MÉMOIRES DE LA S. M. F.

STEPHEN SIMONS

Un théorème de convergence avec frontière

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 359-363

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__359_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 359-363.

UN THEOREME DE CONVERGENCE AVEC FRONTIERE

par

Stephen SIMONS

Soit X un ensemble non vide. Si $f \in \ell^\infty(X)$, nous écrivons $S(f) = \sup f(X)$ et $\|f\| = \sup|f(X)|$. Nous écrivons "conv" pour "enveloppe convexe de". Tous les espaces vectoriels considérés seront réels.

THEOREME : Nous supposons que $\{f_n : n \geqslant 1\} \subset \ell^\infty(X)$, $\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\| < \infty$, $Y \subset X$ et que, si $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1} \in \ell_1$, alors, il existe $y \in Y$ tel que $(\Sigma_{n\geqslant 1}\ \lambda_n f_n)(y) = S(\Sigma_{n\geqslant 1}\ \lambda_n f_n)$. Soit, de plus, μ une forme linéaire positive sur $\ell^\infty(X)$ telle que $\mu(1) = 1$. Si

(1) $\qquad \lim\sup_{n\to\infty} f_n(y) \leqslant 0$ pour tout $y \in Y$

alors

(2) $\qquad \lim\sup_{n\to\infty} \mu(f_n) \leqslant 0$.

Démonstration : Si l'inégalité (2) n'est pas vérifiée, nous pouvons supposer, en remplaçant $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ par une suite convenable extraite, qu'il existe $A>0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mu(f_n) \geqslant 3A$. Il en résulte que, pour tout g appartenant à conv $\{f_n : n \geqslant 1\}$, $S(g) = \mu(S(g)1) \geqslant \mu(g) \geqslant 3A$. Nous avons alors :

(3) $\qquad A>0$ et, pour tout $g \in$ conv $\{f_n : n \geqslant 1\}$, $S(g) \geqslant 3A$.

Posons :

(4) $\qquad B = \sup_{n\geqslant 1} S(f_n)$,

et choisissons :

(5) $\qquad \lambda>0$ tel que $B\lambda \leqslant A$;

construisons par récurrence une suite $g_1, g_2, \ldots$, telle que,

(6) $\qquad$ pour tout $m \geqslant 1$, $g_m \in$ conv $\{f_n : n \geqslant m\}$,

et,

$$S(\Sigma_{n\leqslant m}\ \lambda^{n-1} g_n) \leqslant \inf S(\Sigma_{n\leqslant m-1}\ \lambda^{n-1} g_n + \lambda^{m-1} \text{ conv } \{f_n : n \geqslant m\}) + A(\lambda/2)^m \ .$$

Pour tout $m \geqslant 1$, $\dfrac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda}$ appartient à conv $\{f_n : n \geqslant m\}$, d'où

$$S(\Sigma_{n\leqslant m}\ \lambda^{n-1} g_n) \leqslant S(\Sigma_{n\leqslant m-1}\ \lambda^{n-1} g_n + \lambda^{m-1}\ \frac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda}) + A(\lambda/2)^m \ .$$

En multipliant par $1+\lambda$ et écrivant,

(7) $\qquad h_m = \Sigma_{n\leqslant m}\ \lambda^{n-1}\ g_n$,

nous en déduisons que

$$(1+\lambda)\ S(h_m) \leqslant S(\lambda h_{m-1} + h_{m+1}) + A(1+\lambda)(\lambda/2)^m \quad ,$$

d'où

$$(1+\lambda)\ S(h_m) \leqslant \lambda\ S(h_{m-1}) + S(h_{m+1}) + A(1+\lambda)(\lambda/2)^m \quad ,$$

et par suite

$$\frac{S(h_{m+1}) - S(h_m)}{\lambda^m} \geqslant \frac{S(h_m) - S(h_{m-1})}{\lambda^{m-1}} - \frac{A(1+\lambda)}{2^m} \ .$$

Mais il résulte de (7), (6) et (3) que

$$\frac{S(h_1) - S(h_o)}{\lambda^o} = S(g_1) \geqslant 3\ A \quad ,$$

d'où, par récurrence, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\frac{S(h_{m+1}) - S(h_m)}{\lambda^m} \geqslant 3\ A - A(1+\lambda)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = A(2-\lambda) \ .$$

Posons :

(8) $$h = \Sigma_{n \geqslant 1}\ \lambda^{n-1}\ g_n \ .$$

Alors, pour tout $m \geqslant 1$

$$S(h) - S(h_{m-1}) = \Sigma_{n \geqslant m}\ [S(h_n) - S(h_{n-1})] \geqslant \Sigma_{n \geqslant m}\ \lambda^{n-1}\ A(2-\lambda)$$

c'est-à-dire :

(9) $$S(h) - S(h_{m-1}) \geqslant \lambda^{m-1}\ \frac{A(2-\lambda)}{1-\lambda} \ .$$

Par hypothèse,

(10) il existe $y \in Y$ tel que $h(y) = S(y)$.

Pour tout $m \geqslant 1$ il résulte de (8) et (7) que :

$$\lambda^{m-1}\ g_m(y) = h(y) - h_{m-1}(y) - \Sigma_{n \geqslant m+1}\ \lambda^{n-1}\ g_n(y) \quad ,$$

qui, d'après (10) et (4), est supérieur à

$$S(h) - S(h_{m-1}) - \Sigma_{n \geqslant m+1}\ \lambda^{n-1}\ B \ ,$$

mais il résulte de (9) que cette expression est supérieure à

$$\lambda^{m-1}\ \frac{A(2-\lambda)}{1-\lambda} - \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\ B = \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda}\ \{A(2-\lambda) - \lambda B\} \ ,$$

qui, enfin est supérieure à $\lambda^{m-1}\ A$ d'après l'inégalité (5).

Nous avons établi que :

(11) pour tout $m \geqslant 1$ $g_m(y) \geqslant A$

il résulte de (11) et (6) que

pour tout $m \geqslant 1$ il existe $k(m) \geqslant m$ tel que $f_{k(m)}(y) \geqslant A$.
Ceci contredit l'hypothèse (1), ce qui démontre le théorème.

Les quatre corollaires ci-dessous découlent immédiatement du théorème.

COROLLAIRE 1 : Soient M un sous-espace fermé de $\ell^\infty(X)$, et $Y \subset X$ tel que pour tout $f \in M$ il existe $y \in Y$ tel que $f(y) = S(f)$. Soit $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite de M telle que $\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \| < \infty$. Soit $f \in M$. Si $f_n(y) \to f(y)$ pour tout $y \in Y$, alors $f_n \to f$ dans $\sigma(\ell_\infty(X) , \ell_\infty(X)')$.

Remarque : Le corollaire 1 généralise un résultat connu sur des fonctions continues sur un espace compact dans lequel Y est la frontière de Choquet de M .

COROLLAIRE 2 : Soient X un espace topologique pseudo-compact, et $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite bornée en norme de $C(X)$. Si $f \in C(X)$ et $f_n \to f$ simplement sur X alors $f_n \to f$ dans $\sigma(C(X) , C(X)')$.

Remarque : X est pseudo-compact si $C(X) \subset \ell_\infty(X)$, ce qui implique que pour tout $f \in C(X)$ il existe $y \in X$ tel que $f(y) = S(f)$. Le corollaire 2 généralise le théorème de Lebesgue.

COROLLAIRE 3 : Soient $(E , \| \cdot \|)$ un espace normé avec dual E' et complété $\tilde{E}$, et $Y \subset \{y : y \in E', \| y \| \leqslant 1\}$ tel que :

(12) pour tout $x \in \tilde{E}$, il existe $y \in Y$ tel que $\langle x,y \rangle = \| x \|$.

Soit $\{x_n : n \geqslant 1\} \subset E$, telle que $\sup_{n \geqslant 1} \| x_n \| < \infty$. Si $x \in E$ et $\langle x_n , y \rangle \to \langle x , y \rangle$ pour tout $y \in Y$ alors $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$.

Remarques : On peut déduire du théorème de Bauer ([2] , p. 225) que (12) est satisfaite si Y est l'ensemble des points extrémaux de $\{y : y \in E' , \| y \| \leqslant 1\}$ (si E n'est pas complet, on ne peut pas utiliser le théorème de Krejn et Mil'man). On obtient ainsi le théorème de Rainwater ([3] , p. 33 et [4]).

Le corollaire 3 ne marche pas si nous affaiblissons (12) à

(13) pour tout $x \in E$, il existe $y \in Y$ tel que $\langle x , y \rangle = \| x \|$.

Par exemple, si

$E = \{x : x \in \ell^\infty , x$ est constante à partir d'un certain rang$\}$

et si Y se compose des applications $x \to \pm x_m (m \geqslant 1)$, alors (13) est satisfaite. Cependant la suite $(1,1,1,1,\ldots)$, $(0,1,1,1,\ldots)$, $(0,0,1,1,\ldots),\ldots$ contredirait cette version renforcée du théorème.

Même si (12) est satisfaite, il peut arriver que $Y \cap ex\{y : y \in E', \| y \| \leqslant 1\}$ soit vide. Par exemple, si α est non dénombrable et $E = \ell^1(\alpha)$ (donc $E' = \ell^\infty(\alpha)$)

nous pouvons prendre $Y = \{y : y \in \ell^\infty(\Omega), |y|$ est la fonction caractéristique d'un ensemble dénombrable$\}$.

COROLLAIRE 4 : Soit Y une partie non vide d'un espace vectoriel topologique E telle que

(14) toute fonction affine continue sur $\overline{\text{conv}}\, Y$ atteigne son maximum en un élément de Y .

Soit $\{f_n : n \geqslant 1\}$ une suite uniformément bornée de fonctions affines continues sur $\overline{\text{conv}}\, Y$ telle que, pour tout $y \in Y$, $f_n(y) \to 0$; alors, pour tout $x \in \overline{\text{conv}}\, Y$, $f_n(x) \to 0$.

Remarques : (14) est satisfaite si Y est pseudo-compact. Donc le corollaire 4 généralise le lemme qu'on trouve dans [1] (17.11, p. 158). Dans ce lemme, qu'on utilise pour établir le théorème de Krejn, on suppose que Y est semi-compact (= countably compact) et que les fonctions f_n sont linéaires.

Autres remarques : On peut utiliser la technique du théorème pour démontrer certains théorèmes du minimax, le théorème de James et le lemme combinatoire de Ptak ([5], [6] et [7]).

Qu'il me soit permis d'exprimer mes sincères remerciements à Marc Rogalski pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction de la version française de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KELLEY (J.L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces, Van Nostrand, 1963.

[2] MEYER (P.A.). - Theory of Probability, Blaisdell, New-York 1965.

[3] PHELPS (R.R.). - Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand mathematical Studies 7, 1966.

[4] RAINWATER (J.). - Weak convergence of bounded sequences, Proc.Amer.math.Soc. 14 (1963), 999.

[5] SIMONS (S.). - A convergence theorem with boundary (à paraître), Pacific J.Math

[6] SIMONS (S.). - Maximinimax, minimax and antiminimax theorems and a result of R. C. James, (à paraître) Pacific J. Math.

[7] SIMONS (S.). - On Ptak's combinational lemma (à paraître) Pacific J. Math.

Dept of Mathematics
University of California
SANTA BARBARA, Calif. 93106
(Etats-Unis)