BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 171-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__171_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes; par M. M. D'OCAGNE.

Je rappelle que j'ai donné le nom d'*isométrique* (1) d'une courbe K, par rapport à un système de courbes (C), toute courbe telle que son arc compris entre deux quelconques des courbes du

(1) *Voir* le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 71.

système (C) soit égal à l'arc de la courbe K compris entre les mêmes courbes.

En particulier, une courbe est isométrique d'une droite D par rapport aux droites issues d'un point O, lorsque l'arc de cette courbe compris entre deux quelconques des droites issues de O est égal au segment de la droite D compris entre ces droites.

Ce cas se trouve traité au n° 5 du petit Mémoire que je viens de rappeler. Je vais en donner ici une solution plus simple.

Prenant pour origine le point O, pour axe des x la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D, l'axe Oy étant parallèle à D, et appelant a la distance du point O à la droite D, on a, pour l'ordonnée h du point où la droite D est coupée par la droite qui joint le point O au point (x, y),

$$h = \frac{ay}{x}, \tag{1}$$

et l'on doit avoir

$$h' = \sqrt{1 + y'^2}, \tag{2}$$

h' et y' représentant les dérivées $\frac{dh}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$.

Dans une première solution, j'éliminais h entre ces deux équations, de façon à avoir l'équation différentielle de la courbe cherchée. On va voir qu'on est conduit à des calculs plus simples en éliminant y. En effet, (1) donne

$$y' = \frac{h + h'x}{a}.$$

L'équation (2) devient donc

$$h' = \sqrt{1 + \left(\frac{h + h'x}{a}\right)^2}$$

ou

$$h + h'x = a\sqrt{h'^2 - 1}. \tag{3}$$

Prenant la dérivée par rapport à x, on a

$$2h' + x\frac{dh'}{dx} = \frac{ah'}{\sqrt{h'^2 - 1}}\frac{dh'}{dx}$$

ou

$$\frac{dx}{dh'} + \frac{x}{2h'} = \frac{a}{2\sqrt{h'^2-1}}.$$

Intégrant, en prenant x pour fonction de h', on a, C étant une constante arbitraire,

$$x = e^{-\int \frac{dh'}{2h'}} \left[C + \int e^{\int \frac{dh'}{2h'}} \frac{dh'}{2\sqrt{h'^2-1}} \right]$$

ou

$$x = \frac{1}{\sqrt{h'}} \left[C + a \int \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3 - 4h'}} \right].$$

Posons

$$u = \int_{\infty}^{h'} \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3 - 4h'}}.$$

Dès lors, suivant la notation de M. Weierstrass,

$$h' = p(u) \qquad (\text{avec } g_2 = 4, \quad g_3 = 0)$$

et

$$x = \frac{C + au}{\sqrt{p(u)}}. \tag{4}$$

L'équation (3) donne alors

$$h = a\sqrt{p(u)^2 - 1} - (C + au)\sqrt{p(u)},$$

puis l'équation (1),

$$y = \frac{C + au}{a\sqrt{p(u)}} \left[a\sqrt{p(u)^2 - 1} - (C + au)\sqrt{p(u)} \right]. \tag{4'}$$

Les équations (4) et (4') résolvent le problème. Remarquant que $p(u)^2 - 1$ est ici égal à $\frac{p'(u)^2}{4p(u)}$, on peut remplacer la formule (4') par la suivante :

$$y = \frac{(C + au)[ap'(u) - 2(C + au)p(u)]}{2ap(u)} \ (^1). \tag{4 bis}$$

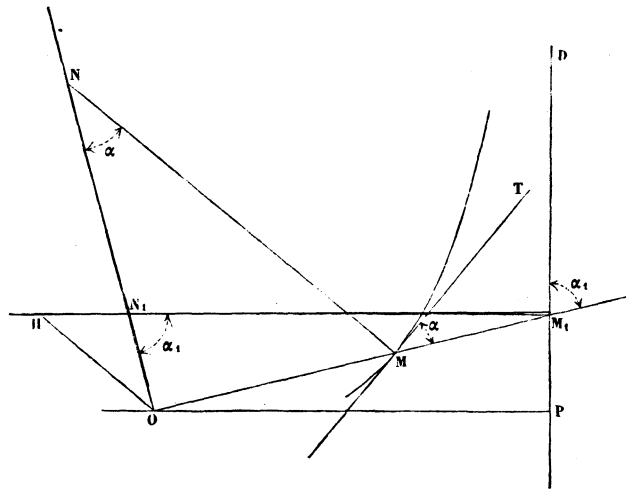
---

(1) Une légère faute d'impression, qui d'ailleurs saute aux yeux, s'est glissée dans la seconde des formules de mon Mémoire sur les isométriques (*Bulletin*, t. XIII, p. 79). Cette formule doit être rétablie ainsi

$$y = \frac{ap'(u) - 2(C + au)p(u)}{2\sqrt{p(u)}}.$$

Ici d'ailleurs les invariants de la fonction p ne sont pas les mêmes que ci-dessus, mais $g_2 = -4$, $g_3 = 0$.

Voici maintenant comment peut se déterminer le centre de courbure des courbes qui nous occupent.



Prenons sur la courbe un point M dont le vecteur OM coupe la droite D en M_1. MN et M_1N_1 étant les normales polaires en M et en M_1, limitées à la perpendiculaire élevée en O à OM, on a, en appelant ds la différentielle de l'arc de courbe en M, égale à la différentielle du segment de la droite D en M_1, et ω l'angle de OM avec OP,

$$ds = MN\, d\omega = M_1N_1\, d\omega.$$

Donc,

$$MN = M_1N_1.$$

La normale en M se trouve ainsi déterminée.

Soient maintenant α l'angle de la tangente en M avec OM, α_1 l'angle de D avec le même vecteur, $OM = \rho$, $OM_1 = \rho_1$. L'égalité précédente donne

$$\rho \sin\alpha_1 = \rho_1 \sin\alpha.$$

Par suite,

$$\sin\alpha_1\, d\rho + \rho\cos\alpha_1\, d\alpha_1 = \sin\alpha\, d\rho_1 + \rho_1\cos\alpha\, d\alpha.$$

Mais

$$d\rho = \rho \cot\alpha \, d\omega, \qquad d\rho_1 = \rho_1 \cot\alpha_1 \, d\omega,$$
$$d\alpha = \left(\frac{n}{r} - 1\right) d\omega \text{ (1)}, \qquad d\alpha_1 = -d\omega,$$

n étant la normale polaire MN, r le rayon de courbure en M. La relation précédente devient donc

$$\rho \cot\alpha \sin\alpha_1 - \rho \cos\alpha_1 = \rho_1 \cot\alpha_1 \sin\alpha + \rho_1 \cos\alpha \left(\frac{n}{r} - 1\right)$$

ou, après des réductions faciles,

$$\rho_1 \cos\alpha \frac{n}{r} = \sin(\alpha_1 - \alpha)\left(\frac{\rho}{\sin\alpha} + \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1}\right).$$

Or

$$\frac{\rho}{\sin\alpha} = \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1} = n.$$

Il vient donc finalement

$$2r = \frac{\rho_1 \cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Par le point O, menons la parallèle OH à MN. Nous avons $\widehat{HOM_1} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\widehat{OHM_1} = \alpha - \alpha_1$. Donc, le triangle OHM_1 donne

$$\frac{M_1H}{OM_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}$$

ou

$$M_1H = \frac{\rho_1 \cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = 2r.$$

Par suite, M_1H *est égal au diamètre du cercle osculateur au point* M.

---

(1) Formule (6) de ma Note *Sur les transformations centrales des courbes planes* (*Mathesis*, 1884).