose Dg de la manière suivante.

Soit θ un point critique de ψ . On a vu dans la démonstration de la proposition 4. 1 que l’on pouvait choisir $(\frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(\theta))_{1 \leq i, j \leq q}$ de telle sorte que :

$$\det\left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta)\right)_{1 \leq i, j \leq q} + (1 - \lambda)\left(I + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(\theta)\right)_{1 \leq i, j \leq q}\right) + (1 - \lambda^{-1})\left(I + \left(\frac{\partial g_j}{\partial \theta_i}(\theta)\right)_{1 \leq i, j \leq q}\right)\right) \text{ ait au plus une racine hyperbolique.}$$

De même, on peut choisir $(\frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(\theta))_{q+1 \leq i, j \leq n}$ de telle sorte que :

$$\det\left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta)\right)_{q+1 \leq i, j \leq n} + (1 - \lambda)\left(I + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(\theta)\right)_{q+1 \leq i, j \leq n}\right) + (1 - \lambda^{-1})\left(I + \left(\frac{\partial g_j}{\partial \theta_i}(\theta)\right)_{q+1 \leq i, j \leq n}\right)\right) \text{ ait au plus une racine hyperbolique.}$$

On complète alors avec des 0 pour obtenir $Dg(\theta)$.

On peut aussi comme dans la démonstration de la proposition 4. 1 s’arranger pour que les valeurs propres elliptiques soient distinctes.

Alors :

$$\det(M_\lambda) = \det \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta) \right)_{1 \leq i, j \leq n} + (1 - \lambda) \left(I + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}(\theta) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)^B + (1 - \lambda^{-1}) \left(I + \left(\frac{\partial g_j}{\partial \theta_i}(\theta) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \right)$$

a au moins $2(n-2)$ racines elliptiques, et ses racines elliptiques sont distinctes.

2) On procède de même pour les hamiltoniens. ■

6. REMARQUES SUR LES PERTURBATIONS À UN PARAMÈTRE

Nous allons voir que les ouverts Ω et U décrits dans les propositions 4. 1 et 4. 2 sont "petits" en un sens que l'on va préciser.

M. Herman et J. C. Yoccoz ont attiré mon attention sur ce qui suit et qui est dû à H. Poincaré en ce qui concerne les hamiltoniens (c.f. [6]).

PROPOSITION 6. 1 . - Soit V une bande ouverte autour de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ (i.e. un ensemble de la forme $\mathbb{T}^n \times [-\nu, \nu]^n$ où $\nu > 0$). Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (resp. $(H_t)_{t \in \mathbb{R}}$) une famille à un paramètre de classe C^∞ de difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^∞ (resp. de hamiltoniens de classe C^∞) de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ faiblement monotones dans $C^\infty(\mathbb{R} \times (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n), \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R} \times (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$) telle que F_0 (resp. H_0) soit complètement intégrable à torsion définie.

Alors, si $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (resp. $(H_t)_{t \in \mathbb{R}}$) est générique en topologie C^∞ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout t dans $]-\varepsilon, \varepsilon[- \{0\}$, pour tout j dans $\{0, \dots, n\}$, F_t (resp. H_t) a au moins $\binom{n}{j}$ points fixes (resp. critiques) de dimension elliptique $2j$ et de dimension hyperbolique $2(n - j)$ dans V . De plus, les valeurs propres hyperboliques sont alors réelles.

Démonstration de la proposition 6. 1 . -

1) Dans V (qui a l'avantage d'être relativement compact dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et donc sur lequel on peut faire des majorations uniformes de fonctions continues sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$), on a :

$F_t(\theta, r) = (\Theta_t, R_t)$ où $\Theta_t = \Theta_0 + tI_1 + o_V^{C^\infty}(t)$; $R_t = R_0 + tI_2 + o_V^{C^\infty}(t)$; Notons alors : $b_t = \frac{\partial \Theta_t}{\partial r}$ la torsion de F_t . L'équation η_t du tore radialement transformé par F_t vérifie donc : $\Theta_t(\theta, \eta_t(\theta)) = \theta$; D'où en résolvant : $\eta_t(\theta) = -tb_0^{-1}(\theta, 0)I_1(\theta, 0) + o_V^{C^\infty}(t)$.

De plus : $dL(F_t) = (R_t(\cdot, \eta_t) - \eta_t) \cdot d\theta = tI_2(\cdot, 0)d\theta + o_V^{C^\infty}(t)$.

Remarquons alors que $(1/t)dL(F_t) = I_2(\cdot, 0) + o_V^{C^\infty}(1)$ converge uniformément vers $I_2(\cdot, 0)$ quand t tend vers 0 et donc $I_2(\cdot, 0)$ est exacte : $I_2(\cdot, 0) = {}^t d\varphi$ pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$.

Aussi, on a : $dL(F_t) = t d\varphi + o_V^{C^\infty}(t)$. Remarquons alors que génériquement, on peut supposer que φ est de Morse :

LEMME 6. 1 . - Génériquement en topologie C^∞ pour (F_t) , φ est de Morse.

Démonstration du lemme 6. 1 . - L'application $((F_t) \rightarrow \varphi)$ est continue pour les topologies C^∞

et l'ensemble des fonctions de Morse de \mathbf{T}^n est un ouvert en topologie C^∞ de $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, donc les familles (F_t) telles que φ soit de Morse forment un ouvert en topologie C^∞ .

De plus, si $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ est de Morse et si on note G_t le difféomorphisme exact symplectique de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ défini par $G_t(\theta, r) = (\theta, r + t^t d\psi(\theta))$, alors $G_t \circ F_t$ est exact symplectique faiblement monotone et on a $L(G_t \circ F_t) = L(F_t) + t\psi$. Comme l'ensemble des fonctions de Morse de \mathbf{T}^n est dense en topologie C^∞ dans $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, on en déduit que l'ensemble des familles (F_t) telles que φ soit de Morse est dense en topologie C^∞ . ■

On suppose donc que φ est de Morse. Ceci implique que $L(F_t)$ aura les "mêmes" points critiques que φ . Plus précisément, si θ_0 est un point critique de φ , alors $L(F_t)$ aura un point critique de la forme : $\theta_t = \theta_0 + o(1)$.

On a alors, en un tel point critique θ_t :

$$\begin{cases} b_t^{-1}(\theta_t, \eta_t(\theta_t)) = b_0^{-1}(\theta_0, \eta_t(\theta_t)) + O(t) = (b_0^{-1}(\theta_0, 0) + s_t) + O(t), \quad s_t = o(1) \text{ est symétrique}; \\ D^2 L(F_t)(\theta_t) = t D^2 \varphi(\theta_0) + o(t); \end{cases}$$

On peut donc exprimer pour F_t en θ_t point critique de $L(F_t)$: $M_{\lambda, t} = t(D^2 \varphi(\theta_0) + o(1)) + (2 - \lambda - \lambda^{-1})(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1)) + (\lambda^{-1} - \lambda)O(t)$;

Remarquons qu'en une racine λ_t de $\det(M_{\lambda, t})$, on a forcément : $x_t = 2 - \lambda_t - \lambda_t^{-1} = o(1)$.

Posons alors : $y_t = (1/t)x_t$; alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} M_{\lambda_t, t} &= D^2 \varphi(\theta_0) + o(1) + y_t(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1)) + (\lambda_t^{-1} - \lambda_t)O(1) \\ &= (D^2 \varphi(\theta_0) + y_t(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1))) + o(1); \end{aligned}$$

Donc y_t est équivalent à une valeur propre μ de $b_0(\theta_0, 0)D^2 \varphi(\theta_0)$ (qui est diagonalisable à valeurs propres réelles car semblable à, si par exemple la torsion est définie positive : $(b_0(\theta_0, 0))^{1/2} D^2 \varphi(\theta_0) (b_0(\theta_0, 0))^{1/2}$) et $x_t \sim t y_t \sim t \mu$ est du signe de $t \mu$ si on a supposé (ce qui est bien une condition générique) que les valeurs propres de $b_0(\theta_0, 0)D^2 \varphi(\theta_0)$ sont distinctes. Or, φ est de Morse et donc, pour tout j dans $\{0, \dots, n\}$, φ a au moins $\binom{n}{j}$ points critiques en lesquels le Hessien de φ est de signature $(j, n-j)$; ceci permet de conclure que pour t assez petit, F_t a au moins $\binom{n}{j}$ points fixes de dimension elliptique $2j$ et de dimension hyperbolique $2(n-j)$ et que les valeurs propres hyperboliques sont alors réelles.

2) On peut aussi écrire : $H_t(\theta, r) = H_0(r) + t h(\theta, r) + o_V^\infty(t)$. On note : $b_t = \frac{\partial^2 H_t}{\partial r^2}$. Le tore radialement transformé par H_t , d'équation η_t , vérifie alors : $\frac{\partial H_0}{\partial r}(\eta_t) + t \frac{\partial h}{\partial r}(\cdot, \eta_t) + o_V^\infty(t) = 0$. Donc $\eta_t = O_V^\infty(t)$.

De plus : $dl(H_t) = \frac{\partial H_t}{\partial \theta}(\theta, \eta_t(\theta)) = t \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, 0) + o_V^\infty(t)$ et il est clair que génériquement, on peut supposer que $h(\cdot, 0)$ est de Morse.

Aussi, pour t assez petit, $l(H_t)$ a les "mêmes" points critiques que $h(\cdot, 0)$, i.e. si θ_0 est un point critique de $h(\cdot, 0)$, $l(H_t)$ a pour point critique $\theta_t = \theta_0 + O(1)$.

On a alors en un tel point critique θ_t :

$$\begin{cases} b_t^{-1}(\theta_t, \eta_t(\theta_t)) = b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1); \\ D\eta_t(\theta_t) {}^{-t} D\eta_t(\theta_t) = O(t); \\ D^2 l(H_t)(\theta_t) = t \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(\theta_0, 0) + o(t). \end{cases}$$

On peut donc exprimer pour H_t en θ_t point critique de $l(H_t) : m_{\lambda,t} = \lambda^2(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1)) + \lambda O(t) + t(D^2h(\cdot, 0) + o(1))$.

Remarquons qu'en une racine λ_t de $\det(m_{\lambda,t})$, on a forcément : $\lambda_t = o(1)$ et que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}m_{\lambda_t,t} &= \frac{\lambda_t^2}{t}(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1)) + \lambda_t O(1) + D^2h(\theta_0, 0) + o(1) \\ &= \frac{\lambda_t^2}{t}(b_0^{-1}(\theta_0, 0) + o(1)) + D^2h(\theta_0, 0) + o(1). \end{aligned}$$

Donc $\frac{\lambda_t^2}{t}$ est équivalent à une valeur propre μ de $b_0(\theta_0, 0)D^2h(\theta_0, 0)$ et $\frac{\lambda_t^2}{t} \sim t\mu$ est du signe de $t\mu$ si on a supposé (ce qui est bien une condition générique) que les valeurs propres de $b_0(\theta_0, 0)D^2h(\theta_0, 0)$ sont distinctes.

On conclut alors comme dans le cas des difféomorphismes en utilisant les propriétés des fonctions de Morse. ■

Remarque 6.1 . - Dans la première partie de la démonstration (celle qui concerne les difféomorphismes), il peut sembler étrange que $l_2(\cdot, 0)$ soit exacte. En fait, on s'en serait rendu compte bien plus aisément si, au lieu de prendre des chemins de difféomorphismes, on avait considéré des chemins de fonctions génératrices .

Rappelons que si F est un difféomorphisme exact symplectique de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), une fonction S de $C^r(\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ est une **fonction génératrice** de F si, si on note $F(\theta, r) = (\Theta, R)$, alors $dS(\theta, r) = Rd\Theta - rd\theta$. Si de plus F est faiblement monotone, au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$, $((\theta, r) \rightarrow (\theta, \Theta))$ définit un changement de coordonnées et si on pose : $S(\theta, r) = s(\theta, \Theta)$, on a : $r = -\frac{\partial s}{\partial \theta}$ et $R = \frac{\partial s}{\partial \Theta}$. Remarquons qu'alors s est de classe C^{r+1} .

Aussi la donnée d'un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r faiblement monotone au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$ revient à la donnée d'une fonction de classe C^{r+1} définie au voisinage de $\mathbf{T}^n \times \{0\}$ telle que : $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \Theta \partial \theta} \right) \neq 0$.

On considère donc s_t dans $C^\infty(\mathbf{R} \times (\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n), \mathbf{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} s_0(\theta, \Theta) = s(\Theta - \theta); \quad \frac{\partial s_0}{\partial \theta}(0) = 0; \text{ (ce qui correspond à } F_0 \text{ complètement intégrable).} \\ \det \left(\frac{\partial^2 s_t}{\partial \Theta \partial \theta} \right) \neq 0 \text{ sur } V; \text{ (ce qui correspond à } F_t \text{ faiblement monotone).} \end{cases}$$

On peut écrire : $s_t(\theta, \Theta) = s_0(\theta, \Theta) + ts(\theta, \Theta) + o^{C^\infty}(t)$.

Les s_t sont fonctions génératrices de difféomorphismes F_t exacts symplectiques faiblement monotones de V définis par $F_t(\theta, r) = (\Theta_t, R_t)$ où : $r = -\frac{\partial S_t}{\partial \theta}(\theta, \Theta_t)$; $R_t = \frac{\partial S_t}{\partial \Theta}(\theta, \Theta_t)$. Si on suppose (ce qui est générique pour (s_t)) que $s(\theta, \theta)$ est de Morse, on a $L(F_t)(\theta) = ts(\theta, \theta) + o^{C^\infty}(t)$ est bien de la forme souhaitée.

Quant à la torsion b_t de F_t , elle vérifie (avec les mêmes notations que dans la proposition 6.1) : $b_t^{-1}(\theta_t, \eta_t(\theta_t)) = -\frac{\partial^2 s_t}{\partial \Theta \partial \theta}(\theta_t, \theta_t) = \frac{\partial^2 s_0}{\partial u^2}(0) + o^{C^\infty}(1)$; ce qui redonne les résultats trouvés précédemment.

Remarque 6.2 . - On pouvait en fait calculer directement les valeurs propres de DF_t sans passer par $M_{\lambda,t}$.

Comme dans la proposition 6. 1, considérons une perturbation (F_t) à un paramètre dans $C^\infty(\mathbb{R} \times (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n), \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ générique telle que pour tout t , F_t soit un difféomorphisme exact symplectique faiblement monotone de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et telle que $F_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$ où $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est strictement concave ou strictement convexe près de 0 et vérifie $d\tau(0) = 0$. On s'intéressera uniquement à $t > 0$. On écrira : $F_t(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r) + tl_1(\theta, r) + o_V^\infty(t), r + tl_2(\theta, r) + o_V^\infty(t))$ où $l_2(\cdot, \cdot)$ est la dérivée d'une fonction de Morse. En un point fixe $(\theta_t, \eta_t(\theta_t))$ de F_t dans V , on calcule aisément : $DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t)) = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$ où a_t, b_t, c_t et d_t sont dans $M(\mathbb{R}, n \times n)$ avec : $a_t = 1 + O(t)$; $b_t = b_0(\theta_0, 0) + o(1)$; $c_t = t \frac{\partial l_2}{\partial \theta}(\theta_0, 0) + o(t)$; $d_t = 1 + O(t)$.

Donc $N_t = (DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t)) - I)$ s'écrit :

$$N_t = \begin{pmatrix} O(t) & b_0(\theta_0, 0) + o(1) \\ tD^2\varphi(\theta_0) + o(t) & O(t) \end{pmatrix} \text{ où } {}^t d\varphi(\theta) = l_2(\theta, 0);$$

Posons $P_t = \begin{pmatrix} t^{-1/4}I & 0 \\ 0 & t^{1/4} \end{pmatrix}$ et $n_t = P_t^{-1}N_tP_t$; alors :

$$n_t = \begin{pmatrix} O(t) & t^{1/2}b_0(\theta_0, 0) + o(t^{1/2}) \\ t^{1/2}D^2\varphi(\theta_0) + o(t) & O(t) \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}n_t = \begin{pmatrix} O(t^{1/2}) & b_0(\theta_0, 0) + o(1) \\ D^2\varphi(\theta_0) + o(1) & O(t^{1/2}) \end{pmatrix} \text{ est une perturbation de :}$$

$L = \begin{pmatrix} 0 & b_0(\theta_0, 0) \\ D^2\varphi(\theta_0) & 0 \end{pmatrix}$; Or, un vecteur propre (v_1, v_2) de L associé à une valeur propre μ vérifie : $b_0(\theta_0, 0)v_2 = \mu v_1$; $D^2\varphi(\theta_0)v_1 = \mu v_2$;

D'où : $b_0(\theta_0, 0)v_2 = \mu v_1$; $D^2\varphi(\theta_0)b_0(\theta_0, 0)v_2 = \mu^2 v_2$.

Aussi, si on suppose (ce qui est générique) que les valeurs propres de $D^2\varphi(\theta_0)b_0(\theta_0, 0)$ sont distinctes et si ν est une valeur propre de $D^2\varphi(\theta_0)b_0(\theta_0, 0)$ (donc réelle et différente de 0 car b_0 est définie), alors :

- si $\nu > 0$: $(1 + (t\nu)^{1/2} + o(t))$ et $(1 - (t\nu)^{1/2} + o(t))$ sont valeurs propres hyperboliques de $DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t))$; de plus, si $\nu \neq \nu^*$, alors pour t assez petit : $\text{Re}(1 + (t\nu)^{1/2} + o(t)) \neq \text{Re}(1 - (t\nu^*)^{1/2} + o(t))$ et donc ces valeurs propres de $DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t))$ sont forcément réelles (en effet, si un complexe est valeur propre, son conjugué, qui a même partie réelle, est aussi valeur propre);

- si $\nu < 0$: $(1 + i|\nu|^{1/2} + o(t))$ et $(1 - i|\nu|^{1/2} + o(t))$ sont des valeurs propres complexes non réelles de $DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t))$ pour t assez petit; De plus, si $\nu \neq \nu^*$, alors pour t assez petit :

$\text{Im}((1 + i|\nu|^{1/2} + o(t))(1 - i|\nu^*|^{1/2} + o(t))) \neq 0$ et donc ces valeurs propres de $DF_t(\theta_t, \eta_t(\theta_t))$ sont forcément non hyperboliques (en effet, si un complexe est valeur propre, son inverse est aussi valeur propre) et donc elliptiques.

On retrouve ainsi directement le résultat de la proposition 6.1.

Nous allons maintenant étudier un type de perturbations non génériques pour les hamiltoniens, intéressantes car en fait ce sont elles qui nous ont servi à construire les contre-exemples de la partie 4.

PROPOSITION 6. 2 . - Soit H_0 un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$)

faiblement monotone complètement intégrable .

Soit $\varphi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ une fonction de Morse et $\psi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ générique en topologie C^{r+1} (en un sens que nous préciserons dans la démonstration et qui dépendra de H_0). Soit H_ε le hamiltonien de classe C^{r+1} défini par :

$$H_\varepsilon(\theta, r) = H_0(r) + \varepsilon^2 \varphi(\theta) + \varepsilon \psi(\theta) \cdot r + o^{C^2}(\varepsilon^2).$$

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, le type des points critiques de H_ε est constant en ε et uniquement déterminé par H_0 , φ , ψ .

Démonstration de la proposition 6.2 .- Soit η_ε l'équation du tore radialement transformé par H_ε , θ_ε un quelconque de ses points critiques et b_ε sa torsion. Alors :

$$0 = \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial r}(\theta_\varepsilon, \eta_\varepsilon(\theta_\varepsilon)) = \frac{\partial H_0}{\partial r}(\eta_\varepsilon(\theta_\varepsilon)) + \varepsilon \psi(\theta_\varepsilon) + o^{C^2}(\varepsilon^2);$$

$$\text{Donc } \eta_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = -\varepsilon b_0^{-1}(0) \psi(\theta_\varepsilon) + o^{C^1}(\varepsilon).$$

$$\begin{aligned} l(H_\varepsilon)(\theta) &= H_\varepsilon(\theta, \eta_\varepsilon(\theta)) = H_0(\eta_\varepsilon(\theta)) + \varepsilon^2 \varphi(\theta) + \varepsilon \psi(\theta) \cdot \eta_\varepsilon(\theta) + o^{C^2}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2 (\varphi(\theta) - 1/2 {}^t \psi(\theta) b_0^{-1}(0) \psi(\theta) + o^{C^2}(1)). \end{aligned}$$

Si alors ψ est générique, $l(H_\varepsilon)$ est de Morse pour ε petit et donc on peut écrire, si θ_0 désigne un point critique de f où $f(\theta) = \varphi(\theta) - (1/2) {}^t \psi(\theta) b_0^{-1}(0) \psi(\theta)$:

$$\theta_\varepsilon = \theta_0 + o(1); \quad b_\varepsilon^{-1}(\theta_\varepsilon, \eta(\theta_\varepsilon)) = b_0^{-1}(0) + o(1).$$

Donc, pour H_ε , on a :

$$m_{\lambda, \varepsilon} = \lambda^2 (b_0^{-1}(0) + o(1)) + \varepsilon \lambda ({}^t D\psi(\theta_0) b_0^{-1}(0) - b_0^{-1}(0) D\psi(\theta_0) + o(1)) + \varepsilon^2 [D^2(\varphi(\theta_0) - (1/2) {}^t \psi(\theta) b_0^{-1}(0) \psi(\theta)) + o(1)];$$

Aussi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} m_{\varepsilon \lambda, \varepsilon} &= \lambda^2 [b_0^{-1}(0) + o(1)] + \lambda [{}^t D\psi(\theta_0) b_0^{-1}(0) - b_0^{-1}(0) D\psi(\theta_0) + o(1)] \\ &\quad + [D^2(\varphi(\theta_0) - (1/2) {}^t \psi(\theta) b_0^{-1}(0) \psi(\theta)) + o(1)] \end{aligned}$$

On suppose alors que si : $m_\lambda^0 = \lambda^2 b_0^{-1}(0) + \lambda ({}^t D\psi(\theta_0) b_0^{-1}(0) - b_0^{-1}(0) D\psi(\theta_0)) + (D^2(\varphi(\theta_0) - (1/2) {}^t \psi(\theta) b_0^{-1}(0) \psi(\theta)))$, alors $\text{Det}(m_\lambda^0)$ a des zéros distincts (cela est bien générique car il s'agit de la matrice permettant de trouver aux points critiques de h les valeurs propres de DX_h pour $h(\theta, r) = (1/2) {}^t r b_0(0) r + \psi(\theta) \cdot r + \varphi(\theta)$).

Alors, pour ε petit, $\text{Det}(m_{\varepsilon \lambda, \varepsilon})$ aura des zéros proches de ceux de $\text{Det}(m_\lambda^0)$ et donc H_ε aura le même type de points critiques que h . ■

En traduisant très grossièrement, on a donc montré :

pour H proche en topologie C^2 d'un hamiltonien complètement intégrable faiblement monotone H_0 , ayant un développement de Taylor en r au premier ordre générique et étant suffisamment proche de ce développement de Taylor, H a le même type de points critiques que son développement de Taylor, et le type de ces points critiques est constant au voisinage d'une parabole contenue dans le plan engendré par les deux premiers termes du développement de Taylor de H .

Si nous considérons par exemple les contre-exemples de la partie 4, nous voyons qu'ils sont "coincés" au moins en dimension 2 entre deux paraboles .

Remarque 6.3 . - Il aurait été plus simple pour les calculs de considérer $h_\varepsilon(\theta, r) = H_0(r - \varepsilon\psi(\theta)) + \varepsilon^2\varphi(\theta) + o^{C^2}(\varepsilon^2)$, car on voit immédiatement que $\eta_\varepsilon(\theta) = \varepsilon\psi(\theta) + o^{C^2}(\varepsilon)$ et que $l(h_\varepsilon) = \varepsilon^2\varphi(\theta) + o^{C^2}(\varepsilon^2)$. C'est d'ailleurs ce type de hamiltonien que l'on a considéré dans la partie 4. Mais ce type de hamiltonien s'impose de façon moins évidente si on s'intéresse au développement de Taylor.

7. LE CAS $N = 2$

RAPPELS . – Rappelons déjà les résultats démontrés au fil des paragraphes précédents :

On considère F_0 (resp. H_0) un difféomorphisme exact symplectique de classe C^r (resp. un hamiltonien de classe C^{r+1}) de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable et F (resp. H) une perturbation de classe C^r (resp. de classe C^{r+1}) proche en topologie C^1 (resp. C^2) de F_0 (resp. de H_0) qui est un difféomorphisme exact symplectique (resp. un hamiltonien). On écrira : $F_0(\theta, r) = (\theta + {}^t d\tau(r), r)$.

Le premier résultat concerne les dimensions modulo 4 elliptiques et hyperboliques aux points fixes (resp. critiques) :

En un point fixe de F (resp. critique de H) près de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$:

– Si $\det[D^2L(F)(\theta)].\det[D^2\tau(r)] > 0$ (resp. $\det[D^2I(H)(\theta)].\det[\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2}(r)] > 0$), le point fixe (resp. critique) est soit hyperbolique, soit complètement elliptique.

– Si $\det[D^2L(F)(\theta)].\det[D^2\tau(r)] < 0$ (resp. $\det[D^2I(H)(\theta)].\det[\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2}(r)] < 0$), le point fixe (resp. critique) est elliptique \times hyperbolique. Donc, génériquement, F (resp. H) a toujours au moins deux points fixes (resp. critiques) elliptiques \times hyperboliques.

Si la torsion est indéfinie : F_0 (resp. H_0) est dans l'adhérence en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) d'un ouvert en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques (resp. hamiltoniens) sans point fixe (resp. critique) hyperbolique; De plus, F_0 (resp. H_0) est dans l'adhérence en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) d'un ouvert en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques (resp. hamiltoniens) sans point fixe (resp. critique) complètement elliptique.

Si la torsion est définie : F (resp. H) générique a toujours un point fixe (resp. critique) complètement elliptique, mais F_0 (resp. H_0) est dans l'adhérence en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) d'un ouvert en topologie C^r (resp. topologie C^{r+1}) de difféomorphismes exacts symplectiques (resp. hamiltoniens) sans point fixe (resp. critique) hyperbolique.

UN EXEMPLE DE HAMILTONIEN . – Nous allons maintenant traiter un exemple pour les hamiltoniens, faisant apparaître explicitement les paraboles décrites dans la proposition 6. 2 .

Soit H_0 un hamiltonien de classe C^{r+1} de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ ($1 \leq r \leq \infty$) faiblement monotone complètement intégrable tel que $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(0) = I$.

Soit $\varphi_0 \in C^{r+1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ une fonction de Morse; on note $C^{r+1}(\varphi_0) = \{\psi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2); \forall \theta \in \mathbb{T}^2, [d\varphi_0(\theta) = 0 \Rightarrow \psi(\theta) = 0]\}$.

On définit pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\psi \in C^{r+1}(\varphi_0)$ le hamiltonien de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$: $H_{\varepsilon, \psi}(\theta, r) = H_0(r - \psi(\theta)) + \varepsilon \varphi_0(\theta)$.

Alors, $H_{\varepsilon, \psi}$ est faiblement monotone; son tore radialement transformé est d'équation ψ ; sa fonction radiale est $\varepsilon \varphi_0$.

En un point critique de φ_0 , on a pour $H_{\varepsilon, \psi}$:

$m_{\lambda, \varepsilon, \psi} = \lambda^2 I + \lambda N(\theta) + \varepsilon \text{Hess}(\varphi_0)(\theta)$ où on a posé :

$$N(\theta) = D\psi(\theta) - {}^t D\psi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & e(\theta) \\ -e(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons déjà que comme le terme constant de $\det(m_{\lambda, \varepsilon, \psi})$ est $\varepsilon^2 \det(\text{Hess}\varphi_0(\theta))$, le signe de $\det(\text{Hess}\varphi_0(\theta))$ détermine modulo 4 le nombre de racines imaginaires pures de $\det(m_{\lambda, \varepsilon, \psi})$; en particulier, si $\det(\text{Hess}\varphi_0(\theta)) < 0$, on a un point critique elliptique x hyperbolique. Si $\det(\text{Hess}\varphi_0(\theta)) > 0$, $\det(m_{\lambda, \varepsilon, \psi})$ a 0 ou 4 racines imaginaires pures.

Or, $D^2\varphi_0(\theta)$ se diagonalise dans une base orthonormée directe. Mais la matrice de changement de bases préserve $N(\theta)$, et donc : $m_{\lambda, \varepsilon, \psi} = \lambda^2 I + \lambda N(\theta) + \varepsilon \text{Hess}\varphi_0(\theta) = {}^t U p_{\lambda, \varepsilon, \psi} U$ où :

$$p_{\lambda, \varepsilon, \psi} = \lambda^2 I + \lambda N(\theta) + \varepsilon \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

et où U est une matrice orthonormée directe et μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de $D\varphi_0(\theta)$.

Or :

$$p_{\lambda, \varepsilon, \psi} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \varepsilon \mu_1 & \lambda e \\ -\lambda e & \lambda^2 + \varepsilon \mu_2 \end{pmatrix}$$

Donc $\det(m_{\lambda, \varepsilon, \psi}) = \det(p_{\lambda, \varepsilon, \psi}) = (\lambda^2 + \varepsilon \mu_1)(\lambda^2 + \varepsilon \mu_2) + \lambda^2 e^2 = \mu^2 + \mu(\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + e^2) + \mu_1 \mu_2 \varepsilon^2$ où on a posé $\mu = \lambda^2$.

Alors :

1) si $\mu_1 \mu_2 < 0$ et $\varepsilon \neq 0$: comme on l'a remarqué précédemment, on a deux valeurs propres elliptiques et deux valeurs propres hyperboliques.

2) si $\mu_1 \mu_2 > 0$ et $\varepsilon \neq 0$: on sait que $\det(m_{\lambda, \varepsilon, \psi})$ a 0 ou 4 racines imaginaires pures, i.e. $P_{\varepsilon, \psi} = \mu^2 + \mu(\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + e^2) + \mu_1 \mu_2 \varepsilon^2$ a 0 ou 2 racines négatives.

Le discriminant de $P_{\varepsilon, \psi}$ est :

$$\Delta = (\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + e^2)^2 - 4\mu_1 \mu_2 \varepsilon^2 = (e^2 + \varepsilon(\mu_1 + \mu_2) - 2\varepsilon(\mu_1 \mu_2)^{1/2}).(e^2 + \varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + 2\varepsilon(\mu_1 \mu_2)^{1/2})$$

Donc :

a- si $\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) > 0$: Alors :

$$\Delta = (e^2 + |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} + |\mu_2|^{1/2})^2) \cdot (e^2 + |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} - |\mu_2|^{1/2})^2) \geq 0$$

Il y a donc deux racines réelles, et elles sont négatives car leur somme est $-(\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + e^2)$.

b- si $\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) < 0$: Alors :

$$\Delta = (e^2 - |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} + |\mu_2|^{1/2})^2) \cdot (e^2 - |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} - |\mu_2|^{1/2})^2) \geq 0$$

Alors, Δ est positif pour :

$$(\alpha) e^2 \geq |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} + |\mu_2|^{1/2})^2 = |\varepsilon|(|\mu_1| + |\mu_2| + 2(|\mu_1| \cdot |\mu_2|)^{1/2});$$

$$(\beta) e^2 \leq |\varepsilon|(|\mu_1|^{1/2} - |\mu_2|^{1/2})^2 = |\varepsilon|(|\mu_1| + |\mu_2| - 2(|\mu_1| \cdot |\mu_2|)^{1/2});$$

La somme des racines, qui est $-(\varepsilon(\mu_1 + \mu_2) + e^2)$, est toujours positive dans le cas (β) , toujours négative dans le cas (α) .

3) Si $\varepsilon = 0$: $P_{\varepsilon, \psi} = \mu(\mu + e^2)$ a une racine égale à 0 et une racine négative.

Résumons donc . Si par exemple φ_0 a quatre points critiques, alors :

- Il y a deux points critiques elliptiques×hyperboliques (aux points critiques selles de φ_0);

- Il y a un point critique complètement elliptique (au minimum ou au maximum de φ_0).

Nous allons faire un diagramme permettant de voir ce qui se passe au minimum de φ_0 (i.e. quand $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$).

On note alors : $T = \text{Trace}(\text{Hess}\varphi_0(x)) = \mu_1 + \mu_2$ et $D = \det(\text{Hess}\varphi_0(x)) = \mu_1 \cdot \mu_2$.

Les deux courbes du plan (ε, e) qui nous intéressent sont donc les courbes d'équations :

$$C_+ : e^2 = -\varepsilon(T + 2(D)^{1/2}); C_- : e^2 = -\varepsilon(T - 2(D)^{1/2})$$

qui correspondent à $\Delta = 0$.

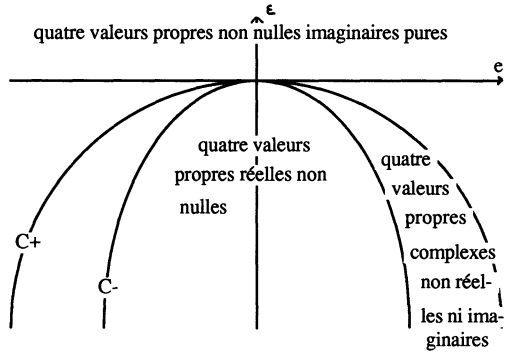
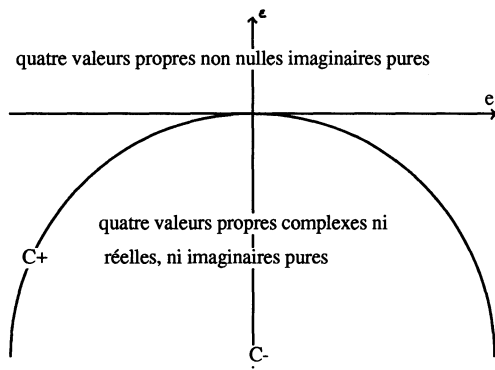
Nous sommes obligés de distinguer deux cas :

1) $\mu_1 \neq \mu_2$ i.e. $T^2 \neq 4D$, le cas générique; 2) $\mu_1 = \mu_2$ i.e. $T^2 = 4D$, le cas non générique.

Remarque 7.1 . - Le fait de supposer la torsion de H_0 en 0 égale à I n'est pas restrictif car on peut toujours se ramener à cette situation en utilisant les lemmes de la partie 4 quand la torsion est définie.

Aussi, en fait, la situation que l'on vient de décrire est valable au voisinage de tout hamiltonien complètement intégrable faiblement monotone dont la torsion en 0 est définie et dans $M(\mathbb{Q}, n \times n)$, c'est-à-dire au voisinage de tout hamiltonien complètement intégrable faiblement monotone appartenant à un ensemble dense dans l'ensemble des hamiltoniens faiblement monotones complètement intégrables à torsion définie.

On fait donc deux dessins :

FIGURE 7.1 : $\mu_1 \neq \mu_2$.-FIGURE 7.2 : $\mu_1 = \mu_2$.-

8. APPLICATION AU THÉORÈME DE BIRKHOFF-LEWIS

La situation que nous considérons est étudiée en détail dans [4] en ce qui concerne l'existence des points périodiques qui s'accumulent sur un point périodique elliptique d'un difféomorphisme symplectique générique de classe C^4 .

Nous commençons par suivre l'article de J. Moser afin de montrer comment on se ramène à perturber des difféomorphismes exacts symplectiques faiblement monotones complètement intégrables de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$.

Ensuite, nous appliquerons les résultats démontrés dans les parties précédentes, en y ajoutant une remarque de M. Herman concernant les points périodiques hyperboliques.

Comme on va s'intéresser à ce qui se passe au voisinage d'un point périodique non hyperbolique d'un difféomorphisme symplectique de classe C^4 d'une variété symplectique de classe C^4 , on s'intéresse à l'étude *locale* d'un tel difféomorphisme.

On peut donc se contenter d'étudier localement un difféomorphisme symplectique F de classe C^{4+r} (où $0 \leq r \leq \infty$) de \mathbf{R}^{2n} muni de sa forme symplectique w standard, c'est-à-dire : si on prend les coordonnées standard $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{R}^{2n}$, alors $w = \sum dp_i \wedge dq_i$. On peut aussi supposer que le point périodique de période ρ non hyperbolique de F auquel on s'intéresse est $0 : F^\rho(0) = 0$.

Les valeurs propres de $DF^\rho(0)$ sont alors :

- $\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_1^{-1}, \dots, \eta_m^{-1}$ de module 1 où $m \geq 1$;
- $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-2m}$ de module différent de 1.

Que le difféomorphisme soit symplectique ou non, il existe une variété centrale W_0 en 0 de classe C^{4+r} et de dimension $2m$.

A partir de maintenant, on remplace F^ρ par $f =_{W_0|} F^\rho_{|W_0}$. Remarquons que f est encore symplectique. $Df(0)$ n'a alors que des valeurs propres de module 1.

On suppose alors que $Df(0)$ ne présente pas de résonance non triviale d'ordre inférieur ou égal à 4 (cette propriété est générique en topologie C^{4+r} pour F). Ceci nous permet, grâce aux formes normales, d'exprimer dans des coordonnées symplectiques de classe C^{4+r} adéquates :

$$f^k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) \text{ où, si on a posé } \eta_j = e^{2\Pi\sigma_j} :$$

$$x_j^{(1)} = x_j \cos(2\Pi\Phi_j) - y_j \sin(2\Pi\Phi_j) + O^3(\|(x, y)\|);$$

$$y_j^{(1)} = x_j \sin(2\Pi\Phi_j) + y_j \cos(2\Pi\Phi_j) + O^{C^3}(\|(x, y)\|);$$

$$\text{où : } \Phi_j = \sigma_j + \sum \beta_{k,j}(x_k^2 + y_k^2).$$

(nous renvoyons le lecteur aux notations pour la signification de " $O^{C^3}(\|(x, y)\|)$ "; signalons tout de même qu'une telle fonction est en particulier un $O^{C^0}(\|(x, y)\|^4)$, et que ceci se montre en utilisant le fait qu'il n'existe pas de résonance d'ordre inférieur ou égal à 4)

Cette expression suggère bien sûr de passer en coordonnées angles - actions, mais comme un tel changement de coordonnées serait singulier au point périodique étudié, on fait un changement de coordonnées sur des polyanneaux définis par :

$$r \in \{(r_1, \dots, r_m); \sum(r_j - \frac{1}{2m})^2 < \rho^2\} = B_\rho \text{ (pour } \rho \text{ tel que } 0 < \rho < \frac{1}{2m} \text{) et } \theta \in \mathbb{T}^m \text{ où } \theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \text{ et } r = (r_1, \dots, r_m) \text{ pour } x_j = (\varepsilon_j)^{\frac{1}{2}} \cos(2\Pi\theta_j) \text{ et } y_j = (\varepsilon_j r_j)^{\frac{1}{2}} \sin(2\Pi\theta_j) \text{ où } \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ est un petit paramètre.}$$

Alors, dans ces coordonnées angles-actions, f devient un difféomorphisme F_ε où $F_\varepsilon^k(\theta, r) = (\theta^{(k)}, r^{(k)})$ avec : $\theta^{(1)} = \theta + \sigma + \varepsilon[\beta].r + o^{C^1}(\varepsilon)$;

$$r^{(1)} = r + o^{C^1}(\varepsilon).$$

Ceci vient du fait que si on se place sur une boule de rayon $(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, le terme perturbatif ayant des dérivées première, seconde et troisième nulles en 0, est un $o(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ et sa dérivée est un $o(\varepsilon)$.

Remarquons que la matrice $\beta = [\beta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq m}$ est symétrique et que l'on peut supposer (ce qui est générique pour F en topologie C^{4+r}) que $\det(\beta) \neq 0$ (ce qui revient à dire qu'on va étudier des difféomorphismes faiblement monotones).

De plus, comme f était définie sur un domaine simplement connexe, F_ε est exact symplectique.

On définit alors le difféomorphisme exact symplectique G_ε par : $G_\varepsilon(\theta, r) = (\theta + \sigma + \varepsilon\beta r, r)$. Ainsi, F_ε est une perturbation de G_ε .

Rappelons alors quels sont les lemmes que J. Moser prouve dans [4] :

LEMME 8. 1 (J. Moser). - Soit ρ^* et C_1 deux constantes telles que $0 < \rho^* < \rho$ et $C_1 \geq 0$.

Alors, il existe ε_0 dépendant de ρ^* , ρ et C_1 tel que :

si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et si N est un entier naturel vérifiant $\varepsilon N < C_1$, alors $F_\varepsilon^N - G_\varepsilon^N = o^{C^1}(1)$ sur B_{ρ^*} .

Démonstration du lemme 8. 1 . - 1) On évalue donc $F_\varepsilon^N - G_\varepsilon^N$ i.e. $\|r^{(N)} - r\|$ et $\|\theta^{(N)} - \theta - N\gamma(\varepsilon, r)\|$ où on a noté : $\gamma(\varepsilon, r) = \sigma + \varepsilon\beta r$.

La partie radiale ne pose aucun problème grâce à la remarque que nous avons fait concernant la taille du terme perturbatif; on avait en effet remarqué que $F_\varepsilon(\theta, r) = G_\varepsilon(\theta, r) + (f_\varepsilon(\theta, r), g_\varepsilon(\theta, r))$ où g_ε et f_ε sont des $o^{C^1}(\varepsilon)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \|r^{(N)} - r\| &\leq \|r^{(N)} - r^{(N-1)}\| + \dots + \|r^{(1)} - r\| = \|g_\varepsilon(r^{(N-1)})\| + \dots + \|g_\varepsilon(r)\| \\ &\leq N\|g_\varepsilon\|_{C^1} = (N\varepsilon)(\varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon\|_{C^1}) \\ &\leq C_1\varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon\|_{C^1} \end{aligned}$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Pour la partie angulaire, on sépare partie perturbatrice et torsion :

$$\begin{aligned} \|\theta^{(N)} - \theta - N(\varepsilon\beta r + \sigma)\| &\leq \sum (\|\theta^{(j)} - \theta^{(j-1)} - \varepsilon\beta r^{(j-1)} - \sigma\| + \|\varepsilon\beta r^{(j-1)} - \varepsilon\beta r\|) \\ &\leq N\|f_\varepsilon\|_{C^1} + \varepsilon\|\beta\| \sum \|r^{(j-1)} - r\| \leq N\|f_\varepsilon\|_{C^1} + \varepsilon\|\beta\| \cdot \|f_\varepsilon\|_{C^1} \sum (j-1) \\ &\leq N\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\|f_\varepsilon\|_{C^1}\right) + N^2\varepsilon^2\|\beta\|\frac{1}{\varepsilon}\|f_\varepsilon\|_{C^1} \end{aligned}$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0.

2) Pour la partie différentielle, on pose : $\phi_{j,\varepsilon}(\theta, r) = DF_\varepsilon(\theta^{(j)}, r^{(j)})$ et :

$$\gamma_\varepsilon(\theta, r) = \gamma_{j,\varepsilon}(\theta, r) = DG_\varepsilon(\theta^{(j)}, r^{(j)}) = \begin{pmatrix} I & \varepsilon\beta \\ O & I \end{pmatrix}$$

On a vu que : $\|\phi_{N,\varepsilon}(\theta, r) - \gamma_\varepsilon(\theta, r)\| \leq \|(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\|_{C^1} = o^{C^1}(\varepsilon)$ et on a : $\|\gamma_\varepsilon(\theta, r) - I\| = \varepsilon\|\beta\|$.

Donc : $\|\phi_{N,\varepsilon}(\theta, r) - I\| \leq \|(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\|_{C^1} + \varepsilon\|\beta\|$. Aussi, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, F_ε^N envoie $B_{\rho^*} \times \mathbf{T}^m$ dans $B_\rho \times \mathbf{T}^m$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} &\|DF_\varepsilon^N(\theta, r) - DG_\varepsilon^N(\theta, r)\| \\ &\leq \sum \|\phi_{N-1,\varepsilon} \circ \dots \circ \phi_{k+1,\varepsilon} \circ (\phi_{k,\varepsilon} - \gamma_{k,\varepsilon}) \circ \gamma_\varepsilon \circ \gamma_\varepsilon\| \\ &\leq N(1 + 2\varepsilon\|\beta\|)^{N-1} \|(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\|_{C^1} \\ &\leq N\varepsilon e^{2N\varepsilon\|\beta\|} \|(f_\varepsilon, g_\varepsilon)\|_{C^1} \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

tend vers 0 quand ε tend vers 0. ■

LEMME 8.2 (J. Moser). - Si $0 < \rho^{**} < \rho^* < (1/2m)$ et si $\varepsilon N \rho^{**} \geq m^{\frac{1}{2}} \|\beta^{-1}\|$, il existe $r^* \in B_{\rho^{**}}$ tel que : $N(\varepsilon\beta r^* + \sigma) \in \mathbf{Z}^m$

Idee de la démonstration du lemme 8.2 . - G_ε laisse fixe les tores $\{r = r_0\}$. On cherche alors un tel tore constitué uniquement de points fixes (ceci revient à chercher le tore radialement transformé).

Pour cela, on résout $N(\varepsilon\beta r^* + \sigma) \in \mathbf{Z}^n$. Or, $(\xi : r \rightarrow N(\varepsilon\beta r^* + \sigma))$ est une application affine inversible, donc une dilatation de rapport augmentant linéairement et strictement avec N . Aussi, pour $N\varepsilon\rho^{**}$ assez grand, $\xi(B_{\rho^{**}})$ contiendra un cube d'arête si grande qu'il contiendra un multi-entier. ■

Remarquons que ce lemme permet de montrer, quitte à faire un changement de variable $(\theta, r) \rightarrow (\theta, r - r^*)$ (où θ et $r - r^*$ sont les nouvelles coordonnées), que G_ε est complètement intégrable dans le sens où nous l'avions défini dans la partie 1.

LEMME 8. 3 (J. Moser). - Posons $C_0 = m^{\frac{1}{2}} \frac{\|\theta^{-1}\|}{\rho^{**}}$ et $C_1 = C_0 + 1$.

Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et tout N dans $[\frac{C_0}{\varepsilon}, \frac{C_1}{\varepsilon}]$, il existe un tore radialement transformé par F_ε^N dans B_ρ dont l'équation est : $r_\varepsilon(\theta) = r^* + o^{C^1}(1)$

Démonstration du lemme 8. 3 - . Ayant le résultat pour le difféomorphisme non perturbé G_ε , on applique le théorème des fonctions implicites pour l'obtenir pour le système perturbé.

Plus précisément, ayant N comme décrit dans ce lemme et reprenant les notations du lemme 8. 2, on peut noter :

$$N(\varepsilon\beta r^* + \sigma) = h \in \mathbb{Z}^n$$

On cherche alors à résoudre :

$$h = \theta^{(N)} - \theta = N(\varepsilon\beta r + \sigma) + o^{C^1}(1) \text{ d'après le lemme 8. 1.}$$

Or, $\frac{\partial}{\partial r}(\theta^{(N)} - \theta) = N\varepsilon\beta + o(1)$ est inversible pour $\varepsilon < \varepsilon_0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites localement (en θ) pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et trouver une solution locale (en θ) : $r = r_\varepsilon(\theta) = r^* + o(1)$.

On a de plus pour cette solution :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} r_\varepsilon(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (o^{C^1}(1)) \right) \cdot [N\varepsilon\beta + o(1)]^{-1} = o(1) \cdot [(N\varepsilon\beta)^{-1} + o(1)]$$

Donc $r_\varepsilon(\theta) = r^* + o^{C^1}(1)$. A cause de la compacité de \mathbb{T}^m , on obtient une solution globale et un tore dont chaque point est transformé radialement. ■

LEMME 8. 4 (J. Moser). - Si r_ε désigne l'équation du tore radialement transformé par F_ε^N décrit précédemment, alors F_ε^N a un point fixe sur ce tore.

Démonstration du lemme 8. 4 - F_ε étant exact symplectique, F_ε^N l'est aussi. F_ε^N admet donc une fonction génératrice $S_\varepsilon(\theta, r)$ qui vérifie : $r^{(N)} d\theta^{(N)} - r d\theta = dS_\varepsilon$.

En particulier, sur le tore radialement transformé d'équation r_ε , on obtient : $(r_\varepsilon^{(N)}(\theta) - r_\varepsilon(\theta))d\theta = d[S_\varepsilon(\theta, r_\varepsilon(\theta))]$.

Aussi, rechercher les points fixes de F_ε^N sur le tore radialement transformé revient à chercher les points critiques de $L(F_\varepsilon^N) = S_\varepsilon(\cdot, r_\varepsilon(\cdot))$. Aussi, F_ε^N a au moins $(n+1)$ points fixes sur le tore radialement transformé. ■

Remarquons alors que nous nous sommes ramenés à une situation analogue à celle traitée dans les parties précédentes. Il y a tout de même une petite différence : on ne sait pas a priori que le fait que $L(F_\varepsilon^N)$ soit de Morse (ce qui est générique pour F_ε^N) est générique pour F_ε ou F .

LEMME 8. 5 (M. Herman). – Si F est générique en topologie C^{4+r} , alors pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $C_0 \leq N\varepsilon \leq C_1$, $L(F_\varepsilon^N)$ est de Morse.

Démonstration du lemme 8. 5. – On fixe F . Fixons ε et N tels que $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $C_0 \leq N\varepsilon \leq C_1$ et montrons que pour un ouvert dense Ω en topologie C^{4+r} dans un voisinage de F en topologie C^{4+r} , alors tout $H \in \Omega$ vérifie : $L(H_\varepsilon^N)$ est de Morse. Ceci suffira pour conclure.

Déjà, remarquons que l'application $(H \rightarrow dL(H_\varepsilon^N))$ est continue pour les topologies C^{4+r} ; aussi, il existe U voisinage de F en topologie C^{4+r} tel que $\Omega = \{H \in U; L(H_\varepsilon^N) \text{ est de Morse}\}$ est ouvert (Ici, l'ouvert U sert juste à s'assurer que les constantes C_0 et C_1 sont les mêmes pour F et H).

Vérifions maintenant que Ω est dense. Soit $H \in \Omega$. Soit θ_0 un point critique de $L(H_\varepsilon^N)$. Il existe alors une fonction $\varphi \in C^{4+r+1}(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$ aussi petite qu'on le veut en topologie C^{4+r} telle que :

- $d\varphi(\theta_0) = 0$;
- φ est nulle en dehors d'un petit voisinage de θ_0 ;
- $D^2L(H_\varepsilon^N)(\theta_0) + D^2\varphi(\theta_0)$ est non dégénérée.

On considère alors le difféomorphisme exact symplectique défini sur $\mathbb{T}^m \times B_r$ par : $J_\varphi(\theta, r) = (\theta, r + {}^t d\varphi(\theta))$. Alors, au voisinage de θ_0 , on a : $L((J_\varphi \circ H_\varepsilon^N)) = L(H_\varepsilon^N) + \varphi$. De plus, à l'aide de fonctions génératrices, on construit aisément H^* proche en topologie C^{4+r} de H tel que : au voisinage de Γ_{r_ε} , $H_\varepsilon^* = J_\varphi \circ H_\varepsilon$.

Aussi, on peut trouver H^* proche en topologie C^{4+r} de H telle que $L(H_\varepsilon^{*N})$ soit de Morse au voisinage de θ_0 . Cette propriété " $L(H_\varepsilon^N)$ est de Morse au voisinage de θ_0 " est alors ouverte et dense. On utilise ensuite un recouvrement fini de \mathbb{T}^m qui est compact pour conclure que Ω est dense. ■

L'ensemble des G_ε^N pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $C_0 \leq N\varepsilon \leq C_1$ étant relativement compact, on peut maintenant appliquer tous les résultats des parties précédentes :

DEFINITION 8. 1. – Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^{4+r} ($0 \leq r \leq \infty$) d'une variété symplectique de classe C^{4+r} et générique en topologie C^{4+r} ; soit x un point périodique elliptique de période k de F ; on alors vu que dans des coordonnées symplectiques sur la variété centrale W_0 F^k s'écrit : $F^k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)})$ où :

$$x_j^{(1)} = x_j \cos(2\Pi\Phi_j) - y_j \sin(2\Pi\Phi_j) + O^{C^3}(\|(x, y)\|);$$

$$y_j^{(1)} = x_j \sin(2\Pi\Phi_j) + y_j \cos(2\Pi\Phi_j) + O^{C^3}(\|(x, y)\|);$$

$$\text{où : } \Phi_j = \sigma_j + \sum \beta_{k,j} (x_k^2 + y_k^2).$$

Alors, $\beta = [\beta_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m}$ est la torsion de F en x .

PROPOSITION 8. 1. – Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^{4+r} ($0 \leq r \leq \infty$) d'une variété symplectique de classe C^{4+r} et générique en topologie C^{4+r} . On suppose que x est un point périodique elliptique de F , de dimension elliptique $2m$.

Alors :

Si la torsion de F en x est de signature (q, m-q), dans tout voisinage de x, il existe des points périodiques de dimension elliptique au moins $2 \operatorname{Sup}(q, m-q)$.

En particulier, si cette torsion est définie, il existe dans tout voisinage de x des points périodiques de dimension elliptique $2m$ et de dimension hyperbolique $2(n-m)$ où n est la dimension de la variété.

Tout dans cette proposition se déduit des parties précédentes, à part la dimension hyperbolique dans le dernier cas. Mais cette dimension hyperbolique est forcément au moins égale à $2(n-m)$ car les points périodiques que l'on trouve sont normalement hyperboliques à la variété centre. Démontrons le :

LEMME 8. 6 .- Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^1 d'une variété symplectique de classe C^1 et générique en topologie C^1 . On suppose que x est un point fixe elliptique de F, de dimension elliptique $2m$. On note W_0 la variété centre de F en x.

Alors, il existe U voisinage de x dans W_0 tel que toute orbite périodique dans U est normalement hyperbolique à W_0 .

Démonstration du lemme 8. 6 . - Dans cette situation, choisissons des coordonnées symplectiques $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ telles que $(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$ soient des coordonnées symplectiques de W_0 (on note des vecteurs associés $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$) et telles que $DF(x)$ s'écrive dans les coordonnées $(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m, p_{m+1}, \dots, p_n, q_{m+1}, \dots, q_n)$:

$$DF(x) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

où E est complètement elliptique et H est hyperbolique (rappelons que comme F est générique, les valeurs propres de $DF(x)$ sont bien distinctes). H s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

où Λ est une matrice $(n-m) \times (n-m)$ ayant sur la diagonale des valeurs propres réelles de valeur absolue plus petite que 1 et des matrices 2×2 de similitudes de rapport plus petit que 1 et n'ayant que des zéros ailleurs.

On suppose que $m \neq n$, sinon le résultat est trivialement vérifié.

Au voisinage U dans W_0 de x, en un point y, on a :

$$DF(y) = \begin{pmatrix} E + a_{1,1}(y) & a_{1,2}(y) & a_{1,3}(y) \\ a_{2,1}(y) & \Lambda + a_{2,2}(y) & a_{2,3}(y) \\ a_{3,1}(y) & a_{3,2}(y) & \Lambda^{-1} + a_{3,3}(y) \end{pmatrix}$$

Si le voisinage U est choisi suffisamment petit, $a_{1,1}, \dots, a_{3,3}$ sont petits.

Soit alors $(x_0 = x_{p+1}, \dots, x_p)$ une orbite périodique contenue dans U. On veut montrer que si on a choisi U suffisamment petit (indépendamment de p), alors cette orbite est normalement hyperbolique à W_0 .

Nous allons nous contenter de chercher V_1, \dots, V_p p espaces vectoriels de dimension $(n-m)$, chaque V_i étant dans l'espace tangent à la variété en x et "proche" de $\mathbb{R}f_{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}f_n$ et vérifiant, si on note $V_{p+1} = V_0 : DF(x_j)V_j = V_{j+1}$. Comme les V_i seront proches des $\mathbb{R}f_{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}f_n$, $DF^{p+1}(x_j)$ sera une dilatation sur V_j . On procéderait de même pour trouver une contraction sur d'autres sous-espaces vectoriels de dimension $(n-m)$ ne rencontrant pas la somme des V_i et de l'espace tangent à W_0 . Ceci nous permet alors de dire que l'orbite de x_0 est normalement hyperbolique à W_0 .

Cherchons donc les V_j . On les cherche comme graphes de matrices $(n+m) \times (n-m)$ notées $M_u(x_j)$, c'est-à-dire comme ensemble des vecteurs de la forme :

$$(M_u(x_i).(q_{m+1}, \dots, q_n), q_{m+1}, \dots, q_n)$$

On note alors :

$$DF(y) = \begin{pmatrix} K + a(y) & b(y) \\ c(y) & \Lambda^{-1} + d(y) \end{pmatrix}$$

où :

$$K = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{pmatrix}, c = (a_{3,1} \quad a_{3,2}) \text{ et } d = a_{3,3}$$

On veut alors résoudre :

$$(M_u \circ f).[c.M_u + \Lambda^{-1} + d] = (K + a).M_u + b;$$

ceci s'écrit aussi :

$$M_u = [(c \circ f^{-1}).(M_u \circ f^{-1}) + \Lambda^{-1} + (d \circ f^{-1})]^{-1} . [(K + (a \circ f^{-1})).(M_u \circ f^{-1}) + (b \circ f^{-1})].$$

M_u est alors l'unique point fixe d'une contraction qui a un unique point fixe, proche de 0 car cette contraction est proche d'une contraction ayant 0 pour point fixe. Ceci conclut la démonstration. ■

Ce lemme a une autre application que la proposition 8. 1 :

PROPOSITION 8. 2 (M. Herman). - Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^{4+r} ($0 \leq r \leq \infty$) d'une variété symplectique de classe C^{4+r} et générique en topologie C^{4+r} . On suppose que x est un point périodique elliptique de F , de dimension elliptique $2m$.

Alors, dans tout voisinage de x , il existe des points périodiques hyperboliques.

Démonstration de la proposition 8. 2 . - Soit W_0 la variété centre de x . Alors, d'après la proposition 2. 1 et le lemme 8. 6, on sait qu'il existe dans $U \cap W_0$ (U est le même que dans le lemme 8. 6) un point périodique x_1 de dimension hyperbolique au moins $2(n-m+1)$.

Si $n - m + 1 \neq n$, on refait alors le même raisonnement au voisinage de x_1 et on trouve un point périodique de dimension hyperbolique au moins $2(n-m+2)$.

Ainsi, répétant le raisonnement au plus m fois, on trouve un point périodique hyperbolique. ■

Remarque 8.1 . – Ces points périodiques hyperboliques que nous venons de mettre en évidence ne sont pas forcément ceux qui apparaissent au premier pas de la récurrence, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas forcément ceux mis en évidence par Moser : ce sont des points périodiques "tournant" autour d'un point périodique qui "tourne" lui-même autour d'un point périodique ...etc...

La proposition suivante se déduit aussi des parties précédentes :

PROPOSITION 8.3 . – Soit F_0 un difféomorphisme symplectique de classe C^{4+r} ($0 \leq r \leq \infty$) d'une variété symplectique M de classe C^{4+r} et générique en topologie C^{4+r} . On suppose que x est un point périodique elliptique de F , de dimension elliptique $2m$.

Soit V un voisinage de x .

Alors il existe un ouvert U de difféomorphismes symplectiques de classe C^{4+r} de M tel que :

- $F_0 \in \text{Adh}_{4+r}(U)$;
- Pour tout $j \in \{0, \dots, m\}$, tout élément de U admet dans V un point périodique de dimension elliptique $2j$ et de dimension hyperbolique $2(n-j)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M.C. ARNAUD . – Sur les points fixes des difféomorphismes exacts symplectiques de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$, C.R. Acad. Sci. Paris t 309 (1989), 191-194.
- [2] V. ARNOLD & A. AVEZ . – Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier Villars (1967).
- [3] J. MARTINET . – Singularities of smooth functions and maps, London Math. Soc. Series 58 (1982), Cambridge U.P.
- [4] J. MOSER . – Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D. Birkhoff, Lect. Notes in Math. 597 (1976), 464-494.
- [5] H. POINCARÉ . – Sur un théorème de géométrie, Oeuvres de Henri Poincaré, t.1, Gauthier Villars (1953), 499-538.
- [6] H. POINCARÉ . – Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t.1, Gauthier Villars (1893).
- [7] C. ROBINSON . – Generic properties of conservative systems, Am. J. of Math. 92 (1970), 562-601.