MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANTONIO PAQUES

Sur la cohomologie des formes quadratiques

Mémoires de la S. M. F., tome 59 (1979), p. 101-113

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__59__101_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1977, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 59, 1979, p. 101-113

SUR LA COHOMOLOGIE DES FORMES QUADRATIQUES

par

Antonio PAQUES

Le but de cet article est de généraliser les résultats obtenus par T.A. Springer [12] sur l'équivalence de formes quadratiques sous un point de vue de cohomologie de groupes.

On supposera toujours que tout anneau est commutatif à élément unité, tout module est unitaire, toute algèbre est associative (non nécessairement commutative) à élément unité et tout homomorphisme d'anneaux (resp. d'algèbres) transforme élément unité en élément unité.

1. Soient R un anneau et M un R-module. Si M est muni d'une forme quadratique q, on dira que (M,q) est un R-module quadratique. Si, de plus, M est projectif de type fini et q est non dégénérée, on dira que (M,q) est un R-espace quadratique. Si $f : R \to S$ est un homomorphisme d'anneaux et (M,q) est un R-module quadratique, il existe une unique forme quadratique $q^S : S \otimes_R M \to S$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q} & R \\ {\scriptstyle f\otimes id_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S \otimes_R M & \xrightarrow{q^S} & S \end{array} \qquad \text{(cf. [6]).}$$

Désignons par $U(R)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau R et considérons les ensembles $R^o = \{x \in R \mid 1-4x \in U(R)\}$ et $J = \{x-x^2 \mid x \in R$ et $1-2x \in U(R)\}$. L'ensemble R^o, muni de l'opération $(x,y) \mapsto xoy = x+y-4xy$, est un groupe abélien et J est un sous-groupe de R^o. On notera $G(R)$ le groupe quotient R^o/J de R^o par J. Si $2 \in U(R)$, $G(R) = U(R)/U^2(R)$ et si $2 \notin U(R)$, $G(R) = R/\{x-x^2 \mid x \in R\}$ (cf. [7]).

Supposons, maintenant que R soit local et que (M,q) soit un R-espace quadratique. Si $2 \in U(R)$, il existe une base $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de M telle que

$$q(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2, \text{ avec } \alpha_i \in U(R),\ 1 \le i \le n \quad \text{(cf. [7]).}$$

Si $2 \notin U(R)$, le rang de M est pair et il existe une base $\{x_1,\ldots,x_{2m}\}$ de M telle que

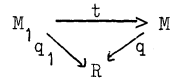
$$q(\sum_{i=1}^{2m} \xi_i x_i) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \xi_i^2 + \beta_i \xi_i \xi_{i+m} + \gamma_i \xi_{i+m}^2), \text{ avec } \alpha_i, \beta_i \in U(R), 1 \le i \le m$$

(cf. [7]. Le discriminant $\Delta(q)$ de la forme quadratique q est un élément de $G(R)$ décrit par

$$\Delta(q) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \pmod{U^2(R)}, \text{ si } 2 \in U(R) \text{ et}$$

$$\Delta(q) = \alpha_1\gamma_1 \,o \ldots o\, \alpha_m\gamma_m \pmod{J}, \text{ si } 2 \notin U(R).$$

Etant donnés deux R-modules quadratiques (M,q) et (M_1,q_1), on dit que q et q_1 sont <u>équivalentes</u> si il existe un isomorphisme de R-modules $t : M_1 \to M$ tel que le diagramme



soit commutatif.

Il s'agira dans ce paragraphe, étant donnés deux R-espaces quadratiques (M,q) et (M,q_1), d'étudier l'existence d'extensions galoisiennes S de R telles que q^S et q_1^S soient équivalentes.

Soient S un anneau, G un groupe fini d'automorphismes de S et $R=S^G$. On dit que S est une <u>extension galoisienne de l'anneau</u> R, <u>de groupe</u> G, si S est une R-algèbre séparable, projective de type fini et de rang $[G:1]$ comme R-module. La notion d'extension quadratique d'un anneau est aussi utilisée dans ce paragraphe. Une R-algèbre S est une <u>extension quadratique de l'anneau</u> R si S est séparable, fidèle, projective de type fini et de rang 2 comme R-module. Toute extension quadratique d'un anneau R est aussi une extension galoisienne de R (cf. [11] et [6]). Dans le cas local, une extension quadratique d'un anneau R est de type $R[x]$, avec $x^2 = bx+c$, où b et c sont éléments dans R tels que $b^2+4c \in U(R)$. Le groupe de Galois de $R[x]$ sur R est cyclique d'ordre 2, dont le générateur est $\sigma : x \mapsto b-x$. Pour d'autres résultats concernant les extensions galoisiennes et quadratiques d'un anneau on renvoie à la bibliographie (cf. [1], [3], [6], [8], [11] et [13]).

Un anneau local R d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est <u>quadratiquement hensélien</u> si tout polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + \beta$ dans $R[X]$ admettant deux racines distinctes dans $R/\mathfrak{m}$, module $\mathfrak{m}R[X]$, admet aussi deux racines (nécessairement distinctes) dans R.

<u>Proposition</u> 1.1 : Soit R un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Toute extension quadratique $R[X]$ de R, avec $x^2 = bx+c$ et telle que le polynôme $X^2 - bX - c$ soit irréductible sur R, est un anneau local si, et seulement si, R est quadratiquement hensélien.

<u>Démonstration</u> : Soit $R[x]$, avec $x^2 = bx+c$, une extension quadratique de R. Supposons que R soit quadratiquement hensélien et que le polynôme X^2-bX-c soit irreductible sur R. Pour montrer que $R[x]$ est un anneau local il suffit de vérifier que tout élément dans $R[x] - \mathfrak{m}R[x]$ est inversible dans $R[x]$. Un élément $y = \alpha + \beta x \in R[x]$ est inversible dans $R[x]$si et seulement si, sa norme $N(y) = y\,\sigma(y) = (\alpha + \beta x)(\alpha + \beta(b-x)) = \alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 c$ est inversible dans R. Remarquons que $c \notin \mathfrak{m}$ car, sinon, nous aurions le polynôme $X^2 - bX - c$ réductible sur R, contrairement à la supposition initiale. Maintenant, on voit aisément que $N(\alpha+\beta x)$ est inversible dans R si, et seulement si, $\alpha \notin \mathfrak{m}$ ou $\beta \notin \mathfrak{m}$, ce qui montre l'assertion.

Réciproquement, soit $X^2+\alpha X+\beta \in R[X]$ un polynôme admettant deux racines distinctes dans $R/\mathfrak{m}$, modulo $\mathfrak{m}R[X]$. Donc, $\alpha^2-4\beta$ est inversible dans R, ce qui veut dire que $R[x]$, avec $x^2 = -\alpha x -\beta$, est une extension quadratique de R.

D'autre part si un élément $a \in R$ satisfait $a^2 + \alpha a + \beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$, l'élément $a-x \in R[x] - \mathfrak{m}R[x]$ n'est pas inversible dans $R[x]$, ce qui signifie que $R[x]$ n'est pas local. Donc, le polynôme $X^2 + \alpha X + \beta$ est réductible sur R et, par conséquent, $X^2 + \alpha X + \beta$ admet deux racines dans R. Ceci montre que R est quadratiquement hensélien. ■

Corollaire 1.2 : Soient R un anneau local et $R[x]$, avec $x^2 = bx+c$, une extension quadratique de R. Si R est hensélien et le polynôme X^2-bX-c est irréductible sur R, alors $R[x]$ est un anneau local et hensélien.

La démonstration de ce corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 1.1 et du corollaire 16, chap. VII, § 43 de [9].

Théorème 1.3 : Soient R un anneau local et (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques. Alors il existe une extension galoisienne S de R telle que q^S et q_1^S soient équivalentes. Si de plus R est hensélien, S est aussi un anneau local et hensélien.

Démonstration : Dans cette démonstration $\otimes$ signifiera $\otimes_R$.

i) $2 \in U(R)$: soient $\{x_1,\dots,x_n\}$ et $\{y_1,\dots,y_n\}$ bases de M telles que

$$q\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j^2 \quad \text{et} \quad q_1\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j y_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \xi_j^2$$

avec α_j et β_j inversible dans R (cf. [7]) et considérons les extensions quadratiques $R[\gamma_j]$ et $R[\gamma_{n+j}]$ de R, avec $\gamma_j^2 = \alpha_j$ et $\gamma_{n+j}^2 = \beta_j$, $1 \le j \le n$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $X^2 - \gamma_i^2$ soit irréductible sur $\otimes_{k\neq i} R[\gamma_k]$ et considérons $S = \otimes_{i\in I} R[\gamma_i]$. L'algèbre S, ainsi obtenue, est une extension galoisienne de R comme produit tensoriel d'extensions galoisiennes de R (cf. [1]) et vérifie la première partie du théorème.

Supposons, maintenant, que R soit hensélien. La vérification que S est un anneau local et hensélien se fait par récurrence sur le cardinal de l'ensemble $I = \{i_1,\dots,i_r \mid 1 \le r \le 2n\}$. L'extension quadratique $R[\gamma_{i_1}]$ est, évidemment, un anneau local et hensélien. Soit (par hypothèse de récurrence) $S' = R[\gamma_{i_1}] \otimes \dots \otimes R[\gamma_{i_s}]$ avec $1 \le s \le r$, un anneau local et hensélien. L'algèbre $S' \otimes R[\gamma_{i_{s+1}}] \simeq S'[X]/(X^2-\gamma_{i_{s+1}}^2)$ est une extension quadratique de S' et, puisque

le polynôme $X^2 - \gamma_{i_{s+1}}^2$ est irréductible sur S' (car il est irréductible sur $\otimes_{k\neq s+1} R[\gamma_{i_k}]$), alors $S' \otimes R[\gamma_{i_{s+1}}]$ est un anneau local et hensélien (cf. cor.1.2). Donc, S est un anneau local et hensélien.

ii) $2 \in U(R)$: Dans ce cas le rang de M est pair et soient $\{x_1,\ldots,x_{2m}\}$ et $\{y_1,\ldots,y_{2m}\}$ deux bases de M telles que

$$q(\sum_{j=1}^{2m} \xi_j x_j) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j \xi_j^2 + \beta_j \xi_j \xi_{j+m} + \gamma_j \xi_{j+m}^2)$$

et

$$q_1(\sum_{j=1}^{2m} \xi_j y_j) = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j \xi_k^2 + \mu_j \xi_j \xi_{j+m} + \nu_j \xi_{j+m}^2),$$

avec $\alpha_j, \beta_j, \lambda_j$ et μ_j inversibles dans R, $1\leq j\leq m$, (cf [7]). Considérons les extensions quadratiques $R[w_j]$ et $R[w_{j+m}]$ de R, avec $w_j^2 = -\alpha_j^{-1}\beta_j w_j - \alpha_j^{-1}\gamma_j$ et $w_{j+m}^2 = -\lambda_j^{-1}\mu_j w_{j+m} - \lambda_j^{-1}\nu_j$, $1\leq j\leq m$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $X^2 + \alpha_j^{-1}\beta_j X + \alpha_j^{-1}\gamma_j$ (si $i=j$) ou $X^2+\lambda_j^{-1}\mu_j X + \lambda_j^{-1}\nu_j$ (si $i=j+m$) soit irréductible sur $\otimes_{k\neq i} R[w_k]$. Soit $S = \otimes_{i\in I} R[w_i]$. On vérifie, comme dans i), que S satisfait l'assertion du théorème. ■

Etant donnés une extension galoisienne S d'un anneau R et deux R-modules quadratiques (M,q) et (M,q_1), si q^S et q_1^S sont équivalentes on dit que les formes quadratiques q et q_1 sont S-<u>équivalentes</u>.

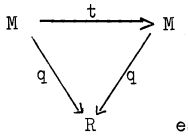
2. Soient R un anneau et (M,q) un R-module quadratique. <u>L'algèbre de Clifford</u> de (M,q), qu'on note $C(M,q)$, est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(M)$ par l'idéal bilatère $I(q)$ engendré par les éléments $x^2-q(x)1_{T(M)}, x \in M$.

Remarquons que $C(M,q)$ est la solution du problème universel posé par les applications R-linéaires $g:M \to A$, où A est une R-algèbre, telles que $g(x)^2=q(x)1_A$, $x\in M$.

Si on gradue $T(M)$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $T_0(M) = \otimes_{i\geq 0} T^{2i}(M)$ et $T_1(M) = \otimes_{i\geq 0} T^{2i+1}(M)$ (où $T^j(M) = \otimes_R^j M$), alors $I(q)$ est homogène vis à vis de cette graduation et $C(M,q) = C_0(M,q) \oplus C_1(M,q)$; $C_0(M,q)$ est une sous-algèbre de $C(M,q)$ engendrée par les éléments $xy(\mathrm{mod}\ I(q))$, $x,y \in M$. Si (M,q) est un R-espace quadratique, M s'identifie à un sous-module de $C_1(M,q)$.

Etant donnés deux R-espaces quadratiques (M_1,q_1) et (M,q), tout homomorphisme de R-modules $t:M_1 \to M$ qui satisfait $q_1(x)=q(t(x))$, s'étend à un homomorphisme de R-algèbres $C(t):C(M_1,q_1) \to C(M,q)$ tel que $C(t)(M_1)\subset M$. Inversement, tout homomorphisme de R-algèbres $t':C(M_1,q_1)\to C(M,q)$ tel que $t'(M_1)\subset M$ donne lieu, par restriction à M_1, à un homomorphisme de R-modules $t=t'|_{M_1}:M_1 \to M$ vérifiant $q(t(x))=q_1(x)$, $x\in M_1$. De plus, puisque q et q_1 sont non dégénérées, $C(t)$ est injectif (resp. surjectif, bijectif) si, et seulement si, t est injectif (resp. surjectif, bijectif).

Ensuite supposons que R soit local et que (M,q) soit un R-espace quadratique. On dira qu'un R-automorphisme t de M est <u>orthogonal</u> si le

diagramme suivant 

est commutatif. L'ensemble des R-automorphismes orthogonaux de (M,q) forme un groupe, appelé le <u>groupe orthogonal</u> de (M,q) et on le désignera par $O(M,q)$(ou $O(q)$). Le <u>groupe orthogonal unimodulaire</u> de (M,q), qu'on note $SO(M,q)$ (ou $SO(q)$) est le sous-groupe de $O(M,q)$ défini par $SO(M,q) = \{t \mid t \in O(M,q) \text{ et } C(t)\big|_{Z(C_0)} = id\}$ si $2 \notin U(R)$, où $Z(C_0)$ désigne le <u>centre</u> de $C_0(M,q)$. Dans le cas $2 \in U(R)$, $SO(M,q) = \{t \mid t \in O(M,q) \text{ et } d(t) = 1\}$, où $d(t)$ désigne le <u>déterminant</u> de t.

Soient, maintenant, (M,q_1) un autre R-espace quadratique et S une extension galoisienne de R telle que les formes quadratiques q et q_1 soient S-équivalentes. Désignons par G le groupe de Galois de S sur R.

Etant donnés $\sigma \in G$ et une application η de $S \otimes_R M$ dans S (resp. $S \otimes_R M$), on définit l'application $\sigma\eta$ de $S \otimes_R M$ dans S (resp. $S \otimes_R M$) par $\sigma\eta(x) = \sigma(\eta(\sigma^{-1}(x)))$, où $\sigma : S \otimes_R M \to S \otimes_R M$ est donné par $\sigma(s\otimes m) = \sigma(s)\otimes m$, $s \in S$, $m \in M$. Remarquons que si $t \in O(q^S)$ il y en a de même de σt. Maintenant, si $t : S\otimes_R M \to S\otimes_R M$ est un isomorphisme de S-modules tel que $q^S(t(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$, puisque $\sigma q^S = q^S$ et $\sigma q_1^S = q_1^S$, on a $q^S(t(x)) = q_1^S(x) = \sigma q_1^S(x) = \sigma(q_1^S(\sigma^{-1}(x))) = \sigma q^S(\sigma t(x)) = q^S(\sigma t(x))$ et alors il existe $u_\sigma \in O(q^S)$ tel que $u_\sigma t = \sigma t$, quel que soit $\sigma \in G$. En outre, $(\sigma\tau)t = \sigma(\tau t) = \sigma(u_\tau t) = (\sigma u_\tau)u_\sigma t$, d'où $u_{\sigma\tau} = (\sigma u_\tau)u_\sigma$ $\sigma,\tau \in G$.

D'autre part, si $t' : S \otimes_R M \to S \otimes_R M$ est un autre automorphisme de S-modules tel que $q^S(t'(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$, alors on a aussi $\sigma t' = u'_\sigma t'$, avec $u'_\sigma \in O(q^S)$ et il existe $u \in O(q^S)$ tel que $u'_\sigma = (\sigma u)u_\sigma u^{-1}$, quel que soit $\sigma \in G$.

Donc, toute forme quadratique q_1 sur M, qui est S-équivalente à q, donne lieu à une classe de cohomologie, notée par $c_S(q,q_1)$, de l'ensemble $H^1(G,O(q^S))$ de 1-cohomologie non abélienne de G à valeurs dans $O(q^S)$, représentée par le cocycle $f : G \to O(q^S)$ tel que $f(\sigma) = (\sigma t)t^{-1}$, $\sigma \in G$, où t est un S-automorphisme de $S \otimes_R M$ vérifiant $q^S(t(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$. Remarquons que la représentation de la classe $c_S(q,q_1)$ ne dépend pas de l'automorphisme t.

<u>Théorème</u> 2.1 : Soient R un anneau local, S une extension galoisienne de R de groupe G et (M,q) un R-espace quadratique. Il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de formes quadratiques q_1 sur M, qui sont S-équivalentes à q et les éléments de l'ensemble $H^1(G,O(q^S))$.

Démonstration : Soient q_1 et q_2 formes quadratiques S-équivalentes à q. Supposons que $c_S(q,q_1) = c_S(q,q_2)$. Alors on a $q_i^S(x) = q^S(t_i(x))$, $x \in S \otimes_R M$, $(i=1,2)$ où t_1 et t_2 sont des S-automorphismes de $S \otimes_R M$. On peut choisir ces automorphismes tels que $\sigma t_i = h(\sigma)t_i$ $(i=1,2)$, où $h:G \to O(q^S)$ est un cocycle représentant de la classe $c_S(q,q_1) = c_S(q,q_2)$. Donc, $\sigma(t_2^{-1}t_1) = t_2^{-1}t_1$, quel que soit $\sigma \in G$ et alors il existe un R-automorphisme t de M tel que $t_2^{-1}t_1 = id_S \otimes t$ (cf. [5]). C'est évident que $q_2(t(x)) = q_1(x)$, $x \in M$, ce qui montre que q_1 et q_2 sont équivalentes.

Inversement si q_1 et q_2 sont équivalentes, il est trivial que $c_S(q,q_1) = c_S(q,q_2)$.

Finalement, si c est un élément arbitraire de $H^1(G,O(q^S))$, représenté par le cocycle $h : G \to O(q^S)$, il existe un S-automorphisme t de $S \otimes_R M$ tel que $h(\sigma) = (\sigma t)t^{-1}$, $\sigma \in G$ (cf. [5]). Soit $q' : S \otimes_R M \to S$ la forme quadratique donnée par $q'(x) = q^S(t(x))$, $x \in S \otimes_R M$. Alors, puisque $\sigma q' = q'$, quel que soit $\sigma \in G$, on a, tout de suite, $q' = q_1^S$, pour quelque forme quadratique $q_1 : M \to R$. Ceci achève la démonstration du théorème. ∎

Théorème 2.2 : Soient R un anneau local, S une extension galoisienne locale de R, de groupe G et (M,q) un R-espace quadratique. Il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de formes quadratiques q_1 sur M, qui sont S-équivalentes à q et ont même discriminant que q, et les éléments de l'ensemble $H^1(G,SO(q^S))$.

Démonstration : Soient q_1 une forme quadratique S-équivalente à q et $f : G \to O(q^S)$, donné par $f(\sigma) = (\sigma t)t^{-1}$, $\sigma \in G$, le cocycle représentant de la classe de 1-cohomologie $c_S(q,q_1) \in H^1(G, O(q^S))$, où t est un S-automorphisme de $S \otimes_R M$ vérifiant $q^S(t(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$.

Il s'agit de montrer que $f(\sigma) \in SO(q^S)$, quel que soit $\sigma \in G$, si, et seulement si, $\Delta(q) = \Delta(q_1)$ dans $G(R)$ et pour cela il faut distinguer le cas où $2 \in U(R)$ de celui où $2 \notin U(R)$.

i) $2 \in U(R)$: Dans ce cas $G(R) = U(R)/U^2(R)$ et supposons que $\Delta(q) = \Delta(q_1) \pmod{U^2(R)}$. Alors il existe $\lambda \in U(R)$ tel que $\Delta(q_1) = \Delta(q)\lambda^2$. En outre, de $q_1^S(x) = q^S(t(x))$, $x \in S \otimes_R$, on a $\Delta(q_1^S) = \Delta(q^S)(d(t))^2$, où $d(t)$ désigne le déterminant de t. Comme $\Delta(q^S) = \Delta(q)$ et $\Delta(q_1^S) = \Delta(q_1)$, on a $\lambda^2 = d(t)^2$ et, puisque S est un anneau local, il s'ensuit que $d(t) = \pm\lambda \in U(R)$. Ainsi, $\sigma(d(t)) = d(t)$ et, comme $d(\sigma t) = \sigma(d(t))$, on a $d(f(\sigma)) = 1$ ou $f(\sigma) \in SO(q^S)$, quel que soit $\sigma \in G$. Réciproquement, si $f(\sigma) \in SO(q^S)$, quel que soit $\sigma \in G$, on peut voir trivialement que $\Delta(q_1) = \Delta(q) \pmod{U^2(R)}$.

ii) $2 \notin U(R)$: Supposons que $\Delta(q_1) = \Delta(q)$ dans $G(R)$. Alors il existe $\lambda \in R$ tel que $\Delta(q_1) = \Delta(q) + (\lambda - \lambda^2)(1-4\,\Delta(q))$. De $q_1^S(x) = q^S(t(x))$, $x \in S \otimes_R M$, il s'ensuit que $C(t) : S \otimes_R C(M,q_1) \to S \otimes_R C(M,q)$ est un isomorphisme de S-algèbres, d'où $C_0(t) = C(t)\big|_{S \otimes_R Z(C_0(M,q_1))} : S \otimes_R Z(C_0(M,q_1)) \to S \otimes_R Z(C_0(M,q))$ est aussi un isomorphisme de S-algèbres. Comme $Z(C_0(M,q_1))$ (resp. $Z(C_0(M,q))$) est l'extension quadratique $R[x]$ (resp. $R[y]$) de R, avec $x^2 = x - \Delta(q_1)$ (resp. $y^2 = y - \Delta(q)$) (cf. [4] et [7]) on peut écrire $C_0(t)\,(1 \otimes x) = \alpha\, 1 \otimes 1 + \beta 1 \otimes y$, avec $\alpha \in S$ et $\beta \in U(S)$. De l'équation $x^2 - x + \Delta(q_1) = 0$, on a $(\alpha 1 \otimes 1 + \beta 1 \otimes y)^2 - (\alpha 1 \otimes 1 + \beta 1 \otimes y) + \Delta(q_1) 1 \otimes 1 = 0$, d'où $\beta(\beta + 2\alpha - 1) = 0$ et $(\alpha^2 - \alpha) - \Delta(q)(\beta^2 - 1) = (\lambda^2 - \lambda)\,(1 - 4\,\Delta(q))$. Puisque S est un anneau local et $\beta \in U(S)$ on a, finalement, $\alpha = \lambda$ ou $\alpha = 1 - \lambda$ et $\beta = 1 - 2\alpha$, ce qui donne $\alpha, \beta \in R$. Alors $C_0(t) = \sigma C_0(t) = C_0(\sigma t)$ et $C(f(\sigma))\big|_{S \otimes_R Z(C_0(M,q))} = \mathrm{id}$, ce qui signifie $f(\sigma) \in SO(q^S)$, quel que soit $\sigma \in G$. Réciproquement, de $f(\sigma) \in SO(q^S)$ il s'ensuit que $C_0(t) = C(t)\big|_{S \otimes_R Z(C_0(M,q_1))} : S \otimes_R Z(C_0(M,q_1)) \to S \otimes_R Z(C_0(M,q))$ est un isomorphisme de S-algèbres vérifiant $\sigma\, C_0(t) = C_0(t)$, quel que soit $\sigma \in G$. Donc, il existe un isomorphisme de R-algèbres $t' : Z(C_0(M,q)) \to Z(C_0(M,q))$ tel que $C_0(t) = \mathrm{id}_S \otimes t'$ (cf. [5]), d'où $\Delta(q_1) = \Delta(q)$ dans $G(R)$ (cf. [4]). ∎

3. Pour les résultats de ce paragraphe nous aurons besoin des deux premières propositions suivantes.

Proposition 3.1 : Soient R un anneau local et (M,q) un R-espace quadratique. Alors, à tout R-automorphisme orthogonal t de (M,q) correspond un élément inversible a_t de $C(M,q)$ tel que $t(x) = d(t) a_t x a_t^{-1}$, $x \in M$, où $d(t)$ désigne le déterminant de t. L'élément a_t est déterminé à un facteur inversible près.

Pour la démonstration de cette proposition voir [2].

Proposition 3.2 : Soient R un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, (M,q) un R-espace quadratique et S une extension galoisienne locale de R, de groupe G. Alors, les éléments $a_t \in C(S \otimes_R M, q^S)$ qui satisfont la Prop. 3.1, pour chaque $t \in O(q^S)$, peuvent être choisis de manière à vérifier $a_{\sigma t} = \sigma(a_t)$, quel que soit $\sigma \in G$.

Remarque : Comme $C(S \otimes_R M, q^S) = S \otimes_R C(M,q)$, le groupe G opère sur $C(S \otimes_R M, q^S)$ de manière habituelle en identifiant $\sigma = \sigma \otimes \mathrm{id}_{C(M,q)}$.

Démonstration : (de la prop. 3.2)

De $t(x) = d(t)a_t x a_t^{-1}$, on a $(\sigma t)(x) = d(t)(\sigma(a_t))x(\sigma(a_t^{-1})), x \in S \otimes_R M$ et alors il existe $\lambda_{\sigma,t} \in U(S)$ tel que $\sigma(a_t) = \lambda_{\sigma,t} a_{\sigma t}$, quel que soit $\sigma \in G$.

Le corps $S/\mathfrak{m}S = R/\mathfrak{m} \otimes_R S$ est une extension galoisienne de $R/\mathfrak{m}$, dont le groupe de Galois est $\bar{G} = \{\bar{\sigma} = id_{R/\mathfrak{m}} \otimes \sigma \mid \sigma \in G\} \simeq G$ (cf. [3]). Pour l'indépendance linéaire des $\bar{\sigma} \in \bar{G}$, il existe $\lambda \in S$ tel que $\sum_{\tau \in G} \bar{\lambda}_{\tau,\tau^{-1}t}\, \bar{\tau}(\bar{\lambda}) \neq 0 \pmod{\mathfrak{m}S}$, ce qui signifie $\lambda_t = \sum_{\tau \in G} \lambda_{\tau,\tau^{-1}t}\, \tau(\lambda) \in U(S)$. Alors, $\sigma(\lambda_t) = \lambda_{\sigma,t}^{-1} \lambda_{\sigma t}$ où $\lambda_{\sigma t} = \sum_{\tau \in G} \lambda_{\tau,\tau^{-1}\sigma t}\, \tau(\lambda)$ et, par suite, $\sigma(\lambda_t a_t) = \lambda_{\sigma t} a_{\sigma t}$. Donc, en remplaçant $\lambda_{\sigma t} a_{\sigma t}$ par $a_{\sigma t}$, on a $\sigma(a_t) = a_{\sigma t}$, quels que soient $\sigma \in G$ et $t \in O(q^S)$. Ceci achève la démonstration. ∎

Soient, maintenant, R un anneau local, S une extension galoisienne locale de R, avec groupe G et considérons deux R-espaces quadratiques (M,q) et (M,q_1) tels que q et q_1 soient S-équivalentes.

Etant donnée la classe $c_S(q,q_1) \in H^1(G,O(q^S))$, représentée par le cocycle $f : G \to O(q^S)$, tel que $f(\sigma) = u_\sigma$, il existe des éléments inversibles a_{u_σ} dans $C(S \otimes_R M, q^S)$ tels que $u_\sigma(x) = d(u_\sigma) a_{u_\sigma} x a_{u_\sigma}^{-1}$, $x \in S \otimes_R M$, $\sigma \in G$ (cf. Prop. 3.1).

On vérifie, avec l'aide des Prop. 3.1 et 3.2, que l'application $\alpha : G \times G \to U(S)$ donnée par $\alpha(\sigma,\tau) = a_{u_{\sigma\tau}} a_{u_\sigma}^{-1} \sigma(a_{u_\tau}^{-1})$, $\sigma,\tau \in G$, est un 2-cocycle de G à valeurs dans U(S) (avec G opérant sur U(S) de manière habituelle). On voit aussi que si $f'(\sigma) = u'_\sigma$, $\sigma \in G$, est un autre cocycle représentant de la même classe $c_S(q,q_1)$ et si $\alpha'(\sigma,\tau) = a_{u'_{\sigma\tau}} a_{u'_\sigma}^{-1} \sigma(a_{u'_\tau}^{-1})$, $\sigma,\tau \in G$, est le 2-cocycle correspondant alors α et α' diffèrent par un cobord. Ceci montre qu'il existe une application T de l'ensemble $H^1(G,O(q^S))$ dans le groupe de 2-cohomologie $H^2(G,U(S))$ de G à valeurs dans U(S), définie par $T(c_S(q,q_1)) = \alpha_S(q,q_1)$.

Proposition 3.3 : Soient R un anneau local, (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques et S une extension galoisienne de R de façon que $\alpha_S(q,q_1)$ soit définie.

i) Si q et q_1 sont équivalentes alors $\alpha_S(q,q_1) = 1$

ii) $\alpha_S(q,q_1)^2 = 1$

La démonstration de cette proposition est immédiate.

Théorème 3.4 : Soient R un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et S une extension galoisienne locale de R, de groupe G et de corps résiduel, $S/\mathfrak{m}S$ infini. Soient (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques, avec q et q_1

S-équivalentes. Si $\Delta(q_1) = \Delta(q)$ et $\alpha_S(q,q_1) = 1$, alors les R-algèbres $C(M,q)$ (resp. $C_0(M,q)$) et $C(M,q_1)$ (resp. $C_0(M,q_1)$) sont isomorphes.

Pour la démonstration de ce théorème la proposition suivante est nécessaire.

Proposition 3.5 : Soient R,S et G comme dans l'énoncé du Théorème 3.4. Soit A une S-algèbre, libre et de type fini comme S-module. Si G se prolonge à un groupe d'automorphismes de A, alors $H^1(G,U(A)) = 0$.

Démonstration : Soit $f \in H^1(G,U(A))$ et considérons l'élément $\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)X_\sigma$ dans la $S[X_\sigma \mid \sigma \in G]$-algèbre $A[X_\sigma \mid \sigma \in G]$. La norme $N(\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)X_\sigma)$ de cet élément, relativement à $S[X_\sigma \mid \sigma \in G]$, est un polynôme dans $S[X_\sigma \mid \sigma \in G]$. D'autre part, le corps $S/\mathfrak{m}S = R/\mathfrak{m} \otimes_R S$ est une extension galoisienne de $R/\mathfrak{m}$, de groupe $\bar{G} = \{\bar{\sigma} = id_{R/\mathfrak{m}} \otimes \sigma \mid \sigma \in G\} \simeq G$ (cf. [3]) et, de l'independance algébrique des $\bar{\sigma} \in \bar{G}$, on a un élément s_o de S vérifiant $N(\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)X_\sigma)(s_o) \neq 0 \pmod{\mathfrak{m}S}$, ce qui donne $N(\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\sigma(s_o)) = N(\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)X_\sigma)(s_o) \in U(S)$.

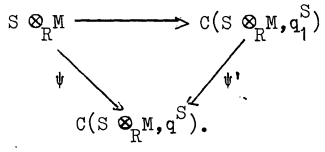
Alors l'élément $a = \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\sigma(s_o)$ est inversible dans A et on voit aisément que $f(\sigma) = \sigma(a^{-1})a$, quel que soit $\sigma \in G$, ce qui montre l'assertion de la proposition.

Démonstration : (du Théorème 3.4) De $\Delta(q_1) = \Delta(q)$ on a $c_S(q,q_1) \in H^1(G,SO(q^S))$ (cf. Th. 2.2). Soit $f:G \to SO(q^S)$, donnée par $f(\sigma) = u_\sigma$, $\sigma \in G$, le cocycle représentant de $c_S(q,q_1)$. Rappelons que $u_\sigma = (\sigma t)t^{-1}$, où t est un S-automorphisme de $S \otimes_R M$ tel que $q^S(t(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$.

Comme $\alpha_S(q,q_1) = 1$, on peut considérer le cocycle correspondant $\alpha : G\times G \to U(S)$ donné par $\alpha(\sigma,\tau) = 1$, ce qui entraîne que les éléments inversibles a_{u_σ} de $C(S \otimes_R M, q^S)$ satisfont $a_{u_{\sigma\tau}} = \sigma(a_{u_\tau})a_{u_\sigma}$, quels que soient $\sigma,\tau \in G$.

Alors, il existe un élément inversible $a \in C(S \otimes_R M, q^S)$ tel que $a_{u_\sigma} = \sigma(a)^{-1}a$ (cf. Prop. 3.5) et, puisque $u_\sigma \in SO(q^S)$, on a $(\sigma t)(x) = u_\sigma(t(x)) = a_{u_\sigma} t(x) a_{u_\sigma}^{-1} = \sigma(a)(a^{-1}t(x)a)\sigma(a^{-1})$, $x \in S \otimes_R M$, $\sigma \in G$.

Soit $\psi : S \otimes_R M \to S \otimes_R C(M,q)$ l'application définie par $\psi(x) = a^{-1}t(x)a$, $x \in S \otimes_R M$. Comme ψ est S-linéaire et $\psi(x)^2 = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$, il existe un homomorphisme de S-algèbres $\psi' : C(S \otimes_R M, q_1^S) \to C(S \otimes_R M, q^S)$ rendant commutatif le diagramme suivant



Comme $S \otimes_R M$ engendre $C(S \otimes_R M, q^S)$ et ψ est injectif, alors $\psi'(S \otimes_R M) = \psi(S \otimes_R M)$ engendre $C(S \otimes_R M, q^S)$, ce qui montre que ψ' est surjectif. Mais, $C(S \otimes_R M, q^S)$ et $C(S \otimes_R M, q^S)$ sont des S-modules libres de type fini et ont même rang, donc ψ' est un isomorphisme. Puisque $\sigma\psi = \psi$, on a $\sigma\psi' = \psi'$, quel que soit $\sigma \in G$ et, par suite, il existe un isomorphisme de R-algèbres $\theta : C(M,q_1) \to C(M,q)$ vérifiant $\psi' = id_S \otimes \theta$ (cf. [5]). La vérification de ce que les R-algèbres $C_0(M,q)$ et $C_0(M,q_1)$ sont aussi isomorphes est immédiate. ∎

Théorème 3.6 : Soient R un anneau local et (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques. Si le rang de M est 2 ou 3, $\Delta(q_1) = \Delta(q)$ et les R-algèbres $C(M,q)$ et $C(M,q_1)$ sont isomorphes, alors les formes quadratiques q et q_1 sont équivalentes.

Pour la démonstration de ce théorème voir [10].

Corollaire 3.7 : Soient R,S, (M,q) et (M,q_1) comme dans l'énoncé du Théorème 3.4. Si le rang de M est 2 ou 3 alors les formes quadratiques q et q_1 sont équivalentes si et seulement si $\Delta(q) = \Delta(q_1)$ et $\alpha_S(q,q_1) = 1$.

La démonstration de ce corollaire est une conséquence triviale de la Prop. 3.3i) et des Théorèmes 3.4 et 3.6.

4. Dans tout ce paragraphe R désignera un anneau local où $2 \in U(A)$, de corps résiduel infini.

Soient $a,b \in U(R)$ et S une extension faloisienne locale de R, de groupe G et contenant les éléments λ et μ tels que $\lambda^2 = a$ et $\mu^2 = b$. Puisque S est un anneau local et $2 \in U(S)$, on a $\sigma(\lambda) = (-1)^{a_\sigma}\lambda$ et $\sigma(\mu) = (-1)^{b_\sigma}\mu$, où a_σ et b_σ sont des nombres entiers égaux à 0 et 1, quel que soit $\sigma \in G$. Considérons les applications $f,g : G\times G \to U(S)$ définies par

$$f(\sigma,\tau) = b, \text{ si } a_\sigma = a_\tau = 1 \text{ et } f(\sigma,\tau) = 1, \text{ sinon}$$

et

$$g(\sigma,\tau) = (-1)^{a_\sigma b_\tau}$$

quels que soient $\sigma,\tau \in G$. Ces applications sont des 2-cocycles de G à valeurs dans U(S) et on notera par (a,b) (resp. [a,b]) la classe de 2-cohomologie dans $H^2(G,U(S))$ représentée par f (resp. g).

Proposition 4.1 : Soient $a,b,c \in U(R)$. Alors

i) $(a^2,b) = 1$

ii) $(a,b) = (b,a)$

iii) $(ab,c) = (a,c)(b,c)$

iv) $(a,a) = (a,-1)$

v) $(a,b) = [a,b]$

vi) $(a,b) = 1$ si et seulement si il existe des éléments x,y et z dans R tels que $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ et un parmi eux est inversible.

Les propriétés de (a,b) énoncés dans cette proposition sont de vérification immédiate.

Etant donnés un R-espace quadratique et une base $\{x_1,\dots,x_n\}$ de M telle que $q(\sum_{1\le i\le n} \xi_i x_i) = \sum_{1\le i\le n} a_i \xi_i^2$, avec $a_i \in U(R)$, considérons l'élément $h(q) = \prod_{i<j} (a_i,a_j) \in H^2(G,U(S))$ où S est une extension galoisienne locale de R, de groupe G et contenant les racines carrées des éléments a_i, $1 \le i \le n$.

On peut montrer que cet élément $h(q)$ ne dépend pas du choix d'une base pour M et on l'appelle l'invariant de Hasse.

Soient, maintenant, (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques et $\{x_1,\dots,x_n\}$ une base de M telle que $q(\sum_{1\le i\le n} \xi_i x_i) = \sum_{1\le i\le n} a_i \xi_i^2$, avec $a_i \in U(R)$, $1\le i\le n$. En remplaçant q_1 par une forme quadratique équivalente, on peut aussi supposer que $q_1(\sum_{1\le i\le n} \xi_i x_i) = \sum_{1\le i\le n} b_i \xi_i^2$, avec $b_i \in U(R)$, $1\le i\le n$.

Soit S une extension galoisienne locale de R, de groupe G et contenant les racines carrées des éléments a_i et b_i, $1\le i\le n$.

Il est évident que les formes quadratiques q et q_1 sont S-équivalentes. Un S-automorphisme t de $S \otimes_R M$ vérifiant $q^S(t(x)) = q_1^S(x)$, $x \in S \otimes_R M$, peut être décrit, dans ce cas, par $t(1\otimes x_i) = \gamma_i(1\otimes x_i)$, où $\gamma_i^2 = b_i a_i^{-1}$, $1\le i\le n$. D'autre part il existe $u_\sigma \in O(q^S)$ tel que $u_\sigma t = \sigma t$, quel que soit $\sigma \in G$ (cf. Th. 2.1).

Alors, puisque $\sigma(\gamma_i) = (-1)^{\epsilon_{i\sigma}}\gamma_i$ ($\epsilon_{i\sigma} = 0,1$), on a $u_\sigma(1\otimes x_i) = (-1)^{\epsilon_{i\sigma}}(1\otimes x_i)$ et on peut voir que $u_\sigma = t_1^{\epsilon_{1\sigma}} \dots t_n^{\epsilon_{n\sigma}}$, où $t_i \in O(q^S)$ est donné par

$$t_i(x) = x - \frac{\varphi^S(x,1\otimes x_i)}{q^S(1\otimes x_i)}(1\otimes x_i),\ x \in S\otimes_R M,\ 1\le i\le n,$$

avec φ^S désignant la forme S-bilinéaire symétrique associée à q^S.

Puisque $t_i(x) = -(1\otimes x_i)\, x\, (1\otimes x_i)^{-1}$ dans $C(S\otimes_R M, q^S)$, un élément a_n de $C(S\otimes_R M, q^S)$ qui vérifie la Prop. 3.1 par u_σ, $\sigma \in G$, est $a_\sigma = 1\otimes(x_1^{\epsilon_{1\sigma}} \dots x_n^{\epsilon_{n\sigma}})$

Comme $\alpha_S(q,q_1)^2 = 1$ dans $H^2(G,U(S))$ (cf. Prop. 3.3), cette classe $\alpha_S(q,q_1)$ peut être aussi représentée par le cocycle $\alpha(\sigma,\tau) = \sigma(a_\tau)a_\sigma a_{\sigma\tau}^{-1}$, quels que soient $\sigma,\tau \in G$. Alors, en calculant $\alpha(\sigma,\tau)$, on a

$$\alpha(\sigma,\tau) = (-1)^{\sum_{i<j} \epsilon_{i\sigma}\epsilon_{j\tau}} \cdot \epsilon_{i\sigma}=\epsilon_{i\tau}=1 \; a_i$$

ou

$$\alpha(\sigma,\tau) = \prod_{i<j} g_{ij}(\sigma,\tau) \prod_{i=1}^{n} f_i(\sigma,\tau)$$

quels que soient $\sigma,\tau \in G$, où g_{ij} (resp. f_i) est le cocycle représentant de $[a_i^{-1}b_i, a_j^{-1}b_j]$ (resp. $a_i^{-1}b_i, a_i)$). Donc,

$$\alpha_S(q,q_1) = \prod_{i<j} [a_i^{-1}b_i, a_j^{-1}b_j] \prod_{i=n}^{n} (a_i^{-1}b_i, a_i)$$

et par conséquent, on a le résultat suivant

Lemme 4.2 : $\alpha_S(q,q_1) = (\Delta(q), -\Delta(q_1))h(q_1)h(q)$

Corollaire 4.3 : Soient (M,q) et (M,q_1) deux R-espaces quadratiques. Si le rang de M est 2 ou 3, alors les formes quadratiques q et q_1 sont équivalentes si et seulement si $\Delta(q) = \Delta(q_1)$ et $h(q) = h(q_1)$.

La démonstration de ce corollaire est une conséquence immédiate du Corollaire 3.7 et du Lemme ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AUSLANDER and O. GOLDMAN, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 367-409.

[2] H. BASS, Clifford algebras and Spinor norms over a commutative ring, Am. J. Math. (1974) 156-206.

[3] S.U. CHASE, D.K. HARRISON and A. ROSENBERG, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem. Am. Math. Soc., 52 (1965).

[4] E.A.M. HORNIX, Stiefel-Whitney invariants of quadratic forms over local rings, Journal of Algebra, 26 (1973), 258-279.

[5] M.A. KNUS et M. OJANGUREN, Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya, Lectures Notes in Math., 389, Springer Verlag, Berlin (1974).

[6] A. MICALI et Ph. REVOY, Modules Quadratiques, Cahiers Mathématiques 10 (1977), MONTPELLIER.

[7] A. MICALI et O.E. VILLAMAYOR, Sur les algèbres de Clifford, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème Sér. 1 (1968), 271-304.

[8] A. MICALI et O.E. VILLAMAYOR, Algèbres de Clifford et groupe de Brauer, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème Sér. 4(1971), 285-310.

[9] M. NAGATA, Local rings, Interscience Publishers, New York (1962).

[10] Ph. REVOY, Autour des formes quadratiques, Thèse de Doctorat d'Etat, Math. Montpellier, (1975).

[11] C. SMALL, The group of quadratic extensions, Journal of Pure and Applied Algebra, 2 (1973), 83-105.

[12] T.A. SPRINGER, On the equivalence of quadratic forms, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc., Ser. A, 62 (1959), 241-253.

[13] O.E. VILLAMAYOR, Separable algebras and Galois extensions, Osaka J. Math., 4 (1963), 161-171.

Instituto de Matematica

Universidade Estadual de Campinas
C.P. 1170
CEP 13100 Campinas, SP, Brésil