BULLETIN DE LA S. M. F.

FERBER

Sur un symbole analogue aux déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 285-288

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__285_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN SYMBOLE ANALOGUE AUX DÉTERMINANTS;

Par M. FERBER.

L'habitude que nous avons des déterminants met à notre disposition un moyen automatique pour former des fonctions symétriques. En effet, considérons le déterminant

$$\begin{Vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{Vmatrix}$$

et développons-le en convenant de donner à tous les termes le

signe +; nous l'appellerons un *déterminant positif* (¹) et, pour le reconnaître, nous l'encadrerons par des doubles lignes. On trouve

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b,$$

c'est-à-dire la fonction symétrique de trois lettres qu'on note habituellement $\Sigma a^2 b$. Cela résulte tout naturellement de la définition du déterminant type $D(a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$ où, l'ordre des indices inférieurs étant conservé, on permute les indices supérieurs de toutes les manières possibles.

Un déterminant positif ne s'annule plus lorsque deux lignes ou deux colonnes sont égales; mais il est facile de voir, par un exemple, que, si ce fait arrive, il faut le diviser par la factorielle $2!$ et en général par la factorielle $n!$ si n lignes ou n colonnes deviennent égales.

Soient

$$\left\| \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\| = 2ab \qquad \left\| \begin{matrix} a^2 & a & 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b & 1 & 1 & 1 \\ c^2 & c & 1 & 1 & 1 \\ d^2 & d & 1 & 1 & 1 \\ e^2 & e & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 3!\,\Sigma a^2 b.$$

Dorénavant nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que la factorielle est sous-entendue, de sorte que $\left\| \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\|$ vaut en réalité $\frac{1}{2!} \left\| \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\|$.

Toutes les propriétés des déterminants ordinaires, subsistent sauf naturellement celles qui résultent de la nullité d'un déterminant ayant des lignes ou des colonnes égales.

Quoique la formation d'une fonction symétrique $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ devienne un véritable casse-tête, lorsque le nombre des lettres est un peu grand, ce n'est pas seulement pour avoir un moyen automatique que nous préconisons l'usage des déterminants positifs; mais c'est parce que dans les développements de fonctions,

---

(¹) Appellation commode pour le langage courant, mais qui sous-entend pour éviter l'ambiguïté : *déterminants* (dans le développement desquels on fait tous les termes) *positifs*.

c'est-à-dire dans les calculs pratiques, on les rencontre à chaque pas.

La simplicité de leur théorie et leur utilité nous paraissent telles, qu'il nous semble que leur introduction dans l'enseignement serait une très bonne chose.

Par exemple, soit à effectuer la puissance m d'un polynôme;

$$(A+B+C+D+\ldots)^m;$$

il n'y a qu'à effectuer pour voir que le résultat est

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \begin{Vmatrix} A^\alpha & A^\beta & A^\gamma & \ldots \\ B^\alpha & B^\beta & B^\gamma & \ldots \\ C^\alpha & C^\beta & C^\gamma & \ldots \\ D^\alpha & D^\beta & D^\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

où les exposants doivent satisfaire à $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m$ et être des nombres entiers positifs non croissants.

Par exemple, pour $m=3$, il y a les solutions

$$\begin{cases} 3\,0\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 2\,1\,0\,0\,0\,0\ldots \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\ldots \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire immédiatement le développement cherché.

Soit encore à développer (1) $\frac{1}{(1-Ax)(1-Bx)(1-Cx)\ldots}$, où x est très petit; on aura encore pour le coefficient de x^m

$$\sum \begin{Vmatrix} A^\alpha & A^\beta & A^\gamma & \ldots \\ B^\alpha & B^\beta & F^\gamma & \ldots \\ C^\alpha & C^\beta & C^\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

où $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m$, c'est-à-dire le même déterminant que précédemment.

Enfin, on peut s'astreindre à ne développer les déterminants

---

(1) Wronski met un pareil quotient sous forme entière au moyen de ses fonctions aleph. Ces fonctions peuvent se calculer de proche en proche par récurrence; mais si l'on veut les calculer *a priori,* il faut former des fonctions symétriques et l'on retombe sur le symbole proposé.

positifs que par lignes et cela peut servir dans deux cas. Dans le premier, les lettres A, B, C peuvent représenter des quaternions; dans le second cas, on peut avoir intérêt à indiquer des opérations symboliques.

Soit, par exemple, à faire le produit

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \ldots)(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 \ldots)(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \ldots)$$

où t est une quantité scalaire et les A, B, C sont des vecteurs; il n'y a qu'à effectuer, pour voir que le coefficient de t^m est encore

$$\left\| \begin{matrix} A_\alpha & A_\beta & A_\gamma \\ B_\alpha & B_\beta & B_\gamma \\ C_\alpha & C_\beta & C_\gamma \end{matrix} \right\|$$

avec $\alpha + \beta + \gamma = m$; mais cette fois il faut développer *par lignes*, pour ne pas intervertir l'ordre des lettres.

Enfin, si l'on a à faire l'opération

$$\varphi^3 x \frac{D^3}{3!}\left[\varphi^2 x \frac{D^2}{2!}\left(\varphi x \frac{D^1}{1!}\varphi x\right)\right]$$

autant de fois qu'il est possible de permuter 3, 2 et 1, il sera très commode de les indiquer symboliquement par

$$\left\| \begin{matrix} \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \\ \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \\ \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \end{matrix} \right\| \varphi x,$$

en convenant de ne développer que par lignes.

Comme les trois lignes sont égales, on peut ici, pour simplifier, écrire seulement

$$\left\| \varphi^3 \frac{D^3}{3!} \quad \varphi^2 \frac{D^2}{2!} \quad \varphi \frac{D^1}{1!} \right\| \varphi.$$

Et nous citons ce déterminant particulier, parce qu'on le rencontre toutes les fois qu'on veut, en vue d'applications numériques, développer l'opération si féconde de l'itération.