M. D'Ocagne

Problème de partition

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 157-168
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__157_1>

PROBLÈME DE PARTITION;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

De combien de manières peut-on former une somme de S francs avec S pièces de monnaie d'argent françaises?

Notations. — Nous représentons par $E\left(\frac{A}{n}\right)$ et $R\left(\frac{A}{n}\right)$ le quotient entier et le reste de la division de A par n. Nous écrirons aussi A_n pour $E\left(\frac{A}{n}\right)$. Si la quantité A est susceptible de plusieurs valeurs, $m(A)$ et $M(A)$ désigneront la plus petite et la plus grande d'entre elles. Nous écrirons aussi $m^2(\mathrm{A})$ pour $m[m(\mathrm{A})]$, $\mathrm{M}m(\mathrm{A})$ pour $\mathrm{M}[m(\mathrm{A})]$, etc.

Formation des solutions. — Si nous désignons par

u	le nombre des pièces de			$5^{\text{fr}},00^{\text{c}}$,
v	»		»	$2,00$,
x	»		»	$1,00$,
$2y$	»		»	$0,50$,
$5z$	»		»	$0,20$

les équations du problème sont [1]

$$\begin{aligned} 5u+2v+x+\ y+\ z&=\mathrm{S},\\ u+\ v+x+2y+5z&=\mathrm{S}, \end{aligned}$$

qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers et positifs pouvant être nuls.

Éliminant successivement y et x entre ces deux équations, on a

$$x=\mathrm{S}-3(3u+v-z), \tag{1}$$

$$y=v-4(z-u). \tag{2}$$

Les quantités y et x ne pouvant être négatives, il faut que

$$4(z-u)\leqq v\leqq\frac{\mathrm{S}-9u+3z}{3}. \tag{3}$$

D'ailleurs la quantité v ne pouvant non plus être négative, il faut, dans cette double inégalité, que la limite supérieure soit au moins égale à o et au moins égale à la limite inférieure, ce qui donne

$$3z-\frac{\mathrm{S}}{3}\leqq u\leqq\frac{\mathrm{S}+3z}{9}. \tag{4}$$

A son tour, pour la même raison appliquée cette fois à u, cette double inégalité exige

$$0\leqq z\leqq\frac{\mathrm{S}}{6}. \tag{5}$$

---

(1) Ces équations montrent qu'à toute solution en correspond une autre obtenue par permutation simultanée de u et z et de v et y. Deux telles solutions peuvent être dites *inverses* l'une de l'autre. Le problème revient alors à dénombrer les solutions *inversables* d'une équation linéaire donnée.

On formera donc toutes les solutions des équations proposées *en associant à chacune des valeurs entières de z satisfaisant à* (5) *toutes les valeurs entières de u satisfaisant à* (4), *puis à chacun des systèmes* (z, u) *ainsi obtenus toutes les valeurs entières de v satisfaisant à* (3). *A chaque système* (z, u, v) *ainsi déterminé correspondent les valeurs de x et y données par* (1) *et* (2).

Solutions limites. — L'inégalité (5) donne immédiatement, avec les notations ci-dessus définies,

$$m(z) = 0, \tag{6}$$

$$M(z) = S_6. \tag{7}$$

Au sujet de cette dernière expression se présente la remarque que voici : on a identiquement

$$S = 3 S_3 + R\left(\frac{S}{3}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{S}{6} &= \frac{S_3}{2} + \frac{1}{6} R\left(\frac{S}{3}\right) \\ &= E\left(\frac{S_3}{2}\right) + \frac{1}{2} R\left(\frac{S_3}{2}\right) + \frac{1}{6} R\left(\frac{S}{3}\right). \end{aligned}$$

Or, les plus grandes valeurs respectives de $R\left(\frac{S_3}{2}\right)$ et de $R\left(\frac{S}{3}\right)$ sont 1 et 2; la plus grande valeur de l'ensemble des deux derniers termes est, par suite, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Il en résulte que

$$S_6 = E\left(\frac{S_3}{2}\right).$$

On peut donc aussi écrire

$$M(z) = E\left(\frac{S_3}{2}\right). \tag{7 bis}$$

Maintenant, pour une valeur donnée de z, l'inégalité (4) montre que l'on a

$$\left\{ \begin{array}{lll} m(u) = 0, & \text{si} & 3z - S_3 \leqq 0, \\ m(u) = 3z - S_3, & \text{si} & 3z - S_3 > 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

et

$$M(u) = E\left(\frac{S + 3z}{9}\right).$$

Ici encore, on peut faire la remarque suivante : on a identiquement

$$S + 3z = 3S_3 + R\left(\frac{S}{3}\right) + 3z;$$

d'où

$$\frac{S+3z}{9} = \frac{S_3+z}{3} + \frac{1}{9}R\left(\frac{S}{3}\right)$$
$$= E\left(\frac{S_3+z}{3}\right) + \frac{1}{3}R\left(\frac{S_3+z}{3}\right) + \frac{1}{9}R\left(\frac{S}{3}\right).$$

Chacun des restes ayant pour plus grande valeur 2, la plus grande valeur de l'ensemble des deux derniers termes est $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$, et l'on a

$$E\left(\frac{S+3z}{9}\right) = E\left(\frac{S_3+z}{3}\right);$$

par suite,

$$M(u) = E\left(\frac{S_3+z}{3}\right). \tag{9}$$

Voyons maintenant quelles sont les limites de $m(u)$ et de $M(u)$ quand on donne à z toutes les valeurs de $m(z)$ à $M(z)$.

La formule (8) donne immédiatement, pour les valeurs (6) et (7 *bis*) de (z),

$$m^2(u) = 0 \tag{10}$$

et

$$Mm(u) = 3E\left(\frac{S_3}{2}\right) - S_3$$

ou, en représentant par ε le reste $R\left(\frac{S_3}{2}\right)$, égal à 0 ou 1,

$$Mm(u) = S_6 - \varepsilon. \tag{11}$$

La formule (9) donne de même avec (6) et (7),

$$mM(u) = E\left(\frac{S_3}{3}\right) \tag{12}$$

et

$$M^2(u) = E\left(\frac{S_3+S_6}{3}\right). \tag{13}$$

Cherchons enfin quelles sont les valeurs limites de v pour des valeurs données de z et u. L'inégalité (3) donne immédiatement

$$(14)\qquad \begin{cases} m(v) = 0, & \text{si} \quad z - u \leqq 0, \\ m(v) = 4(z - u), & \text{si} \quad z - u > 0, \end{cases}$$

et

$$(15)\qquad M(v) = S_3 - 3u + z.$$

En vue d'alléger les écritures ultérieures, nous poserons

$$(16)\qquad m(u) = a, \qquad M(u) = b,$$

a et b étant donnés par les formules (8) et (9), puis

$$(17)\qquad \begin{cases} E\left(\dfrac{S_6 - \varepsilon}{3}\right) = p, & E\left(\dfrac{S_3}{3}\right) = p', & E\left(\dfrac{S_3 + S_6}{3}\right) = p'', \\ R\left(\dfrac{S_6 - \varepsilon}{3}\right) = r, & R\left(\dfrac{S_3}{3}\right) = r', & R\left(\dfrac{S_3 + S_6}{3}\right) = r''. \end{cases}$$

On peut remarquer d'ailleurs que p'' est égal soit à $p + p'$, soit à $p + p' + 1$.

Nombre n des solutions pour une valeur donnée de z. — Le nombre des solutions correspondant à des valeurs données de u et de z est

$$M(v) - m(v) + 1.$$

Donc, en étendant le signe $\sum$ aux diverses valeurs de u compatibles avec la valeur de z choisie, c'est-à-dire variant de a à b, on a

$$n = \sum [M(v) + 1] - \sum m(v).$$

Le nombre des termes de cette somme étant égal à $b - a + 1$, on a, d'après (15),

$$\begin{aligned} \sum [M(v) + 1] &= \sum (S_3 + z + 1 - 3u) \\ &= (b - a + 1)(S_3 + z + 1) - 3\sum_a^b u \\ &= (b - a + 1)(S_3 + z + 1) - 3\,\frac{(b - a + 1)(a + b)}{2}, \end{aligned}$$

D'après la formule (14), on a de même

$$\sum m(v) = 4[1+2+\ldots+(z-a)]$$
$$= 2(z-a)(z-a+1).$$

Par suite,

$$n = (b-a+1)(S_3+z+1) - 3\frac{(b-a+1)(a+b)}{2} - 2(z-a)(z-a+1),$$

qu'on peut écrire

$$n = (b+1)\frac{2(S_3+1)+2z-3b}{2} + a\frac{6z-(2S_3+1)-a}{2} - 2z(z+1).$$

Or, la formule (8), rapprochée de (16), donne

$$a = 3z - S_3,$$

d'où

$$6z-(2S_3+1)-a = a-1.$$

De même (9) rapprochée de (16) donne

$$b = \mathrm{E}\left(\frac{S_3+z}{3}\right).$$

Dès lors, si l'on pose

$$(18) \qquad \rho = \mathrm{R}\left(\frac{S_3+z}{3}\right),$$

on peut écrire

$$b = \frac{S_3+z-\rho}{3},$$

d'où

$$2(S_3+1)+2z-3b = 3b+2(\rho+1).$$

Finalement, il vient

$$(19) \qquad n = \frac{(b+1)[3b+2(\rho+1)]}{2} + \frac{a(a-1)}{2} - 2z(z+1).$$

Dans le cas où l'on n'a recours qu'à la monnaie courante, c'est-à-dire où l'on exclut les pièces de $0^{\mathrm{fr}},20$, il faut faire $z=0$. La formule (8) montre qu'on a alors $a=0$, et les formules (9) et (18), rapprochées de (17), $b=p'$, $\rho=r'$.

Par suite, la formule (19) devient dans ce cas

$$(19') \qquad n = \frac{(p'+1)[3p'+2(r'+1)]}{2}.$$

En particulier pour $S = 100$, auquel cas on a $p' = 11$, $r' = 0$, cette formule donne

$$n = \frac{12 \times 35}{2} = 210.$$

Nombre total N *des solutions.* — Il s'agit de faire la somme de tous les nombres n donnés par la formule (19) lorsque z varie de sa limite inférieure 0 à sa limite supérieure S_6.

Si donc on pose, en étendant le signe $\sum$ à ces limites,

$$B = \sum \frac{(b+1)[3b+2(p+1)]}{2},$$

$$A = \sum \frac{a(a-1)}{2},$$

$$Z = \sum 2z(z+1),$$

on a

$$N = B + A - Z.$$

Pour Z, on a immédiatement, en vertu d'une formule bien connue,

$$(20) \qquad Z = \frac{2S_6(S_6+1)(S_6+2)}{3}.$$

Dans A, les valeurs de a non nulles forment, d'après (8), une progression géométrique de raison 3 dont le plus grand terme, d'après (11) rapprochée de (17), est $3p+r$, et, par suite, le plus petit terme r. Conséquemment

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sum_0^p (3i+r)(3i+r-1) \\ &= \frac{1}{2}\left[9\sum_0^p i^2 + 3(2r-1)\sum_0^p i + (p+1)r(r-1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3p(p+1)(2p+1)}{2} + 3(2r-1)\frac{p(p+1)}{2} + (p+1)r(r-1)\right], \end{aligned}$$

ou, après réductions,

$$(21) \qquad A = \frac{p+1}{2}[3p(p+r) + r(r-1)].$$

Pour B la sommation est plus délicate. Remarquons d'abord que les limites b ont, d'après (9), trois à trois la même valeur, ces valeurs croissant d'unité en unité, et que les restes ρ, d'après (18), reprennent périodiquement les valeurs 0, 1, 2.

La plus petite valeur de b, d'après (12) rapprochée de (17), est

$$m(b) = p',$$

et sa plus grande valeur, d'après (13) rapprochée de (17),

$$\mathrm{M}(b) = p''.$$

Les trois termes correspondant à une certaine valeur de b et aux valeurs 0, 1, 2 de ρ ont une somme donnée par

$$\frac{1}{2}(b+1)(9b+12) = \frac{3}{2}(b+1)(3b+4).$$

Par conséquent, si l'on ajoute tous les groupes de tels trois termes depuis $b = p'$ jusqu'à $b = p''$, on a

$$\mathrm{T} = \frac{3}{2}\sum_{p'}^{p''}(b+1)(b+1)(3b+4),$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{T} = \frac{3}{2}\sum_{0}^{p''-p'}(i+p'+1)(3i+3p'+4).$$

Cette sommation, effectuée comme celle qui a conduit à (21), donne, toutes réductions effectuées,

$$(22)\qquad \mathrm{T} = \frac{3(p''-p'+1)}{2}\left[(p''-p')(p''+2p'+4)+(p'+1)(3p'+4)\right].$$

Mais B ne comprend tous les termes qui ont été sommés dans T que si la première valeur de ρ est 0 et la dernière 2. Or, toutes les combinaisons des valeurs 0, 1 et 2 de ρ peuvent se présenter pour ces deux limites. Il faut, dès lors, suivant la valeur de ces limites, retrancher certains termes de T. C'est ce qui va maintenant être examiné.

D'après (18), la première valeur de ρ, correspond à $z = 0$, est donnée par

$$\rho = \mathrm{R}\left(\frac{\mathrm{S}_3}{3}\right),$$

ou, en vertu de (17),

$$\rho = r'.$$

Si $r' = 0$, il n'y a aucun terme à retrancher parmi les premiers de ceux qui ont été sommés dans T.

Si $r' = 1$, il faut en retrancher le terme

$$\frac{(p'+1)(3p'+2)}{2},$$

et si $r' = 2$, les deux termes

$$\frac{(p'+1)(3p'+2)}{2} + \frac{(p'+1)(3p'+4)}{2} = (p'+1)(3p'+3).$$

Ces trois cas peuvent se résumer dans cette formule unique : que r' soit égal à 0, 1 ou 2, il faut de T retrancher

$$(23) \qquad T' = \frac{r'(p'+1)(3p'+r'+1)}{2}.$$

De même, la dernière valeur de ρ, correspondant à $z = S_6$, est donnée, toujours d'après (18), par

$$\rho = R\left(\frac{S_3+S_6}{3}\right),$$

ou, en vertu de (17),

$$\rho = r''.$$

Si $r'' = 2$, il n'y a aucun terme à retrancher parmi les derniers de ceux qui ont été sommés dans T.

Si $r'' = 1$, il faut en retrancher le terme

$$\frac{(p''+1)(3p''+6)}{2},$$

et si $r'' = 0$, les deux termes

$$\frac{(p''+1)(3p''+4)}{2} + \frac{(p''+1)(3p''+6)}{2} = (p''+1)(3p''+5).$$

Ces trois cas peuvent se résumer dans cette formule unique : que r'' soit égal à 0, 1 ou 2, il faut de T retrancher

$$(24) \qquad T'' = \frac{(2-r'')(p''+1)(3p''+r''+5)}{2},$$

Comme on a, dans tous les cas,

$$B = T - T' - T'',$$

on voit, en se reportant à l'expression de N donnée plus haut, que l'on a finalement

$$(25) \qquad N = A + T - (Z + T' + T''),$$

les quantités figurant dans le second membre étant données respectivement par les formules (21), (22), (20), (23) et (24).

Prenons, par exemple, $S = 100$. Nous avons alors

$$\begin{array}{lll} S_6 = 16, & S_3 = 33, & \varepsilon = 1, \\ p = 5, & p' = 11, & p'' = 16, \\ r = 0, & r' = 0, & r'' = 1, \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{l} A = 3 \times 15 \times 5 = 225, \\ T = 9(5 \times 42 + 12 \times 37) = 5886, \\ Z = 32 \times 17 \times 6 = 3264, \\ T' = 0, \\ T'' = 17 \times 27 = 459, \end{array}$$

d'où

$$N = 6111 - 3723 = 2388.$$

Autre méthode pour le cas où $z = 0$. — Voici une autre méthode qui, dans le cas général, conduit à des calculs plus pénibles que la précédente, mais qui, par contre, lorsqu'on se borne à la monnaie courante en excluant les pièces de $0^{fr}, 20$, c'est-à-dire lorsqu'on suppose $z = 0$, conduit plus rapidement à la formule (19').

Faisant $z = 0$ dans les équations initiales, on en déduit, par addition et soustraction

$$\begin{array}{c} 6u + 3(v + y) = 2(S - x), \\ 4u = v - y. \end{array}$$

Il en résulte immédiatement que $v + y$ est multiple de 2, et $v - y$ multiple de 4. Posant donc

$$v + y = 2\tau, \qquad v - y = 4\delta,$$

et éliminant u, on a l'équation

$$3\delta + 3\sigma = S - x.$$

$S - x$ devant, d'après cela, être positif et multiple de 3, les seules valeurs que l'on pourra donner à x seront 0, 3, 6, 9, ..., $3S_3$, S_3 représentant toujours $E\left(\frac{S}{3}\right)$. Prenons l'une de ces valeurs $3k$. L'équation s'écrira alors

$$\delta + \sigma = k.$$

Or, d'après la définition même de δ et σ, on doit avoir

$$4\delta \leqq 2\sigma,$$

ou

$$2\delta \leqq k - \delta,$$

c'est-à-dire

$$\delta \leqq E\left(\frac{k}{3}\right) \quad \text{ou} \quad k_3.$$

Les solutions correspondant à une valeur de k sont donc données par $\delta = 0, 1, 2, \ldots, k_3$. Elles sont au nombre de $k_3 + 1$, et l'on a pour le nombre cherché

$$n = \sum_{k=0}^{k=S_3} (k_3 + 1).$$

Les nombres k_3 ayant de trois en trois la même valeur, nous voyons, en utilisant les notations définies par (17), que

$$n = 3\sum_{1}^{p'-1} i + \tau + S_3 + 1,$$

τ étant égal à p', $2p'$ ou $3p'$ suivant que $r' = 0$, 1 ou 2, ce qu'on peut exprimer en posant

$$\tau = (r' + 1)p'.$$

Remplaçant d'autre part S_3 par sa valeur $3p' + r'$, on a finalement

$$n = \frac{3p'(p'-1)}{2} + (r'+1)p' + 3p' + r' + 1,$$

$$= \frac{p'}{2}(3p' + 2r' + 5) + r' + 1,$$

$$= \frac{(p'+1)[3p' + 2(r'+1)]}{2},$$

ce qui est bien la formule (19′).