BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 199-220

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__199_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ ET SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES (1);

Par M. HADAMARD.

I. — *Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.*

1. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$\log\zeta(s) = -\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right), \tag{1}$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s=1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme

(1) Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.

$\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite (¹) $\mathcal{R}(s) = 1$.

C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.

2. Faisons d'abord tendre s vers 1 par valeurs réelles et décroissantes. Le logarithme de $\zeta(s)$, ou, à une quantité finie près, la série

$$S = \sum_p \frac{1}{p^s} \tag{2}$$

augmente indéfiniment comme $-\log(s-1)$.

Remplaçons maintenant s par $s + ti$ et imaginons que le point d'affixe $1 + ti$ soit un zéro de ζ. Alors la partie réelle de $\log(s + ti)$, c'est-à-dire (à une quantité finie près) la somme

$$P = \sum_p \frac{1}{p^s} \cos\left(t \log p\right), \tag{3}$$

devra croître indéfiniment par valeurs négatives *comme* $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendra vers 1 (t restant fixe).

3. Cela posé, soit α un angle que nous supposerons petit; parmi les différents nombres premiers, distinguons deux catégories :

1° Ceux qui satisfont, pour quelque valeur entière de k, à la double inégalité

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} \leqq \log p \leqq \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t}. \tag{4}$$

Les parties des sommes S_n et P_n [c'est-à-dire des séries (2) et (3) bornées à leurs n premiers termes] correspondant à cette première catégorie de nombres premiers seront désignées par S'_n et P'_n.

2° Les nombres premiers restants, c'est-à-dire ceux qui ne

(¹) $\mathcal{R}(s)$ désigne, comme d'habitude, la partie réelle de s.

vérifient la double inégalité (4) pour aucune valeur de k, donneront, dans les sommes S_n et P_n, les parties S''_n et P''_n.

Considérons le rapport $\rho_n = \frac{S'_n}{S_n}$, lequel est compris entre 0 et 1 : lorsque n augmentera indéfiniment, ce rapport aura soit une limite, soit des limites d'oscillation. *Si* $\zeta(1+ti)$ *était nul, cette ou ces limites devraient tendre vers* 1 *avec* s. Autrement dit, ρ étant un nombre quelconque plus petit que 1, on pourrait faire correspondre à toute valeur réelle de s supérieure à 1, mais suffisamment voisine de 1, une valeur de n à partir de laquelle on aurait

$$\rho_n > \rho. \tag{5}$$

On peut, en effet, écrire évidemment :

$$P'_n \geqq -S'_n \geqq -\rho_n S_n,$$
$$P''_n \geqq -S''_n \cos\alpha \geqq -(1-\rho_n) S_n \cos\alpha$$

(les inégalités ayant leur sens algébrique). Si donc on avait

$$\rho_n \leqq \rho,$$

il en résulterait

$$P_n = -\theta S_n$$

où $\theta = \rho + (1-\rho)\cos\alpha$ est un nombre fixe plus petit que 1 ; et si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n, on pourrait passer à la limite et écrire

$$P \geqq -\theta S,$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $\zeta(1+ti) = 0$, ainsi qu'il a été remarqué au numéro précédent.

L'égalité $\zeta(1+ti) = 0$ exige donc bien que la ou les limites de ρ_n tendent vers 1 avec s.

4. Changeons alors t en $2t$, dans la série (3) et soit Q la nouvelle série ainsi obtenue : les termes qui formaient, dans la série (3), les sommes $P'_n, P''_n, P_n = P'_n + P''_n$ donneront, dans cette nouvelle série, respectivement les sommes $Q'_n, Q''_n, Q_n = Q'_n + Q''_n$ et l'on aura, cette fois,

$$Q'_n \geqq S'_n \cos 2\alpha \geqq \rho_n S_n \cos 2\alpha,$$
$$Q''_n \geqq -S''_n \geqq -(1-\rho_n) S_n$$

et, par conséquent,

$$Q_n \geq S_n[\rho_n \cos 2\alpha - (1 - \rho_n)]:$$

d'où, moyennant l'inégalité (5) supposée vérifiée pour n suffisamment grand,

$$Q_n \geq \theta' S_n,$$

θ' désignant le nombre $\rho \cos 2\alpha - (1 - \rho)$, lequel est positif si nous avons pris $1 > \rho > \frac{1}{1 + \cos 2\alpha}$.

Or ceci donnerait $Q \geq \theta' S$ et, par suite, Q augmenterait indéfiniment par valeurs positives; de sorte que le point d'affixe $1 + 2ti$ serait un infini de $\zeta(s)$: ce que nous savons n'avoir pas lieu.

L'impossibilité de l'hypothèse $\zeta(1 + ti) = 0$ est donc mise en évidence.

5. Il est remarquable que cette démonstration ne repose que sur les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$: nous nous sommes, en effet, exclusivement servi des remarques suivantes : 1° le logarithme de notre fonction est développable en série de la forme $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, les nombres a_n étant tous positifs; 2° la fonction est uniforme sur la droite qui limite la convergence de cette série et ne présente sur cette droite qu'un seul pôle simple.

Toute fonction satisfaisant à ces conditions sera donc différente de 0 sur la droite limite.

Ainsi, dans la démonstration précédente, c'était uniquement pour simplifier l'écriture que nous avons réduit le second membre de l'équation (1) à la série S : la démonstration se serait également appliquée au développement complet de $\log \zeta(s)$. De même, les nombres premiers ayant été distribués d'une façon quelconque en deux catégories, les nombres de la première catégorie étant désignés par p', ceux de la deuxième par p'', si la fonction représentée (lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1) par le produit infini

$$(6) \qquad f(s) = \frac{1}{\prod_{p'} \left(1 - \frac{1}{p'^s}\right) \prod_{p''} \left(1 + \frac{1}{p''^s}\right)}$$

est holomorphe sur la droite limite $\mathcal{R}(s) = 1$, elle est différente de o sur cette droite (¹).

En effet, le logarithme du produit

$$f(s)\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p'}\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^2 \prod_{p''}\left(1-\frac{1}{p''^{2s}}\right)}$$

est représenté par une série $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ à coefficients positifs ; ce produit satisfait donc aux conditions ci-dessus indiquées.

Ce cas est, par exemple, celui de la fonction de Schlömilch

$$\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_p \frac{1}{1+\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}. \tag{7}$$

6. Plus généralement, nous allons étendre la proposition qui précède aux séries introduites en Arithmétique par Dirichlet, et dont nous devons tout d'abord rappeler, en les complétant sur certains points, les principales propriétés.

Ces séries appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *périodiques,* c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k. De telles séries sont évidemment des combinaisons linéaires des k fonctions

$$\xi_1(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(2k+1)^s} + \dots,$$

$$\xi_2(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \frac{1}{(2k+2)^s} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\xi_k(s) = \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+k)^s} + \frac{1}{(2k+k)^s} + \dots,$$

étudiées par MM. Hurwitz (²) et Cahen (³). Ces fonctions sont

---

(¹) Sauf peut-être au point $s = 1$; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la suite.

(²) *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. XXVII, p. 86-102; 1882.

(³) *Thèse de Doctorat,* 1894, et *Annales de l'École Normale supérieure,* 3ᵉ série, t. XI.

uniformes dans tout le plan, avec le seul pôle simple $s = 1$ et le résidu correspondant $\frac{1}{k}$, ainsi qu'il résulte de l'expression

$$\xi_r(s) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx, \tag{8}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C partant de $+\infty$ et y revenant après avoir tourné dans le sens trigonométrique autour de l'origine, et $-x$ étant considéré comme ayant (pour x réel et positif) l'argument $-i\pi$ dans la première partie du chemin d'intégration et, par suite, l'argument $+i\pi$ dans la seconde.

L'intégrale qui figure dans la formule précédente est une fonction entière de s, et les théorèmes généraux donnés dans mon Mémoire *Sur les propriétés des fonctions entières* (¹) permettent d'en déterminer le genre. A cet effet, on peut, par exemple, diviser le contour C en deux parties : l'une C′ partant du point $x = 1$ et y revenant après circulation autour de l'origine; l'autre C″ comprenant les deux traits de 1 à $+\infty$; les intégrales prises suivant ces deux traits ne diffèrent entre elles et de l'intégrale

$$\int_1^\infty x^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx \tag{9}$$

que par les facteurs exponentiels $e^{-i\pi s}$ pour la première, $e^{i\pi s}$ pour la seconde. Or, le coefficient de s^n dans l'intégrale (9), qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_1^\infty(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,\frac{dx}{x},$$

est (puisque r est un entier plus grand que 0) au plus comparable au coefficient correspondant de la fonction

$$Q(s) = \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx,$$

qui intervient dans l'étude de la fonction Γ et dont l'ordre de

(¹) *Journal de M. Jordan*, 4ᵉ série, t. IX; 1893.

grandeur pour s infini est celui de Γ. Quant à l'intégrale prise le long de C', le coefficient de s^n, qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_{C'}(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx,$$

y est au plus de l'ordre de $\frac{K^n}{1.2\ldots n}$, en désignant par K le module maximum de $\log x$ sur le contour en question. On voit donc que la fonction considérée est de genre 1 : le nombre de zéros de cette fonction, compris dans le cercle de rayon R, est de l'ordre de $R\log R$.

7. Lorsqu'on change s en $1-s$, les nouvelles valeurs des fonctions ξ s'expriment en fonction des anciennes par les relations établies par M. Hurwitz (1) et que l'on peut prendre sous la forme (2)

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-s)}\displaystyle\sum_{l=1}^{k}\sigma^{lr}\xi_l(s) \\ \quad=\left(\dfrac{2\pi}{k}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_{k-r}(1-s)+e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_r(1-s)\right] \\ \qquad\qquad (r=1,2,\ldots,k), \end{cases}$$

où σ désigne $e^{\frac{2i\pi}{k}}$

8. Pour définir ses séries, Dirichlet (3) part de la décomposition du nombre k en facteurs premiers

$$(11)\qquad k=2^\lambda p^\varpi p'^{\varpi'}\ldots \qquad (\lambda\geq 0;\ \varpi,\varpi',\ldots>0),$$

et, à tout entier n premier avec k, fait correspondre les indices

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma',\ \ldots.$$

---

(1) HURWITZ, *loc. cit.*, p. 93.

(2) CAHEN, *loc. cit.*, nos 47, 53.

(3) *Abhandlungen der Berl. Acad.*, 1837; traduit par Terquem, *Journal de Liouville*, 1re série, t. IV; 1839. Nous nous conformons aux notations employées dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, éditées par Dedekind, édition de 1863, supplément VI.

définis par les congruences

$$(12)\qquad \begin{cases} n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\beta} & (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda}), \\ n \equiv g^{\gamma} & (\mathrm{mod}\ p^{\varpi}), \\ n \equiv g'^{\gamma'} & (\mathrm{mod}\ p'^{\varpi'}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où $g, g', \ldots$ sont des racines primitives pour les modules respectifs p^{ϖ}, $p'^{\varpi'}$, ... Les nombres α et β sont ainsi définis aux modules a et b près : les nombres a et b ayant tous deux la valeur 1, si $\lambda = 0, 1$, et prenant les valeurs $a = 2$, $b = \frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda})$, si $\lambda \geq 2$. Pareillement, les nombres $\gamma, \gamma', \ldots$ sont définis relativement aux modules

$$c = \varphi(p^{\varpi}), \qquad c' = \varphi(p'^{\varpi'}), \qquad \ldots,$$

où φ est la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers à un entier donné et inférieurs à lui.

Réciproquement, la connaissance des indices $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ fait connaître le nombre n, au module k près. Autrement dit, aux $\varphi(k)$ valeurs de n premières avec k et incongrues entre elles suivant le module k correspondent, d'une façon univoque, les

$$a\, b\, c\, c' \ldots = \varphi(k)$$

systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ incongrus entre eux suivant les modules $a, b, c, c', \ldots$.

Désignant par $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$ respectivement une racine $a^{\text{ième}}$, une racine $b^{\text{ième}}$, une racine $c^{\text{ième}}$, une racine $c'^{\text{ième}}$, ... de l'unité, autrement dit posant

$$(13)\qquad \begin{cases} \theta = \pm 1, \\ \eta = e^{\frac{2i\pi\omega}{b}}, \\ \varpi = e^{\frac{2i\pi\tau}{c}}, \\ \varpi' = e^{\frac{2i\pi\tau'}{c'}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dirichlet introduit la fonction

$$\psi_{\nu}(n) = \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ n'est pas premier avec } k, \\ \theta^{\alpha}\eta^{\beta}\omega^{\gamma}\omega'^{\gamma'}\ldots, \text{ si } n \text{ est premier avec } k, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ étant les indices de n [l'indice ν a pour but de distinguer les unes des autres les $\varphi(k)$ fonctions ψ correspondant aux différents choix possibles des racines $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$].

Il forme ensuite la série (périodique au sens indiqué ci-dessus)

$$(14) \qquad L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \xi_r(s)\,\psi_\nu(r) \qquad [\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)],$$

égale au produit infini

$$(15) \qquad L_\nu(s) = \prod \frac{1}{1 - \dfrac{\psi_\nu(q)}{q^s}},$$

dans lequel q doit être remplacée successivement par tous les nombres premiers.

Les séries L_ν se répartissent en trois catégories : la première comprend une seule série L_1, celle qui correspond à

$$\theta = \eta_1 = \omega = \omega' = \ldots = 1;$$

la seconde comprend toutes les séries L, pour lesquelles les nombres $\theta, \eta, \ldots$ sont égaux à $+1$ ou à -1 (à l'exception de L_1); la troisième, les séries correspondant aux cas où l'un au moins de ces nombres est imaginaire. Ces dernières sont conjuguées deux à deux; la série

$$L_\nu(s) = \sum \xi_r(s)\,\psi_\nu(r),$$

déduite des racines $\theta, \eta_1, \omega, \omega', \ldots$, est conjuguée de la série

$$L_{\nu'}(s) = \sum \frac{\xi_r(s)}{\psi_\nu(r)},$$

déduite des racines $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\eta_1}, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}, \ldots$.

La série L_1 admet, comme seule singularité, le pôle simple $s = 1$. Quant aux autres séries L, elles sont holomorphes dans tout le plan [parce que la somme $\frac{1}{k}\sum_r \psi_\nu(r)$ des résidus au point $s = 1$ est nulle]. Dirichlet démontre qu'elles sont toutes différentes de 0 pour $s = 1$.

9. De la relation générale (10), M. Hurwitz a pu déduire que certaines séries de seconde catégorie se reproduisent, à un facteur près, par le changement de s en $(1-s)$ à la façon de la fonction ζ.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème démontré par M. Lipschitz (1), et qui est le suivant : *La série* $L_\nu(s)$ *est (à un facteur exponentiel et trigonométrique près, analogue à celui qui se rencontre dans la formule relative à la fonction* ζ*) changée en sa conjuguée par le changement de* s *en* $1-s$, *sous les conditions suivantes :*

1° $\lambda \geqq 3$, μ *impair;*

2° $\tau \not\equiv p-1$, *si* $\varpi = 1$; τ *non divisible par* p, *si* $\varpi > 1$;

3° $\tau' \not\equiv p'-1$, *si* $\varpi' = 1$; τ' *non divisible par* p', *si* $\varpi' > 1$; ...

Ce théorème nous fournit un renseignement important sur la distribution des zéros de $L_\nu(s)$. Puisque cette fonction n'a aucun zéro imaginaire dont la partie réelle soit plus grande que s, elle n'en a non plus aucun dont la partie réelle soit négative : les zéros imaginaires sont compris dans la même bande que ceux de $\zeta(s)$. Ils sont même, comme ceux de $\zeta(s)$, disposés symétriquement par rapport à la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$, puisqu'à tout zéro α correspond un zéro α' (différent ou non du premier), tel que α et $1-\alpha'$ soient imaginaires conjugués.

Toutefois, cette conclusion n'est pas encore démontrée dans les cas où la relation de Lipschitz ne s'applique pas; mais on ramène ces cas aux autres par les remarques suivantes :

1° Si une racine ω, par exemple, est égale à 1, on aura

$$L_\nu(s) = [1 - \psi'_\nu(p)p^{-s}]\,L'_\nu(s),$$

la série L'_ν étant composée en partant du nombre k supposé débarrassé du facteur p^ϖ. La même circonstance se produit pour le facteur 2 lorsque l'exposant λ est égal à 1 ;

2° Si l'entier τ est divisible par p^h, la série peut se composer en partant de l'entier k, divisé par p^h, la racine primitive g de p^ϖ étant une racine primitive de $p^{\varpi-h}$. La nouvelle valeur de τ ne con-

(1) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 127-157.

tiendra plus p en facteur. Il en est de même pour le facteur 2 lorsque l'entier μ est pair, et aussi lorsque $\lambda = 2$, $\theta = 1$.

3° Le raisonnement de l'auteur est encore valable pour $\lambda = 2$, $\theta = -1$, en prenant pour l'expression (1) $\left(\theta, \psi; e^{\frac{2ri\pi}{2^\lambda}}\right)$ la valeur $e^{\frac{2ri\pi}{4}} + \theta e^{\frac{-2ri\pi}{4}}$.

Notre conclusion est donc établie pour toutes les séries L_ν. On pourrait dès lors développer, sur la distribution des zéros de L_ν, une théorie analogue à celle de M. von Mangoldt (2). La seule remarque sur laquelle se fonde cet auteur, outre les propriétés communes à $\zeta(s)$ et aux séries L_ν, est que l'argument de $\zeta(s)$ reste fini lorsque le point d'affixe s décrit la droite $\mathcal{R}(s) = a > 1$. Or cette propriété appartient également aux fonctions L_ν. On pourrait donc compléter l'analyse présentée à cet égard (3) par Piltz.

10. L'équation fondamentale utilisée par Dirichlet pour la démonstration de son théorème, est

$$(16) \qquad \sum_\nu \frac{\log L_\nu(s)}{\psi_\nu(m)} = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \dots\right),$$

où m est un entier quelconque premier avec k et où les signes $\sum, \sum', \sum'', \dots$, s'étendent, le premier aux nombres premiers q tels que $q \equiv m \pmod k$, le second aux nombres premiers q tels que $q^2 \equiv m \pmod k$, etc. Pour $m = 1$, ceci donne

$$\log \prod_\nu L_\nu(s) = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \dots\right).$$

Donc *les séries de Dirichlet n'ont aucun zéro sur la droite* $\mathcal{R}(s) = 1$, car la fonction $\prod_\nu L_\nu(s)$ satisfait aux conditions énumérées au n° 5.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 144, formule (9). M. Lipschitz désigne par la lettre ψ la quantité que nous nommons τ_i.

(2) *Journal de Crelle*, t. 114.

(3) *Habilitationschrift*, Iéna, 1884.

II. — *Conséquences arithmétiques.*

11. Nous sommes bien loin, comme on le voit, d'avoir démontré l'assertation de Riemann-Stieltjes; nous n'avons même pas pu exclure l'hypothèse d'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ s'approchant indéfiniment de la droite limite. Cependant le résultat auquel nous sommes parvenu suffit, à lui seul, pour démontrer les principales conséquences arithmétiques que l'on a, jusqu'ici, essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Tout d'abord on peut remarquer que l'équation

$$\sum_{p} \frac{1}{p^s} = -\log(s-1) + \text{quantité finie}$$

fournit déjà quelques renseignements sur la distribution des nombres premiers. Soit, en effet, a un nombre plus grand que 1, et désignons par N_λ le nombre des nombres premiers compris entre a^λ et $a^{\lambda+1}$. Le premier membre de l'équation précédente est compris entre $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{\lambda s}}$ et $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{(\lambda+1)s}}$. En posant $\frac{1}{a^{s-1}} = x$ et remarquant que $s-1 = \frac{\log\frac{1}{x}}{\log a}$ peut être ici remplacé par $1-x$, on peut écrire, à une quantité finie près, pour x plus petit que 1, mais tendant vers 1 :

$$\sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda > \log(1-x) > \frac{x}{a} \sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda,$$

d'où l'on déduit que, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, on aura une infinité de fois

$$N_\lambda > \frac{(1-\varepsilon)a^\lambda}{\lambda}$$

et une infinité de fois

$$N_\lambda < \frac{(1+\varepsilon)a^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

conclusions analogues à celles que donne, par exemple, M. Poincaré dans son *Mémoire sur l'extension aux nombres premiers*

complexes des inégalités de M. Tchebicheff (¹), et qui suffiraient, comme elles, à établir que si le rapport d'un nombre x à la somme des logarithmes des nombres premiers plus petits que lui a une limite, cette limite ne peut être que 1.

D'autres inégalités pourraient sans doute être tirées de ce fait que, quel que soit le nombre réel t différent de 0, la quantité $\sum \frac{1}{p^s}\cos(t\log p)$ reste finie lorsque s tend vers 1.

12. Dans son Mémoire précédemment cité, M. Cahen présente une démonstration du théorème énoncé par Halphen : *La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Toutefois son raisonnement dépend de la proposition de Stieltjes sur la réalité des racines de $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0$. Nous allons voir qu'en modifiant légèrement l'analyse de l'auteur on peut établir le même résultat en toute rigueur.

A cet effet, au lieu de partir de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z}dz$, égale à 1 ou à 0 suivant que x est plus grand ou plus petit que 1, nous considérerons l'intégrale plus générale

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z^\mu}dz.$$

Dans cette intégrale, comme dans la première, x est une quantité positive ainsi que a; μ est positif.

Lorsque μ est un entier, cette intégrale s'évalue par les mêmes méthodes que J, ou s'en déduit par une intégration par parties, déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

La partie tout intégrée disparaît à l'infini et il vient

$$J_\mu = \begin{cases} 0, \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)}\log^{\mu-1}x, \text{ si } x>1. \end{cases} \tag{17}$$

(¹) *Journal de M. Jordan*, 4ᵉ série, t. VIII; 1892.

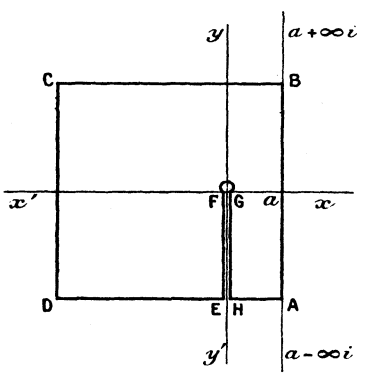
La même formule peut se démontrer pour μ non entier, auquel cas il est entendu que z^{μ} doit recevoir la détermination qui est réelle et positive pour $z = 0$. Pour $x < 1$, on intégrera le long d'un rectangle ayant un de ses côtés sur la droite $\mathcal{R}(z) = a$ et situé dans la région $\mathcal{R}(z) > a$, le second côté du rectangle augmentant indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}(0 < \mu' < \mu)$ du premier. Le résultat est alors évident.

Pour $x > 1$, on commencera par supposer $\mu < 1$. On intégrera alors le long d'un contour ABCDEFGHA (*fig.* 1) composé encore d'un rectangle ayant un côté AB sur la droite $\mathcal{R}(z) = a$, mais situé dans la région $\mathcal{R}(z) < a$ et interrompu sur son côté DA par un lacet qui va à l'origine et en revient en suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Si le côté BC augmente indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}(0 < \mu' < \mu)$ de AB, l'intégrale prise le long des côtés qui s'éloignent à l'infini disparaît et il reste

$$J_{\mu} = \frac{1}{2i\pi} \lim \left(\int_{HG} + \int_{FE} \right).$$

Or, sur le chemin HG, l'argument de z est $-\frac{i\pi}{2}$, et, sur le

Fig. 1.



chemin FE, $\frac{3i\pi}{2}$. Il vient donc bien

$$J_{\mu} = \frac{\left(e^{\frac{\mu i\pi}{2}} - e^{-\frac{3\mu i\pi}{2}}\right)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{-it}\,dt}{t^{\mu}}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\mu i\pi}{2}} \sin \mu\pi}{i\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t \log x) - i \sin(t \log x)}{t^{\mu}}\,dt = \frac{\log^{\mu-1} x}{\Gamma(\mu)}.$$

Cette formule, établie pour $\mu < 1$, s'étendra au cas de $\mu > 1$ par une intégration par parties déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^{\mu+m}} = \frac{(-1)^m \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{z^\mu}.$$

13. Parallèlement à la voie suivie par M. Cahen, nous appliquerons la formule (17) à l'intégrale

$$\psi_\mu(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz, \tag{18}$$

où a est un nombre quelconque plus grand que 1. En vertu du développement

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right),$$

notre formule donne

$$\psi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\sum \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} + \sum{}' \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p^2} + \dots \right), \tag{19}$$

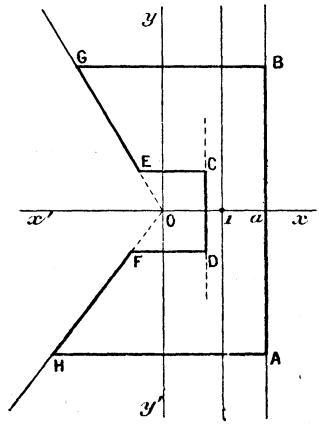
le signe $\sum$ s'étendant aux nombres premiers plus petits que x, le signe $\sum'$ aux nombres premiers plus petits que $x^{\frac{1}{2}}$, etc.

14. L'avantage que nous trouvons à prendre $\mu > 1$ réside dans la convergence de la série $\frac{1}{|\alpha|^\mu}$, où α désigne successivement les zéros de $\zeta(z)$, convergence sur laquelle reposent, comme nous allons le voir, les raisonnements qui vont suivre.

Dans ces conditions, en effet, nous pouvons séparer de l'ensemble des racines α un nombre M de ces quantités assez grand pour que la somme $\sum \frac{1}{|\alpha|^\mu}$, étendue aux racines restantes, soit plus petite qu'un nombre positif quelconque ε. Aucun des α n'ayant sa partie réelle égale à 1, nous pourrons (*fig.* 2) tracer une parallèle CD à l'axe imaginaire, laissant à sa droite la parallèle $\mathcal{R}(z) = 1$ et à sa gauche les M premières racines α. Des points C, D de cette droite, nous ferons partir des parallèles CE, DF à l'axe réel, parallèles comprenant entre elles les M racines en question, ne passant par aucune autre racine, et que nous

prolongerons jusqu'à rencontre en E, F respectivement avec deux droites OEG, OFH issues de l'origine et situées respectivement dans les deux angles formés par la partie négative de l'axe réel avec les deux directions de l'axe imaginaire. Enfin nous fermerons le contour d'intégration ABGECDFHA (*fig.* 2) par deux paral-

Fig. 2.



lèles variables BG, AH à l'axe réel (parallèles comprenant, bien entendu, CE et DF entre elles), rejoignant en A, B la droite $\mathcal{R}(z) = a$.

15. Je dis, en premier lieu, que l'on peut éloigner les parallèles BG, AH à l'infini, de telle façon que la partie de l'intégrale ψ_μ relative à ces droites tende vers zéro.

On peut suivre pour cela une marche analogue à celle qui est exposée dans mon Mémoire sur les propriétés des fonctions entières (1). La méthode qui va suivre diffère légèrement de celle-là; elle me paraît plus avantageuse.

Soit A un nombre plus grand que l'unité. Traçons des parallèles à l'axe réel à des distances de cet axe représentées par A^3, A'^6, ..., $A^{3\lambda}$, ... Le nombre (2) des racines α, dont les coordonnées sont comprises entre $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$ est au plus égal à $K\lambda A^{3\lambda}$, le nombre K

(1) *Loc. cit.*, n° 29 et suiv.

(2) Chaque racine est, bien entendu, comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

étant fini (¹), et il en sera de même *a fortiori* de l'intervalle $(A^{3\lambda+1}, A^{3\lambda+2})$; de sorte que si l'on range les racines α par ordre de coefficients de i croissants, il en existera au moins deux consécutives pour lesquelles les coefficients de i différeront d'une quantité supérieure à $\frac{A^{3\lambda+2}-A^{3\lambda+1}}{K\lambda A^{3\lambda}} = \frac{A(A-1)}{K\lambda}$.

Nous tracerons, à égale distance de ces deux racines, une parallèle à l'axe réel dont l'ordonnée sera désignée par z_0, et cette ordonnée aura, avec celle de toute racine α, une différence supérieure à $\frac{A(A-1)}{2K\lambda}$.

Or on a

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{\alpha}\left(\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right) - \sum_{\beta}\left(\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{z} + C \\ \qquad\qquad = \sum_{\alpha}\frac{z}{\alpha(z-\alpha)} - \sum_{\beta}\frac{z}{\beta(z-\beta)} - \frac{1}{z} + C, \end{cases}$$

les α désignant les zéros, les β les pôles (réels et négatifs) de ζ, et C étant une constante. Lorsque z varie sur le segment BG de la parallèle d'ordonnée z_0, le rapport $\frac{z-\beta}{\beta}$ reste supérieur à un nombre fixe, indépendant de β, et il en est de même pour le rapport $\frac{z-\alpha}{\alpha}$, si l'ordonnée de α est extérieure à l'intervalle $(A^{3\lambda}, A^{3\lambda+3})$. Les parties correspondantes du second membre de l'équation (20) donnent donc le produit de z par une somme finie $\left(\text{puisque les sommes } \sum\frac{1}{\alpha^2}, \sum\frac{1}{\beta^2} \text{ sont finies}\right)$.

Quant aux termes correspondant aux racines α comprises entre les parallèles d'ordonnées $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$, elles donneront, d'après ce qui a été dit plus haut, une somme moindre que $K\lambda A^{3\lambda}\frac{2K\lambda A^3}{A(A-1)}$, quantité de la forme $K' z_0 \log z_0$ (où K′ est un nouveau nombre fini).

(¹) Il est clair qu'on peut se dispenser des précautions que nous prenons ici en utilisant les résultats obtenus par M. von Mangoldt sur la distribution des quantités α; la méthode du texte a l'avantage de s'appliquer chaque fois qu'on connaît le genre de la fonction étudiée.

On aura donc

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| < K' z_0 \log z_0 ;$$

d'où en reportant dans notre intégrale

$$\left|\int_{BG} \frac{x^z}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz\right| < \frac{K' \log z_0}{z_0^{\mu-1}} \int |x^z| dz,$$

quantité infiniment petite pour z_0 infini.

16. L'intégrale prise le long de la droite indéfinie AB peut donc être remplacée par l'intégrale prise le long du contour indéfini HFDCEG, augmentée de la somme des résidus relatifs au pôle $z = 1$ et aux zéros α non compris entre les parallèles CE, DF.

Le résidu relatif au pôle $z = 1$ est $-x$.

Les résidus relatifs aux zéros de α non compris entre CE et DF ont une somme moindre que εx, où ε a été choisi aussi petit qu'on veut, et cela indépendamment de x.

Quant à l'intégrale prise le long du contour HFDCBG, elle est infiniment petite relativement à x. Cela est évident pour la partie finie FDCE, où il suffit de remarquer que $\frac{1}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ est fini. Sur les parties infinies EG, FH, les rapports $\left|\frac{z-\alpha}{\alpha}\right|$, $\left|\frac{z-\beta}{\beta}\right|$ sont supérieurs à un nombre fixe, et, par conséquent, la quantité $\left|\frac{1}{z} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right|$ est finie. L'intégrale sur un de ces chemins est donc moindre que $K \int \left|\frac{x^z}{z^{\mu-1}}\right| |dz|$ (le nombre K étant fini), c'est-à-dire qu'une quantité finie, décroissante quand x croît.

$\psi_\mu(x)$ est donc asymptotique à x, car, pour rendre la différence $[x - \psi_\mu(x)]$ moindre que ηx, il suffira de choisir $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, puis x assez grand pour que l'intégrale $\int_{HFDCEG}$ soit inférieure à $\frac{\eta}{2} x$.

17. Dans l'expression (19) de $\psi_\mu(x)$, nous ferons abstraction des termes compris sous les signes $\sum$ autres que le premier. Le nombre de ces signes est, en effet, moindre que $\frac{\log x}{\log 2}$, et la plus grande des sommes correspondantes est la première, inférieure

elle-même à $\log\Gamma\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\log^{\mu-1}x$, par conséquent (à un facteur fini près) à $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu}x$. Nous négligeons donc une quantité moindre que $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu+1}x$; et le résultat obtenu ci-dessus peut s'énoncer ainsi : *la somme* $\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum\log p\log^{\mu-1}\frac{x}{p}$, *étendue aux nombres premiers inférieurs à* x, *est asymptotique à* x.

Ce résultat (où il est entendu que nous devons supposer $\mu>1$) diffère de l'énoncé d'Halphen : *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à* x *est asymptotique à* x. Nous allons voir qu'il le comprend comme cas particulier.

18. Pour cela, prenons $\mu=2$, ce qui donne

$$\sum_{0}^{x}\log p\log\frac{x}{p}=x(1+\eta),$$

η étant (pour x assez grand) inférieur en valeur absolue à tel nombre qu'on voudra.

Dans cette relation, changeons x en $x(1+h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\sum_{0}^{x}\log p\log(1+h)+\sum_{x}^{x(1+h)}\log p\log\frac{x(1+h)}{p}=x(h+\eta),$$

égalité dans laquelle le signe $\sum_{\alpha}^{\beta}F(p)$ désigne la somme des valeurs de la fonction F pour les nombres premiers compris entre α et β.

Pour les nombres premiers qui figurent sous le second signe $\sum$, la quantité $\frac{x(1+h)}{p}$ est comprise entre 1 et $1+h$: on peut donc écrire, en divisant par $\log(1+h)$,

$$(21)\qquad \sum_{0}^{x}\log p<x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)}$$

$$\sum_{0}^{x(1+h)}\log p>x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)}.$$

Dans cette dernière, nous changerons x en $\frac{x}{1+h}$: elle deviendra

$$(22) \qquad \sum_0^x \log p > x \frac{h+\eta}{(1+h)\log(1+h)}.$$

Les formules (21) et (22) démontrent l'énoncé d'Halphen. On voit, en effet, que $\sum_0^x \log p$ sera compris entre $x(1+\rho)$ et $x(1-\rho)$, si l'on a choisi h tel que

$$1-\frac{\rho}{2} < \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} < \frac{h}{\log(1+h)} < 1+\frac{\rho}{2},$$

puis x assez grand pour que $\eta < \frac{\rho}{2}\log(1+h)$.

19. Les résultats qui précèdent s'étendent d'eux-mêmes aux séries de Dirichlet. On considérera l'intégrale

$$(23) \qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_{AB}\left[\sum_\nu \frac{1}{\psi_\nu(m)}\frac{L'_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right]\frac{x^z}{z^\mu}dz,$$

où μ est un nombre plus grand que 1, les autres lettres ayant le même sens que dans les nos 8-10. Cette intégrale représente, à une quantité près infiniment petite relativement à x, le produit de $\varphi(k)$ par la somme des logarithmes des nombres premiers q congrus à m, suivant le module k et plus petits que x, multipliés respectivement par les valeurs correspondantes de $\log^{\mu-1}\frac{x}{q}$.

On peut raisonner sur cette intégrale exactement comme nous l'avons fait sur l'intégrale (18), car les propriétés de $\zeta(s)$, que nous avons utilisées et qui sont relatives à la distribution des zéros et au genre, ont été démontrées pour les séries de Dirichlet. La quantité qui figure sous le signe $\int$ dans l'intégrale (23) a pour pôle simple $z=1$, pôle de $\frac{L'_1(z)}{L_1(z)}$, et le résidu correspondant $-\frac{x}{\psi_1(m)} = -x$; les résidus relatifs aux autres pôles donnent une somme qu'on peut considérer comme négligeable vis-à-vis de x, ainsi que l'intégrale prise le long du contour GECDFH, comme il a été expliqué.

Donc l'intégrale (23) est asymptotique à x. En suivant la même marche qu'au numéro précédent nous reconnaissons que *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k est asymptotique à* $\frac{x}{\varphi(k)}$.

L'équation générale

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{0}^{x}\log q\,\log^{\mu-1}\frac{x}{q}=\frac{x}{\varphi(k)}(1+\rho)$$

qui, comme nous venons de le voir, comprend la relation correspondant à $\mu=1$, ne paraît pas pouvoir se déduire inversement de celle-ci; il serait intéressant de rechercher quels renseignements cette équation fournit sur l'ordre de grandeur de ρ, c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $\sum_{0}^{x}\log q$ par sa valeur asymptotique.

20. En terminant, je signalerai l'application possible de la même méthode aux séries de Weber (1) et de Meyer (2), par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques. Une fois démontré que ces séries sont uniformes, la relation (3), analogue à celle donnée précédemment au n° 10, prouvera qu'elles ne s'annulent pas sur la droite $\mathfrak{R}(s)=1$.

Dans le cas où le déterminant est négatif, et où l'on considère la forme quadratique seule (sans faire intervenir de progression arithmétique), une formule donnée par Weber (4) fournit la démonstration demandée; en même temps, elle fait connaître le genre de ces séries et fournit la relation correspondant au changement de s en $1-s$. Les méthodes exposées dans le présent Mémoire sont donc dès à présent applicables à ce cas particulier.

---

(1) *Math. Annalen*, t. XX, p. 301.

(2) *Journal de Crelle*, t. 103, p. 98; cf. BACHMANN, *Analytische Zahlentheorie*, Ch. X; Leipzig, Teubner, 1894.

(3) BACHMANN, *loc. cit.*, p. 291, ligne 6, formule (34).

(4) BACHMANN, *loc. cit.*, p. 302, ligne 4.

NOTA. — Pendant la correction des épreuves, je reçois communication des recherches que M. de la Vallée-Poussin consacre au même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1). Nos raisonnements, trouvés d'une façon indépendante, ont quelques points communs : il est remarquable, en particulier, de constater que M. de la Vallée-Poussin a été conduit, lui aussi, à employer comme intermédiaire le fait que la fonction ζ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, quoique les procédés de démonstration soient tout à fait différents. Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité.

Les critiques, adressées par M. de la Vallée-Poussin aux démonstrations fondées sur l'emploi de l'intégrale $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^z \frac{dz}{z}$, n'intéressent point la nôtre, fondée sur l'intégrale

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z\, dz}{z^\mu} \quad (\mu > 1),$$

grâce au fait que cette dernière garde un sens, même lorsqu'on remplace chaque élément par son module.

---

(1) Tome XX, 2e Partie: 1896.