BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 7-16
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__7_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE INFINITÉSIMALE DES ÉQUATIONS ET LES FONCTIONS IMPLICITES;

Par M. A. Pellet.

1. Nous dirons que les *n premières racines* d'une équation, $F(x) = 0$, sont *séparées dans le plan,* lorsque l'équation obtenue en y remplaçant chaque coefficient par son module à l'exception de celui de x^n qui est remplacé par une quantité négative de même module, équation qui offre deux variations de signe, a une racine positive simple r. Alors l'équation $F(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r, et l'on peut former, d'une part, l'équation de degré n qui admet ces n racines, d'autre part, celle qui admet toutes les autres racines qui sont de modules supérieurs à r. Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots.$$

Posons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$
$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

α_i étant le module de a_i. On a

$$F(x) = a_n x^n + f(x),$$

et les n premières racines de l'équation $F(x) = 0$ sont séparées dans le plan si la fonction $\alpha_n x^n - \varphi(x)$, qui est négative pour $x = 0$, est positive pour les valeurs positives de x comprises entre r et R, $R > r$. Il est clair qu'on peut remplacer dans $\varphi(x)$ les coefficients par des quantités positives supérieures et α_n par une quantité positive plus petite; si la nouvelle fonction est positive pour des valeurs positives de x, ces valeurs rendront *a fortiori* positive la première.

Pour les valeurs de x, dont le module est compris entre r et R, on a

$$l[a_n x^n + f(x)] = l a_n x^n + \frac{f(x)}{a_n x^n} - \frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^2 + \ldots.$$

La série à double entrée du second membre est absolument convergente et on peut l'ordonner suivant les puissances croissantes et décroissantes de x. Soit alors

$$lF(x) = la_n x^n + g_0 + g_1 x + \ldots + g_i x^i + \ldots + h_1 \frac{1}{x} + \ldots + h_i \frac{1}{x^i} + \ldots.$$

Posons

$$G(x) = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_i x^i + \ldots,$$

$$H\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h_1}{x} + \ldots + \frac{h_i}{x^i} + \ldots.$$

La série $G(x)$ a un rayon de convergence égal ou supérieur à R, et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ un rayon de convergence égal ou inférieur à r. Il vient, passant des logarithmes aux nombres

$$e^{-g_0} F(x) = a_n x^n e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} e^{G(x)};$$

d'où

$$(1) \qquad a_n x^n e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-g_0} F(x) e^{-G(x)},$$

$$(2) \qquad e^{-g_0} F(x) e^{-H\left(\frac{1}{x}\right)} = a_n x^n e^{G(x)}.$$

Ces deux égalités ayant lieu pour toutes les valeurs de x de module compris entre r et R, les deux membres doivent être identiques dans chacune d'elles. Or, les seconds membres sont des séries holomorphes en x, les premiers ne contiennent donc des termes en $\frac{1}{x}$ qu'en apparence.

Les deux membres de l'égalité (1) sont des polynômes entiers de degré n en x; en égalant à 0, on obtient l'équation qui admet les n premières racines de $F(x) = 0$; le produit de ces n racines est égal à

$$(-1)^n \frac{a_0}{a^n} e^{-g_0}.$$

Les deux membres de l'égalité (2) sont des séries holomorphes en x, le degré du terme de degré le moins élevé étant n; égalant à 0 et supprimant le facteur x^n, on obtient une équation admettant toutes les autres racines de l'équation $F(x) = 0$, et réciproquement; le nombre de ces racines peut se réduire à 0, et leurs modules sont supérieurs à R.

Si les n_1 premières sont également séparées dans le plan, $n_1 > n$, on aura

$$a_{n_1} x^{n_1} e^{H_1\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-g_0^1} F(x) e^{-G_1(x)},$$

g'_0, $G_1(x)$, $H_1\left(\frac{1}{x}\right)$ étant les valeurs correspondantes de g_0, $G(x)$, $H\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit

$$a_{n_1} x^{n_1-n} e^{H_1\left(\frac{1}{x}\right)-H\left(\frac{1}{x}\right)} = a_n e^{g_0-g'_0} e^{G(x)-G_1(x)},$$

et l'on a ainsi sous deux formes différentes, comme précédemment, l'équation de degré $n_1 - n$, qui admet les $n_1 - n$ racines nouvellement séparées.

2. Posons

$$a_n P(x) = a_{n+1} x + \ldots + a_{n+i} x^i + \ldots,$$

$$a_n Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x},$$

$$\alpha_n \pi(x) = \alpha_{n+1} x + \alpha_{n+2} x^2 + \ldots + \alpha_{n+i} x^i + \ldots,$$

$$\alpha_n \chi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\alpha_0}{x^n} + \frac{\alpha_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{x}.$$

Le terme indépendant de x est nul dans $\frac{f(x)}{a_n x^n}$ et, par suite, est le même dans $\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i$ et $\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i - P^i(x) - Q^i\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit μ la valeur minimum de $\pi(x) + \chi\left(\frac{1}{x}\right)$; le terme indépendant de x dans $\left[P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]^i$ a un module plus petit que $\mu^i\left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ et par suite, en prenant pour g_0 le terme indépendant de x dans

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{f}{a_n x^n}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^i}{i-1}\left(\frac{f}{a_n x^n}\right)^{i-1},$$

on commet une erreur ε de module plus petit que $\frac{\mu^i}{i(1-\mu)}\left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$, et il en résulte, pour le produit des n premières racines, $(-1)^n \frac{a_0}{a_1} e^{-g_0}$, une erreur *relative* $e^\varepsilon - 1$, de module inférieur à

$$\frac{\mu^i}{i(1-\mu-\mu^i)}\left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right).$$

Ainsi, pour n quelconque, on a

$$g_0 = -\frac{a_{n+1} a_{n-1} + a_{n+2} a_{n-2} + \ldots + a_{2n} a_0}{a_n^2}, \qquad |\varepsilon| < \frac{\mu^3}{4(1-\mu)}.$$

Pour $n = 2$:

$$g_0 = -\frac{a_3 a_1 + a_4 a_0}{a_2^2} + \frac{a_6 a_0^2 + 2 a_5 a_0 a_1 + a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2}{a_2^3}, \quad |\varepsilon| < \frac{\mu^4}{4(1-\mu)}\frac{7}{8}.$$

Pour $n = 1$:

$$g_0 = -\frac{a_2 a_0}{a_1^2} + \frac{a_3 a_0^2}{a_1^3} - \frac{a_4 a_0^3 + \frac{3}{2} a_2^2 a_0^2}{a_1^4} + \frac{a_5 a_0^4 + 4 a_2 a_3 a_0^3}{a_1^5}, \quad |\varepsilon| < \frac{\mu^6}{6(1-\mu)}\frac{31}{32};$$

dans ce cas, on peut écrire, en ajoutant des termes qui se trouvent dans la suite des termes négligés avec des coefficients au moins égaux, de sorte que la limite de l'erreur est inférieure,

$$g_0 = \mathrm{P}\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) - \frac{3}{2}\mathrm{P}^2\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) + \frac{a_2 a_3 a_0^3}{a_1^5},$$

et il en résulte pour valeur de la première racine

$$-\frac{a_0}{a_1}\left[1 - \mathrm{P}\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) + 2\mathrm{P}\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) - \frac{a_2 a_3 a_0^3}{a_1^5}\right]$$

avec une erreur relative de module plus petit que $\dfrac{\mu^6}{6(1-\mu-\mu^6)}$.

3. On a

$$e^{\mathrm{G}(x)} = [1 + \mathrm{P}(x)]\, e^{\mathcal{G}(x)}, \qquad e^{\mathrm{H}\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[1 + \mathrm{Q}\left(\frac{1}{x}\right)\right] e^{\mathfrak{H}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$\mathcal{G}(x)$ étant la partie contenant x à des puissances positives, et $\mathfrak{H}\left(\frac{1}{x}\right)$ la partie contenant x à des puissances négatives du développement de la série

$$\sum_{i=2}^{i=\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}[(\mathrm{P}+\mathrm{Q})^i - \mathrm{P}^i - \mathrm{Q}^i],$$

ordonnée suivant les puissances croissantes et décroissantes de x. j étant un entier positif ou négatif, le coefficient de x^j dans

$$\left[\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^i - \mathrm{P}^i(x) - \mathrm{Q}^i\left(\frac{1}{x}\right)$$

a un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)\left[\pi(\rho) + \chi\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^{i-2}}{\rho^j},$$

ρ étant compris entre r et R. Donc, dans $\mathcal{G}(x)$ et $\mathfrak{H}\left(\frac{1}{x}\right)$, le coefficient de x^j a un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1-\pi(\rho)-\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)}\rho^{-j};$$

et par suite dans les fonctions $e^{\mathcal{G}(x)}$, $e^{\mathfrak{H}\left(\frac{1}{x}\right)}$, holomorphes, l'une en x, l'autre en $\frac{1}{x}$, le coefficient de x^j a un module plus petit que

$$\frac{\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1-\pi(\rho)-\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{2}\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)}\rho^{-j}.$$

Cela posé, on a l'identité

$$e^{g_0}e^{G(x)}e^{H\left(\frac{1}{x}\right)}=1+P(x)+Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où

$$e^{g_0}e^{H\left(\frac{1}{x}\right)}=1+\frac{Q\left(\frac{1}{x}\right)}{1+P(x)}e^{-\mathcal{G}(x)},$$

en ne retenant pas dans le second membre les termes contenant x à une puissance supérieure à 0. Ainsi ordonnons $\frac{1}{1+P(x)}$ suivant les puissances positives de x, multiplions par $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ et soit

$$Q'\left(\frac{1}{x}\right)=a'_n+\frac{a'_{n-1}}{x}+\frac{a'_{n-2}}{x^2}+\ldots+\frac{a'_0}{x^n}$$

la partie de ce produit contenant x à une puissance nulle ou négative; on a

$$e^{g_0}e^{H\left(\frac{1}{x}\right)}=1+Q'\left(\frac{1}{x}\right),$$

l'erreur absolue commise sur le coefficient de $\frac{1}{x^i}$ ayant un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)\chi'\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1-\pi(\rho)-\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{2}\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)}\rho^{i},$$

$\chi'\left(\frac{1}{\rho}\right)$ représentant

$$\alpha'_n + \frac{\alpha'_{n-1}}{\rho} + \ldots + \frac{\alpha'_0}{\rho^n},$$

où α'_i est égal au module de a'_i.

De même

$$e^{g_0} e^{G(x)} = 1 + \frac{P(x)}{1 + Q\left(\frac{1}{x}\right)} e^{-\mathfrak{J}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

en ne retenant pas dans le second membre les termes contenant x à une puissance négative. Désignons par $P'(x)$,

$$P'(x) = a''_n + a'_{n+1} x + a^1_{n+2} x^2 + \ldots + a^1_{n-i} x^i + \ldots,$$

la partie de la fonction $\dfrac{P(x)}{1 + Q\left(\frac{1}{x}\right)}$ ne contenant pas x à une puissance négative; on a

$$e^{g_0} e^{G(x)} = 1 + P'(x);$$

l'erreur absolue commise sur le coefficient de x^i ayant un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)\pi'(\rho)}{1 - \pi(\rho) - \chi\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\pi(\rho)\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)} \frac{1}{\rho^i},$$

$\pi'(\rho)$ représentant la fonction

$$\alpha''_n + \alpha'_{n+1}\rho + \ldots + \alpha'_{n+i}\rho^i + \ldots.$$

Lorsque $F(x)$ est une fonction entière de degré m, $P'(x)$ doit être arrêté au terme de degré $m - n$.

$\pi'(\rho)$ et $\chi'\left(\frac{1}{\rho}\right)$ sont sensiblement égaux respectivement à $\pi(\rho)$, $\chi\left(\frac{1}{\rho}\right)$ lorsque μ est petit, et l'on peut prendre pour limite du module de l'erreur commise, dans l'un et l'autre cas, sur le coefficient de x^i, i entier positif ou négatif, $\frac{4}{27}\frac{\mu^3}{1-\mu}\rho^{-i}$, ρ étant la valeur qui rend minimum la fonction $\pi(x) + \chi\left(\frac{1}{x}\right)$, lorsque x varie de r à R.

On peut prendre

$$x^n \left[1 + Q'\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0$$

pour l'équation qui admet les n premières racines de $F(x) = 0$, et $1 + P'(x) = 0$ pour celle qui admet toutes les autres, avec une approximation d'autant plus grande que μ est plus petit.

4. Si l'équation $f(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r_1 et aucune dans l'intérieur de la couronne comprise entre les cercles de rayon r_1 et r_2, r_2 étant supérieur à r_1 et au plus égal au rayon de convergence de la série holomorphe $f(x)$, il peut se faire que ces n racines ne soient pas séparées dans le plan; mais les n premières racines de l'équation transformée en posant $y = x^k$ seront séparées dans le plan pour toutes les valeurs du nombre k, supposé entier, supérieures à une certaine limite.

Pour la facilité des calculs, on choisit pour k les puissances successives de 2; méthode de Gräff et Carvallo (thèse de M. Carvallo, 1889).

On obtient la transformée en y en effectuant le produit

$$f(x) f(\theta x) \ldots f(\theta^{k-1} x),$$

θ étant une racine primitive de $\theta^k - 1 = 0$. Après les réductions ce produit est une fonction entière de x^k, et il suffit de changer x^k en y, pour avoir le premier membre de l'équation en y. Or, d'après un théorème de M. Weierstrass, on a, pour les valeurs de x de module inférieur à r_2,

$$f(x) = F(x)\, e^{G(x)},$$

$F(x)$ étant une fonction entière en x, de degré n, dans laquelle on peut supposer le coefficient de la plus haute puissance de x égal à l'unité et $G(x)$ une série holomorphe convergente dans le cercle de rayon r_2. Posons

$$G(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_i x^i + \ldots.$$

La transformée de $f(x)$, en posant $y = x^k$, sera égale au produit de la transformée de $F(x)$, $\mathfrak{F}(y)$, par $e^{kb_0 + G_1(y)}$ où

$$G_1(y) \equiv k(b_k y + \ldots + b_{ki} y^i + \ldots).$$

Le module de $ib_i R^i$ est aussi petit que l'on veut pour toutes les valeurs de i suffisamment grandes, si R, quantité positive, est plus petite que r_2. On peut donc poser

$$|b_i| < \frac{n}{i R^i}$$

pour les valeurs de i supérieures à un nombre i_1, R étant compris entre r_1 et r_2. Pour les valeurs de k supérieures à i_1, les modules des coefficients de $G_1(y)$ sont au plus égaux aux coefficients correspondants de $-l\left(1-\frac{y}{R^i}\right)^n$. On peut faire abstraction du facteur e^{kb_0} et prendre pour transformée de $f(x)$, $\mathfrak{F}(y)\, e^{G_1(y)}$; d'après ce qui précède, les coefficients de cette transformée ont des modules inférieurs aux coefficients de la fonction

$$\left[\frac{y+r_1^k}{1-\frac{y}{R^k}}\right]^n$$

développée suivant les puissances croissantes de y; de plus, si $1+c$ est le coefficient de y^n dans ce développement, c est une fonction entière de $\left(\frac{r_1}{R}\right)^k$, infiniment petite lorsque k tend vers l'infini, et le coefficient de y^n dans $\mathfrak{F}(y)\, e^{G_1(y)}$ a un module compris entre $1-c$ et $1+c$. Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que l'équation

$$2y^n - \left(\frac{y+r_1^k}{1-\frac{y}{R^k}}\right)^n = 0$$

a deux racines positives pour les valeurs de k suffisamment grandes. Extrayant la racine $n^{\text{ième}}$, il vient

$$\sqrt[n]{2}\,\frac{y^2}{R^k} - (\sqrt[n]{2}-1)y + r_1^k = 0.$$

Cette équation du second degré a deux racines positives pour les valeurs de k qui satisfont à l'inégalité

$$(\sqrt[n]{2}-1)^2 > 4\sqrt[n]{2}\left(\frac{r_1}{R}\right)^k.$$

5. Soit l'équation

$$X_0 + X_1 y + \ldots + X_n y^n + \ldots = 0, \tag{1}$$

les X désignant des séries holomorphes en x, les n premières X_0, X_1, ..., X_{n-1} s'annulant et la $(n+1)^{\text{ième}}$, X_n, ne s'annulant pas avec x. Pour les valeurs de x, d'assez petit module, les n premières racines de cette équation en y seront séparées dans le plan. Ordonnons en effet par rapport à x et soit alors

$$(a_n + Y_0) y^n + Y_1 x + Y_2 x^2 + \ldots = 0$$

ce que devient l'équation, a_n étant la valeur de X_n pour $x = 0$. Désignons par $|Y_i|$ ce que devient Y_i quand on y remplace tous les coefficients par leur module. Cela posé, soient y_1 une quantité positive rendant $\alpha_n - |Y_0|$ positif (α_n module de a_n), et inférieure aux rayons de convergence des séries Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...; x_1 une quantité positive rendant positif ou nul le premier membre de l'équation

$$y_1^n(\alpha_n - |Y_0^1|) - x_1 |Y_1^1| - x_1^2 |Y_2^1| - \ldots - x_1^i |Y_i^1| - \ldots = 0, \tag{2}$$

$|Y_i^1|$ représentant la valeur de $|Y_i|$ pour $y = y_1$.

Pour les valeurs de x de module inférieur à x_1, l'équation (1) a n racines de modules inférieurs à y_1, et ces n racines sont séparées dans le plan. Presque toujours, dans le cas par exemple où le premier membre de l'équation (1) est un polynôme entier en x et y, il y aura une valeur positive ρ de x_1 pour laquelle l'équation (2) admettra une racine positive double en y_1, v. Alors, pour $x_1 < \rho$, l'équation (2) aura deux racines positives y_1, y_2, comprenant entre elles v, $y_2 > v > y_1$; et pour $|x| < x_1$, l'équation (1) a n racines de modules plus petits que y_1, séparées dans le plan. La méthode du n° 1 permettra de former l'équation de degré n qui admet ces n racines. Toute fonction symétrique et entière de ces n racines est développable suivant les puissances croissantes de x et l'erreur commise en négligeant les termes de degré supépérieur à i a un module inférieur à

$$\frac{A\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{i+1}}{1 - \frac{|x|}{\rho}},$$

A désignant la valeur que prend la fonction quand on y remplace chaque racine par v, et les coefficients par leur module.

6. Soit l'équation

$$y^n - x f(y) = 0,$$

où

$$f(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_i y^i + \ldots.$$

Posons

$$\varphi(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \ldots + \beta_i y^i + \ldots,$$

β_i étant égal ou supérieur au module de b_i. On pourra prendre pour y_1 un nombre positif quelconque inférieur au rayon de convergence de $\varphi(y)$; x_1 sera égal à $\frac{y_1^n}{\varphi(y_1)}$; v sera déterminé par l'équation $v\varphi'(v) - n\varphi(v) = 0$ et $\rho = \frac{v^n}{\varphi(v)} = \frac{1}{\varphi'(v)}$.

En particulier considérons l'équation

$$y - x \sin(b + y) = 0.$$

Soit β l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ayant même sinus en valeur absolue que b; on a

$$\varphi(y) = \sin\beta \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \cos\beta \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Pour $y_1 = 1$,

$$\frac{y_1}{\varphi(y_1)} \geqq \frac{2}{\sqrt{2(e^2 + e^{-2})}} > 0,514.$$

L'équation en v devient

$$0 = -\sin\beta + \sin\beta\left(\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.4} + \ldots + \frac{v^{2i}}{1.2\ldots(2i-2).2i} + \ldots\right)$$
$$+ \cos\beta\left(\frac{v^3}{3} + \ldots + \frac{v^{2i+1}}{1.2\ldots(2i-1).(2i+1)} + \ldots\right).$$

β tendant vers 0, v tend vers $(3\operatorname{tang}\beta)^{\frac{1}{3}}$, et ρ vers l'unité. Ainsi ρ varie entre $0,51$ et 1; on sait que Laplace a montré que le rayon de convergence de la fonction y est supérieur à $0,662$.