BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une propriété des surfaces minima

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 102-104

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__102_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé par M. E. Catalan (¹); par M. Berdellé.

Tout multiple de 8 *est la somme de* 8 *carrés impairs.*

Un multiple effectif de 8 est de la forme

$$8+8n;$$

on sait que l'on peut écrire

$$n = a^2+b^2+c^2+d^2;$$

or

$$a^2 = \frac{a^2-a}{2} + \frac{a^2+a}{2},$$

donc

$$8a^2 = (4a^2-4a)+(4a^2+4a);$$

d'où l'on conclut facilement

$$\begin{aligned} 8+8n = &+(1+4a^2-4a)+(1+4a^2+4a)\\ &+(1+4b^2-4b)+(1+4b^2+4b)\\ &+(1+4c^2-4c)+(1+4c^2+4c)\\ &+(1+4d^2-4d)+(1+4d^2+4d), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On voit de plus que les huit nombres impairs se divisent en couples de deux nombres impairs consécutifs

$$2a-1, \quad 2a+1, \quad \ldots.$$

Toutefois, si k des nombres a, b, c, d sont nuls, il y aura k couples de carrés qui, au lieu d'être les carrés de deux impairs consécutifs, seront tous les deux égaux à 1.

Sur une propriété des surfaces minima; par M. E. Goursat.

Considérons une surface minima S, dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = R(du^2+dv^2), \tag{1}$$

(¹) *Bulletin de la Société mathématique,* vol. XVI, p. 129.

tandis que l'élément linéaire de la représentation sphérique a pour expression

$$d\sigma^2 = \frac{1}{R}(du^2 + dv^2); \tag{2}$$

R désigne le rayon de courbure principal et les lignes de courbure de la surface ont pour équations

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

(voir Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 312). Sur la normale en un point quelconque M_0 de la surface minima portons, de part et d'autre du pied de la normale, deux longueurs égales M_0M_1, M_0M_2, variant d'une manière continue quand on se déplace sur la surface S. Les deux points M_1, M_2 décrivent deux surfaces, S_1, S_2, dont il est aisé d'avoir l'élément linéaire. On aura, par exemple, en désignant par λ la longueur M_0M_1,

$$\begin{cases} ds_1^2 = \dfrac{(\lambda - R)^2 du^2 + (\lambda + R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2, \\ ds_2^2 = \dfrac{(\lambda + R)^2 du^2 + (\lambda - R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2; \end{cases} \tag{3}$$

les éléments superficiels dA_1, dA_2 de ces deux surfaces auront de même pour expressions

$$\begin{cases} dA_1^2 = \left[\left(\dfrac{\lambda^2 - R^2}{R}\right)^2 + \dfrac{(\lambda + R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{(\lambda - R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2\right] du^2 dv^2, \\ dA_2^2 = \left[\left(\dfrac{\lambda^2 - R^2}{R}\right)^2 + \dfrac{(\lambda + R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{(\lambda - R)^2}{R}\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2\right] du^2 dv^2. \end{cases} \tag{4}$$

Pour que ces éléments superficiels soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2$$

ou

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \pm\frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \varphi(u + v) \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \varphi(u - v),$$

φ désignant une fonction arbitraire. En remarquant maintenant que les équations

$$u + v = \text{const.}, \qquad u - v = \text{const.}$$

représentent les deux systèmes de lignes asymptotiques de la surface, on est conduit au théorème suivant :

Étant donnée une surface minima quelconque, sur chaque normale on porte, à partir du pied M_0 *de la normale et de part et d'autre de ce point, deux longueurs égales* M_0M_1 *et* M_0M_2, *la longueur* M_0M_1 *restant constante quand on se déplace suivant une ligne asymptotique de l'un des systèmes et variant suivant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne asymptotique à une autre du même système; les points* M_1, M_2 *décrivent deux surfaces* S_1, S_2, *telles qu'un pinceau de normales à la surface* S *découpe sur ces deux surfaces des aires équivalentes.*

On peut déduire de cette propriété la solution de certains problèmes de déblais et de remblais.

Prenons une portion finie S de surface minima sans point singulier et formons, comme il vient d'être expliqué, deux portions finies de surface S_1 et S_2; si l'on suppose ces deux surfaces S_1 et S_2 comprises tout entières à l'intérieur des deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure principaux de S, les normales à la surface S permettront d'effectuer le déblai de S_1 sur S_2 et fourniront le *minimum absolu* du travail, pourvu que la portion S de surface soit suffisamment petite [voir Appell, *Mémoire sur les déblais et les remblais* (*Journal des Savants étrangers*, t. XXIX, p. 15)].