BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 18-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__18_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE FORMULE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. E. Goursat.

1. A la page 359 du *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen (t. II), on trouve une formule remarquable, généralement attribuée à Weierstrass, et qui donne immédiatement l'intégrale générale de l'équation d'Euler. Cette formule est la suivante. Soit $R(x)$ un polynôme du troisième ou du quatrième degré, n'ayant que des facteurs linéaires simples,

$$R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4;$$

désignons par g_2, g_3 les deux invariants

$$\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4, \end{aligned}$$

et par pu la fonction elliptique de Weierstrass qui satisfait à l'équation différentielle

$$(p'u)^2 = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

Si l'on remplace dans pu la variable u par l'intégrale de première espèce

$$u = \int_\alpha^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

le résultat de la substitution devient

$$pu = \frac{R_x^\alpha + \sqrt{R(x)R(\alpha)}}{2(x-\alpha)^2},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} R_x^\alpha = {} & \alpha^2(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) \\ & + 2\alpha(a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3) + a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4. \end{aligned}$$

Cette formule peut s'établir par une voie entièrement analytique que je vais indiquer.

2. Considérons la relation du premier genre

$$(1)\qquad y^2 = R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

et la surface de Riemann à deux feuillets qui correspond à cette relation. L'intégrale de première espèce

$$(2)\qquad u = \int_{(\alpha,\beta)}^{(x,y)} \frac{dx}{y},$$

prise sur cette surface depuis une origine fixe (α, β) jusqu'à une limite supérieure variable (x, y), possède deux périodes distinctes ω, ω', et, quand on fait varier le chemin d'intégration allant du point (α, β) au point (x, y), toutes les valeurs que peut acquérir l'intégrale sont comprises dans la formule

$$u_0 + m\omega + n\omega',$$

u_0 étant l'une de ces valeurs, et m, n désignant deux nombres entiers quelconques. Ces deux périodes ω, ω' ne dépendent que des invariants g_2, g_3 ; en effet, imaginons que l'on pose

$$x = \frac{\lambda x' + \mu}{\nu x' + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ désignant des constantes quelconques ; soit

$$R_1(x') = (\nu x' + \rho)^4 R\left(\frac{\lambda x' + \mu}{\nu x' + \rho}\right),$$

et soient g'_2, g'_3 les invariants de $R_1(x')$. On a

$$g'_2 = g_2(\lambda\rho - \mu\nu)^4,$$
$$g'_3 = g_3(\lambda\rho - \mu\nu)^6,$$

et l'intégrale de première espèce devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{(\lambda\rho - \mu\nu)\,dx'}{\sqrt{R_1(x')}} = \int \frac{dx'}{\sqrt{\dfrac{R_1(x')}{(\lambda\rho - \mu\nu)^2}}}.$$

Mais les invariants du nouveau polynôme sous le radical $\dfrac{R_1(x')}{(\lambda\rho - \mu\nu)^2}$ sont égaux à ceux de $R_1(x')$ divisés respectivement par $(\lambda\rho - \mu\nu)^4$ et par $(\lambda\rho - \mu\nu)^6$, c'est-à-dire aux invariants de $R(x)$.

D'ailleurs, il est clair que les périodes des deux intégrales sont les mêmes; on voit donc, en particulier, que les périodes de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ sont les mêmes que celles de l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{4x'^3 - g_2 x' - g_3}},$$

car on peut toujours ramener la première intégrale à cette forme normale par une substitution linéaire.

Cela posé, soit pu la fonction elliptique de Weierstrass dont les invariants sont g_2 et g_3, et qui admet, par suite, les périodes ω et ω'. Si dans pu l'on remplace u par l'intégrale de première espèce (2), le résultat de la substitution est une fonction du point analytique (x, y), $\Phi(x, y)$, dont nous allons étudier les propriétés.

Tout d'abord, il est évident que $\Phi(x, y)$ est une fonction uniforme sur la surface de Riemann, car, lorsque le point (x, y) décrit un contour fermé, u augmente d'une période et, par suite, pu reprend sa valeur initiale. En second lieu, $\Phi(x, y)$ n'admet, sur toute la surface de Riemann, que des discontinuités polaires. En effet, si en un point (x_0, y_0) la valeur de u est différente d'une période, pu est une fonction régulière de u dans le voisinage de ce point; par suite $\Phi(x, y)$ est une fonction régulière de $x - x_0$, ou de $\sqrt{x - x_0}$, ou de $\frac{1}{x}$ ou de $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, suivant que le point (x_0, y_0) est un point ordinaire à distance finie, un point de ramification à distance finie, un point ordinaire à l'infini, ou un point de ramification à l'infini (ce dernier cas ne peut se présenter que si $a_0 = 0$). Si, en un point (x_0, y_0), u devient égal à une période, pu devient infini, mais le développement de $\Phi(x, y)$ ne contient évidemment qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs dans le domaine du point singulier; ce point est donc un pôle. On conclut de là, d'après un théorème bien connu, que *$\Phi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y.*

Imaginons que l'on ait tracé sur la surface de Riemann T, qui correspond à l'équation (1), un système de deux coupures a et b

qui la transforment en une surface simplement connexe T′. Lorsque le point analytique (x, y) décrit la surface simplement connexe T′, le point qui figure la valeur de u décrit toute la surface d'un parallélogramme P construit sur les périodes, et il y a correspondance univoque entre les points des deux surfaces P et T′. Or la fonction pu reprend la même valeur en deux points seulement du parallélogramme P; par suite, $\Phi(x, y)$ ne reprend une valeur donnée A qu'en deux points seulement de la surface de Riemann. Comme le nombre des pôles d'une fonction rationnelle $\Phi(x, y) - A$ est égal au nombre des zéros, on en conclut que la fonction rationnelle $\Phi(x, y)$ admet deux pôles du premier ordre ou un pôle du second ordre. Nous connaissons déjà un pôle du second ordre de cette fonction, le point (α, β), car on a pour ce point $u = 0$, et pu admet le point $u = 0$ pour pôle du second ordre.

Donc *la fonction $\Phi(x, y)$ reste finie sur toute la surface de Riemann, sauf au point (α, β) qui est un pôle du second ordre.*

3. Supposons, pour fixer les idées, que le point (α, β) soit un point à distance finie, distinct d'un point de ramification. L'expression générale des fonctions rationnelles de x et de y, qui admettent un seul pôle du second ordre au point (α, β), est [1]

$$\Phi(x, y) = A + C\left[\frac{\beta + \beta_1(x - \alpha) + y}{(x - \alpha)^2}\right],$$

A et C désignant des constantes arbitraires, et β_1 étant le coefficient de $(x - \alpha)$ dans le développement de y au voisinage du point (α, β)

$$y = \beta + \beta_1(x - \alpha) + \beta_2(x - \alpha)^2 + \ldots. \tag{3}$$

La partie principale du développement de $\Phi(x, y)$, au voisinage du point (α, β), est donc

$$\Phi(x, y) = \frac{2C\beta}{(x - \alpha)^2} + \frac{2C\beta_1}{x - \alpha} + A + C\beta_2 + (x - \alpha)\{\ldots\}. \tag{4}$$

---

[1] APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 48.

D'autre part, dans le voisinage de l'origine, on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots;$$

quand on remplace u par son expression en fonction de x, les seuls termes du développement qui ne renferment pas de puissances positives de $x - \alpha$ proviennent de $\frac{1}{u^2}$.

Du développement (3), on déduit successivement

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta_1(x-\alpha)}{\beta^2} + \frac{\beta_1^2 - \beta\beta_2}{\beta^3}(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

$$u = \frac{x-\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{\beta_1(x-\alpha)}{2\beta} + \frac{\beta_1^2 - \beta\beta_2}{3\beta^2}(x-\alpha)^2 + \ldots\right],$$

$$\frac{1}{u} = \frac{\beta}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{2} + \frac{4\beta\beta_2 - \beta_1^2}{12\beta}(x-\alpha) + \ldots,$$

$$(5) \qquad \frac{1}{u^2} = \frac{\beta^2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta\beta_1}{x-\alpha} + \frac{\beta_1^2 + 8\beta\beta_2}{12} + \ldots.$$

Identifions les premiers termes des développements (4) et (5); nous trouvons les trois équations

$$2C\beta = \beta^2, \qquad 2C\beta_1 = \beta\beta_1, \qquad A + C\beta_2 = \frac{\beta_1^2 + 8\beta\beta_2}{12},$$

qui se réduisent à deux équations distinctes, d'où l'on tire

$$C = \frac{\beta}{2}, \qquad A = \frac{\beta_1^2 + 2\beta\beta_2}{12}.$$

Remplaçons β_1 et β_2 par leurs valeurs; de l'équation (1) on tire

$$yy' = 2(a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3),$$
$$yy'' + y'^2 = 6(a_0x^2 + 2a_1x + a_2),$$

et, en faisant $x = \alpha$, $y = \beta$, il vient

$$\beta\beta_1 = 2(a_0\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_3),$$
$$\beta_1^2 + 2\beta\beta_2 = 6(a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)$$

et, par suite,

$$A = \frac{a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2}{2}.$$

En remplaçant A et C par ces valeurs dans l'expression de $\Phi(x, y)$, on trouve, toutes réductions faites,

$$pu = \Phi(x, y) = \frac{R_x^\alpha + \beta y}{2(x-\alpha)^2}; \tag{6}$$

il suffit d'y remplacer β par $\sqrt{R(\alpha)}$ et y par $\sqrt{R(x)}$ pour avoir la formule de Weierstrass.

Les formules (2) et (6) sont entièrement équivalentes et, d'après la démonstration même, il n'y a aucune ambiguïté possible pour le signe à attribuer à chacun des radicaux $\sqrt{R(x)}$, $\sqrt{R(\alpha)}$.

4. Les deux points analytiques (α, β) et (x, y) jouent un rôle tout à fait symétrique dans la formule (6). Si l'on attribue au point (α, β) des positions particulières, on obtient des formules plus simples, que l'on pourrait établir directement de la même façon, mais qui se déduisent aussi de la formule (6) comme cas limites. Supposons, par exemple, que le point (α, β) vienne en un point de ramification de la surface de Riemann; alors α est égal à l'une des racines ρ_i de l'équation $R(x) = 0$, et β est nul. Le polynôme $R_x^{\rho_i}$ admet aussi la racine ρ_i et, par la suppression du facteur commun $x - \rho_i$, la formule (6) se réduit à

$$pu = \frac{Ax + B}{2(x - \rho_i)}, \tag{7}$$

en posant

$$A = a_0\rho_i^2 + 2a_1\rho_i + a_2,$$
$$B = a_0\rho_i^3 + 3a_1\rho_i^2 + 3a_2\rho_i + a_3.$$

Si le point (α, β) s'éloigne à l'infini, divisons le numérateur et le dénominateur de la formule (6) par α^2; lorsque le module de α croît indéfiniment, $\frac{2(x-\alpha)^2}{\alpha^2}$ a pour limite 2, $\frac{R_x^\alpha}{\alpha^2}$ a pour limite $a_0x^2 + 2a_1x + a_2$. Quant au rapport $\frac{\beta}{\alpha^2}$, il tend vers zéro lorsque $R(x)$ est du troisième degré, et vers $\pm\sqrt{a_0}$ lorsque $R(x)$ est du quatrième degré, le signe devant être pris d'après le feuillet où se trouve le point à l'infini considéré. La formule (6) devient donc

$$pu = \frac{2a_1x + a_2}{2}, \tag{8}$$

si $a_0 = 0$, et

$$(9) \qquad pu = \frac{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + \sqrt{a_0}\,y}{2},$$

si a_0 n'est pas nul.

5. Le problème de l'inversion consiste à exprimer les coordonnées (x, y) de la limite supérieure de l'intégrale (2) au moyen de la valeur u de cette intégrale. Les formules, qui dépendent évidemment de la limite inférieure (α, β), se déduisent sans difficulté de la formule générale (6). Supposons d'abord que le point (α, β) soit un point à distance finie, distinct d'un point de ramification. On a l'identité

$$(10) \qquad (R_x^\alpha)^2 - (\beta y)^2 = (R_x^\alpha)^2 - R(x)R(\alpha) = (x-\alpha)^2 \Pi(x, \alpha),$$

$\Pi(x, \alpha)$ étant un polynôme du second degré, dont on trouvera l'expression développée dans le Traité d'Halphen (t. II, p. 354). La formule (6) peut aussi s'écrire

$$pu = \frac{(x-\alpha)^2 \Pi(x, \alpha)}{2(x-\alpha)^2 (R_x^\alpha - \beta y)} = \frac{\Pi(x, \alpha)}{2(R_x^\alpha - \beta y)},$$

et l'on a les deux relations

$$R_x^\alpha + \beta y = 2(x-\alpha)^2 pu,$$
$$R_x^\alpha - \beta y = \frac{\Pi(x, \alpha)}{2pu};$$

on en tire

$$R_x^\alpha = (x-\alpha)^2 pu + \frac{\Pi(x, \alpha)}{4pu},$$
$$\beta y = (x-\alpha)^2 pu - \frac{\Pi(x, \alpha)}{4pu}.$$

Différentions la première relation par rapport à x, en remarquant que l'on a

$$\frac{dpu}{dx} = p'u \frac{du}{dx} = \frac{p'u}{y};$$

il vient

$$\frac{dR_x^\alpha}{dx} = 2(x-\alpha)pu + \frac{\frac{d\Pi}{dx}}{4pu} + \left[(x-\alpha)^2 - \frac{\Pi(x, u)}{4p^2 u}\right] \frac{p'u}{y},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11) \qquad \frac{dR_x^\alpha}{dx} = 2(x-\alpha)pu + \frac{\frac{d\Pi}{dx}}{4pu} + \frac{\beta p'u}{pu}.$$

La relation (11) est du premier degré en x, et l'on en tirera la valeur de x exprimée au moyen de $\wp u$, $\wp' u$, α, β. La valeur de y se déduit ensuite de la relation

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}, \qquad y = \frac{dx}{du}.$$

Lorsque la limite inférieure (α, β) est un point de ramification, à distance finie ou infinie, les formules se simplifient. Les formules (7) et (8) montrent, en effet, que x est une fonction linéaire de $\wp u$, et l'on a ensuite

$$y = \frac{dx}{du}.$$

Enfin, lorsque $R(x)$ est du quatrième degré et que l'on prend pour limite inférieure de l'intégrale un point à l'infini de la surface de Riemann, on doit partir de la formule

$$2\wp u = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + \sqrt{a_0}\,y,$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} 2\wp u &= \frac{(a_0x^2 + 2a_1x + a_2)^2 - a_0(a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4)}{a_0x^2 + 2a_1x + a_2 - \sqrt{a_0}\,y} \\ &= \frac{\Pi(x)}{a_0x^2 + 2a_1x + a_2 - \sqrt{a_0}\,y} \end{aligned}$$

en posant

$$\Pi(x) = 4(a_1^2 - a_0a_2)x^2 + 4(a_1a_2 - a_0a_3)x + a_2^2 - a_0a_4.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} a_0x^2 + 2a_1x + a_2 &= \wp u + \frac{\Pi(x)}{4\wp u}, \\ \sqrt{a_0}\,y &= \wp u - \frac{\Pi(x)}{4\wp u}; \end{aligned}$$

en différentiant la première équation par rapport à x, et en tenant compte de la seconde, il vient

$$2(a_0x + a_1) = \frac{\Pi'(x)}{4\wp u} + \frac{\sqrt{a_0}}{\wp u}\,\wp' u;$$

on en tire

$$x = \frac{-2a_1\wp u + \sqrt{a_0}\,\wp' u + a_1a_2 - a_0a_3}{2a_0\wp u + 2a_0a_2 - 2a_1^2},$$

et y est donné par la formule

$$y = \frac{dx}{du}.$$

Les formules ainsi obtenues sont identiques, à une petite différence de notation près, aux premières formules données par Halphen (*Fonctions elliptiques,* t. I, p. 120).