BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur quelques théorèmes d'arithmétique

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 77-81

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__77_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur quelques théorèmes d'arithmétique; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 janvier 1875)

1. On connaît la proposition suivante : « $\varphi(m)$ désignant combien il y a de nombres premiers à m et non supérieurs à m, on a

$$m = \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots,$$

d, d', d'' désignant la suite des diviseurs de m, parmi lesquels figurent 1 et m lui-même (*). »

Cette proposition peut se généraliser ainsi qu'il suit :

Désignons en général par $\left(m, \frac{m}{k}\right)$, où m désigne un nombre entier et k une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, le nombre des entiers premiers avec m et non supérieurs à $\frac{m}{k}$; on voit que, si $k = 1$, on a $(m, m) = \varphi(m)$.

(*) Voy. SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 13.

Cela posé, je dis que l'on a m désignant un nombre entier et $\left(\frac{m}{k}\right)$ la partie entière du quotient $\frac{m}{k}$,

$$(1) \qquad \left(\frac{m}{k}\right) = \left(1, \frac{1}{k}\right) + \left(d, \frac{d}{k}\right) + \left(d', \frac{d'}{k}\right) + \ldots + \left(m, \frac{m}{k}\right),$$

la somme contenue dans le second membre s'étendant à tous les diviseurs $1, d, d', \ldots, m$ du nombre m.

Pour le démontrer, je vais faire voir que si la proposition est vraie pour une valeur quelconque de k, elle est vraie pour toute autre valeur.

Soit k_0 la valeur de k pour laquelle la formule est supposée vérifiée; concevons, par exemple, que k_0 diminue d'une façon continue, le premier membre de la relation (1) ne pourra changer que si k passe par une valeur qui donne à $\frac{m}{k}$ une valeur entière; dans ce passage, $\left(\frac{m}{k}\right)$ augmentera d'une unité; le second membre ne peut changer que si l'une ou plusieurs des quantités $\frac{d}{k}$ acquièrent une valeur entière, et, comme alors $\frac{m}{k}$ a aussi une valeur entière, puisque m est un multiple de d, on voit que la solution de la question consiste à examiner ce qui se passe quand $\frac{m}{k}$ est un entier.

Or, quand $\frac{m}{k}$ est un entier, il peut se faire qu'un certain nombre d'expressions de la forme $\frac{d}{k}$ soient aussi des entiers; supposons-les rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte qu'elles forment la série

$$\frac{m}{k}, \frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{\mu}{k},$$

$\frac{\mu}{k}$ désignant la plus petite de ces fractions (il est clair d'ailleurs que μ peut être égal à m).

Cela posé, $\frac{\mu}{k}$ est nécessairement premier avec μ; car, si α désignait un diviseur commun, $\frac{\mu}{\alpha}$ et $\frac{\frac{\mu}{\alpha}}{k}$ seraient des nombres entiers et $\frac{\mu}{k}$ ne serait pas le dernier terme de la série. Il n'en est pas de même relativement aux termes précédents; en effet, si l'on pose $\frac{\mu}{k} = e$, μ et e étant premiers entre eux, on en déduit $\left(\frac{m'}{k}\right)$ désignant un quelconque des termes qui précè-

dent $\left(\frac{\mu}{k}\right)$ $e' = \frac{m'}{k} = \frac{m'e}{\mu}$, d'où $\frac{e'}{m'} = \frac{e}{\mu}$; et, comme la fraction $\frac{e}{\mu}$ est irréductible, on en conclut que e' et m' sont respectivement des multiples de e et de m et ont par conséquent un facteur commun.

2. Voyons maintenant quels changements subit le second membre quand $\frac{m}{k}$ prend une valeur entière.

Les différentes expressions telles que $\left(m', \frac{m'}{k}\right)$ ne changent pas de valeur; la série des nombres non supérieurs à $\frac{m'}{k}$ renferme en plus, il est vrai, le nombre e'; mais, comme il n'est pas premier avec m', la somme n'est pas changée; l'expression $\left(\mu, \frac{\mu}{k}\right)$ seule change, et augmente précisément d'une unité, puisque μ et $\frac{\mu}{k}$ sont premiers entre eux.

La proposition est donc vraie, si elle est vraie pour une valeur quelconque de k; et comme elle l'est évidemment pour une valeur de k supérieure à m, puisque les deux termes de la relation (1) se réduisent à zéro, elle est démontrée.

3. Je veux maintenant tirer de la relation $m = \Sigma\varphi(d)$, que j'ai rappelée au commencement de cette note, et dont je viens de donner une nouvelle démonstration indépendante de la formule qui exprime $\varphi(m)$ au moyen de ses facteurs premiers (*), une démonstration de cette formule elle-même.

M. Dedekind (*Théorie des nombres* de Dirichlet, p. 594) a, il est vrai, donné un théorème remarquable qui permet de résoudre cette question.

Ce théorème s'énonce ainsi qu'il suit : « $\lambda(n)$ désignant un nombre égal à 0, si n est divisible par un carré, dans le cas contraire, égal à ± 1 suivant que le nombre des facteurs de n est pair ou impair, si deux fonctions $f(m)$ et $\varphi(m)$ sont liées par la relation suivante

$$f(m) = \Sigma\psi(d), \tag{2}$$

où, dans le second membre, la sommation s'étend à tous les diviseurs du nombre entier m, on a réciproquement

$$\psi(m) = \Sigma\lambda\left(\frac{m}{d}\right) f(d), \tag{3}$$

la sommation s'étendant également à tous les diviseurs de m. »

De la formule (3), on déduit facilement l'expression connue de $\varphi(m)$,

(*) On connaît d'autres démonstrations indépendantes également de cette formule; voir, notamment, Dirichlet, *Théorie des nombres*, p. 25.

mais il est à remarquer que la démonstration de cette formule indiquée par M. Dedekind s'appuie précisement sur cette expression; pour éviter un cercle vicieux, il faudrait donc établir directement la relation (3), ce qui serait du reste facile en développant les considérations qui suivent.

4. Pour obtenir l'expression de $\varphi(m)$, je considérerai une série de la forme

$$f(1)\frac{x}{1-x}+f(2)\frac{x^2}{1-x^2}+f(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.$$

Soit

$$\theta(1)x+\theta(2)x^2+\theta(3)x^3+\ldots$$

son développement effectué suivant les puissances croissantes de x; il est clair que les coefficients d'une des séries déterminent ceux de l'autre, en particulier on a évidemment

$$\theta(m)=\Sigma f(d),$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs du nombre entier m.

Supposons en particulier la fonction f tellement choisie que, m étant décomposé en facteurs premiers, en sorte que $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, on ait $f(m)=f(a^\alpha)f(b^\beta)\ldots$. La fonction f reste du reste arbitraire; ainsi $f(a^\alpha)$ et $f(a^{\alpha'})$ peuvent n'avoir aucune relation entre elles, si α et α' sont différents ; il en est de même de $f(a^\alpha)$ et $f(b^\alpha)$, si les facteurs a et b ne sont pas les mêmes.

Cela posé, dans ces hypothèses, les différents diviseurs du nombre $m=a^\alpha b^\beta\ldots$ étant les différents termes du produit

$$(1+a+\ldots+a^{\alpha-1})(1+b+\ldots+b^{\beta-1})\ldots,$$

il est clair que l'on aura

$$(4)\qquad \theta(m)=[1+f(a)+\ldots+f(a^{\alpha-1})][1+f(b)+\ldots+f(b^{\beta-1})]\ldots.$$

5. Cette formule offre un grand nombre d'applications.

Supposons, par exemple, que l'on ait $f(a)=f(b)=\ldots=-1$, et $f(a^\mu)=f(b^\mu)=\ldots=0$, pour toutes les valeurs de μ supérieures à l'unité. On déduira évidemment de la formule (4), pour toute valeur de m supérieure à l'unité, $\theta(m)=0$; on a d'ailleurs $\theta(1)=1$, et il est facile de voir que $f(m)=\lambda(m)$, λ désignant la même fonction numérique dont j'ai parlé ci-dessus (n° 3) (*); on a donc l'expression suivante, due à Mœbius (*loc. cit.*) :

$$(5)\qquad x=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}-\frac{x^5}{1-x^5}+\frac{x^6}{1-x^6}+\ldots.$$

(*) Cette remarquable fonction numérique, qui se présente dans la formule de M. Dedekind, a aussi été étudiée par Mœbius (*Sur un nouveau mode de réversion des séries;* CRELLE, t. IX), et par M. Tchebichef (*Note sur différentes séries;* LIOUVILLE, 1re série, t. XVI).

6. Supposons maintenant que l'on fasse, n désignant un entier quelconque,

$$\theta(a)=\theta(b)=\ldots=-1,\ \theta(a^n)=\theta(b^n)=\ldots=1,\ \theta(a^{n+1})=\theta(b^{n+1})=\ldots=-1,$$

en sorte que $\theta(a^n)$ soit, quel que soit le facteur a, égal à $+1$ si n est divisible par n, égal à -1 si n est congru à $+1$ suivant le module n, et dans tous les autres cas égal à zéro.

De la formule (4) il résulte que $\theta(m)$ est nul, à moins que m ne soit une puissance $n^{ième}$ exacte, auquel cas $\theta(m)=1$; d'ailleurs $f(m)$ est toujours égal à -1, 0 ou $+1$; on déduit de là que, quel que soit l'entier n, la série

$$x+x^{2^n}+x^{3^n}+x^{4^n}+\ldots$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{1-x}+\varepsilon_2\frac{x^2}{1-x^2}+\varepsilon_3\frac{x^3}{1-x^3}+\varepsilon_4\frac{x^4}{1-x^4}+\ldots,$$

les coefficients ε étant toujours égaux à -1, 0 ou $+1$, et se déterminant d'ailleurs facilement d'après ce qui précède.

Pour $n=2$, on a en particulier la formule suivante, donnée par M. Liouville (*Journal de math.*, 2e série, t. II),

$$(6)\qquad x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}.$$

7. Pour revenir à l'objet principal de cette note, je ferai remarquer que, de la propriété fondamentale de la fonction φ

$$(7)\qquad m=\Sigma\varphi(d),$$

résulte le développement suivant :

$$(8)\qquad \varphi(1)\frac{x}{1-x}+\varphi(2)\frac{x^2}{1-x^2}+\varphi(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots=x+2x^2+3x^3+\ldots.$$

Posons maintenant, quel que soit le nombre premier a, $f(a^n)=a^{n-1}(a-1)$, il est clair que, d'après la formule (4), on aura

$$\theta(m)=a^\alpha b^\beta\ldots=m,\quad\text{et}\quad f(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(a-1)(b-1).$$

D'où, en se reportant à la formule (7),

$$\varphi(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(\alpha-1)(\beta-1).$$

Telle est l'expression que je voulais déduire de la relation (7) (*).

(*) Depuis que cette note a été écrite, j'ai reconnu que la proposition attribuée à M. Dedekind appartenait en réalité à M. Liouville. (Voy. *Journal de math.*, 2e série, t. II, p. 110.