MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS

# Répartition des nombres premiers de la forme $[n^c]$

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 37 (1974), p. 49-52
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__37__49_0>

Journées arithmétiques [1973, Grenoble]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 37, 1974, p. 49-52

# REPARTITION DES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $[n^c]$

par

Jean-Marc DESHOUILLERS

-:-:-:-

Soit $c$ un nombre réel non-entier supérieur à 1 ; on note $\pi_c(x)$ le nombre d'entiers $n$ inférieurs à $x$ tels que $[n^c]$ soit un nombre premier. Nous nous proposons de montrer la vraisemblance de la relation (*) :

(*) $$\pi_c(x) \sim \frac{x}{c \operatorname{Log} x} \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers l'infini.}$$

## 1. - Résultats antérieurs.

A notre connaissance, les seuls résultats connus concernant $\pi_c(x)$ sont celui de I.I. Pyateskii-Šapiro qui a démontré en 1953 (cf. [3]) la validité de (*) lorsque $c$ est inférieur à $\frac{12}{11}$, et celui de G.A. Kolesnik qui a démontré en 1967 (cf. [2]) que la relation (*) a encore lieu lorsque $c$ est inférieur à $\frac{10}{9}$.

## 2. - Répartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmétiques.

Appelons $N_c(x\ ;\ k, \ell)$ le nombre d'entiers $n$ inférieurs ou égaux à $x$ tels que $[n^c]$ soit congru à $\ell$ modulo $k$. On trouvera dans [1] un certain nombre de résultats concernant l'évaluation de $N_c(x\ ;\ k,\ell)$, en particulier :

PROPOSITION 1. - Posons :

$$R_c(x\ ;\ k) = \sup_{\ell} \sup_{y \le x} \left| N_c(y\ ;\ k, \ell) - \frac{y}{k} \right| .$$

Pour tout nombre réel $c_o$ non entier supérieur à 1, et tout nombre réel positif $A$, il existe deux nombres réels $B$ et $K_o$, un voisinage $\mathcal{V}(c_o)$, tels que l'on ait, pour tout réel $c$ de $\mathcal{V}(c_o)$ :

$$\sum_{k \le x^{\sigma}(\log x)^{-B}} R_{c,k}(x) < K_o \frac{x}{(\log x)^A}$$

où

$$\sigma^{-1} = \begin{cases} 2^{[c_o+2]} & \text{pour } 1 < c_o < 12 \\ 3c_o^2 (\log c_o + 15) & \text{pour } c_o \text{ supérieur à } 12 . \end{cases}$$

3. - Justification heuristique de la relation (*) .

Le théorème des nombres premiers implique que la probabilité heuristique pour un nombre $n$ d'être premier est $\frac{1}{\log n}$ .

La proposition 1 signifie que les nombres $[n^c]$ se répartissent harmonieusement dans les différentes progressions arithmétiques ; on peut raisonnablement penser que la probabilité heuristique pour le nombre $[n^c]$ d'être premier est $\frac{1}{c \log n}$ , et il est donc vraisemblable que l'on ait :

$$\pi_c(x) \sim \sum_{n \leq x} \frac{1}{c \log x} \sim \frac{x}{c \log x} .$$

4. - Majoration de $\pi_c(x)$ .

L'article de H.E. Richert (cf. [4]) montre que l'on peut appliquer la méthode du crible de Selberg pour obtenir une majoration du nombre de nombres premiers contenus dans une suite finie donnée $\mathcal{A}$ , à partir du moment où l'on sait avec suffisamment de précision comment les éléments de $\mathcal{A}$ se répartissent dans certaines progressions arithmétiques. En particulier, de la proposition 1, on peut déduire le résultat suivant :

THEOREME 1. - Pour tout nombre réel $c_o$ non entier, supérieur à 1 , il existe un voisinage de $c_o$ , $\mathcal{V}(c_o)$ , et une constante $K(c_o)$ tels que pour tout nombre réel $c$ appartenant à $\mathcal{V}(c_o)$ et tout nombre réel $x$ supérieur à 2 , on ait :

$$\pi_c(x) \leq K(c_o) \frac{x}{c \log x} .$$

5. - Nombres presque-premiers de la forme $[n^c]$ .

En appliquant maintenant la méthode de Selberg dite de la "borne inférieure", on obtient à partir de la proposition 1 :

THEOREME 2. - Pour tout nombre réel $c$ non entier supérieur à 1 , il existe un entier $r_c$ (on peut prendre $r_c = [5c^3 \log c]$ si $c$ est supérieur à 12) tel qu'il existe une infinité d'entiers $[n^c]$ ayant au plus $r_c$ facteurs premiers.

6. - Estimation en moyenne de $\pi_c(x)$ .

Soient $c_1$ et $c_2$ $(c_1<c_2)$ deux nombres réels supérieurs à 1 ; on constate aisément que l'on peut écrire :

$$\int_{c_1}^{c_2} \pi_c(x)dc = \sum_{n\leq x} \quad \sum_{p \text{ premier}} \int_{c_1}^{c_2} \varphi_{p,n}(c)dc ,$$

où $\varphi_{p,n}(c) = \begin{matrix} 1 & \text{si } p \leq n^c < p+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{matrix}$

On peut alors sans grande difficulté estimer l'intégrale ; on obtient l'évaluation suivante, qui nous indique que la relation (*) est satisfaite en moyenne.

THEOREME 3. - Il existe une constante $L$ ne dépendant que des nombres réels $c_1$ et $c_2$ telle que :

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} \pi_c(x)dc - \frac{x}{\log x} \log \frac{c_2}{c_1} \right| \leq L \frac{x}{(\log x)^2} .$$

7. - Estimation "presque partout" de $\pi_c(x)$ .

Si l'on connaissait l'équivalence de $\int_{c_1}^{c_2} \pi_c^2(x)dc$ et $(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}) \frac{x^2}{(\log x)^2}$ lorsque $x$ tend vers l'infini, on pourrait montrer que pour presque tout $c$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur $[1,+\infty[$), la relation (*) est valide.

En combinant les théorèmes 3 et 1, nous n'avons pu parvenir qu'au résultat plus faible suivant, analogue au théorème de Čebyšev.

THEOREME 4. - Pour presque tout $c$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur $[1,+\infty[$), il existe trois constantes positives $k_c$ , $K_c$ et $x_c$ telles que pour tout $x$ supérieur à $x_c$ , on ait :

$$k_c \frac{x}{\log x} < \pi_c(x) < K_c \frac{x}{\log x} .$$

Notons que les constantes $k_c$ et $x_c$ sont totalement ineffectives, (on ne connait aucun nombre réel $c > \frac{10}{9}$ tel que $\pi_c(x)$ tende vers l'infini avec $x$), tandis que la constante $K_c$ est effectivement calculable.

-:-:-:-

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. DESHOUILLERS. - Sur la répartition des nombres $[n^c]$ dans les progressions arithmétiques. C.R.A.S. t.277, (1973), 647-650.

[2] G.A. KOLESNIK. - Distribution des nombres premiers de la forme $[n^c]$. Math. Notes 1967 - Trad. de Mat. Zametki (1967), 117-128.

[3] I.I. PYATESKII-ŠAPIRO. - Sur la répartition des nombres premiers de la forme $[f(n)]$ (en russe). Mat. Sbornik 33 (1953), 559-566.

[4] H.E. RICHERT. - Selberg's sieve with weights. Mathematika 16 (1969), 1-22.

-:-:-:-

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17, rue Descartes

75005 PARIS

et

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la libération

33405 TALENCE