BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

Sur un élément géométrique nouveau des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 98-121

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__98_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN ÉLÉMENT GÉOMÉTRIQUE NOUVEAU DES SURFACES;

PAR M. E. BARRÉ.

Dans deux Communications insérées au *Bulletin de la Société mathématique* (19 janvier et 16 mars 1887), M. le professeur Demartres, de l'Université de Lille, signalait à l'attention des géomètres l'intérêt d'un élément géométrique nouveau auquel il donnait le nom de *flexion*.

Le présent Mémoire a pour objet de continuer le travail de M. Demartres et d'établir dans ses grandes lignes la théorie de cet élément.

Je rappellerai ici les définitions et les résultats généraux signalés dans les Mémoires précités, afin de présenter une étude qui se suffise à elle-même; mais je me bornerai à renvoyer le lecteur, pour les démonstrations, aux Communications du savant professeur de l'Université de Lille.

PREMIÈRE PARTIE. — DÉFINITION DE LA FLEXION. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS. APPLICATIONS.

1. *Définition.* — Considérons sur une surface un point M et prenons un plan de référence fixe P. Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction MM′, on s'éloignera du plan P d'une quantité dh; en même temps, la trace du plan tangent sur le plan de référence tourne de l'angle $d\Psi$. L'angle du plan tangent en M avec le plan de référence étant θ, nous appellerons *flexion* de l'élément MM′ par rapport au plan P le rapport

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dh}{d\Psi}. \tag{1}$$

2. THÉORÈME I. — *Si l'on considère sur une même surface deux directions conjuguées dont les flexions relatives à un même plan* P *soient* $\mathfrak{F}_1$ *et* $\mathfrak{F}_2$, *on a*

$$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 + R_1R_2 = 0, \tag{2}$$

R_1 *et* R_2 *étant les rayons de courbure principaux de la surface au point* M.

Corollaire. — *Si le déplacement a lieu suivant une asymptotique, on aura*

$$\mathcal{F} = \sqrt{-R_1 R_2}, \tag{3}$$

et l'on remarquera que cette valeur est indépendante de la direction choisie pour le plan de référence. (*Voir* Communication du 19 janvier.)

3. *Expressions diverses de la flexion.* — Soient MM′ l'élément de courbe, Q le plan tangent en M. Soit δ la trace sur Q d'un plan parallèle au plan de référence mené par M.

Si l'on désigne par ε l'angle que δ fait avec la direction MT de la tangente en M à l'élément MM′ et par ε_1 l'angle de δ avec la direction conjuguée de MT, on démontre (Communication du 16 mars) la formule

$$\mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon_1}, \tag{4}$$

ds désignant l'élément d'arc du déplacement, $d\sigma$ l'élément correspondant de l'arc d'indicatrice des normales.

La formule (4) conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème II. — *La flexion d'un élément n'est pas changée quand le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en* M.

Nous pouvons donc donner la définition suivante :

Définition. — La flexion d'un élément MM′ par rapport à une direction δ du plan tangent en M est la flexion de l'élément MM′ relativement à un plan quelconque parallèle à δ.

Nous la désignerons par le symbole (Tδ) et nous l'appellerons, pour abréger, *flexion de* T *par rapport à* δ.

Formules diverses. — Le Mémoire précité contient une série de formules que je me borne à rappeler.

Soient φ l'angle de MT avec la direction principale de rayon de courbure normale R_1 ; ω celui de $M\delta$ avec la même direction, et φ_1 celui de la droite MT_1 conjuguée de MT avec cette direction; on a en valeur absolue

$$\mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma}\,\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin(\omega-\varphi_1)}. \tag{5}$$

Si l'on prend pour sens positif des ω, φ celui qui amène la direction relative à R_1 sur celle relative à R_2, par une rotation d'un quadrant, l'observateur étant supposé les pieds au point M et la tête vers le centre de courbure, on trouve

$$\mathcal{F} = (T\delta) = \frac{\sin(\omega-\varphi)}{\frac{\cos\omega\cos\varphi}{R_1}+\frac{\sin\omega\sin\varphi}{R_2}} = \frac{\operatorname{tang}\omega-\operatorname{tang}\varphi}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi}, \tag{6}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\mathcal{F}}{R_2}\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}\omega+\frac{\mathcal{F}}{R_1}=0; \tag{6 bis}$$

et en désignant par R le rayon de courbure normale de MT et par R′ celui de $M\delta$:

$$\mathcal{F} = \frac{R\sin(\omega-\varphi)\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\omega-\varphi_1)} \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}\mathcal{F} = \left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\Bigg[\ &\frac{1}{R_1}\sqrt{\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R'}\right)}\\ &+\frac{1}{R_2}\sqrt{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R}\right)}\Bigg]^{-1}\end{aligned}\right. \tag{8}$$

De l'une ou l'autre de ces relations on tire $(T\delta)+(\delta T)=0$; ainsi :

Théorème III. — *La flexion de* T *par rapport à* δ *est égale et de signe contraire à celle de* δ *par rapport à* T.

On obtient de même les résultats suivants :

Théorème IV. — *A chaque direction* T *en correspond une autre* δ, *telle que* $T\delta$ *ait une valeur donnée. Les faisceaux*

correspondants T *et* δ *sont homographiques et ont pour rayons doubles les directions asymptotiques.*

THÉORÈME V. — *Quand deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue l'inverse de la torsion géodésique de l'élément correspondant* (1).

THÉORÈME VI. — *La courbure totale est égale et de signe contraire à l'inverse du produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux directions conjuguées.*

La considération de la formule (6) m'amène immédiatement à deux théorèmes nouveaux; écrivons que la valeur de $\mathcal{F}$ est indépendante de φ, on obtient, tous calculs faits :

$$\operatorname{tang}^2\omega = -\frac{R_2}{R_1};$$

d'où l'on conclut :

THÉORÈME VII. — *Il existe deux directions* δ *et deux seulement telles que la flexion* (Tδ) *ait une valeur indépendante de la direction* MT : *ce sont les deux directions asymptotiques.*

Cette valeur constante de la flexion est en valeur absolue $\sqrt{-R_1R_2}$.

THÉORÈME VIII. — *Il existe deux directions et deux seulement, les directions asymptotiques, pour lesquelles la flexion soit indépendante du plan de référence choisi.*

Cette valeur est encore $\sqrt{-R_1R_2}$ au signe près.

Remarque sur les modifications à apporter aux énoncés précédents dans le cas d'un point parabolique. — La flexion en un pareil point ne sera, pour aucune direction, *définie et indépendante* de la direction du plan ou de la direction de référence; car la direction asymptotique unique pour laquelle seule cela pourrait arriver donne une flexion infinie ou indéterminée suivant le choix du plan ou de la direction de référence.

---

(1) Dans ce cas, la formule $(T\delta)+(\delta T)=0$ conduit au théorème de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux déplacements rectangulaires.

Même remarque si l'on cherche une direction δ telle que $(T\delta)$ soit indépendante de la direction T.

4. *Nouvelle expression de la flexion.* — On peut transformer l'expression (4) d'une manière qui nous conduira à une formule qui nous sera utile plus tard.

Soit MΦ la parallèle à la tangente à l'indicatrice des normales relatives au point M. MΦ est, comme l'on sait, la direction du plan tangent en M perpendiculaire à MT_1 conjuguée de MT. La formule (4) donne donc immédiatement en valeur absolue

$$\mathcal{F} = (T\delta) = \frac{ds}{d\sigma}\frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta\Phi)}. \tag{9}$$

5. *Flexion relative au déplacement du plan osculateur d'une courbe.* — La définition générale de la flexion (n° 1) peut évidemment s'appliquer au déplacement du plan osculateur à une courbe en associant à chacun de ces plans son point de contact avec la courbe.

Si alors l'on prend pour Oz une perpendiculaire au plan de référence, on aura

$$\mathcal{F} = \frac{dz}{d\psi}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

où $d\psi$, θ ont les significations précédemment définies et x, y, z représentent les coordonnées d'un point courant de la courbe.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe; α', β', γ' ceux de sa normale principale, et α'', β'', γ'' ceux de la binormale. On a

$$\sin^2\theta = 1 - \gamma''^2.$$

Mais la trace du plan osculateur sur xOy a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha''}{\beta''}$.

Soit alors T le rayon de torsion de la courbe; il vient

$$d\Psi = \frac{\alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''}{\alpha''^2 + \beta''^2} = \frac{\alpha''\beta' - \beta''\alpha'}{\alpha''^2 + \beta''^2}\frac{ds}{T} = \frac{\gamma}{\gamma''^2 - 1}\frac{ds}{T}$$

et enfin $\mathcal{F} = -T$. Donc :

Théorème IX. — *La flexion relative au déplacement du*

plan osculateur à une courbe est égale, au signe près, à son rayon de torsion.

6. *Étude de la flexion pour un déplacement suivant une asymptotique.* — Nous savons que la flexion pour un tel déplacement est, au signe près, égale à $\sqrt{-R_1R_2}$.

D'après le théorème précédent, elle est égale au rayon de torsion de l'asymptotique; d'où la relation connue

$$T_0 = \sqrt{-R_1R_2},$$

où T_0 est le rayon de torsion de l'asymptotique considérée.

Remarquons qu'en s'appuyant sur le théorème V on pourrait retrouver ces résultats.

Cas où l'asymptotique est une génératrice d'une surface réglée. — Il ne peut plus être question ici de torsion de l'asymptotique, mais on peut arriver à d'autres conclusions.

Soit M le point considéré, O le point central. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice; dans ces conditions, en posant $OM = \rho$, on aura

$$\mathcal{F} = \frac{d\rho}{d\psi}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\rho}{K},$$

K étant le paramètre de distribution de la surface considérée. On déduit de là

$$d\psi = \frac{K\,d\rho}{\rho^2 + K^2}, \qquad \mathcal{F} = \frac{\rho^2 + K^2}{K},$$

et finalement

$$\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{K^2}{(K^2+\rho^2)^2}, \tag{10}$$

expression simple de la courbure totale d'une surface réglée.

7. *Application des résultats précédents à la recherche des surfaces réglées à courbure totale constante.* — D'après l'expression (10), on voit que, sauf le cas où K est nul ou infini (développables et cylindres et courbure totale nulle), la courbure ne

peut être constante que si ρ est constant tout le long d'une génératrice. Ceci n'est possible que pour des génératrices isotropes. On arrive dès lors facilement au théorème suivant :

Théorème X. — 1° *Il n'existe aucune surface réglée à génératrices réelles applicables sur la sphère ou sur la pseudo-sphère.*

2° *Les seules surfaces réglées réelles applicables sur une sphère sont les sphères égales.*

3° *Aucune surface réglée réelle n'est applicable sur une pseudo-sphère.*

Les deux dernières parties de l'énoncé résultent de ce que, si la surface admet la génératrice isotrope G, et si elle est réelle, elle admet également la droite imaginaire conjuguée G_1 comme génératrice et se réduit nécessairement à une sphère.

Remarque I. — Il existe toutefois des surfaces réglées imaginaires, mais à équation réelle, applicables sur une pseudo-sphère. Ce sont les sphères imaginaires

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0.$$

Remarque II. — Le paramètre de distribution d'une sphère de rayon R est Ri.

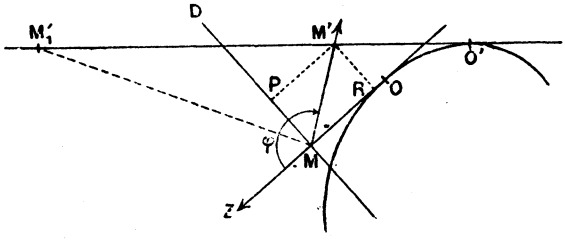
8. Théorème XI. — *La torsion géodésique de la trajectoire orthogonale d'une ligne asymptotique est, au signe près, égale à la torsion de cette asymptotique au point considéré.*

Car la flexion prise par rapport à la direction perpendiculaire au déplacement, direction qui n'est autre ici que la tangente principale, est égale, au signe près, à $\sqrt{-R_1 R_2}$, c'est-à-dire précisément au rayon de torsion de l'asymptotique.

Remarque. — Ce théorème se déduit immédiatement de la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires.

9. *Étude géométrique de la flexion dans les développables.* — Soit M le point considéré. Prenons un plan de référence perpendiculaire à la génératrice OM de la développable, O désignant le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement. Posons $OM = l$. Soit MM′ la direction suivant laquelle on veut étudier la flexion par rapport à la direction MD, perpendiculaire à OM dans le plan tangent en M. Soit M′O′ la génératrice

Fig. 1.



du point M′. Soient $d\sigma_n$, $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$ les éléments d'indicatrices : de la normale à la surface au point M, de la tangente et des deux normales à l'arête de rebroussement au point correspondant O. Comme ici l'on a $d\psi = d\sigma_n$ et $\sin\theta = 1$, la flexion $\mathcal{F}$ a pour expression

$$\mathcal{F} = \frac{dl}{d\sigma_n}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$d\sigma_n = d\sigma'';$$

d'où, φ étant l'angle indiqué sur la figure,

$$\mathcal{F} = \frac{\overline{PM'}}{d\sigma_n} = \frac{\overline{MR}}{d\sigma_n} = \frac{l\,d\sigma}{\sin\varphi}(-\cos\varphi)\frac{1}{d\sigma''}.$$

En réduisant et faisant usage des formules de Frenet, on arrive à la formule suivante :

$$\mathcal{F} = -\,l\cot\varphi\,\frac{T}{R}, \tag{11}$$

où T et R sont les rayons de courbure et de torsion de l'arête de la développable.

D'autre part, si K est le point de M′O′ situé dans le plan de

référence dont MD est la trace sur le plan tangent, les segments M'R et MK sont des infiniment petits équivalents en grandeur absolue; ils sont, d'ailleurs, dirigés en sens inverse. On a évidemment

$$\lim \frac{MK}{d\psi} = R_1,$$

R_1 désignant le rayon de courbure de la section normale principale MK. Donc

$$R_1 = \lim \frac{\overline{MK}}{d\psi} = -\lim \frac{\overline{M'R}}{d\psi} = \lim \frac{MR}{d\psi} \cot\varphi;$$

d'où enfin l'expression nouvelle de la flexion,

$$\mathcal{F} = R_1 \cot\varphi. \tag{12}$$

En comparant les relations (11) et (12) on obtient la formule connue qui donne l'expression du rayon de courbure principal fini d'une développable,

$$R_1 = -l\frac{T}{R}. \tag{13}$$

Si l'on prend un plan de référence perpendiculaire à MM' défini par sa trace MM'_1 dans le plan tangent, la flexion relative à cette direction prend les formes suivantes :

$$\mathcal{F} = \frac{l\,d\sigma}{\sin\varphi\,d\psi} = l\frac{T}{R}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d\sigma_n}{d\psi} = l\frac{T}{R}\frac{1}{\sin\psi}\frac{1}{\cos(MK, MM'_1)}.$$

Or, on a

$$(MK, MM'_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d'où

$$\mathcal{F} = \frac{1}{Q} = \frac{2R_1}{\sin 2\psi}, \tag{14}$$

Q désignant la torsion géodésique de l'élément MM'. Cette formule aurait d'ailleurs pu être écrite de suite en se rappelant l'expression de la torsion géodésique.

DEUXIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE LA FLEXION EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES RECTANGLES.

1. *Expressions diverses de la flexion, le plan de référence étant l'un des plans de coordonnées.* — Nous supposons d'abord l'équation de la surface ramenée à la forme

$$z = f(xy), \tag{1}$$

laissant de côté le cas simple, où la surface se réduirait à un cylindre dont les génératrices seraient parallèles à l'axe Oz.

Premier cas. — Le plan de référence est parallèle à l'un des plans $x = 0$ ou $y = 0$. On démontre (Communication du 19 janvier) que dans le premier cas la flexion $\mathcal{F}$ est donnée par la formule

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{dx}{s\,dx + t\,dy}, \tag{2}$$

où p et q sont les dérivées premières de f; r, s et t ses dérivées secondes.

Une formule absolument analogue donne la solution de la question pour un plan de référence parallèle à $y = 0$,

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{dy}{r\,dx + s\,dy}. \tag{2 bis}$$

Deuxième cas. — Le plan de référence est parallèle au plan xOy. On obtient, par une marche identique à celle suivie par M. Demartres, l'expression

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{p\,dx + q\,dy}{p\,dq - q\,dp}, \tag{3}$$

ou

$$\mathcal{F} = (p^2 + q^2 + 1)\frac{p\,dx + q\,dy}{(ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy}. \tag{4}$$

2. *Points d'une surface pour lesquels la flexion, par rapport à un plan fixe, est indépendante du déplacement élémentaire choisi.* — Prenons le plan zOy parallèle au plan de référence.

En se reportant à la formule (2), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que t soit nul : le lieu cherché est donc défini par les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} t = 0, \\ z = f(x, y); \end{cases}$$

on voit que c'est le lieu des points pour lesquels une direction asymptotique est parallèle au plan de référence; on pouvait le prévoir d'après le théorème VII. Sous une autre forme ce résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME XII. — *Le lieu* Γ *des points d'une surface* Σ *pour lesquels la flexion par rapport à un plan donné est indépendante du déplacement élémentaire est le lieu des points d'inflexion des sections faites dans la surface* Σ *par des plans parallèles au plan de référence.*

3. *Il peut arriver que le lieu précédent ne soit plus une ligne mais bien une surface;* ceci arriverait dans le cas où la surface considérée comprendrait une nappe pour laquelle on aurait en tout point $t = 0$. L'équation $t = 0$ représentant une surface réglée à plan directeur, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME XIII. — *Toute surface telle qu'en chacun de ses points la flexion par rapport à un plan fixe* P *soit indépendante du déplacement élémentaire est une surface réglée ayant le plan* P *comme plan directeur. Inversement, sur toute surface réglée à plan directeur, la flexion prise par rapport à ce plan pour un déplacement élémentaire quelconque est indépendante de la direction de ce déplacement.*

Remarque. — Cette dernière partie se généralise sans peine : dans toute surface réglée, la flexion suivant un déplacement quelconque, à partir d'un point, prise par rapport à la génératrice de ce point, est constante et égale au signe près à $\sqrt{-R_1 R_2}$. C'est une conséquence immédiate du théorème VIII.

4. PROBLÈME. — *On peut se proposer de rechercher les lignes*

de la surface Σ *telles que la flexion prise pour un déplacement sur cette ligne, par rapport à un plan donné, soit en chaque point donnée par une fonction déterminée* $\mathfrak{F}(x,y)$ *de ses coordonnées indépendantes, la surface étant supposée représentée par l'équation* (1).

Si nous adoptons le choix de coordonnées correspondant à la formule (2), le lieu sera représenté par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} z = f(x,y), \\ \dfrac{dy}{dx} = \left[\dfrac{p^2+q^2+1}{\mathfrak{F}(x,y)} - s\right]\dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une famille de courbes. Toutefois la discussion de la seconde des équations (6) amène à des développements analytiques que je crois hors de proportion avec l'intérêt qui s'y attache, aussi me bornerai-je à étudier quelques applications particulières.

Applications. — 1° La fonction $\mathfrak{F}$ se réduit à la constante zéro. La seconde équation (6) ne peut plus être appliquée en toute rigueur. Toutefois, en considérant le résultat obtenu comme cas limite, on trouve

$$dx = 0.$$

Les courbes cherchées sont les sections de la surface par des plans parallèles au plan de référence.

2° La surface est une surface réglée dont le plan de référence est le plan directeur. On a, dans ce cas, $t = 0$; par suite dx est nul, ce qui donne les génératrices rectilignes : ce résultat peut s'expliquer géométriquement, la flexion prise dans ces conditions étant évidemment indéterminée.

On trouve, en outre, la solution singulière seule intéressante :

$$(7)\qquad \begin{cases} p^2+q^2+1 = s\,\mathfrak{F}(x,y), \\ z = f(x,y) = y\,f_1(x) + f_2(x), \end{cases}$$

qui représente une courbe bien définie sur la surface.

Supposons, par exemple, que la surface soit un paraboloïde équilatère et le plan de référence un de ses plans directeurs. Elle

a pour équation

$$z = \frac{1}{a}xy. \tag{8}$$

La première des équations (7) donne ici

$$x^2 + y^2 + a^2 = a\mathcal{F}(x, y). \tag{9}$$

Dans le cas spécial où la fonction $\mathcal{F}$ serait du premier degré en x et y et, en particulier, une constante, cette courbe serait tracée sur un cylindre de révolution. Donc, *les lignes d'égale flexion du paraboloïde équilatère par rapport à un de ses plans directeurs sont ses intersections avec la famille des cylindres de révolution autour de l'axe de la surface.*

5. *Flexion dans l'hélicoïde gauche à plan directeur, la flexion étant prise par rapport à ce plan.* — L'équation de la surface rapportée à son plan directeur est

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tang}\frac{z}{a}, \tag{10}$$

d'où, en vertu de la formule (3), l'on conclut

$$\mathcal{F} = a + \frac{x^2 + y^2}{a}.$$

Ainsi, *les lignes d'égale flexion sont les hélices asymptotiques de la surface;* nous négligeons, bien entendu, les génératrices rectilignes.

6. *Flexion dans le paraboloïde de révolution.* — Nous prendrons comme plan de référence, soit un plan parallèle au plan tangent au sommet, soit un plan parallèle à l'axe, c'est-à-dire à un plan méridien.

I. L'équation de la surface étant

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2a}, \tag{11}$$

supposons d'abord le plan de référence perpendiculaire à l'axe. La

formule (3) donne pour expression de la flexion

$$\mathcal{F} = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{a} \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx}. \tag{12}$$

Une intégration immédiate donne en termes finis l'équation des lignes d'égale flexion. Elles sont gauches, sauf quand cette flexion doit être nulle, auquel cas elles se réduisent aux parallèles de la surface.

II. Si le plan de référence est parallèle à l'axe, nous pouvons le supposer parallèle au plan $x = 0$. La formule (2) donne alors

$$\mathcal{F} = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a} \frac{dx}{dy}. \tag{13}$$

Cette formule permet de trouver les lignes à flexion constante et de résoudre d'autres problèmes du même genre. On voit qu'elle montre que *le long d'un méridien la flexion varie comme la distance du point considéré au plan tangent au sommet.*

7. Il resterait, pour compléter cet exposé, à rechercher l'expression de la flexion pour une surface donnée par une équation

$$z = f(x, y),$$

le plan de référence étant quelconque. Ce problème pouvant être considéré comme cas particulier du problème général qui termine ce travail, je ne le traiterai pas ici. On en déduit la solution du problème lorsque la surface est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, z) = 0.$$

TROISIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE LA FLEXION EN COORDONNÉES CURVILIGNES RAPPORTÉES A UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

Nous supposons dans tout ce qui va suivre la surface définie par des équations

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases} \tag{1}$$

et nous poserons suivant l'usage

$$(2)\qquad A=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}&\frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}&\frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix},\qquad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u}&\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v}&\frac{\partial f}{\partial v}\end{vmatrix},\qquad C=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$(2')\qquad \begin{cases} E=\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2,\qquad F=\Sigma\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v},\qquad G=\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2,\\ H=(A^2+B^2+C^2)^{\frac12}=(EG-F^2)^{\frac12}.\end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} D=\begin{vmatrix}f''_{u^2}&\varphi''_{u^2}&\psi''_{u^2}\\ f'_u&\varphi'_u&\psi'_u\\ f'_v&\varphi'_v&\psi'_v\end{vmatrix},\qquad D'=\begin{vmatrix}f''_{uv}&\varphi''_{uv}&\psi''_{uv}\\ f'_u&\varphi'_u&\psi'_u\\ f'_v&\varphi'_v&\psi'_v\end{vmatrix},\\ D''=\begin{vmatrix}f''_{v^2}&\varphi''_{v^2}&\psi''_{v^2}\\ f'_u&\varphi'_u&\psi'_u\\ f'_v&\varphi'_v&\psi'_v\end{vmatrix},\end{cases}$$

$$(3')\qquad E'=\frac{D}{H},\qquad F'=\frac{D'}{H},\qquad G'=\frac{D''}{H}.$$

1. *Établissement direct de la formule donnant la flexion par rapport au plan xOy.* — On trouve, comme dans le travail de M. Demartres, la formule

$$(4)\qquad \mathcal{F}=\frac{H^2\,dz}{A\,dB-B\,dA}.$$

Cette dernière formule mène, par des calculs identiques à ceux que nous rencontrerons prochainement, à la suivante

$$(5)\qquad \mathcal{F}=\frac{(\psi'_u\,du+\psi'_v\,dv)H^2}{(D'\psi'_u-D\psi'_v)\,du+(D''\psi'_u-D'\psi'_v)\,dv}.$$

2. *Applications.* — Dans le cas où l'on prend des sections horizontales comme courbe $v=$ const., c'est-à-dire où la fonction ψ se réduit à une fonction de la seule variable Y, la formule (5) se simplifie considérablement et devient

$$(6)\qquad \mathcal{F}=-\frac{H^2\,dv}{D\,du+D'\,dv}.$$

elle s'écrit encore

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = -\left(\frac{F'}{H} + \frac{E'}{H}\frac{du}{dv}\right). \tag{7}$$

On tire très simplement de cette dernière forme divers résultats.

Quand $E' = 0$, c'est-à-dire quand la direction de référence, intersection du plan tangent et du plan de référence, est asymptotique, $\mathcal{F}$ est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire du déplacement choisi et c'est le seul cas où cela ait lieu; c'est un résultat déjà trouvé.

Soient maintenant Q_z la torsion géodésique des courbes horizontales $v = \text{const.}$ et Q_u celle des courbes $u = \text{const.}$ Ces deux fonctions sont données par les relations

$$Q_z = \frac{1}{EH}(E'F - F'E), \qquad Q_u = \frac{1}{GH}(F'G - FG').$$

La flexion $\mathcal{F}$ suivant le déplacement $du = 0$ satisfait donc aux deux relations

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z = \frac{E'F}{EH}, \\ \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u = \frac{G'F}{HG}. \end{cases} \tag{8}$$

Les formules (8) conduisent aux résultats suivants :

1° Si les courbes coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont rectangulaires, F est nul et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u = -Q_z,$$

résultat déjà trouvé.

2° On a également $\frac{1}{\mathcal{F}} = Q_u$ si $G' = 0$, c'est-à-dire si les courbes $u = \text{const.}$ sont asymptotiques. C'est un résultat connu (Théorème XI).

Si $E' = 0$, on retrouve le résultat suivant : *la flexion d'une asymptotique par rapport à une direction quelconque est égale à son rayon de torsion.*

3° Soient R_u et R_z les rayons des sections normales tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Les formules (8) s'écrivent

$$(9) \qquad \frac{1}{\mathcal{F}} + Q_z = \frac{\cos\theta}{R_z}, \qquad \frac{1}{\mathcal{F}} - Q_u = \frac{\cos\theta}{R_u}.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME XIV. — *L'inverse de la flexion d'une direction* uT *par rapport à une direction de référence* Mδ *est égale :*

1° *A la somme de la torsion géodésique relative à la direction considérée et du produit de sa courbure normale par le cosinus de l'angle* (Tδ).

2° *A la différence entre le produit de la courbure normale de la direction de référence par le cosinus de l'angle* (Tδ) *et de la torsion géodésique de cette direction de référence.*

3. Revenons aux conséquences de l'équation générale (7). Si l'on pose $\frac{du}{dv} = \mu$, la formule considérée s'écrit

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = -\left(\frac{F'}{H} + \mu\,\frac{F'}{H}\right):$$

1° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs de μ telles que $\mu_1 + \mu_2 = 0$. En appelant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les flexions relatives aux directions qui correspondent à μ_1 et μ_2,

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1} + \frac{1}{\mathcal{F}_2} = -2\,\frac{F'}{H} = \frac{2}{\mathcal{F}_0},$$

où $\mathcal{F}_0$ désigne la flexion du déplacement suivant $u = \text{const.}$ Ainsi :

THÉORÈME XV. — *La flexion prise par rapport à une direction quelconque pour un déplacement déterminé est moyenne harmonique des flexions relatives à deux déplacements conjugués harmoniques par rapport à la direction de référence et au déplacement considéré.*

Corollaire. — La flexion d'un élément prise par rapport à une direction perpendiculaire, égale à la torsion géodésique de la

direction du déplacement, est moyenne harmonique des flexions prises par rapport à la même direction, de deux déplacements quelconques symétriques par rapport au déplacement considéré.

Remarque. — Le théorème V n'est qu'un cas particulier du théorème XIV.

2° Soient μ_1 et μ_2 deux valeurs quelconques de μ; on a

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2} = \frac{F'^2}{H^2} + \frac{(\mu_1+\mu_2)E'F'}{H^2} + \mu_1\mu_2 + \frac{E'^2}{H^2}. \tag{10}$$

Dans le cas où les déplacements sont conjugués, on a

$$E'\mu_1\mu_2 + F'(\mu_1+\mu_2) + G' = 0,$$

et il vient

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2} = \frac{F'^2 - E'G'}{H^2} = -\frac{1}{R_1R_2},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + R_1R_2 = 0,$$

résultat déjà trouvé autrement.

4. *Calcul de l'expression générale de la flexion* ($T\delta$) *d'un déplacement par rapport à une direction de référence.* — On voit sans peine que l'on a en valeur absolue l'égalité

$$\mathcal{F} = \frac{ds}{d\sigma}\frac{\sin(\delta T)}{\cos(\delta\Phi)} = \frac{[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1\,dA + \beta_1\,dB + \gamma_1\,dC} \tag{11}$$

en désignant par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de $M\delta$ et par a_1, b_1, c_1 ceux de la normale à la surface; or ici

$$a = \frac{A}{H}, \qquad b = \frac{B}{H}, \qquad c = \frac{C}{H},$$

la formule (11) devient alors

$$\mathcal{F} = \frac{H^2[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{H(\alpha_1\,da + \beta_1\,db + \gamma_1\,dc) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)\,dH}.$$

La direction de référence étant dans le plan tangent, cette expression se réduit à

$$\mathcal{F} = \frac{H[\Sigma(\alpha_1\,dy - \beta_1\,dx)^2]^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1\,dA + \beta_1\,dB + \gamma_1\,dC}. \tag{12 bis}$$

Soient λ et μ les coefficients directeurs superficiels de la direction de référence; on a

$$\alpha_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

et la formule analogue; d'où

$$\alpha_1 dy - \beta_1 dx = C(\lambda dr - \mu du).$$

Il vient alors

$$\mathcal{F} = \frac{(\lambda dr - \mu du) H^2}{\alpha_1 dA + \beta_1 dB + \gamma_1 dC}. \tag{12}$$

Le dénominateur est de la forme $I du + J dv$; il reste à calculer I et J. Dans l'expression de $\alpha_1 dA$ qui, développée, s'écrit

$$\alpha_1 dA = \frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + p \frac{\partial f}{\partial v}\right) du + \frac{\partial A}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}\right) dv,$$

faisons les substitutions

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \varphi''_{u^2}\psi'_v - \varphi'_v \psi''_{u^2} + \varphi'_u \psi''_{uv} - \psi'_u \varphi''_{uv},$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \varphi''_{uv}\psi'_v - \psi''_{uv}\varphi'_u + \varphi'_u \psi''_{v^2} - \psi'_u \varphi''_{v^2}.$$

Nous aurons, comme coefficient de du,

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}\right) = {} & \lambda[f'_u(\varphi''_{u^2}\psi'_v - \psi''_{u^2}\varphi'_v) + f'_u(\varphi'_u \psi''_{uv} - \psi'_u \varphi''_{uv})] \\ & + \mu[f'_v(\varphi''_{u^2}\psi'_v - \psi''_{u^2}\varphi'_v) + f'_v(\varphi'_u \psi''_{uv} - \psi'_u \varphi''_{uv})].\end{aligned}$$

Faisant la somme des termes analogues dans $\alpha_1 dA$, $\beta_1 dB$, $\gamma_1 dc$, nous trouvons

$$I = -(\lambda D + \mu D'),$$
$$J = -(\lambda D' + \mu D'').$$

Nous avons donc au signe près

$$\mathcal{F} = \frac{(\mu du - \lambda dv) H^2}{(\lambda D + \mu D') du + (\lambda D' + \mu D'') dv}.$$

Pour voir quel signe il faut adopter, comparons avec la formule (5), qui donne sans ambiguïté la flexion par la direction

définie par la relation $\psi'_u\,du + \psi'_v\,\mu = 0$. Nous constatons que la formule précédente convient en grandeur et en signe. On a donc

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{(\mu\,du - \lambda\,dv)\,H^2}{(\lambda D + \mu D')\,du + (\lambda D' + \mu D'')\,dv} \\ &= \frac{H(\mu\,du - \lambda\,dv)}{(\lambda E' + \mu F')\,du + (\lambda F' + \mu G')\,dv} \end{aligned}\right.$$

et, si l'on définit le déplacement par ses paramètres superficiels ξ, η, on obtient la formule

$$(14)\qquad \mathcal{F} = \frac{H(\mu\xi - \lambda\eta)}{(\lambda E' + \mu F')\xi + (\lambda F' + \mu G')\eta},$$

et, si l'on pose

$$\theta(\lambda\mu) = E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2,$$

on peut encore écrire

$$(15)\qquad \mathcal{F} = \frac{2H(\mu\xi - \lambda\eta)}{\xi\theta'_\lambda + \eta\theta'_\mu} = \frac{2H(\mu\xi - \lambda\eta)}{\lambda\theta'_\xi + \mu\theta'_\eta}.$$

On vérifie immédiatement sur ces formules la relation

$$(T\delta) + (\delta T) = 0$$

et le fait que, si les directions (ξ, η) et (λ, μ) sont conjugués, $\mathcal{F}$ est infini.

5. *Interprétation géométrique nouvelle de la formule* (15). — Rapportons la surface à ses lignes de courbure : l'équation de l'indicatrice en un point (u, v) rapportée à ses axes sera

$$E'\lambda^2 + G'\mu^2 = 1,$$

l'homogénéité de la formule (15) permettant de prendre pour valeurs des paramètres λ et μ les coordonnées rectangulaires (λ, μ) du point correspondant de l'indicatrice.

I. *Indicatrice elliptique.* — On peut poser

$$E' = \frac{1}{a^2}, \qquad G' = \frac{1}{b^2}$$

et

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda = a\cos\varphi_1, & \mu = b\sin\varphi_1, \\ \xi = a\,e\cos\varphi_2, & \eta = b\sin\varphi_2, \end{cases}$$

a et b étant les axes de l'indicatrice. Or, ici les axes superficiels étant rectangles, on a

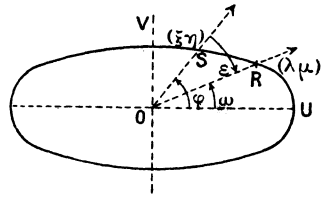
$$\mu\xi - \lambda\eta = \mathrm{OR\,OS}\sin\varepsilon,$$

et la formule (15) donne immédiatement

$$(17)\qquad \mathcal{F} = \frac{\mathrm{H}\sin\varepsilon\,\mathrm{OR\,OS}}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

On peut aussi calculer la différence $\mu\xi - \lambda\eta$ au moyen des

Fig. 2.



relations (16); si l'on pose

$$\zeta = \varphi_1 - \varphi_2,$$

on arrive à la formule

$$(18)\qquad \mathcal{F} = \mathrm{H}\,ab\,\mathrm{tang}\,\zeta.$$

On peut transformer ces deux résultats de manière à mettre en évidence divers éléments géométriques : les rayons des sections R_1, R_2, R et R′ des sections normales qui passent respectivement par OU, OV, OR et OS. En effet, en posant $H'^2 = E'G'$ on a la relation

$$(19)\qquad \mathrm{R_1\,R_2} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2}.$$

D'où

$$\mathrm{OR\,OS} = \frac{1}{\mathrm{H}'}\sqrt{\frac{\mathrm{R_1\,R_2}}{\mathrm{RR}'}};$$

la formule (17) donne alors

$$(20)\qquad \mathcal{F} = \frac{\mathrm{R_1\,R_2}}{\sqrt{\mathrm{RR}'}}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\zeta}.$$

La formule (18) donne immédiatement

$$\mathfrak{F} = \sqrt{R_1 R_2}\,\operatorname{tang}\zeta. \tag{21}$$

Les formules (20) et (21) ont des significations géométriques qu'on aperçoit immédiatement en faisant intervenir le cercle principal de l'indicatrice.

Dans le cas d'un ombilic, les deux formules se réduisent à

$$\mathfrak{F} = R\,\operatorname{tang}\varepsilon.$$

II. *Cas d'une indicatrice hyperbolique.* — On posera ici

$$\begin{cases} \lambda = a\sec\varphi_1, & \xi = a\sec\varphi_2, \\ \mu = b\operatorname{tang}\varphi_1, & \eta = b\operatorname{tang}\varphi_2, \end{cases} \tag{22}$$

et l'on trouvera

$$\mathfrak{F} = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{RR'}}\,\frac{\sin\varepsilon}{\operatorname{tang}\psi} \tag{23}$$

en posant

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}.$$

L'interprétation de cette formule ne présente pas le même intérêt géométrique que celle de la formule (20). Même observation pour la formule qui remplace la formule (21).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait ramener ce second cas au premier par l'introduction d'angles imaginaires.

III. *Cas d'une indicatrice réduite à deux parallèles.* (*Points paraboliques.*) — L'équation de l'indicatrice est ici

$$E'\lambda^2 = 1.$$

On a successivement

$$\mathfrak{F} = \frac{H.OR.OS\sin\varepsilon}{E'\lambda\xi} = \frac{H}{E'}\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta\sin\theta'},$$

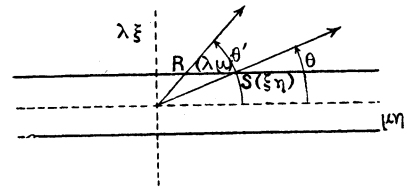
d'où résulte

$$= R_1\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta\sin\theta'}, \tag{24}$$

R_1 désignant le rayon de courbure normale fini unique au point parabolique considéré.

Nous avons déjà, dans l'étude des développables, rencontré des

Fig. 3.



cas particuliers de la formule (23). Par exemple, si la direction T et δ sont rectangulaires, OR et OS sont rectangulaires; et l'on a

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\mathcal{F} = \frac{2R_1}{\sin 2\theta}, \tag{25}$$

formule qui n'est autre que la formule (13) de la première Partie.

6. *Expression de la flexion suivant un déplacement donné prise par rapport à un plan de référence arbitraire.* — Soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \tag{26}$$

l'équation du plan de référence dans laquelle α, β, γ sont les cosinus mêmes de la normale au plan. On obtient la direction correspondante (λ, μ) en portant dans l'équation (26) les valeurs

$$x = \lambda f'_u + \mu f'_v, \qquad y = \lambda \varphi'_u + \mu \varphi'_v, \qquad z = \lambda \psi'_u + \mu \psi'_v,$$

et l'emploi de la formule (14), par exemple, donne immédiatement

$$\mathcal{F} = \frac{H[(\alpha f'_u + \beta \varphi'_u + \gamma \psi'_u)\,du + (\alpha f'_v + \beta \varphi'_v + \gamma \psi'_v)\,dv]}{\left\{\begin{array}{l}[\alpha(F' f'_u - E' f'_v) + \beta(F' \varphi'_u - E' \varphi'_v) + \gamma(F' \psi'_u - E' \psi'_v)]\,du \\ +[\alpha(G' f'_u - F' f'_v) + \beta(G' \varphi'_u - F' \varphi'_v) + \gamma(G' \psi'_u - F' \psi'_v)]\,dv\end{array}\right\}}, \tag{27}$$

et avec la notation en paramètres superficiels

$$\mathcal{F} = \frac{H[\alpha f'_u + \beta \varphi'_u + \gamma \psi'_u)\xi + (\alpha f'_v + \beta \varphi'_v + \gamma \psi'_v)\,\eta]}{\left\{\begin{array}{l}\xi[\alpha(F' f'_u - E' f'_v) + \beta(F' \varphi'_u - E' \varphi'_v) + \gamma(F' \psi'_u - E' \psi'_v)] \\ +\eta[\alpha(G' f'_u - F' f'_v) + \beta(G' \varphi'_u - F' \varphi'_v) + \gamma(G' \psi'_u - F' \psi'_v)]\end{array}\right\}}. \tag{28}$$

Remarque. — Ces formules se simplifient un peu si les coordonnées u, v forment un système conjugué.

7. *Application.* — Nous nous bornerons à faire de la formule (27) l'application signalée à la fin de la seconde Partie : la surface étant donnée par son équation cartésienne

$$z = f(x, y),$$

et le plan de référence étant représenté par l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

calculer la flexion. En appliquant la formule (27), on trouve

$$(29) \qquad \mathcal{F} = \frac{(p^2 + q^2 + 1)\,[(\alpha + \gamma p)\,dx + (\beta + \gamma q)\,dy]}{[\alpha s - \beta t + \gamma(ps - qz)]\,dx + [\alpha z - \beta s + \gamma(pt - qs)]dy}.$$