BULLETIN DE LA S. M. F.

ST. GERMAIN

Du facteur constant dans l'expression de $\vartheta(x)$ en produit illimité

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 62-63

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__62_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1873-1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ *en produit illimité;*
par M. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 17 décembre 1873)

Considérons la fonction définie par Jacobi au moyen d'une série :

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

où nous dirons seulement que q est < 1. On peut exprimer la fonction

comme produit d'un nombre infini de facteurs, de la forme

$$1 - 2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K} + q^{4n+2},$$

avec un facteur indépendant de x, et que nous désignerons par $\varphi(q)$. Une simple remarque permet de déterminer ce facteur plus aisément que ne l'a fait Jacobi. Égalons les expressions de $\Theta(x)$, ou mieux de $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, en série et en produit illimité :

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$
$$= \varphi(q)(1 - 2q\cos 2x + q^2)\ (1 - 2q^3\cos 2x + q^6)\ldots.$$

Dans cette identité, je fais $x = \frac{\pi}{4}$; il vient

$$(1)\quad 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \ldots = \varphi(q)(1 + q^2)(1 + q^6)(1 + q^{10})\ldots.$$

Faisons au contraire $x = 0$, et changeons q en q^4, nous aurons

$$1 - 2q^4 + 2q^{16} - \ldots = \varphi(q^4)(1 - q^4)^2(1 - q^{12})^2(1 - q^{20})^2\ldots.$$

Le premier membre est le même que dans l'équation (1), et le second est divisible par $(1+q^2)\ (1+q^6)\ldots$; on a donc, en supprimant ce facteur commun,

$$\varphi(q) = \varphi(q^4)(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^{12})(1 - q^{10})(1 - q^{20})\ldots.$$

Nous trouvons un produit de facteurs de la forme $1-q^{2n}$, où n a toutes les valeurs de 1 à ∞, sauf celles qui sont multiples de 4. Si on multiplie les deux membres par $(1-q^8)\ (1-q^{16})\ldots$, on n'aura plus de lacunes, et on pourra écrire, n variant de 1 à ∞,

$$\varphi(q)\Pi(1 - q^{8n}) = \varphi(q^4)\Pi(1 - q^{2n});$$

d'où

$$\frac{\varphi(q)}{\Pi(1 - q^{2n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\Pi(1 - q^{8n})} = \frac{\varphi(q^{16})}{\Pi(1 - q^{32n})} = \ldots.$$

On aura une suite de rapports égaux, dont les dénominateurs tendent vers l'unité; il en est de même du numérateur, car si dans l'équation (1) on remplace q par $q^{4\mu}$, il est évident que, pour μ infini, $\varphi(q^{4\mu}) = 1$. On a donc

$$\varphi(q) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8)\ldots.$$

C'est la formule de Jacobi.