BULLETIN DE LA S. M. F.

FÉLIX LUCAS

Statique des polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 17-69

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__17_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Statique des polynômes; par M. Félix Lucas.

Définition de l'action algébrique. — Je considère un polynôme $F(z)$, du degré p, à coefficients réels ou imaginaires, fonction de la variable $z = x + y\sqrt{-1}$.

En désignant par H le coefficient de z^p et par $z_n = x_n + y_n\sqrt{-1}$, une des p racines de l'équation $F(z) = 0$, on a identiquement

$$(1) \qquad F(z) = H(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \dots (z - z_p).$$

Chacune des racines z_n, considérée comme une coordonnée affixe relativement à un système d'axes rectangulaires, détermine un point M_n du plan. Les p racines déterminent, par conséquent, un système de p points,

$$M_1, \quad M_2, \quad \dots, \quad M_n, \quad \dots, \quad M_p,$$

que nous pouvons appeler les *points-racines* du polynôme $F(z)$.

La variable z peut elle-même être regardée comme l'affixe d'un point mobile N.

Cela posé, matérialisons par la pensée les points racines M, ainsi que le point N, en attribuant à chacun d'eux une masse égale à l'unité, et supposons que chacun des points M repousse N

en raison inverse de la distance MN. Nous donnerons à la résultante des forces par lesquelles N est sollicité le nom d'*action algébrique des points-racines du polynôme* $F(z)$.

Les projections P et Q de cette action totale sur les axes des x et des y sont déterminées par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} P = \sum \dfrac{x - x_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \\ Q = \sum \dfrac{y - y_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \end{cases}$$

On a, par suite,

$$(3)\qquad P - Q\sqrt{-1} = \sum \frac{1}{z - z_n} = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

Les composantes P et Q sont donc respectivement égales à la partie réelle et au coefficient de $-\sqrt{-1}$ que donne la fraction rationnelle $\frac{F'(z)}{F(z)}$.

Condition d'équilibre. — Pour que P et Q soient nuls, il faut et il suffit que la valeur attribuée à z soit une racine de l'équation $F'(z) = 0$. En d'autres termes : *La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre du point* N *est que ce point coïncide avec un des points-racines de la dérivée du polynôme considéré* (1).

Une droite indéfinie tracée dans le plan et laissant d'un même côté de sa direction tous les points-racines M, laisse aussi, d'un même côté de sa direction, tous les points-racines M' du polynôme dérivé $F'(z)$, car tout point situé de l'autre côté de cette ligne est évidemment repoussé et ne peut pas être en équilibre. Par conséquent : *Tout contour fermé convexe environnant les racines d'une équation algébrique environne aussi les racines de l'équation dérivée.*

Si tous les points M sont en ligne droite, on peut prendre, pour contour fermé convexe, une ellipse infiniment aplatie, com-

(1) J'ai indiqué cette propriété dans une Note insérée le 20 juillet 1868 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Les conséquences qui en découlent ont fait l'objet de Notes ultérieures en date des 26 janvier et 9 février 1874, 28 juillet 1879.

prenant tous les points M entre les deux extrémités de son grand axe; par conséquent : la droite contenant les points M contient aussi les points M'. Il est clair, d'ailleurs, *a priori,* que l'équilibre d'un point N n'est possible que sur cette droite.

Désignons par M_n et M_{n+1} deux points-racines consécutifs, et supposons que N se meuve depuis M_n jusqu'à M_{n+1} ; l'action algébrique, toujours dirigée suivant la droite considérée, sera d'abord infinie dans le sens $M_n M_{n+1}$; puis, finalement, infinie dans le sens opposé; elle s'annule nécessairement dans l'intervalle. Par conséquent : *Si tous les points-racines d'une équation sont en ligne droite, cette droite contient aussi les racines de l'équation dérivée; entre deux racines consécutives de l'équation proposée il y a nécessairement une racine de la dérivée.* Nous retrouvons ainsi le théorème de Rolle.

Il est évident aussi que : *Tout axe de symétrie ou tout centre de symétrie des points racines d'une équation est axe de symétrie ou centre de symétrie des points-racines de l'équation dérivée.*

Si, parmi les points-racines de l'équation proposée, il se trouve n points infiniment voisins les uns des autres, les actions exercées par ces points sur un autre point N, pris dans leur intime voisinage, sont infiniment grandes et rendent négligeables les actions du reste des points-racines. On trouvera donc $(n-1)$ positions d'équilibre à l'intérieur d'un contour convexe infinitésimal enveloppant. Par conséquent : *Lorsqu'une équation admet n racines égales, le point multiple correspondant à ces racines représente* $(n-1)$ *points-racines de l'équation dérivée.*

Potentiel de l'action algébrique. — Posons

$$F(z) = X + Y\sqrt{-1} = Re^{U\sqrt{-1}}; \tag{4}$$

désignons d'ailleurs par

$$\mu_n = \sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2} \tag{5}$$

le module du binôme $(z - z_n)$.

Nous aurons identiquement

$$\log \text{nép}\, R = \Sigma \log \text{nép}\, \mu_n + \log \text{nép module de H}. \tag{6}$$

et, par conséquent, en prenant successivement les dérivées par

rapport à x et par rapport à y,

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{1}{R}\frac{dR}{dx} = \sum \frac{1}{\mu_n}\frac{d\mu_n}{dx} = \sum \frac{x-x_n}{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}, \\ \frac{1}{R}\frac{dR}{dy} = \sum \frac{1}{\mu_n}\frac{d\mu_n}{dy} = \sum \frac{y-y_n}{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2}. \end{cases}$$

En nous reportant aux formules (2), nous trouvons

$$(8)\qquad \begin{cases} P = \frac{1}{R}\frac{dR}{dx} = \frac{d\log \text{nép } R}{dx}, \\ Q = \frac{1}{R}\frac{dR}{dy} = \frac{d\log \text{nép } R}{dy}. \end{cases}$$

Par conséquent : *Le logarithme népérien du module de* $F(z)$ *est le potentiel de l'action algébrique du groupe des points-racines de ce polynôme.*

Les courbes de niveau et leurs trajectoires orthogonales. — En exprimant que ce potentiel est constant, on obtient la série des courbes de niveau, normales aux actions résultantes. Leur équation générale, du degré $2p$, est

$$(9)\qquad X^2 + Y^2 = \text{const.}$$

Elles sont caractérisées et peuvent être définies par la relation géométrique

$$(10)\qquad NM_1 \times NM_2 \times \ldots \times NM_p = \text{const.};$$

ces courbes sont, par conséquent, des *cassinoïdes* ayant pour foyers les points-racines (M).

En faisant varier la constante du second membre, depuis zéro jusqu'à l'infini, on obtient d'abord p circonférences infinitésimales entourant les points M, puis des systèmes de courbes fermées sans branches infinies, puis une seule courbe fermée qui passe à l'infini du plan.

On obtient les trajectoires orthogonales des courbes de niveau en posant

$$(11)\qquad \frac{Y}{X} = \text{const.}$$

Ces courbes algébriques et du degré p sont caractérisées et

peuvent être définies par la relation géométrique

$$(12) \qquad NM_1S + NM_2S + \ldots + NM_pS = \text{multiple de } \pi,$$

S désignant un point à l'infini pris dans une direction arbitraire, mais fixe.

Chacune de ces courbes possède p branches infinies hyperboliques, partant respectivement des points-racines M et dont les asymptotes passent toutes par le centre des moyennes distances de ces points en figurant une rose des vents. Cette disposition étoilée des asymptotes motive la dénomination de *stelloïdes* que j'ai proposé de donner à ces courbes (¹).

Groupes polaires. — Désignons par $\frac{1}{k}$ l'intensité de l'action totale exercée sur le point N et par γ l'angle que fait la direction de cette force avec la direction positive de l'axe des x; nous aurons

$$(13) \qquad P + Q\sqrt{-1} = \frac{1}{k} e^{\gamma\sqrt{-1}},$$

et, par conséquent,

$$(14) \qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1} = \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}$$

Pour chaque système de valeurs de k et de γ, cette équation donne p valeurs de z qui, considérées comme des affixes, déterminent les points

$$L_1, \quad L_2, \quad \ldots, \quad L_p.$$

Nous appellerons *groupe polaire* l'ensemble des p points ainsi obtenus.

Il est clair que *tous les points d'un groupe polaire sont également actionnés, en intensité et en direction, par les points-racines* M *du polynôme* $F(z)$. Cette définition permet de déterminer un groupe polaire en se donnant un seul de ses points.

En donnant au paramètre k une valeur infinie, on obtient, comme groupe polaire, le système des points-racines M; c'est le *groupe polaire fondamental.*

(¹) *Géométrie des polynômes,* Mémoire inséré en 1879 au XLVI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

En faisant k égal à zéro, on obtient les points-racines M′ du polynôme $F'(z)$; c'est le *groupe polaire dérivé.* Le nombre des points de ce groupe se réduit, par exception, à $(p-1)$, parce que l'on néglige un point situé à l'infini dans une direction indéterminée.

Nous appellerons *groupes polaires principaux* le groupe fondamental et le groupe dérivé.

Ombilics. — Il peut arriver qu'un groupe polaire contienne un point double (ou même, dans certains cas particuliers, un ou plusieurs points multiples).

Pour déterminer les diverses positions de ces *ombilics,* il suffit d'éliminer $\frac{1}{k}e^{-\gamma\sqrt{-1}}$ entre l'équation (14) et sa dérivée.

On trouve ainsi

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F''(z)}{F'(z)}, \tag{15}$$

équation du degré $2(p-1)$; il existe, par conséquent, $2(p-1)$ ombilics.

On peut donner à cette équation la forme suivante

$$\frac{F''(z)-\lambda F'(z)}{F'(z)-\lambda F(z)} = \frac{F''(z)-\lambda' F'(z)}{F'(z)-\lambda' F(z)}, \tag{16}$$

λ et λ' désignant deux paramètres arbitraires de la forme $a+b\sqrt{-1}$.

Le premier membre définit en grandeur et en direction l'action algébrique du groupe polaire déterminé par l'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \lambda. \tag{17}$$

Le second membre définit, de même, en grandeur et en direction l'action algébrique du groupe polaire déterminé par l'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \lambda'. \tag{18}$$

Les deux actions algébriques dont il s'agit sont égales d'après l'équation (16), équivalente à l'équation (15). Par conséquent : *L'action algébrique d'un groupe polaire sur un ombilic est constante en grandeur et en direction, quel que soit ce groupe*

polaire. Cette action est toujours égale à celle du groupe des points-racines (M).

Intensité et direction de l'action algébrique. — Reprenons la formule

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)}, \tag{3}$$

qui détermine les projections P et Q, sur les axes de coordonnées rectangulaires, de l'action algébrique du groupe des points M.

L'intensité de cette force résultante et l'angle qu'elle fait avec la direction positive de l'axe des x sont respectivement égales au module et à l'argument du premier membre. On a, par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Intensité} = \dfrac{\text{module de } F'(z)}{\text{module de } F(z)}, \\ \text{Angle de direction} = \text{arg. de } F(z) - \text{arg. de } F'(z). \end{array}\right. \tag{19}$$

La première de ces relations conduit à la formule segmentaire :

$$\text{Intensité de l'action} = p\,\frac{NM'_1 \times NM'_2 \times \ldots \times NM'_{p-1}}{NM_1 \times NM_2 \times \ldots \times NM_p}. \tag{20}$$

Par conséquent : *On peut obtenir l'intensité de l'action algébrique du groupe* (M) *sur un point quelconque* N *en divisant le produit des distances de* N *au groupe dérivé* (M') *par le produit des distances de* N *au groupe* (M) *et multipliant le quotient par* p.

La seconde relation conduit à la formule angulaire

$$\text{Direction} = \left\{\begin{array}{l} NM_1 S + NM_2 S + \ldots + NM_p S, \\ -(NM'_1 S + NM'_2 S + \ldots + NM'_{p-1} S), \end{array}\right. \tag{21}$$

dans laquelle S désigne le point à l'infini de la direction positive de l'axe des x.

En nous reportant aux formules (8), nous voyons que le carré de l'intensité de la force a pour expression analytique

$$P^2 + Q^2 = \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dy}\right)^2\right]; \tag{22}$$

nous voyons aussi que la tangente de l'angle de direction a pour

valeur

$$\frac{Q}{P} = \frac{\frac{dR}{dy}}{\frac{dR}{dx}}. \tag{23}$$

Or la formule

$$R^2 = X^2 + Y^2 \tag{24}$$

donne

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\frac{dR}{dx} = \frac{X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dY}{dx}}{X^2 + Y^2}, \\ \frac{1}{R}\frac{dR}{dy} = \frac{X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy}}{X^2 + Y^2}. \end{cases} \tag{25}$$

Par conséquent, en tenant compte des identités bien connues

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}, \end{cases} \tag{26}$$

nous trouvons

$$P^2 + Q^2 = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}{X^2 + Y^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{dX}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2}{X^2 + Y^2}. \tag{27}$$

Nous avons aussi

$$\frac{Q}{P} = \frac{X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy}}{X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dY}{dx}}. \tag{28}$$

Lignes isodynamiques et trajectoires orthogonales. — On détermine un lieu géométrique du point N si l'on assujettit l'action exercée sur ce point à conserver une intensité déterminée. En faisant varier cette intensité, on obtient une série de lieux géométriques que l'on peut appeler *lignes isodynamiques,* et dont l'équation générale est

$$P^2 + Q^2 = \text{const.} \tag{29}$$

D'après la formule (27), ces courbes sont algébriques et du degré pair $2p$.

Le premier membre de cette équation est le carré du module de

la fraction rationnelle $\frac{F'(z)}{F(z)}$; on peut, par conséquent, obtenir l'équation générale des trajectoires orthogonales des courbes isodynamiques en égalant à une constante arbitraire la tangente de l'argument de la fraction rationnelle dont il s'agit. Nous trouvons ainsi

$$-\frac{Q}{P} = \text{const.} \tag{30}$$

D'après la formule (28) ces courbes sont algébriques et du degré impair $(2p-1)$. Chacune d'elles peut être considérée comme le lieu géométrique décrit par le point N lorsque l'on assujettit l'action exercée sur ce point à rester parallèle à une droite donnée. Par conséquent : *Les lignes isodynamiques ont pour trajectoires orthogonales un système de lignes correspondant aux actions parallèles.*

Les points nodaux coïncident avec les ombilics. — D'après la formule

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1}, \tag{3}$$

P et Q sont deux fonctions des variables x et y qui satisfont aux relations

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{dQ}{dy}, \\ \dfrac{dP}{dy} = \dfrac{dQ}{dx}. \end{cases} \tag{34}$$

Pour obtenir les points du plan sur lesquels peuvent se placer des points singuliers ou nœuds appartenant à certaines lignes isodynamiques, il suffit d'éliminer la constante arbitraire du second membre de l'équation (29) entre cette équation et ses deux dérivées partielles relativement à x et à y. On arrive ainsi aux deux équations simultanées

$$\begin{cases} P\dfrac{dP}{dx} + Q\dfrac{dQ}{dx} = 0, \\ P\dfrac{dP}{dy} + Q\dfrac{dQ}{dy} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Analoguement, pour obtenir les nœuds possibles des lignes correspondant aux actions parallèles, il suffit d'éliminer la constante

arbitraire du second membre de l'équation (30) entre cette équation et ses deux dérivées partielles relativement à x et à y. Nous obtenons, de cette manière, les équations simultanées :

$$(36)\qquad \begin{cases} P\dfrac{dQ}{dx} - Q\dfrac{dP}{dx} = 0, \\ P\dfrac{dQ}{dy} - Q\dfrac{dP}{dy} = 0. \end{cases}$$

Les relations (34) montrent que les systèmes (35) et (36) sont identiques. Par conséquent : *Les nœuds possibles des lignes isodynamiques sont aussi les nœuds possibles des lignes correspondant aux actions parallèles.*

A l'un ou à l'autre des systèmes (35) et (36), on peut substituer le suivant

$$(37)\qquad \begin{cases} P\dfrac{dP}{dx} + Q\dfrac{dQ}{dx} = 0, \\ Q\dfrac{dP}{dx} - P\dfrac{dQ}{dx} = 0. \end{cases}$$

Multiplions la seconde équation par $\sqrt{-1}$ et retranchons-la ensuite à la première; nous trouverons

$$(38)\qquad (P - Q\sqrt{-1})\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1}\right) = 0,$$

et cette seule équation équivaut au système (37). Elle se décompose d'ailleurs en deux autres, savoir

$$(39)\qquad P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

$$(40)\qquad \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1} = 0.$$

D'après la formule (3), l'équation (39) équivaut à

$$(41)\qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = 0;$$

elle a pour points-racines le groupe dérivé (M') et tout point à l'infini du plan; ce ne sont pas là des points nodaux. Nous n'avons donc à tenir compte que de l'équation (40), qui peut aussi s'écrire

$$(42)\qquad \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1} = \frac{d}{dx}\frac{F'(z)}{F(z)} = 0.$$

Au lieu de prendre la dérivée par rapport à x, nous pouvons prendre la dérivée par rapport à z, et nous trouvons

$$\frac{F(z)F''(z)-[F'(z)^2]}{[F(z)]^2}=0, \tag{43}$$

soit, en laissant de côté la solution correspondant aux valeurs infinies de z,

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{F''(z)}{F'(z)}; \tag{44}$$

c'est précisément l'équation (15) à laquelle nous avons été conduits en cherchant à déterminer les positions des ombilics. Par conséquent : *Les points nodaux des lignes isodynamiques ou de leurs trajectoires orthogonales coïncident avec les ombilics.*

Groupes polaires générateurs. — L'équation de la ligne isodynamique qui correspond à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire

$$\text{module de } \frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{1}{k}. \tag{45}$$

L'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{1}{k}e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \tag{46}$$

dans laquelle, laissant k invariable, on fera varier l'angle γ depuis zéro jusqu'à 2π, détermine un groupe polaire mobile dont tous les points se meuvent sur la ligne isodynamique considérée. Par conséquent : *Toute ligne isodynamique peut être engendrée par le mouvement d'un groupe polaire.*

En attribuant à k une valeur immensément grande, on obtient une ligne isodynamique composée de $(p-1)$ courbes fermées, circonférences infinitésimales entourant chacun des points M', et d'une circonférence enveloppante dont le rayon est immensément grand; chacune de ces p courbes est monodrome, c'est-à-dire qu'elle est parcourue par un seul point du groupe polaire mobile.

Cette allure générale de la ligne isodynamique est conservée lorsque l'on fait décroître k, jusqu'à ce qu'il y ait passage par un ombilic ou point nodal; alors se fait la première apparition d'une courbe non monodrome. Lorsque k, continuant à décroître, de-

vient assez petit pour que tous les ombilics aient été franchis, on obtient une ligne isodynamique composée de p courbes fermées monodromes enveloppant chacune un des points racines M.

L'équation de la ligne correspondant aux actions parallèles dont les directions sont définies par les angles γ et $(\gamma+\pi)$ peut s'écrire sous la forme

$$\text{(47)} \qquad \text{argument de } \frac{F'(z)}{F(z)} = \begin{cases} \text{soit } (-\gamma), \\ \text{soit } (-\gamma-\pi). \end{cases}$$

L'équation

$$\text{(48)} \qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = \begin{cases} \text{soit } \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \\ \text{soit } \frac{1}{k} e^{-(\gamma+\pi)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

dans laquelle, laissant γ invariable, on fera varier k depuis l'infini jusqu'à zéro, détermine un couple de groupes polaires mobiles dont tous les points se meuvent sur la ligne considérée. Par conséquent : *Toute trajectoire orthogonale des lignes isodynamiques peut être engendrée par les mouvements simultanés de deux groupes polaires correspondant respectivement à des actions de sens opposés.*

Lignes halysiques. — L'équation générale, du degré $(2p-1)$,

$$\text{(49)} \qquad \frac{Q}{P} = \frac{X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy}}{X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dY}{dx}} = \text{const.}$$

de ces trajectoires orthogonales montre que chacune d'elles passe, d'une part, par tous les points (M) et, d'autre part, par tous les points (M'); elle établit donc entre les points appartenant aux deux groupes polaires principaux, soit un enchaînement total, soit des enchaînements partiels; nous lui donnerons, pour ce motif, le nom de *ligne halysique* (1)

Les points d'intersection réels de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ avec la ligne halysique correspondant aux deux directions opposées γ ou $(\pi+\gamma)$ sont évidemment les deux

(1) Adjectif ayant pour radical le mot grec ἅλυσις, chaîne.

groupes polaires déterminés par l'équation (48); leur nombre est, par conséquent, égal à $2p$.

Puisque le degré $(2p-1)$ de l'équation (49) est impair, toute ligne halysique possède au moins un point à l'infini. Considérons son intersection avec la ligne isodynamique correspondant à une intensité infiniment petite, ligne qui se compose de $(p-1)$ circonférences infinitésimales entourant respectivement les points (M'), et d'une immense circonférence enveloppante; nous trouverons $2(p-1)$ points d'intersection voisins des points (M') et, par conséquent, 2 points d'intersection seulement avec la circonférence de rayon infini. Ces deux points à l'infini sont nécessairement situés sur les deux directions opposées d'une droite parallèle à l'action algébrique exercée sur un point quelconque de la ligne halysique considérée. En résumé, *toute ligne halysique a une seule branche infinie, laquelle est hyperbolique et possède une asymptote parallèle aux actions algébriques exercées sur les points de la ligne halysique.*

Si, laissant fixe dans le plan le groupe des points (M), nous transportions l'origine des coordonnées au centre des moyennes distances ou centre de gravité de ce groupe, le polynôme $F(z)$ perdrait son terme du degré $(p-1)$, et le polynôme dérivé $F'(z)$ perdrait son terme du degré $(p-2)$. L'équation (49) se trouverait, par conséquent, dépouillée de son terme du degré $(2p-2)$; l'asymptote de la courbe passerait donc par l'origine des coordonnées. Nous voyons ainsi que *l'asymptote d'une courbe halysique passe toujours par le centre des moyennes distances du groupe des points-racines* (M).

Polynômes conjugués. — Désignons par $\mathfrak{F}(z)$ le polynôme conjugué de $F(z)$, c'est-à-dire le polynôme que l'on obtient en remplaçant la variable $z = x + y\sqrt{-1}$ par la variable conjuguée $z = x - y\sqrt{-1}$ et chacun des coefficients $(a + b\sqrt{-1})$ par la quantité conjuguée $(a - b\sqrt{-1})$. Il est clair que $\mathfrak{F}'(z)$ sera le polynôme conjugué de $F'(z)$. Nous pourrons, par suite, joindre à la formule

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1} \tag{3}$$

la formule conjuguée

$$\frac{\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}. \tag{50}$$

Si d'ailleurs nous désignons par $\frac{1}{k}$ l'intensité de l'action algébrique dont P et Q sont les projections sur les axes des coordonnées, et par γ l'angle que la direction de cette force fait avec la direction positive de l'axe des x, nous pourrons substituer aux équations ci-dessus les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)} = \dfrac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \\ \dfrac{\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)} = \dfrac{1}{k} e^{\gamma\sqrt{-1}}. \end{cases} \tag{51}$$

En multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\mathrm{F}'(z)\,\mathfrak{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)\,\mathfrak{F}(z)} = \frac{1}{k^2}. \tag{52}$$

En divisant la seconde équation par la première, on trouve

$$\frac{\mathrm{F}(z)\,\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)\,\mathrm{F}'(z)} = e^{2\gamma\sqrt{-1}}. \tag{53}$$

Équation d'une ligne isodynamique.— L'équation (52) montre que l'expression

$$\frac{\mathrm{F}'(z)\,\mathfrak{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)\,\mathfrak{F}'(z)}$$

est égal au carré du module de la fraction

$$\frac{\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)}.$$

En se reportant à l'équation (45), on voit que l'équation de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire sous la forme (52), soit encore sous la forme

$$\frac{k\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{F}(z)} = \frac{\mathfrak{F}(z)}{k\mathfrak{F}'(z)}. \tag{54}$$

En désignant par μ et ν deux paramètres arbitraires (de la forme $a + b\sqrt{-1}$), nous pouvons remplacer cette équation (54) par la

suivante

$$\frac{kF'(z)-\mu F(z)}{F(z)-\nu kF'(z)}=\frac{\mathfrak{F}(z)-\mu k\mathfrak{F}'(z)}{k\mathfrak{F}'(z)-\nu\mathfrak{F}(z)}. \tag{55}$$

Propriété segmentaire. — Les paramètres μ et ν étant entièrement arbitraires, nous povons leur attribuer deux valeurs conjuguées

$$\begin{cases}\mu=\lambda e^{-\theta\sqrt{-1}},\\ \nu=\lambda e^{\theta\sqrt{-1}}.\end{cases} \tag{55 bis}$$

Si nous divisons alors l'équation (55) par son second membre, le polynôme numérateur du premier membre se trouve multiplié par son conjugué et il en est de même au dénominateur. Le premier membre devient donc égal au carré du module de la fraction rationnelle

$$\frac{kF'(z)-\lambda e^{-\theta\sqrt{-1}}F(z)}{F(z)-\lambda ke^{\theta\sqrt{-1}}F'(z)},$$

tandis que le second membre devient égal à l'unité.

D'après cela, si nous désignons par

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$kF'(z)-\lambda e^{-\theta\sqrt{-1}}F(z)=0 \tag{56}$$

et par

$$D_1,\quad D_2,\quad \ldots,\quad D_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$F(z)-\lambda ke^{\theta\sqrt{-1}}F'(z)=0 \tag{57}$$

nous pourrons écrire que chaque point N de la ligne isodynamique considérée satisfait à la relation

$$\frac{NC_1\times NC_2\times\ldots\times NC_p}{ND_1\times ND_2\times\ldots\times ND_p}=\frac{1}{\lambda}. \tag{58}$$

Par conséquent, *chaque courbe isodynamique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires, le produit des distances d'un quelconque de ses points aux pôles du premier groupe étant dans*

un rapport constant avec le produit des distances du même point aux pôles du second groupe.

Le groupe (C), déterminé par l'équation (56), correspond à l'action algébrique dont l'intensité est $\frac{\lambda}{k}$, et dont la direction fait avec la direction positive de l'axe des x l'angle θ. L'autre groupe (D), déterminé par l'équation (57), correspond à l'action algébrique d'intensité $\frac{1}{\lambda k}$ et de même direction θ que la précédente.

Par conséquent, *pour que deux groupes polaires* (C) et (D) *puissent servir à la définition segmentaire de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité* $\frac{1}{k}$, *il faut et suffit que les actions algébriques relatives à ces deux groupes soient de même direction et que le produit des intensités de ces actions soit égal au carré de l'intensité* $\frac{1}{k}$.

En attribuant au paramètre λ une valeur soit nulle, soit infinie, on identifie le système (C), (D) avec le système (M), (M'). Par conséquent, le groupe polaire principal et le groupe polaire dérivé peuvent servir à la définition géométrique de toute ligne isodynamique.

En faisant $\lambda = 1$, on rendrait identiques les deux équations (56) et (57), en sorte que le groupe (D) se confondrait avec le groupe (C), l'un et l'autre venant d'ailleurs se placer sur la ligne isodynamique considérée; la formule (58) se réduirait à une identité donnant une indétermination complète du point N.

Propriété angulaire. — Reprenons l'équation (55) et donnons aux paramètres μ et ν des modules égaux à l'unité avec des arguments quelconques, en posant

$$(59)\qquad \begin{cases} \mu = e^{-\alpha\sqrt{-1}}, \\ \nu = e^{\beta\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Cette équation (55) deviendra

$$(60)\quad e^{-\alpha\sqrt{-1}}\frac{F(z) - ke^{\alpha\sqrt{-1}}F'(z)}{\mathcal{F}(z) - ke^{-\alpha\sqrt{-1}}\mathcal{F}'(z)} = e^{-\beta\sqrt{-1}}\frac{F(z) - ke^{\beta\sqrt{-1}}F'(z)}{\mathcal{F}(z) - ke^{-\beta\sqrt{-1}}\mathcal{F}'(z)}.$$

La fraction rationnelle qui figure dans le premier membre a

pour numérateur et pour dénominateur deux polynômes conjugués; l'argument de cette fraction est donc égal au double de l'argument de son numérateur. La même observation s'applique à la fraction rationnelle qui figure dans le second membre.

Par conséquent, on peut donner à l'équation (60) la forme suivante :

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{argument de}[F(z)-ke^{\alpha\sqrt{-1}}F'(z)]\\ -\text{argument de}[F(z)-ke^{\beta\sqrt{-1}}F'(z)]\end{array}\right\} = \frac{\alpha-\beta}{2} + \text{multiple de } \pi.$$

Cela posé, désignons par

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(62)\qquad F(z)-ke^{\alpha\sqrt{-1}}F'(z)=0$$

et par

$$B_1,\quad B_2,\quad \ldots,\quad B_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(63)\qquad F(z)-ke^{\beta\sqrt{-1}}F'(z)=0.$$

L'équation (61) pourra prendre la forme géométrique

$$(64)\qquad A_1NB_1+A_2NB_2+\ldots A_pNB_p=\frac{\alpha-\beta}{2}+\text{multiple de }\pi,$$

qui met en relief une propriété angulaire de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$.

D'après les équations (62) et (63), les deux groupes polaires (A) et (B) appartiennent à la ligne isodynamique dont il s'agit; c'est la seule condition qui leur soit imposée, puisque les arguments α et β sont arbitraires.

En résumé, *si l'on désigne par* (A) *et* (B) *deux groupes polaires situés sur une même ligne isodynamique, on peut considérer cette ligne comme le lieu géométrique des points, tels que la somme des angles sous lesquels sont vus les segments* AB *soit égale à un multiple de* π *augmenté d'un angle constant.*

Équation d'une ligne halysique. — Considérons maintenant une trajectoire orthogonale des lignes isodynamiques, ligne haly-

sique correspondant aux actions algébriques parallèles dont les directions font avec la direction positive de l'axe des x, soit l'angle γ, soit l'angle $(\pi+\gamma)$.

L'équation de cette courbe, donnée par la formule (47), peut être ramenée à la forme

$$\frac{F(z)\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)F'(z)} = e^{2\gamma\sqrt{-1}}, \tag{53}$$

soit aussi

$$e^{\gamma\sqrt{-1}}\frac{F'(z)}{F(z)} = e^{-\gamma\sqrt{-1}}\frac{\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)}. \tag{65}$$

On peut, à cette dernière équation, substituer la suivante

$$\frac{F(z)-\mu e^{\gamma\sqrt{-1}}F'(z)}{F(z)-\nu e^{\gamma\sqrt{-1}}F'(z)} = \frac{\mathfrak{F}(z)-\mu e^{-\gamma\sqrt{-1}}\mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z)-\nu e^{-\gamma\sqrt{-1}}\mathfrak{F}'(z)}, \tag{66}$$

dans laquelle μ et ν représentent deux paramètres arbitraires.

Propriété angulaire. — Attribuons à ces paramètres μ et ν des valeurs réelles et positives h et k. Les deux membres de l'équation (66) deviennent alors conjugués; si donc nous divisons cette équation par son second membre, nous trouverons

$$\left\{\begin{array}{l}\text{argument de } [F(z)-he^{\gamma\sqrt{-1}}F'(z)] \\ -\text{argument de } [F(z)-ke^{\gamma\sqrt{-1}}F'(z)]\end{array}\right\} = \text{multiple de } \pi. \tag{67}$$

Désignons par (H) le groupe polaire représenté par l'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{h}e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \tag{68}$$

et par (K) le groupe polaire représenté par l'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k}e^{-\gamma\sqrt{-1}}; \tag{69}$$

l'équation (67) prendra la forme géométrique

$$H_1NK_1 + H_2NK_2 + \ldots + H_pNK_p = \text{multiple de } \pi. \tag{70}$$

Par conséquent, *chaque ligne halysique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires* (H) *et* (K) *situés sur elle-même. On peut considérer cette ligne comme le lieu géométrique des points, tels*

que la somme des angles sous lesquels sont vus les segments HK *soit égale à un multiple de* π.

Propriété segmentaire. — Reprenant l'équation (66), attribuons aux paramètres μ et ν deux valeurs imaginaires conjuguées

$$(71)\qquad \begin{cases} \mu = \lambda e^{\theta\sqrt{-1}}, \\ \nu = \lambda e^{-\theta\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

cette équation deviendra

$$(72)\qquad \frac{F(z) - \lambda e^{(\theta+\gamma)\sqrt{-1}} F'(z)}{F(z) - \lambda e^{(\gamma-\theta)\sqrt{-1}} F'(z)} \times \frac{\mathfrak{F}(z) - \lambda e^{-(\theta+\gamma)\sqrt{-1}} \mathfrak{F}'(z)}{\mathfrak{F}(z) - \lambda e^{(\theta-\gamma)\sqrt{-1}} \mathfrak{F}'(z)} = 1.$$

Les fractions rationnelles qui constituent les deux facteurs du premier membre sont des quantités conjuguées; leur produit est, par conséquent, égal au carré du module de la première de ces fractions.

Si nous désignons par (S) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(73)\qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{\lambda} e^{-(\theta+\gamma)\sqrt{-1}},$$

et par (T) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(74)\qquad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{\lambda} e^{(\theta-\gamma)\sqrt{-1}},$$

l'équation (72) prendra la forme géométrique

$$(75)\qquad \frac{NS_1 \times NS_2 \times \ldots \times NS_p}{NT_1 \times NT_2 \times \ldots \times NT_p} = 1.$$

Par conséquent, *chaque ligne halysique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires, le produit des distances d'un quelconque de ses points aux pôles du premier groupe étant égal au produit des distances du même point aux pôles du second groupe.*

Les groupes (S) et (T) correspondent respectivement à des actions algébriques ayant une intensité commune $\frac{1}{\lambda}$, et dont les directions font, avec la direction positive de l'axe des x, deux angles $(\theta + \gamma)$ et $(\gamma - \theta)$ dont la somme est égale à 2γ. Par conséquent : *Pour que deux groupes polaires* (S) *et* (T) *puissent*

servir à la définition segmentaire de la ligne halysique correspondant aux actions algébriques de direction (γ) *et* $(\gamma + \pi)$, *il faut et il suffit que ces deux groupes appartiennent à une même ligne isodynamique et que les angles de direction des actions algébriques correspondant à ces deux groupes aient une somme égale à* 2γ.

En attribuant au paramètre λ une valeur nulle ou une valeur infinie, on réduit l'équation (72) à une simple identité; il en résulte que le groupe polaire principal (M) et le groupe polaire dérivé (M') ne peuvent entrer ni l'un ni l'autre dans le système (S), (T).

L'équation (72) se réduirait encore à une identité si l'on supposait $\theta = 0$, de manière à amener la coïncidence des groupes (S) et (T), l'un et l'autre venant d'ailleurs se placer sur la trajectoire orthogonale considérée; la formule (75) donnerait, dans ce cas, l'indétermination complète du point N.

Construction de quelques courbes. — Il ne sera pas inutile, avant de continuer l'exposé des théories générales qui nous occupent, de donner quelques exemples de lignes isodynamiques et de trajectoires orthogonales.

En tenant compte de la formule

$$F(z) = X + Y\sqrt{-1}, \tag{4}$$

l'équation de la courbe isodynamique déterminée par les points racines (M) du polynôme $F(z)$ et correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire

$$\frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{k^2}. \tag{76}$$

La ligne halysique, correspondant aux deux directions opposées données par les angles γ et $(\gamma + \pi)$, peut d'ailleurs être représentée par l'équation

$$\frac{X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy}}{X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dY}{dx}} = \operatorname{tang}\gamma. \tag{77}$$

Le groupe polaire dérivé est déterminé par l'équation

$$F'(z) = 0.$$

Quant aux ombilics, ils sont déterminés par l'équation

$$[F'(z)]^2 = F(z)F''(z). \tag{15}$$

1. Supposons, en premier lieu,

$$F(z) = z^p - \alpha^p, \tag{78}$$

α désignant un paramètre réel et positif.

Les p points racines (M) occupent les sommets d'un polygone régulier dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont un sommet est placé sur la direction positive de l'axe des x; α est le rayon du cercle circonscrit à ce polygone.

Le groupe polaire dérivé (M') se compose de $(p-1)$ points coïncidant tous avec l'origine des coordonnées.

L'équation aux ombilics devient

$$p(p-1)(z^p - \alpha^p)z^{p-2} = p^2 z^{2p-2}, \tag{79}$$

et se décompose en deux autres

$$\begin{cases} z^{p-2} = 0, \\ z^p = (p-1)\alpha^p e^{\pi\sqrt{-1}}; \end{cases} \tag{80}$$

nous obtenons donc, d'une part, $(p-2)$ ombilics coïncidant avec l'origine des coordonnées et, d'autre part, p ombilics formant les sommets d'un polynôme régulier concentrique avec celui des points (M), ayant pour rayon $\alpha\sqrt[p]{p-1}$ et dont les rayons sont dirigés suivant les apothèmes du polygone des points (M).

En faisant usage des coordonnées polaires ρ et ω, on a identiquement

$$\begin{cases} X = \rho^p \cos p\omega - \alpha^p, \\ Y = \rho^p \sin p\omega, \\ \dfrac{dX}{dx} = p\rho^{p-1}\cos(p-1)\omega = \dfrac{dX}{dy}, \\ \dfrac{dY}{dx} = p\rho^{p-1}\sin(p-1)\omega = -\dfrac{dX}{dy}. \end{cases} \tag{81}$$

L'équation (76) devient, par conséquent,

$$\frac{p^2\rho^{2p-2}}{\rho^{2p} - 2\alpha^p\rho^p\cos p\omega + \alpha^{2p}} = \frac{1}{k^2}, \tag{82}$$

et l'équation (77) devient

$$\frac{\rho^p \sin\omega + \alpha^p \sin(p-1)\omega}{\rho^p \cos\omega - \alpha^p \cos(p-1)\omega} = \operatorname{tang}\gamma. \tag{83}$$

Parmi les lignes isodynamiques représentées par l'équation (82), il en est une qui passe par les p ombilics autres que l'origine des coordonnées et constitue, par conséquent, une courbe de transition. La valeur de k correspondant à cette ligne se détermine en faisant $\omega = \frac{\pi}{p}$ et $\rho = \alpha\sqrt[p]{p-1}$ dans l'équation (82); on trouve ainsi

$$\frac{1}{k^2} = \frac{p^2(p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{(p-1)^2 - 2(p-1)\cos\pi + 1}\,\frac{1}{\alpha^2} = \frac{(p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{\alpha^2}. \tag{84}$$

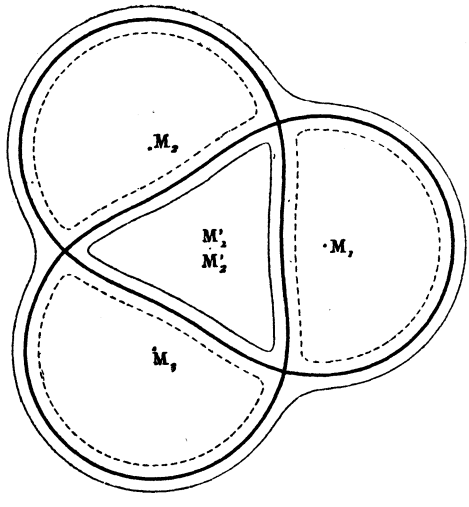
L'équation de la ligne isodynamique considérée devient, par conséquent,

$$\frac{\rho^{2p-2}}{\rho^{2p} - 2\alpha^p\rho^p\cos p\omega + \alpha^{2p}} = \frac{(p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{p^2\alpha^2}. \tag{85}$$

En faisant, par exemple, $p = 3$, nous trouvons

$$\frac{\alpha^2\rho^4}{\rho^6 - 2\alpha^3\rho^3\cos 3\omega + \alpha^6} = \frac{2}{9}\sqrt[3]{2}; \tag{86}$$

Fig. 1.



cette courbe est en gros traits sur la *fig.* 1; les deux courbes

fermées tracées en plein et les trois courbes fermées tracées en pointillé sont les lignes isodynamiques qui précèdent et suivent immédiatement la ligne de transition lorsque l'on fait croître l'intensité $\frac{1}{k}$ depuis zéro jusqu'à l'infini.

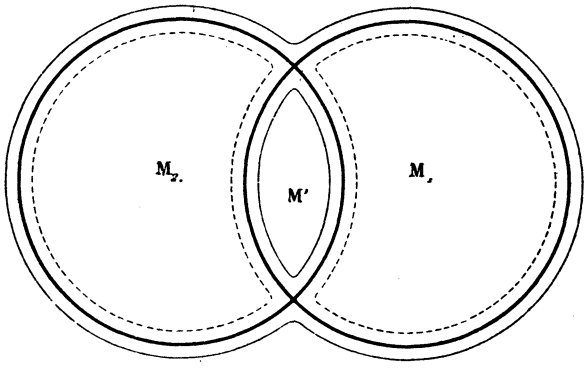
Dans le cas très particulier où $p = 2$, les points racines M_1 et M_2 sont situés sur l'axe des x, à égales distances de l'origine des coordonnées et les deux ombilics sont placés sur l'axe des y. L'équation (85) devient

$$\frac{\alpha^2\rho^2}{\rho^4 - 2\alpha^2\rho^2\cos 2\omega + \alpha^4} = \frac{1}{4}; \tag{87}$$

elle représente (*fig.* 2, tracé fort) deux circonférences de même rayon $\alpha\sqrt{2}$ ayant respectivement pour centres M_1 et M_2.

Parmi les lignes halysiques représentées par l'équation (83),

Fig. 2.



considérons-en une qui passe par un ombilic différent de l'origine des coordonnées; nous déterminerons la valeur correspondante de tangγ en faisant $\omega = \frac{\pi}{p}$ et $\rho = \alpha\sqrt[p]{p-1}$; on trouve ainsi

$$\text{tang}\gamma = \frac{(p-1)\sin\frac{\pi}{p} + \sin\frac{p-1}{p}\pi}{(p-1)\cos\frac{\pi}{p} - \cos\frac{p-1}{p}\pi} = \text{tang}\frac{\pi}{p}. \tag{88}$$

La ligne halysique dont il s'agit correspond, par conséquent, à des actions parallèles au rayon vecteur qui va de l'origine des coordonnées à l'ombilic de passage. L'équation de cette courbe est

$$\frac{\rho^p \sin\omega + \alpha^p \sin(p-1)\omega}{\rho^p \cos\omega - \alpha^p \cos(p-1)\omega} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{p}, \tag{89}$$

soit, plus simplement,

$$\rho^p = \alpha^p \frac{\sin\left[\frac{\pi}{p} + (p-1)\omega\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{p} - \omega\right)}. \tag{90}$$

Nous savons que cette équation doit représenter une courbe du degré $2p-1$; or il est à remarquer que si l'on donne à ω la valeur

$$\omega = \frac{\pi}{p} + \text{multiple de } \pi,$$

l'équation est satisfaite pour toute valeur de ρ; la courbe dont il s'agit se compose, par conséquent, d'une droite et d'une courbe du degré $2p-2$.

Faisons, par exemple, $p=3$, l'équation (90) deviendra

$$\rho^3 = \alpha^3 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right)}. \tag{91}$$

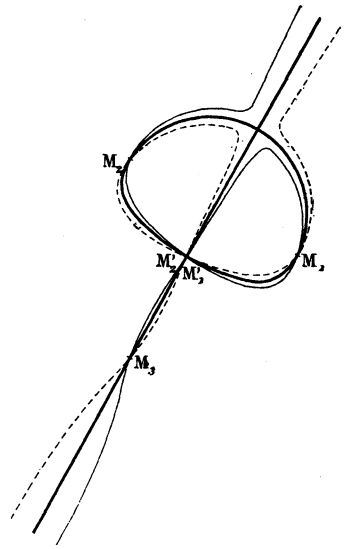
Elle se compose en deux autres

$$\begin{cases} \omega = \frac{\pi}{3} + \text{multiple de } \pi, \\ \rho^3 = \alpha^3(\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega) = 2\alpha^3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right). \end{cases} \tag{92}$$

La première de ces équations représente la droite que déterminent l'origine des coordonnées et l'ombilic de passage; la seconde représente une courbe fermée du quatrième ordre. Cette droite et cette courbe fermée constituent ensemble une ligne halysique de transition tracée en fort sur la *fig.* 3; en attribuant

aux actions parallèles un angle de direction γ très légèrement inférieur à $\frac{\pi}{3}$, on obtiendrait, pour ligne halysique correspondante, la courbe tracée en plein ; pour une valeur de γ très légèrement

Fig. 3.



supérieure à $\frac{\pi}{3}$, on obtiendrait la courbe tracée en pointillé.

En faisant $p = 2$, l'équation (90) deviendrait

$$\rho^2 = \alpha^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)} \tag{93}$$

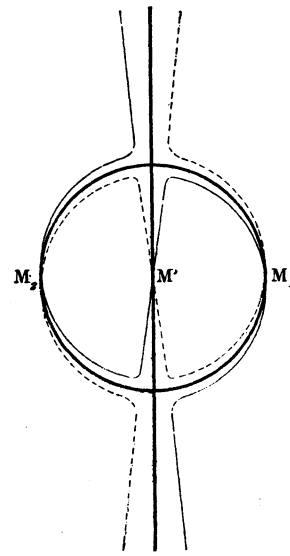
et se décomposerait en deux autres

$$\begin{cases} \omega = \frac{\pi}{2} + \text{multiple de } \pi, \\ \rho^2 = \alpha^2 ; \end{cases} \tag{94}$$

ces dernières représentent, d'une part, l'axe des y et, d'autre part, une circonférence de rayon égal à α ayant son centre à l'origine

des coordonnées. La *fig.* 4 indique en traits forts cette ligne de transition qui passe par les deux ombilics; les tracés plein

Fig. 4.



et pointillé indiquent les lignes halysiques immédiatement voisines.

2. Considérons maintenant une autre forme du polynôme $F(z)$ et posons

$$F(z) = z^p - \alpha^{p-1} z. \tag{95}$$

Les p points racines M se composent de l'origine des coordonnées et des sommets d'un polygone régulier de $(p-1)$ côtés ayant son centre à l'origine, un sommet placé sur la direction positive de l'axe des x et un rayon égal à α.

Le groupe polaire dérivé (M') se compose des sommets d'un polygone régulier de $(p-1)$ côtés, ayant même centre et même orientation que le précédent; le rayon de ce polygone est $\frac{\alpha}{\sqrt[p-1]{p}}$.

L'équation aux ombilics devient

$$pz^{2p-2} + p(p-3)\alpha^{p-1} z^{p-1} + z^{2p-2} = 0; \tag{96}$$

elle se décompose en deux autres, savoir

$$(97)\qquad \begin{cases} z'^{(p-1)} = \alpha^{p-1}\left[-\dfrac{p-3}{2} + \dfrac{p-1}{2p}\sqrt{p(p-4)}\right], \\ z''^{(p-1)} = \alpha^{p-1}\left[-\dfrac{p-3}{2} - \dfrac{p-1}{2p}\sqrt{p(p-4)}\right]. \end{cases}$$

On obtient, par conséquent, deux groupes de $(p-1)$ ombilics ; chacun de ces groupes forme les sommets d'un polygone régulier ayant son centre à l'origine des coordonnées et ses rayons dirigés suivant les apothèmes du polygone des points (M′). Posons, pour simplifier les écritures,

$$(98)\qquad \begin{cases} \dfrac{p-3}{2} - \dfrac{p-1}{2p}\sqrt{p(p-4)} = q', \\ \dfrac{p-3}{2} + \dfrac{p-1}{2p}\sqrt{p(p-4)} = q''. \end{cases}$$

Les équations (97) deviendront

$$(99)\qquad \begin{cases} z'^{(p-1)} = \alpha^{p-1} q' e^{\pi\sqrt{-1}}, \\ z''^{(p-1)} = \alpha^{p-1} q'' e^{\pi\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

les deux polygones dont les ombilics occupent les sommets ont donc respectivement pour rayons $\alpha q'^{\frac{1}{p-1}}$ et $\alpha q''^{\frac{1}{p-1}}$.

En faisant, comme précédemment, usage des coordonnées polaires ρ et ω, on a identiquement

$$(100)\qquad \begin{cases} X = \rho^p \cos p\omega - \rho\alpha^{p-1}\cos\omega, \\ Y = \rho^p \sin p\omega - \rho\alpha^{p-1}\sin\omega, \\ \dfrac{dX}{dx} = p\rho^{p-1}\cos(p-1)\omega - \alpha^{p-1} = \dfrac{dY}{dy}, \\ \dfrac{dY}{dx} = p\rho^{p-1}\sin(p-1)\omega = -\dfrac{dX}{dy}. \end{cases}$$

L'équation (76) des lignes isodynamiques devient, par conséquent,

$$(101)\qquad \frac{p^2\rho^{2p-2} - 2p\alpha^{p-1}\rho^{p-1}\cos(p-1)\omega + \alpha^{2p-2}}{\rho^{2p} - 2\alpha^{p-1}\rho^{p+1}\cos(p-1)\omega + \alpha^{2p-2}\rho^2} = \frac{1}{k^2},$$

et l'équation (77) des trajectoires orthogonales devient

$$(102)\qquad \frac{(p\rho^{2p-1} + \rho\alpha^{2p-2})\sin\omega + \rho^p\alpha^{p-1}[p\sin(p-2)\omega - \sin p\omega]}{(p\rho^{2p-1} + \rho\alpha^{2p-2})\cos\omega - \rho^p\alpha^{p-1}[p\cos(p-2)\omega + \cos p\omega]} = \operatorname{tang}\gamma.$$

Parmi les lignes isodynamiques, il y en a deux qui servent aux transitions; elles passent respectivement par chacun des polygones fermés par les ombilics.

Les valeurs correspondantes de $\frac{1}{k^2}$ sont

$$(103)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{k'^2} = \dfrac{(pq'+1)^2}{\left(q'^{\frac{p}{p-1}} + q'^{\frac{1}{p-1}}\right)^2}\,\dfrac{1}{\alpha^2}, \\ \dfrac{1}{k''^2} = \dfrac{(pq''+1)^2}{\left(q''^{\frac{p}{p-1}} + q''^{\frac{1}{p-1}}\right)^2}\,\dfrac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Si, par exemple, on fait $p = 5$, on trouve

$$(104)\qquad \begin{cases} q' = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}, \\ q'' = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$$

et les équations des deux lignes isodynamiques de transition deviennent

$$(105)\qquad \begin{cases} \dfrac{25\rho^8 - 10\alpha^4\rho^4\cos 4\omega + \alpha^8}{\rho^{10} - 2\alpha^4\rho^6\cos 4\omega + \alpha^8\rho^2} = \dfrac{5(7\sqrt{5}-15)}{\alpha^2(3-\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}}, \\ \dfrac{25\rho^8 - 10\alpha^4\rho^4\cos 4\omega + \alpha^8}{\rho^{10} - 2\alpha^4\rho^6\cos 4\omega + \alpha^8\rho^2} = \dfrac{5(7\sqrt{5}+15)}{\alpha^2(3+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}, \end{cases}$$

Les *fig.* 5 et 5 *bis* indiquent ces deux courbes par des tracés forts. Sur chacune de ces figures les lignes isodynamiques qui précèdent et suivent de très près les lignes de transition sont représentées par des tracés plein et en pointillé.

Le cas particulier où $p = 4$ offre cette singularité que les radicaux s'annulent dans les premiers membres des formules (98), en sorte que l'on a $q' = q''$. Les six ombilics, au lieu de former les sommets de deux triangles équilatéraux distincts, se superposent deux à deux sur les sommets d'un seul triangle dont le rayon est $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$. Ils appartiennent tous à la ligne isodynamique de transition qui correspond à la constante

$$(106)\qquad \frac{1}{k^2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\alpha^2},$$

et dont l'équation est

$$\frac{16\rho^6 - 8\alpha^3\rho^3\cos 3\omega + \alpha^6}{\rho^6 - 2\alpha^3\rho^5\cos 3\omega + \alpha^6\rho^2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\alpha^2}. \tag{107}$$

Fig. 5.

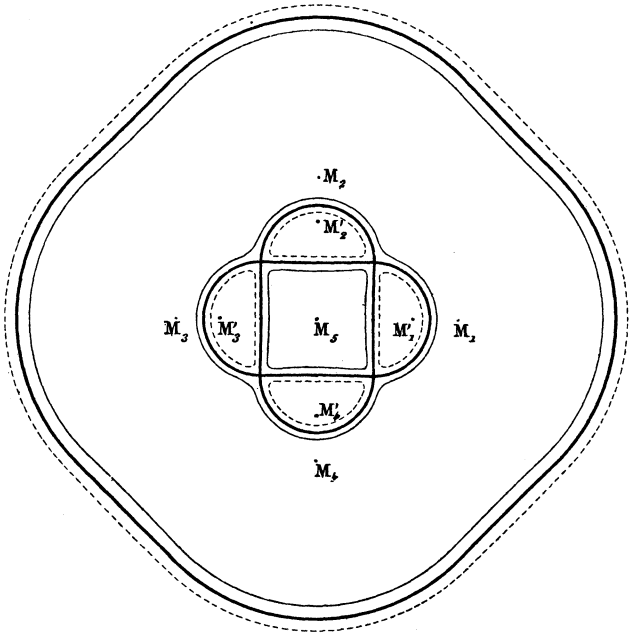
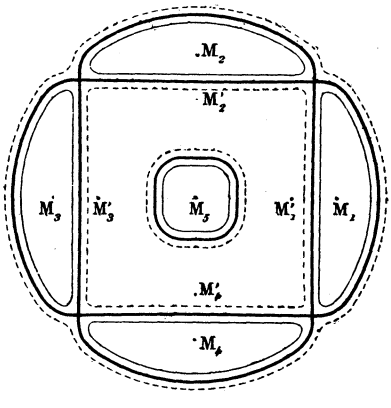


Fig. 5 *bis*.

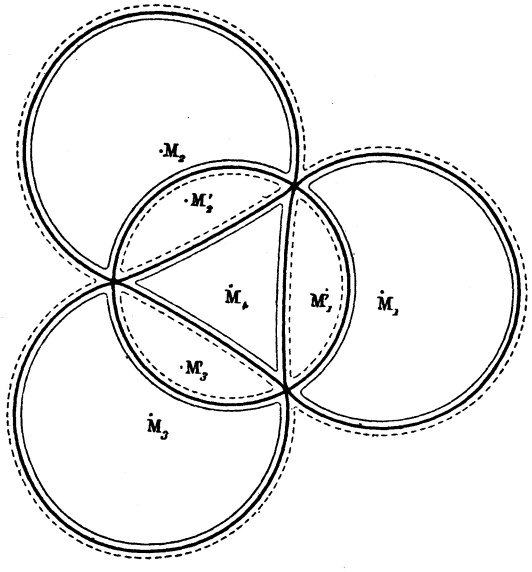


Cette équation se décompose en deux autres

$$(108)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{4}\,\rho^2 - \alpha^2 = 0, \\ \cos 3\omega = \dfrac{4\rho^6 - 6\sqrt[3]{2}\alpha^2\rho^4 - 3\sqrt[3]{4}\,\alpha^4\rho^2 + \alpha^6}{8\alpha^3\rho^3}. \end{cases}$$

La *fig.* 6 indique, en tracé fort, la circonférence et la courbe

Fig. 6.



compagne dont l'ensemble constitue cette ligne isodynamique.

Une autre singularité se produit dans l'hypothèse où $p = 3$; l'équation (96), qui détermine les ombilics, se réduit alors à

$$(109)\qquad 3z^4 + \alpha^4 = 0,$$

en sorte que les quatre ombilics occupent les sommets d'un carré ayant pour rayon $\frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$. Ils appartiennent tous à la ligne isodynamique de transition qui correspond à la constante

$$(110)\qquad \frac{1}{k^2} = 3\sqrt{3},$$

et dont l'équation est

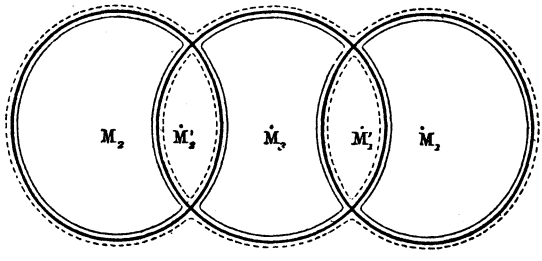
$$\frac{9\rho^4 - 6\alpha^2\rho^2\cos 2\omega + \alpha^4}{\rho^6 - 2\alpha^2\rho^4\cos 2\omega + \alpha^4\rho^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\alpha^2}. \tag{111}$$

Cette équation se décompose en deux autres, savoir

$$\begin{cases} \rho^2\sqrt{3} - \alpha^2 = 0, \\ \cos 2\omega = \dfrac{(\rho^2\sqrt{3} - \alpha^2)^2}{6\alpha^2\rho^2}. \end{cases} \tag{112}$$

La *fig.* 7 représente, en tracé fort, la circonférence et la

Fig. 7.



courbe compagne dont l'ensemble constitue cette ligne isodynamique.

Occupons-nous maintenant des lignes halysiques, du degré $(2p-1)$, qui sont représentées par l'équation (102). On peut donner à cette équation la forme suivante :

$$p\frac{\rho^{p-1}}{\alpha^{p-1}} + \frac{\alpha^{p-1}}{\rho^{p-1}} = \frac{\sin(p\omega - \gamma) - p\sin[(p-2)\omega + \gamma]}{\sin(\omega - \gamma)}. \tag{113}$$

Lorsque p est supérieur à 4, la droite qui passe par l'origine des coordonnées, en faisant avec l'axe des x un angle égal à $\frac{\pi}{p-1}$, rencontre toujours quatre ombilics symétriques deux à deux relativement à l'origine des coordonnées. Dans le cas particulier où $p = 4$, cette droite passe seulement par un ombilic double.

Or, si dans l'équation (113) nous faisons $\gamma = \frac{\pi}{p-1}$, le second

membre de cette équation pourra s'écrire

$$\frac{p\sin(p-2)\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)-\sin p\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)}{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)};$$

il en résulte que l'équation (113) est satisfaite, quel que soit ρ, lorsque l'on fait $\omega=\frac{\pi}{p-1}$; par conséquent, la droite correspondant à cette direction fait partie de la courbe.

Si donc p est égal ou supérieur à 4, la ligne halysique passant par les ombilics situés sur les deux rayons vecteurs opposés dont les angles de direction sont $\frac{\pi}{p-1}$ et $\frac{p\pi}{p-1}$ correspond à une valeur de γ égale à l'un ou à l'autre de ces angles. Cette ligne se compose, d'une part, de la droite formée par les deux rayons vecteurs dont il s'agit et, d'autre part, d'une courbe du degré $(2p-2)$ qui a pour équation

$$(114)\quad p\frac{\rho^{p-1}}{\alpha^{p-1}}+\frac{\alpha^{p-1}}{\rho^{p-1}}=\frac{p\sin(p-2)\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)-\sin p\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)}{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{p-1}\right)},$$

en supposant que, dans le second membre, on supprime le facteur $\sin\left(\omega-\frac{\pi}{p+1}\right)$ commun au numérateur et au dénominateur. Cette courbe admet, dans tous les cas, sa droite compagne comme axe de symétrie; de plus, lorsque p est impair, l'origine des coordonnées est un centre de la courbe.

Faisons, par exemple, $p=5$, l'équation (114) se décomposera en deux autres

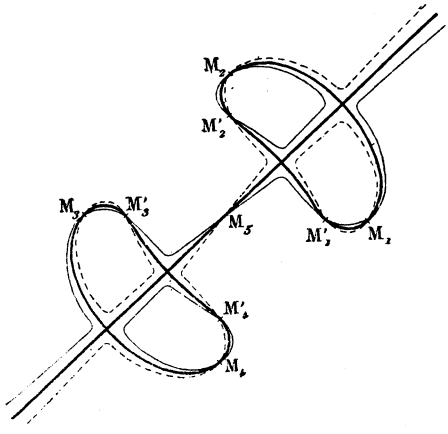
$$(115)\quad \begin{cases} \omega=\frac{\pi}{4}+\text{multiple de }\pi, \\ 5\frac{\rho^4}{\alpha^4}+\frac{\alpha^4}{\rho^4}=5\frac{\sin 3\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\sin 5\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}, \end{cases}$$

On obtient ainsi la droite et la courbe qui sont tracées en fort sur la *fig.* 8. Les tracés minces, l'un plein, l'autre pointillé, indiquent les courbes immédiatement voisines.

Dans le cas particulier où $p = 4$, l'équation (114) donne

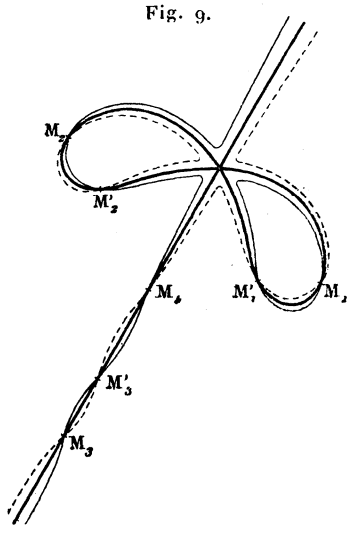
$$(116)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{\pi}{3} + \text{multiple de } \pi, \\ 4\dfrac{\rho^3}{\alpha^3} + \dfrac{\alpha^3}{\rho^3} = 4\cos\left(\omega - \dfrac{\pi}{3}\right)\left[2 - \cos 2\left(\omega - \dfrac{\pi}{3}\right)\right]. \end{cases}$$

Fig. 8.



On obtient ainsi la droite et la courbe qui sont tracées en fort

Fig. 9.



sur la *fig.* 9. Les lignes halysiques immédiatement précédente

et suivante sont respectivement indiquées en pointillé et en plein.

Dans le cas spécial où $p = 3$, l'équation générale des lignes halysiques devient

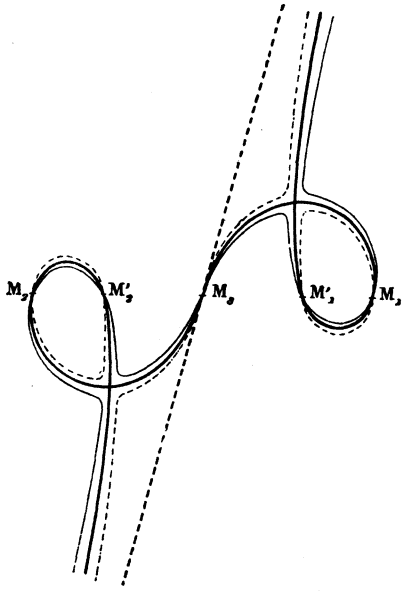
$$3\frac{\rho^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = 4\frac{\sin\gamma\cos^3\omega + \cos\gamma\sin^3\omega}{\sin\gamma\cos\omega - \cos\gamma\sin\omega}. \tag{116}$$

On peut faire passer une de ces courbes par l'ombilic dont les coordonnées sont $\rho = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$ et $\omega = \frac{\pi}{4}$; la valeur correspondante de γ est $\frac{5\pi}{12}$, et l'on obtient l'équation

$$3\frac{\rho^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{\cos\frac{\pi}{12}\cos^3\omega + \sin\frac{\pi}{12}\sin^3\omega}{\cos\frac{\pi}{12}\cos\omega + \sin\frac{\pi}{12}\sin\omega}, \tag{117}$$

qui donne la courbe indiquée en trait fort sur la *fig.* 10. Les

Fig. 10.



courbes immédiatement voisines sont indiquées, l'une en pointillé et l'autre en plein.

Si l'on cherchait la courbe correspondant à $\gamma = 0$, on obtien-

drait une équation décomposable en deux autres, savoir

$$(118)\qquad \begin{cases} \omega = \text{multiple de } \pi, \\ 3\dfrac{\rho^2}{\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{\rho^2} = -4\sin^2\omega; \end{cases}$$

la première de ces équations représente l'axe des x; la seconde n'est vérifiée par aucun point du plan.

Pour la courbe correspondant à $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on obtient le système

$$(119)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{\pi}{2} + \text{multiple de } \pi, \\ 3\dfrac{\rho^2}{\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{\rho^2} = 4\cos^2\omega. \end{cases}$$

La première de ces équations représente l'axe des y; la seconde donne un système de deux courbes fermées, symétriques par rapport aux axes des y et des x, dont l'une passe par les points M_1 et M'_1, et l'autre par M_2 et M'_2.

Roses des vents autour des ombilics. — Lorsqu'une ligne isodynamique ou une ligne halysique passe par un ombilic, elle présente un point nodal où se croisent généralement deux tangentes seulement; les figures précédentes en donnent plusieurs exemples et montrent que ces deux tangentes se coupent à angle droit. Les *fig.* 6 et 9 mettent en relief des ombilics où se croisent trois tangentes; il y a alors division de l'espace en six angles égaux.

Comme les équations des lignes isodynamiques et des lignes halysiques s'obtiennent respectivement en égalant à des constantes arbitraires le module et l'argument d'une même fraction rationnelle, participant aux propriétés générales des fonctions holomorphes, un ombilic commun à une courbe isodynamique et à une courbe halysique est nécessairement un point multiple au même degré pour chacune de ces lignes; les n tangentes de chaque courbe déterminent les rayons d'une rose des vents; les tangentes à l'une des deux courbes sont d'ailleurs bissectrices des angles formés par les tangentes à l'autre courbe.

Variations de l'action algébrique. — Reprenons la formule

générale

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)}, \tag{3}$$

qui détermine les projections P et Q de l'action totale exercée sur le point N dont l'affixe est z.

Pour que cette force acquière une intensité infinie, il faut et il suffit que N soit placé infiniment près d'un point M appartenant au groupe polaire fondamental; dans ce cas, l'action est évidemment dirigée suivant MN.

Laissant de côté ce cas particulier, supposons que l'on modifie infiniment peu la position primitive du point N, de manière que son affixe devienne $(z + \delta z)$. La série de Taylor nous donnera, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F''(z)F(z) - F'^2(z)}{F^2(z)}\,\delta z + \dots. \tag{120}$$

Dans le cas où la position primitive de N est celle d'un point M′ appartenant au groupe polaire dérivé, on a $F'(z) = 0$, et la formule précédente se réduit à

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{F''(z)}{F(z)}\,\delta z + \dots. \tag{121}$$

L'action ne possède alors qu'une intensité infiniment petite; désignons par φ l'angle inconnu que sa direction fait avec la direction positive de l'axe des x. Désignons, d'autre part, par ψ l'angle correspondant à la direction M′N. Nous aurons

$$\varphi + \psi = -\text{argument de } \frac{F''(z)}{F(z)}. \tag{122}$$

Par conséquent, l'angle formé par la direction M′N du déplacement et par la direction de la force possède une bissectrice de direction constante quel que soit M′N. Si l'on renverse le sens de M′N, la direction de la force se trouve également renversée.

Si la position primitive du point N n'est pas prise dans le voisinage d'un point M′, l'action acquiert une intensité finie; son accroissement géométrique correspondant au déplacement δz est

$$P - Q\sqrt{-1} - \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F''(z)F(z) - F'^2(z)}{F^2(z)}\,\delta z + \dots, \tag{123}$$

soit, en général, un infiniment petit du premier ordre. Pour que l'ordre de petitesse devienne supérieur au premier, il faut et il suffit que l'affixe z de la position primitive soit racine de l'équation

$$F''(z)F(z) - F'^2(z) = 0;$$

en d'autres termes, il faut et il suffit que le point N soit primitivement placé sur un ombilic.

Cette observation conduit à une conséquence importante qui peut s'énoncer en ces termes : *L'intensité de l'action exercée sur un point d'une ligne halysique ne peut être maximum ou minimum que si ce point est un ombilic.* Si, en effet, cette intensité est maximum ou minimum, elle ne peut varier que d'un infiniment petit supérieur au premier pour un déplacement infinitésimal du point sur la ligne halysique; la direction de la force reste d'ailleurs rigoureusement invariable; l'action algébrique ne subit donc qu'un accroissement géométrique d'un ordre de petitesse supérieur au premier.

Enchaînement des groupes polaires principaux. — Les considérations précédentes permettent d'étudier les lois générales qui président aux enchaînements des points (M) et (M′) par les lignes halysiques.

Nous savons qu'une ligne halysique possède une branche hyperbolique dont l'asymptote, parallèle aux actions exercées sur les divers points de la courbe, passe par le centre des moyennes distances commun aux deux groupes polaires principaux. Cette branche infinie est généralement accompagnée d'un certain nombre de courbes fermées auxquelles nous donnerons le nom d'*ovales,* sans attribuer à cette dénomination le caractère d'une définition précise de la forme de la courbe. Il est évident, d'ailleurs, que *la tangente en un point* M *est toujours parallèle à l'asymptote de la branche infinie.*

Considérons d'abord la branche infinie, en supposant qu'elle ne passe par aucun ombilic, et faisons-la décrire par un mobile N qui partira de l'infini pour y retourner dans la direction opposée. L'action algébrique présente au départ et à l'arrivée des intensités nulles et de sens contraires; elle change donc de sens au moins

une fois et, dans tous les cas, un nombre impair de fois pendant le parcours.

L'absence d'ombilics sur la trajectoire s'oppose à ce que l'intensité de l'action algébrique puisse devenir maximum, ou minimum; il en résulte : 1° que le premier changement de sens se fait en passant par un point M, l'intensité devenant alors infinie; 2° que si d'autres changements de sens, nécessairement en nombre pair, se produisent à la suite du premier, ils correspondront à une succession alternée de points M′ et de points M, correspondant à des valeurs nulles et infinies de l'intensité.

Considérons maintenant un ovale halysique, en supposant qu'il ne passe par aucun ombilic. Prenant pour point de départ un point quelconque de cette courbe fermée, faisons-la décrire, dans un sens ou dans l'autre, par un mobile N. L'intensité de l'action algébrique variera, pendant le parcours, par voie continue et reviendra finalement à sa valeur initiale. Cette intensité ne peut d'ailleurs, vu l'absence d'ombilics sur la trajectoire, passer par aucun maximum ni par aucun minimum; il en résulte : 1° que le mobile passe au moins par un point M, l'intensité devenant alors infinie; 2° que si l'ovale ne passe par aucun autre point M, elle passe par un point M′ et par un seul, l'intensité correspondante étant nulle; 3° que s'il y a passage par plusieurs points M, il y a aussi passage par un nombre égal de points M′, la succession des points M et M′ sur le parcours étant alternée.

Les observations précédentes conduisent, en dernière analyse, au théorème suivant :

Théorème général. — *Lorsqu'une ligne halysique ne passe par aucun ombilic :*

1° *La branche infinie passe au moins par un point* M *et contient un nombre de points* M′ *inférieur d'une unité à celui des points* M.

2° *Chaque ovale contient autant de points* M′ *que de points* M, *le nombre des points de chaque espèce étant au moins égal à l'unité.*

3° *Il y a toujours un point* M′ *et un seul entre deux points* M *consécutifs, soit sur un arc d'ovale, soit sur un arc de la branche infinie.*

Généralisation du théorème de Rolle. — Si la branche infinie constituait à elle seule la ligne halysique, sans être accompagnée d'ovales, elle passerait par tous les points M et par tous les points M'. Le théorème précédent peut, dans ce cas particulier, s'énoncer comme il suit :

Lorsqu'une ligne halysique, ne passant par aucun ombilic, se compose exclusivement d'une branche hyperbolique, elle enchaîne les deux groupes polaires principaux (M) *et* (M') *de façon qu'il y ait un point* M' *dans chaque intervalle de deux points* M *consécutifs.*

C'est là une généralisation intéressante du théorème de Rolle. Supposons, en effet, que le polynôme $F(z)$ ait toutes ses racines réelles; les points M seront alors tous situés sur l'axe des x et nous pourrons faire correspondre leurs indices à leur ordre naturel de succession, de gauche à droite. La ligne halysique correspondant aux actions parallèles à l'axe des x ne pourra contenir aucun point extérieur à cette droite; elle se réduira donc à l'axe des x. Entre deux points consécutifs M_n et M_{n+1}, on ne peut rencontrer aucun ombilic; si, en effet, un mobile N parcourt l'intervalle M_nM_{n+1}, la somme des actions exercées par les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, qui le repoussent tous vers la droite, va sans cesse en diminuant, tandis que la somme des actions exercées par les points M_{n+1}, M_{n+2}, ..., M_p, qui le repoussent tous vers la gauche, va constamment en croissant; l'action totale, égale à la différence de ces deux sommes ne peut donc devenir ni maxima ni minima. Un raisonnement analogue, plus simple encore, montrerait qu'il ne peut exister aucun ombilic en amont du point M_1, ni en aval du point M_p. L'axe des x constitue donc à lui seul une ligne halysique qui ne passe par aucun ombilic; on peut donc lui appliquer le théorème précédent et l'on obtient ainsi le théorème de Rolle.

Lignes halysiques de transition. — Le théorème général établi pour les lignes halysiques qui ne passent par aucun ombilic s'étend, par voie de continuité, aux lignes halysiques de transition passant par des ombilics; mais il n'en est ainsi qu'à la condition de suivre sur la ligne de transition l'un ou l'autre des parcours indiqués par les lignes halysiques immédiatement précédente et suivante.

C'est ce que mettent en relief les *fig.* 4, 8, 9 et 10. Dans chacune de ces figures la ligne forte peut être parcourue, soit comme l'indique la ligne pleine, soit comme l'indique la ligne pointillée. On contourne ainsi les ombilics sans les franchir en attribuant aux trajectoires des points saillants ou anguleux.

En réalité, les lignes halysiques, étant des courbes algébriques, ne peuvent présenter aucun point anguleux; un ombilic placé sur une ligne de transition ne peut être qu'un point nodal, rendant possibles les parcours continus, sans changements brusques de directions.

Reportons-nous, par exemple, à la *fig.* 10 qui contient 3 points M, 2 points M' et 2 ombilics simples. On peut parcourir la ligne forte en partant de l'infini supérieur, traversant un premier ombilic, décrivant la boucle de droite en passant par M'_1 et par M_1, traversant à nouveau le premier ombilic, passant par M_3, traversant le second ombilic, décrivant la boucle de gauche en passant par M_2 et M'_2, traversant à nouveau le second ombilic et se dirigeant enfin vers l'infini inférieur. L'enchaînement des deux groupes polaires principaux se fait ainsi dans l'ordre suivant :

$$M'_1,\ M_1,\ M_3,\ M_2,\ M'_2$$

qui se dérobe aux lois générales précédemment énoncées. Il y a alors des perturbations occasionnées par les traversées des ombilics qui font passer les actions algébriques par des maxima ou des minima. L'ombilic supérieur produit un maximum entre l'infini supérieur et M', puis, d'autre part, un minimum entre M_1 et M_3; l'ombilic inférieur produit un minimum entre M_3 et M_2; puis, d'autre part, un maximum entre M'_2 et l'infini inférieur.

Reportons-nous maintenant à la *fig.* 9 qui contient 4 points M, 3 points M' et 1 ombilic double. Nous pouvons la regarder comme composée d'une droite et d'une sorte de lemniscate; en parcourant la droite de haut en bas, nous rencontrons

$$M_4,\ M'_3,\ M_3;$$

en parcourant ensuite la lemniscate d'un mouvement continu, avec double traversée de l'ombilic, nous trouvons

$$M_1,\ M'_2,\ M_2,\ M'_1.$$

Notre théorème général est donc applicable d'une part, à la

droite considérée comme branche infinie, et, d'autre part, à la courbe à nœud considérée comme un ovale. Les traversées de l'ombilic double n'exercent aucune influence perturbatrice, parce qu'il ne rend pas l'action algébrique maximum ou minimum.

Les perturbations résultent de la présence d'ombilics simples ou d'un degré impair de multiplicité; elles ne sauraient résulter de la présence d'ombilics multiples à des degrés pairs.

Ombilics-pivots. — L'équation du degré $(2p-1)$

$$F'^2(z) - F(z)F''(z) = 0 \tag{15}$$

qui détermine les ombilics est généralement satisfaite par $(2p-1)$ points tous étrangers aux groupes polaires principaux (M) et (M'). Il en est toujours ainsi lorsque ces groupes ne contiennent aucun point multiple.

Si dans le groupe (M) n points se trouvaient condensés en un seul, la coordonnée ζ de ce point multiple serait $2(n-1)$ fois racine de l'équation (15), en sorte que $2(n-1)$ ombilics se réuniraient sur ce point. On obtiendrait ainsi un ombilic, d'un degré pair de multiplicité, autour duquel pivoteraient toutes les lignes halysiques. Tandis que le passage d'une ligne par un ombilic ordinaire lui donne le caractère d'une *ligne de transition,* il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'un *ombilic-pivot.* Si l'on traverse cet ombilic en parcourant un arc halysique, l'action exercée sur le mobile N ne passe ni par un maximum ni par un minimum, puisque le degré de multiplicité de cet ombilic est pair; il en résulte que le théorème général précédemment énoncé s'étend à toute ligne halysique qui passe par l'ombilic neutre, sans passer par aucun ombilic proprement dit.

Si la coïncidence de n points se produisait dans le groupe (M'), la coordonnée ζ du point de concentration serait $(n-1)$ fois racine de l'équation (15), en sorte que $(n-1)$ ombilics se réuniraient sur ce point. On obtiendrait ainsi un *ombilic-pivot* d'un second genre, ombilic simple ou multiple suivant que n est égal ou supérieur à 2. Si n est impair, le degré de multiplicité de l'ombilic est pair; on peut alors raisonner comme ci-dessus. Si n est pair, la traversée de l'ombilic par le mobile N parcourant un arc halysique rend minimum l'action exercée sur ce mobile, mais ce mini-

mum est égal à zéro; il en résulte que notre théorème général reste encore applicable.

En résumé : *Le théorème général établi par les lignes halysiques qui ne passent par aucun ombilic s'applique également aux lignes halysiques qui passent par des ombilics-pivots sans passer par aucun ombilic ordinaire.*

Reportons-nous, par exemple, à la *fig.* 3 qui contient 3 points M distincts et 2 points M′ réunis donnant naissance à un ombilic-pivot, simple et du second genre, par lequel passent toutes les courbes halysiques. Le parcours de la ligne pleine, en allant de l'infini supérieur à l'infini inférieur, donne l'enchaînement normal :

$$M_2,\quad M'_1,\quad M_1,\quad M'_2,\quad M_3.$$

Le parcours de la ligne pointillée donne analoguement

$$M_1,\quad M'_1,\quad M_2,\quad M'_2,\quad M_3.$$

Aucune perturbation n'est créée par la traversée de l'ombilic neutre.

Polynômes $F(z)$ *à coefficients réels.* — Lorsque tous les coefficients du polynôme $F(z)$ sont réels, les racines de l'équation

$$F(z) = 0$$

sont ou réelles ou imaginaires conjuguées. Dans tous les cas, le groupe polaire principal (M) admet l'axe des x pour axe de symétrie. Il en résulte que cet axe des x fait partie de la ligne halysique correspondant aux actions qui lui sont parallèles. L'équation de cette ligne

$$X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy} = 0 \tag{124}$$

se compose alors en deux autres, savoir

$$y = 0, \tag{125}$$

équation de l'axe des x, et

$$\frac{X}{y}\frac{dX}{dy} + \frac{Y}{y}\frac{dY}{dy} = 0, \tag{126}$$

équation algébrique du degré $2(p-1)$.

Il est à remarquer que, si toutes les racines du polynôme $F(z) = X + Y\sqrt{-1}$ sont réelles, la ligne halysique se compose exclusivement de l'axe des x ; l'équation (126) ne peut donc, dans ce cas, être satisfaite par aucun système de valeurs réelles de x et de y. Nous savons, d'autre part, qu'aucun ombilic ne peut alors être situé sur l'axe des x ; l'équation

$$[F'(z)]^2 = F(z)F''(z) \tag{15}$$

a donc toutes ses racines imaginaires.

Soit, par exemple,

$$F(z) = z^3 + pz + q; \tag{127}$$

nous trouverons

$$\begin{cases} X = x^3 - 3xy^2 + px + q, \\ Y = 3x^2y - y^3 + py, \\ \dfrac{dX}{dy} = -6xy, \\ \dfrac{dY}{dy} = 3x^2 - 3y^2 + p, \end{cases} \tag{128}$$

et l'équation (126) deviendra

$$3y^4 + 2(3x^2 - 2p)y^2 + 3x^4 - 6qx + p^2 = 0, \tag{129}$$

d'où

$$y^2 = -\frac{3x^2 - 2p}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{-12px^2 + 18qx + p^2}. \tag{130}$$

En égalant à zéro le trinôme placé sous le radical, on trouve

$$x = \frac{3q}{4p} \pm \frac{\sqrt{3}}{12p}\sqrt{4p^3 + 27q^2}. \tag{131}$$

Dans l'hypothèse où les trois racines de $F(z)$ sont réelles, on a

$$4p^3 + 27q^2 < 0; \tag{132}$$

le trinôme placé sous le radical a ses racines imaginaires et ne peut prendre que des valeurs négatives ; il est donc impossible de satisfaire à l'équation (129) par aucun système de valeurs réelles de x et de y.

Considérons maintenant l'équation aux ombilics qui correspond

au polynôme $F(z)$. Cette équation est

$$3z^4 - 6qz + p^2 = 0. \tag{133}$$

La dérivée de cette équation, soit

$$2z^3 - q = 0, \tag{134}$$

n'ayant qu'une racine réelle, l'équation (133) ne peut pas en avoir elle-même plus de deux. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces deux racines réelles est que la substitution de $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ à z rende le premier membre négatif; on devrait donc avoir

$$p^2 - \frac{9}{2} q \sqrt[3]{\frac{q}{2}} < 0, \tag{135}$$

soit, sous une autre forme,

$$(4p^3)^2 < (27q^2)^2. \tag{136}$$

Cette inégalité est incompatible avec l'inégalité (132); par conséquent, lorsque le polynôme (127) a ses trois racines réelles, l'équation aux ombilics n'a que des racines imaginaires.

Ombilics doubles. — Les coefficients p et q étant supposés réels, par quelle relation doivent-ils être liés pour que l'équation (133) ait une racine double? Cette relation est

$$(4p^3)^2 = (27q^2)^2; \tag{137}$$

l'ombilic double correspondant est situé sur l'axe des x; son abscisse est $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Si p est négatif, l'équation (137) équivaut à

$$4p^3 + 27q^2 = 0; \tag{138}$$

l'ombilic double ne peut donc être placé que sur un point-racine double du polynôme (127).

Si p est positif, l'équation (137) équivaut à

$$4p^3 = 27q^2; \tag{139}$$

l'ombilic double correspondant est toujours sur l'axe des x; son abscisse $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ est égale à $+\sqrt{\frac{p}{3}}$ si q est positif et à $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ si q est

négatif. Or, en formant l'équation aux ombilics correspondant au polynôme

$$F'(z) = 3z^2 + p, \tag{140}$$

on trouve

$$3z^2 - p = 0; \tag{141}$$

c'est donc sur une des deux racines de cette équation que vient se placer l'ombilic double.

En résumé : *Si un polynôme du troisième degré à coefficients réels admet un ombilic double, cet ombilic est toujours situé sur l'axe des x, et coïncide soit avec un point racine double du polynôme considéré, soit avec un ombilic simple du polynôme dérivé.*

Faisons, par exemple, $q = 2$; considérons le polynôme

$$F(z) = z^3 + pz + 2 \tag{142}$$

et faisons croître p depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Au début, les trois racines du polynôme sont réelles, ainsi que celles du polynôme dérivé; on trouve sur l'axe des x la disposition

$$M_1, \quad M'_1, \quad M_2, \quad M'_2, \quad M_3;$$

les quatre ombilics sont extérieurs à l'axe des x; cet axe constitue à lui seul la ligne halysique correspondant à sa direction.

Les choses restent ainsi jusqu'à ce que p devienne égal à -3; à ce moment les deux points M_2 et M_3 se réunissent au point M' sur lequel viennent également se réunir deux ombilics μ et ν.

Lorsque p, toujours négatif, diminue encore en valeur absolue, les deux points racines M_2 et M_3 deviennent extérieurs à l'axe des x, tandis que les deux ombilics μ et ν se meuvent sur cet axe, l'un à gauche et l'autre à droite du point M'_2; la ligne halysique correspondant à l'axe des x se compose et de cet axe sur lequel on trouve la disposition

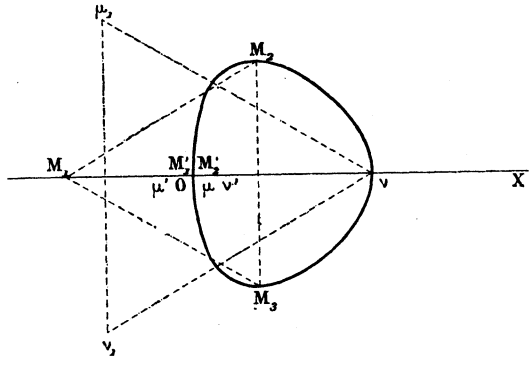
$$M_1, \quad M'_1, \quad \mu, \quad M'_2, \quad \nu,$$

et d'un ovale passant par les points

$$\mu, \quad M_2, \quad \nu, \quad M_3.$$

Pour $p = 0$, les dispositions générales restent les mêmes, mais il est à noter que les trois points M'_1, μ, M'_2 viennent se réunir sur l'origine des coordonnées; là viennent se réunir également les deux ombilics μ' et ν' du polynôme dérivé $F'(z)$, lesquels étaient précédemment extérieurs à l'axe des x; à noter aussi que l'ovale présente, à l'origine des coordonnées, quatre points communs avec sa tangente (*fig.* 11).

Fig. 11.



Lorsque p devient positif et continue à croître, la forme de l'ovale tend vers celle d'un 8. On trouve sur l'axe des x

$$M_1, \quad \mu', \quad \mu, \quad \nu', \quad \nu,$$

et sur l'ovale

$$\mu, \quad M'_1, \quad M_2, \quad \nu, \quad M_3, \quad M'_2.$$

Les choses restent ainsi (à cela près qu'une interversion des points M_1 et μ' ne tarde pas à se produire), jusqu'à ce que p devienne égal à 3. A ce moment, les deux ombilics μ et ν se réunissent sur ν', de manière à former un ombilic double; nous obtenons ainsi la *fig.* 12.

Lorsque p continue à croître jusqu'à l'infini, les deux ombilics μ et ν sont toujours extérieurs à l'axe des x. La ligne halysique se compose de trois parties, savoir l'axe des x contenant

$$M_1, \quad \mu', \quad \nu',$$

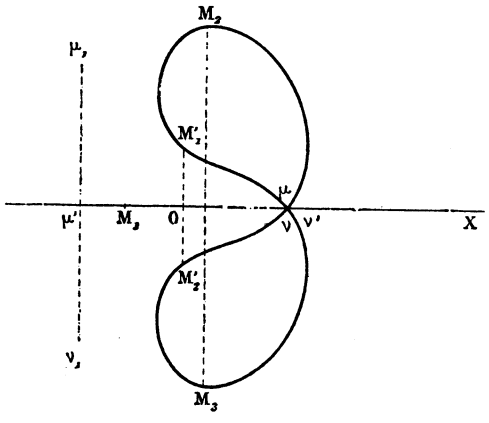
un ovale supérieur contenant

$$M'_1, \quad M_2,$$

et un ovale inférieur, symétrique du précédent, contenant

$$M'_2,\quad M_3.$$

Fig. 12.



On voit, par les *fig.* 11 et 12, que les modes d'influence d'un ombilic double sont différents suivant qu'il se produit soit sur une racine, soit sur un ombilic du polynôme dérivé $F'(z)$. Dans le premier cas, l'ombilic double est un *point isolé* de la ligne halysique, compagne de l'axe des x ; dans le second cas, l'ombilic double est un *point nodal* de cette ligne.

Pour un polynôme $F(z)$, à coefficients réels, d'un degré quelconque, les valeurs de z qui peuvent correspondre à des ombilics doubles doivent être racines communes aux deux équations

$$\text{(143)}\qquad \begin{cases} F'^2 - FF'' = 0, \\ F'F'' - FF''' = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut, suivant les cas, à l'un des suivants :

$$\text{(144)}\qquad F = F' = 0,$$

$$\text{(145)}\qquad F' = F'' = F''' = 0.$$

$$\text{(146)}\qquad \frac{F'}{F} = \frac{F''}{F'} = \frac{F'''}{F''}.$$

Il en résulte qu'un ombilic double peut se placer :

1° Soit sur un point racine double de $F(z)$,

2° Soit sur un point racine triple de $F'(z)$,

3° Soit sur un ombilic simple de $F'(z)$.

Posons

$$F(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots. \tag{147}$$

Nous aurons identiquement

$$\left\{\begin{array}{rl} X = & A + Bx + C(x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{1}{y}\ Y = & B + 2Cx + D(3x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{1}{y}\frac{dX}{dy} = & -2C - 6Dx - 4E(3x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{dY}{dy} = & B + 2Cx + 3D(x^2 - y^2) + \dots. \end{array}\right. \tag{148}$$

L'équation de la courbe halysique sera, par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|} B^2 & +2BC & x + 2C^2 & x^2 + 2C^2 \\ -2AC & -6AD & -12AE & +4AE \\ & & & -4BD \end{array}\right| \; y^2 + \dots = 0. \tag{149}$$

S'il existe un ombilic double sur l'axe des x, nous pourrons prendre sur ce point l'origine des coordonnées; nous aurons alors

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 = 2AC, \\ BC = 3AD. \end{array}\right. \tag{150}$$

1° Si l'ombilic double est une racine double du polynôme $F(z)$, on a

$$A = B = 0, \tag{151}$$

en sorte que l'équation (149) se réduit à

$$2C^2(x^2 + y^2) + \dots = 0; \tag{152}$$

l'ombilic double est donc un *point isolé* de la courbe halysique.

2° Si l'ombilic double est une racine triple du polynôme dérivé $F'(z)$, on a

$$B = C = D = 0, \tag{153}$$

en sorte que l'équation (152) se réduit à

$$4AE(y^2 - 3x^2) + \dots = 0. \tag{154}$$

l'ombilic double est, par conséquent, un *point nodal* de la courbe halysique.

3° Enfin, si l'ombilic double considéré est un ombilic simple du polynôme dérivé $F'(z)$, on aura, d'après les relations (150),

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2}\frac{B}{C} = \frac{1}{3}\frac{C}{D}, \tag{155}$$

et l'équation (149) deviendra

$$\left(4AE - \frac{2}{3}C^2\right)(y^2 - 3x^2) + \ldots = 0 : \tag{156}$$

l'ombilic double sera donc encore, dans ce cas, un *point nodal* de la courbe halysique.

En résumé : *Lorsqu'un polynôme* $F(z)$ *à coefficients réels donne naissance à un ombilic double placé sur l'axe des* x, *cet ombilic coïncide nécessairement soit avec un point-racine double du polynôme, soit avec un point-racine triple du polynôme dérivé, soit avec un ombilic simple du polynôme dérivé. Cet ombilic double est, dans le premier cas, un* POINT ISOLÉ *et, dans les deux derniers cas, un* POINT NODAL *de la courbe halysique, compagne de l'axe des* x.

Formules relatives au potentiel. — Reprenons la formule

$$F(z) = X + Y\sqrt{-1} = Re^{U\sqrt{-1}}, \tag{4}$$

et désignons par

$$\Phi = \log \text{nép.}\, R + \text{const.} \tag{157}$$

le potentiel de l'action algébrique du groupe des points-racines (M) sur le point quelconque N.

Nous aurons

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dx} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dR}{dx}, \\ \dfrac{d\Phi}{dy} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dR}{dy} \end{cases} \tag{158}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi}{dx^2} = -\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{dR}{dx}\right)^2 + \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2R}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2\Phi}{dy^2} = -\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{dR}{dy}\right)^2 + \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2R}{dy^2}. \end{cases} \tag{159}$$

Ces dernières formules donnent

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}=-\frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)^2+\left(\frac{dR}{dy}\right)^2\right]+\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}\right). \tag{160}$$

La relation (24)

$$R^2=X^2+Y^2 \tag{24}$$

donne, d'autre part,

$$\begin{cases} R\dfrac{dR}{dx}=X\dfrac{dX}{dx}+Y\dfrac{dY}{dx}, \\ R\dfrac{dR}{dy}=X\dfrac{dX}{dy}+Y\dfrac{dY}{dy}; \end{cases} \tag{161}$$

d'où, en tenant compte des formules (26)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx}&=\frac{dY}{dy}, \\ \frac{dX}{dy}&=-\frac{dY}{dx}, \end{aligned}$$

on déduit

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2+\left(\frac{dR}{dy}\right)^2=\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2. \tag{162}$$

En prenant les dérivées par rapport à x et par rapport à y des formules (161), on trouve

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dR}{dx}\right)^2+R\dfrac{d^2R}{dx^2}=\left(\dfrac{dX}{dx}\right)^2+X\dfrac{d^2X}{dx^2}+\left(\dfrac{dY}{dx}\right)^2+Y\dfrac{d^2Y}{dx^2}, \\ \left(\dfrac{dR}{dy}\right)^2+R\dfrac{d^2R}{dy^2}=\left(\dfrac{dX}{dy}\right)^2+X\dfrac{d^2X}{dy^2}+\left(\dfrac{dY}{dy}\right)^2+Y\dfrac{d^2Y}{dx^2}. \end{cases} \tag{163}$$

On déduit, d'ailleurs, des relations (26)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2}=\dfrac{d^2Y}{dx\,dy}=-\dfrac{d^2X}{dy^2}, \\ \dfrac{d^2Y}{dx^2}=\dfrac{d^2X}{dx\,dy}=-\dfrac{d^2Y}{dy^2}. \end{cases} \tag{164}$$

Les formules (162), (163) et (164) donnent

$$R\left(\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}\right)=\left(\frac{dX}{dx}\right)^2+\left(\frac{dY}{dy}\right)^2. \tag{165}$$

Les équations (160), (162) et (165) donnent enfin

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}=0. \tag{166}$$

Assimilation des points-racines à des électrodes. — Cette propriété du potentiel Φ conduit à une curieuse conséquence.

Assimilons les points-racines M à des électrodes (positives, par exemple), déversant toutes la même quantité d'électricité sur le plan considéré comme une plaque conductrice indéfinie. Le potentiel électrique en un point quelconque N de la plaque sera une fonction linéaire du potentiel analytique Φ ci-dessus défini. Les *courbes équipotentielles* s'identifieront, par conséquent, avec les *courbes de niveau* dont l'équation générale, algébrique et du degré $2p$, est

$$X^2 + Y^2 = \text{const.} \tag{9}$$

Ces courbes sont, comme nous l'avons vu précédemment, des cassinoïdes ayant pour foyers les points-racines M. On pourrait tracer ces cassinoïdes sur la plaque conductrice en employant, comme l'a fait M. Kirchhoff, deux fils reliés à un galvanomètre, la pointe de l'un étant maintenue fixe sur un point de la plaque, tandis que l'on déplacerait la pointe de l'autre, de manière à n'avoir pas de déviation.

Les points nodaux que peuvent présenter certaines cassinoïdes sont déterminés par le système d'équations simultanées

$$\begin{cases} X\dfrac{dX}{dx} + Y\dfrac{dY}{dx} = 0, \\ X\dfrac{dX}{dy} + Y\dfrac{dY}{dy} = 0, \end{cases} \tag{167}$$

auxquelles, en vertu des équations (26), on peut substituer le suivant :

$$\begin{cases} X\dfrac{dX}{dx} + Y\dfrac{dY}{dx} = 0, \\ Y\dfrac{dX}{dx} - X\dfrac{dY}{dx} = 0. \end{cases} \tag{168}$$

Multiplions la seconde équation par $\sqrt{-1}$ et retranchons-la de la première; nous trouverons

$$(X - Y\sqrt{-1})\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\sqrt{-1}\right) = 0, \tag{169}$$

équation qui équivaut au système (167). Elle se décompose

d'ailleurs en deux autres, savoir

$$X - Y\sqrt{-1} = 0, \tag{170}$$

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\sqrt{-1} = 0. \tag{171}$$

L'équation (170) équivaut à

$$F(z) = 0$$

et représente le groupe (M); ces points-racines, considérés comme des cercles de rayon infiniment petits, constituent la cassinoïde particulière dont l'équation est

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

L'équation (171) équivaut à

$$F'(z) = 0$$

et représente le groupe (M'). Par conséquent : *Les points nodaux des courbes équipotentielles coincident avec les points-racines de la dérivée du polynôme* $F(z)$.

Il résulte de cette observation que les tracés des lignes équipotentielles peuvent servir à la détermination des points-racines du polynôme dérivé $F'(z)$ lorsque l'on connaît les points-racines du polynôme primitif $F(z)$.

Il est à remarquer que la cassinoïde représentée par l'équation générale

$$X^2 + Y^2 = \text{const.} \tag{9}$$

tend rapidement, lorsque l'on fait croître la constante, vers une grande circonférence ayant son centre au centre des moyennes distances des points-racines M. Si l'on décrit autour de ce point comme centre une circonférence d'un rayon suffisant pour circonscrire tous les points M, on pourra limiter la plaque indéfinie à une autre circonférence de même centre, mais d'un rayon beaucoup plus grand, qui pourra, sans erreur sensible, être regardée comme une courbe équipotentielle.

Les électrodes positives étant données par les extrémités de fils conducteurs aboutissant au point M, on prendra pour électrode négative un anneau métallique, d'un rayon égal à celui de la plaque conductrice et se juxtaposant à son contour. Comme tous les

points M′ doivent être à l'intérieur de la petite circonférence qui entoure le groupe (M), il suffira, pour la recherche de ces points M′, de tracer les arcs des courbes équipotentielles qui se trouvent compris dans cette circonférence.

Si donc on connaît les points-racines d'un polynôme $F(z)$, l'emploi des courants voltaïques permet d'obtenir sans calculs les points racines du polynôme dérivé $F'(z)$.

(Février 1888.)