BULLETIN DE LA S. M. F.

ISSALY

Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 19-81

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__19_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites; par M. l'abbé Issaly.

(Séance du 5 novembre 1887.)

Le but principal de ce Mémoire est de montrer comment on peut, par une voie nouvelle et très simple, faire dériver les propriétés les plus importantes des surfaces et des lignes que l'on peut tracer sur elles de celles dont jouissent spécialement les systèmes généraux rectilignes doublement indéterminés ou congruences.

La méthode adoptée nous permettra incidemment de mettre en lumière ce fait remarquable que, dans tout calcul relatif au sujet qui va nous occuper, on peut et l'on doit faire abstraction des paramètres différentiels E, F, G de Gauss.

Et en effet, outre que notre étude sera, par elle seule, une démonstration permanente de cette assertion, plusieurs exemples que l'on trouvera indiqués dans nos derniers paragraphes feront voir clairement que, si ces paramètres laissent aux formules une simplicité apparente, ils les surchargent, en réalité, de facteurs inutiles qui disparaissent d'eux-mêmes lorsqu'on a soin de donner à ces formules toute la simplicité qu'elles comportent.

Pour atteindre ce résultat, nous prendrons, dès le début, comme lignes coordonnées, une double série de courbes fonctions du temps, variant d'une façon continue de forme et de position, et ne se coupant entre elles qu'aux infiniment petits du second ordre près.

On verra que, malgré cette condition, de tels réseaux peuvent, par le simple jeu des coordonnées, c'est-à-dire par la variation arbitraire du rapport de leurs arcs infinitésimaux, engendrer des lignes ou trajectoires de toute nature.

Après avoir établi trois catégories de formules fondamentales d'une grande généralité, nous étudierons en détail les courbures de divers ordres de ces trajectoires.

C'est en s'annulant que les plus simples de ces courbures produisent les lignes si remarquables que nous qualifions, par analogie, de lignes *géodésiques,* lignes *asymptotiques,* etc., en atta-

chant toutefois à ces dénominations un sens plus large que s'il s'agissait des lignes de même nom situées sur une surface.

Après une exposition sommaire des principales propriétés de ces lignes, nous abordons celles que l'on connaît déjà sur les pinceaux ou congruences élémentaires de droites, en les faisant dépendre, pour la plupart, de théorèmes généraux qui ne paraissent pas avoir été encore signalés.

C'est là surtout que nos coordonnées obliques, dont l'introduction peut ne sembler tout d'abord qu'une complication stérile, nous permettent de pénétrer avec succès dans l'étude si intéressante des foyers et des plans focaux.

Après Malus, Sturm, Dupin, Hamilton, A. Serret, MM. Bertrand, O. Bonnet, Mannheim et autres géomètres célèbres qui ont enrichi la Science de leurs découvertes en cette matière, nous citerons spécialement la première Théorie générale des congruences de M. E. Kummer, dont la traduction par M. Dewulf fut presque aussitôt insérée (1862) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

On remarquera avec quelle netteté, absolument exempte de tout élément parasite, les belles recherches de l'habile géomètre allemand se déduisent de nos propres formules.

Quant aux travaux des Plücker, Klein, Lie, que M. Kœnigs a si bien résumés dans la Thèse qu'il a présentée à la Sorbonne en 1882, nous ne saurions les mentionner ici, attendu que le point de vue auquel ces auteurs se sont placés doit nous rester étranger, la géométrie euclidienne et l'espace à trois dimensions devant suffire pleinement à toutes nos investigations.

I.

Préliminaires.

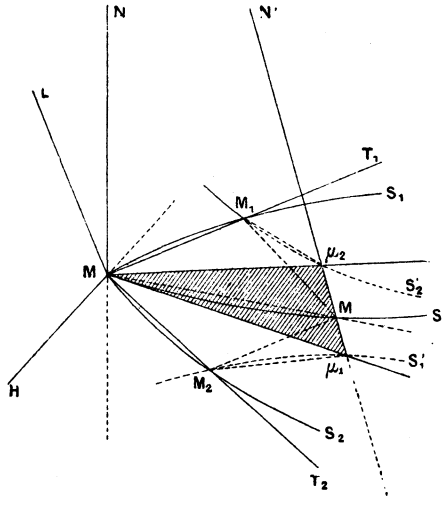
1. Les coordonnées d'un point quelconque M d'une surface donnée $F(x, y, z) = 0$ pouvant être considérées comme des fonctions de deux paramètres variables u_1 et u_2, la surface elle-même, on le sait, peut être regardée comme engendrée par un double système de courbes S_1 et S_2 se coupant en chacun de ses points.

Soient $MM_1 = ds_1$ et $MM_2 = ds_2$ deux arcs infiniment petits

de ces lignes; MT_1, MT_2 leurs tangentes respectives en M; le plan T_1MT_2 sera, en ce dernier point, le plan tangent à la surface F.

En devenant S'_1 et S'_2, après leur variation, les génératrices S_1 et S_2 se coupent toujours rigoureusement en un nouveau point M'; mais, si l'on conçoit que la surface éprouve, tout autour du point M, une déformation infiniment petite suivant une loi

Fig. 1.



donnée, puis que l'on prenne S'_1, par exemple, sur la surface primitive, et S'_2 sur la surface déformée, ces courbes n'auront pas, en général, de point commun.

Désignons par μ_1 et μ_2 le point M' d'intersection ainsi dédoublé. La ligne de jonction $\mu_1\mu_2$, sans être, dans le cas général, normale à aucune des deux surfaces, aura cependant une direction bien déterminée. Nous dirons qu'elle est une *pseudo-normale,* en faisant voir toutefois qu'elle n'est autre que la *verticale* au plan *horizontal* T_1MT_2 dans sa position infiniment voisine.

Rien n'empêche, du reste, pour le calcul, de substituer aux points μ_1 et μ_2 le pied M' de cette verticale, puisque ces deux premiers points sont généralement distants d'un infiniment petit

du second ordre du plan horizontal primitif. Entre autres avantages, nous y trouverons celui de pouvoir remplacer par l'aire du quadrilatère infinitésimal fermé $MM_1M'M_2$ la somme des aires des deux triangles *non contigus* $MM_1\mu_2$ et $MM_2\mu_1$, éléments de ce que, par un néologisme un peu hardi, on pourrait, ce nous semble, qualifier de *pseudo-surface*.

Quoi qu'il en soit, il importe d'observer que notre manière nouvelle d'envisager les congruences de droites sera plus générale que la méthode ordinaire, puisque, en nous donnant une condition de plus, nous serons conduits aux surfaces proprement dites et non pas seulement aux surfaces réglées.

2. *Définitions et notations.* — Désignons par (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) les cosinus directeurs de MT_1 et MT_2 par rapport à trois axes rectangulaires donnés. Soient $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ les premières courbures des lignes S_1 et S_2 au point M, courbures que nous supposerons portées, comme les rayons r_1 et r_2 eux-mêmes, sur les normales principales correspondantes et qui, par conséquent, seront respectivement situées dans les plans normaux perpendiculaires aux tangentes MT_1 et MT_2. Soient enfin $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les angles de contingence, on aura les relations bien connues

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\sigma_1}{ds_1}, \qquad \frac{\cos(r_1, x)}{r_1} = \frac{da_1}{ds_1},$$
$$\frac{1}{r_2} = \frac{d\sigma_2}{ds_2}, \qquad \frac{\cos(r_2, x)}{r_2} = \frac{da_2}{ds_2}.$$

Si maintenant on pose, par analogie,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\varsigma_1}{ds_1}, \qquad \frac{\cos(\rho_1, x)}{\rho_1} = \frac{da_2}{ds_1},$$
$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{d\varsigma_2}{ds_2}, \qquad \frac{\cos(\rho_2, x)}{\rho_2} = \frac{da_1}{ds_2},$$

les nouvelles courbures $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ qui empruntent, pour leur formation, l'arc à une série et l'angle de contingence à l'autre, recevront convenablement le nom de courbures *corrélatives* ou *alternantes* des lignes associées S_1, S_2, que nous considérerons comme lignes coordonnées.

On voit, en effet, que $\frac{1}{\rho_1}$ est le rapport à l'arc ds_1 de l'angle de contingence $d\varsigma_1$ que font entre elles les tangentes menées aux courbes S_2 et S'_2 aux points infiniment voisins M et M_1 situés sur S_1, la seconde tangente pouvant, si l'on veut, être transportée parallèlement à elle-même en M; d'autre part, $\frac{1}{\rho_2}$ est le rapport à l'arc ds_2 de l'angle $d\varsigma_2$ que font les tangentes aux courbes S_1 et S'_1 aux points M et M_2 situés sur S_2.

Mais, disons-le de suite, il est bien plus avantageux d'introduire dans les formules les *projections* de ces courbures sur le plan horizontal et sur la verticale ou, autrement dit, leurs *composantes* horizontales et verticales.

Pour distinguer ces composantes, nous conviendrons, dès à présent, d'affecter les premières d'un seul accent, et les secondes de deux.

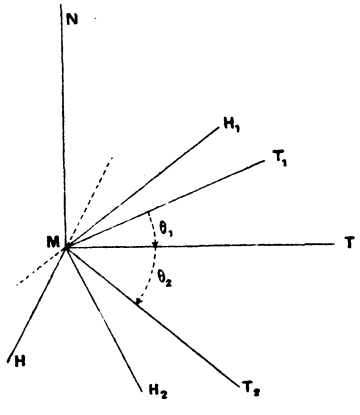
II.

Relations de première espèce.

(Valeurs finies.)

3. Prenons MT_1, MT_2 (*fig.* 2) et MN pour axes des X, des Y et

Fig. 2.



des Z, et appelons θ l'angle T_1MT_2. Soit MT une semi-droite quelconque située dans le plan des XY, et faisant avec MX et MY des angles respectivement égaux à θ_1 et à θ_2.

Soit aussi MH la perpendiculaire élevée *dans le sens direct*, sur MT dans ce même plan T_1MT_2; on aura pour coordonnées du point pris à l'unité de distance sur chacune de ces directions

$$\frac{X'}{\sin\theta_2} = \frac{Y'}{\sin\theta_1} = \frac{1}{\sin\theta},$$
$$\frac{X''}{-\cos\theta_2} = \frac{Y''}{\cos\theta_1} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Cela posé, si l'on rapporte ces deux points aux axes rectangulaires Mx, My, Mz de même origine, dont il a été question précédemment, et qu'on représente par (a, b, c), (α, β, γ) les cosinus directeurs de MT et de MH sur lesquels ils sont situés, on aura d'abord les formules de transformation

$$x = a_1X + a_2Y,$$
$$y = b_1X + b_2Y,$$
$$z = c_1X + c_2Y$$

et, par suite,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{a_1\sin\theta_2 + a_2\sin\theta_1} = \dfrac{b}{b_1\sin\theta_2 + b_2\sin\theta_1} = \dfrac{c}{c_1\sin\theta_2 + c_2\sin\theta_1} = \dfrac{1}{\sin\theta}, \\ \dfrac{\alpha}{-a_1\cos\theta_2 + a_2\cos\theta_1} = \dfrac{\beta}{-b_1\cos\theta_2 + b_2\cos\theta_1} = \dfrac{\gamma}{-c_1\cos\theta_2 + c_2\cos\theta_1} = \dfrac{1}{\sin\theta}. \end{cases}$$

4. *Cas particuliers.* — 1° Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, il vient simplement

$$(2)\quad \begin{cases} a = a_1\cos\theta_1 + a_2\sin\theta_1, \\ \alpha = -a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1, \end{cases}$$

et ainsi des autres.

2° Si l'on pose $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta$, MH coïncidera avec MH_2, et la seconde des équations (1) nous donnera pour les cosinus de cette dernière direction

$$(3)\quad \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1\cos\theta} = \frac{\beta_2}{b_2 - b_1\cos\theta} = \frac{\gamma_2}{c_2 - c_1\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

3° On obtiendra de même les cosinus $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de MH_1 en posant $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = 0$. Toutefois, pour que les deux trièdres MNT_1T_2 et MNH_1H_2 soient supplémentaires, et aussi pour que nos formules ultérieures y gagnent en symétrie, nous prendrons pour MH_1 le sens opposé à celui que la construction de MH lui assignerait, et nous aurons ainsi, pour les cosinus de ce prolon-

gement,

$$(4)\qquad \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2\cos\theta} = \frac{\beta_1}{b_1 - b_2\cos\theta} = \frac{\gamma_1}{c_1 - c_2\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Toutes les formules que nous venons d'établir, que θ soit aigu ou obtus, et que $\theta = \theta_1 + \theta_2$ soit une somme arithmétique ou algébrique, seront générales, pourvu que l'angle θ_2 soit consécutif de θ_1, c'est-à-dire, que son premier côté soit le second côté de l'angle θ_1.

III.

Relations de deuxième espèce.

(Dérivées partielles.)

5. 1° *Dérivées partielles relatives aux lignes coordonnées* S_1 *et* S_2. — L'angle T_1MT_2 ayant été déjà désigné par θ, on a d'abord

$$\cos\theta = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Différentions par rapport à s_1 et à s_2 qui sont les arcs des courbes S_1 et S_2 en prenant ces arcs comme variables indépendantes; nous aurons

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_1} = \sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial s_1} + \sum a_1\frac{\partial a_2}{\partial s_1},$$
$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_2} = \sum a_2\frac{\partial a_2}{\partial s_1} + \sum a_1\frac{\partial a_2}{\partial s_2}.$$

Or, si l'on désigne par (a_3, b_3, c_3) les cosinus directeurs de MN, par (l_1, m_1, n_1), ..., $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, ... ceux des rayons de courbure absolus et corrélatifs des lignes S_1 et S_2, le théorème des projections joint aux formules (3) et (4) nous permet d'écrire (n° 2)

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial s_1} = \dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{\alpha_2}{r'_1} + \dfrac{a_3}{r''_1} = -\dfrac{a_1}{r'_1}\cot\theta + \dfrac{a_2}{r'_1}\operatorname{cosec}\theta + \dfrac{a_3}{r''_1}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial s_1} = \dfrac{\lambda_1}{\rho_1} = \dfrac{\alpha_1}{\rho'_1} + \dfrac{a_3}{\rho''_1} = \dfrac{a_1}{\rho'_1}\operatorname{cosec}\theta - \dfrac{a_2}{\rho'_1}\cot\theta + \dfrac{a_3}{\rho''_1}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial s_2} = \dfrac{l_2}{r_2} = \dfrac{\alpha_1}{r'_2} + \dfrac{a_3}{r''_2} = \dfrac{a_1}{r'_2}\operatorname{cosec}\theta - \dfrac{a_2}{r'_2}\cot\theta + \dfrac{a_3}{r''_2}, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial s_2} = \dfrac{\lambda_2}{\rho_2} = \dfrac{\alpha_2}{\rho'_2} + \dfrac{a_3}{\rho''_2} = -\dfrac{a_1}{\rho'_2}\cot\theta + \dfrac{a_2}{\rho'_2}\operatorname{cosec}\theta + \dfrac{a_3}{\rho''}. \end{cases}$$

Substituant, on obtient les identités

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{\partial\theta}{\partial s_1} = 0, \\ \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{\rho'_2} + \frac{\partial\theta}{\partial s_2} = 0, \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les angles de contingence,

$$(6')\qquad \begin{cases} d\sigma'_1 + d\zeta'_1 + d_1\theta = 0, \\ d\sigma'_2 + d\zeta'_2 + d_2\theta = 0, \end{cases}$$

relations importantes que l'abbé Aoust a signalées le premier, bien que leur haute généralité lui ait complètement échappé.

Il est à remarquer que du système (5) on tire pour les composantes verticales ces valeurs simples

$$\frac{1}{r''_1} = \sum a_3 \frac{\partial a_1}{\partial s_1} = -\sum a_1 \frac{\partial a_3}{\partial s_1},$$
$$\frac{1}{\rho''_1} = \sum a_3 \frac{\partial a_2}{\partial s_1} = -\sum a_2 \frac{\partial a_3}{\partial s_1},$$
$$\frac{1}{r''_2} = \sum a_3 \frac{\partial a_2}{\partial s_2} = -\sum a_2 \frac{\partial a_3}{\partial s_2},$$
$$\frac{1}{\rho''_2} = \sum a_3 \frac{\partial a_1}{\partial s_2} = -\sum a_1 \frac{\partial a_3}{\partial s_2}.$$

2° *Dérivées partielles relatives aux trajectoires orthogonales des lignes coordonnées.* — L'angle H_1MH_2 de ces trajectoires étant égal à $\pi - \theta$, on a

$$-\cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Différentiant, par rapport à s_1 et à s_2, on trouve

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_1} = -\frac{a_1}{r'_1} + \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right), \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_1} = -\frac{a_2}{\rho'_1} + \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r''_1} - \frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right), \\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_2} = -\frac{a_2}{r'_2} + \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right), \\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_2} = -\frac{a_1}{\rho'_2} + \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r''_2} - \frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right). \end{cases}$$

On en déduit, pour les composantes horizontales,

$$\frac{1}{r'_1} = -\sum a_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} = \sum \alpha_2 \frac{\partial a_1}{\partial s_1},$$
$$\frac{1}{\rho'_1} = -\sum a_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} = \sum \alpha_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_1},$$
$$\frac{1}{r'_2} = -\sum a_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} = \sum \alpha_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_2},$$
$$\frac{1}{\rho'_2} = -\sum a_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} = \sum \alpha_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_2}.$$

Il résulte de nos formules que toute fonction des courbures horizontales et verticales de S_1 et S_2, et notamment celles-ci

$$\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}, \quad \frac{1}{r'_1 r'_2} - \frac{1}{\rho'_1 \rho'_2},$$

peut s'exprimer au moyen des cosinus (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) et des variations de ces cosinus.

3° *Dérivée partielle relative à la verticale* MN. — Nous partirons de ces formules connues

$$\frac{a_3}{b_1 c_2 - c_1 b_2} = \frac{b_3}{c_1 a_2 - a_1 c_2} = \frac{c_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

En différentiant la première, par exemple, on trouve, à l'aide des relations (5) et (6),

$$\frac{\partial a_3}{\partial s_1}\sin\theta + a_3 \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = -\frac{\alpha_1}{r''_1} - \frac{\alpha_2}{\rho''_1} - a_3 \cos\theta \left(\frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{r'_1}\right),$$
$$\frac{\partial a_3}{\partial s_2}\sin\theta + a_3 \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = -\frac{\alpha_1}{\rho''_2} - \frac{\alpha_2}{r''_2} - a_3 \cos\theta \left(\frac{1}{\rho'_2} + \frac{1}{r'_2}\right).$$

Or, les deux derniers termes se détruisent dans les deux membres, en vertu des identités (6), et l'on a finalement

$$(8) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial a_3}{\partial s_1}\sin^2\theta = \left(\dfrac{1}{r''_1} - \dfrac{\cos\theta}{\rho''_1}\right)a_1 + \left(\dfrac{1}{\rho''_1} - \dfrac{\cos\theta}{r''_1}\right)a_2, \\ -\dfrac{\partial a_3}{\partial s_2}\sin^2\theta = \left(\dfrac{1}{\rho''_2} - \dfrac{\cos\theta}{r''_2}\right)a_1 + \left(\dfrac{1}{r''_2} - \dfrac{\cos\theta}{\rho''_2}\right)a_2. \end{cases}$$

Application. — Si l'on compare l'aire $d\Omega$ du triangle infinitésimal MM_1M_2 à l'aire $d\omega$ de son *image* mm_1m_2 sur la sphère

dont le rayon est égal à l'unité, on aura

$$k = \frac{d\omega}{d\Omega} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial s_1} & \frac{\partial a_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial b_3}{\partial s_1} & \frac{\partial b_3}{\partial s_2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}\right).$$

C'est le rapport *généralisé* de Gauss relatif à la courbure des surfaces.

IV.

Relations de troisième espèce.

(Dérivées totales.)

6. *Dérivées totales relatives aux lignes coordonnées.* — Remarquons d'abord que l'arc MM′ ou ds (*fig.* 1) est fonction des deux variables indépendantes s_1 et s_2, car l'un quelconque des deux triangles dans lesquels se décompose le quadrilatère infinitésimal fermé $MM_1M'M_2$ donne

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{ds_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{ds_2}{\sin\theta_1} = \dfrac{ds}{\sin\theta}, \\ ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2\,ds_1\,ds_2\cos\theta. \end{cases}$$

D'après cela, on a

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{da_1}{ds} = \dfrac{\partial a_1}{\partial s_1}\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + \dfrac{\partial a_1}{\partial s_2}\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta}, \\ \dfrac{da_2}{ds} = \dfrac{\partial a_2}{\partial s_1}\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + \dfrac{\partial a_2}{\partial s_2}\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Or, si l'on remplace les dérivées partielles du second membre par leurs valeurs (5) et que l'on pose, pour abréger,

$$(10') \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta_2}{r_1'} + \dfrac{\sin\theta_1}{\rho_2'} + \dfrac{\sin\theta}{L_{1,2}'}, \\ \dfrac{\sin\theta_1}{r_2'} + \dfrac{\sin\theta_2}{\rho_1'} + \dfrac{\sin\theta}{L_{2,1}'}; \end{cases}$$

$$(10'') \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta_2}{r_1''} + \dfrac{\sin\theta_1}{\rho_2''} + \dfrac{\sin\theta}{L_{1,2}''}, \\ \dfrac{\sin\theta_1}{r_2''} + \dfrac{\sin\theta_2}{\rho_1''} + \dfrac{\sin\theta}{L_{2,1}''}, \end{cases}$$

il viendra, en se bornant aux premiers indices, qui peuvent suffire,

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_1}{ds} = -\dfrac{a_1}{L'_1}\cot\theta + \dfrac{a_2}{L'_1}\operatorname{cosec}\theta + \dfrac{a_3}{L''_1}, \\ \dfrac{da_2}{ds} = \dfrac{a_1}{L'_2}\operatorname{cosec}\theta - \dfrac{a_2}{L'_2}\cot\theta + \dfrac{a_3}{L''_2}, \end{cases}$$

expressions de même forme que la première et la troisième des formules (5).

On en tire comme corollaire

$$\frac{1}{L''_1} = \Sigma a_3 \frac{da_1}{ds} = -\Sigma a_1 \frac{da_3}{ds},$$

$$\frac{1}{L''_2} = \Sigma a_3 \frac{da_2}{ds} = -\Sigma a_2 \frac{da_3}{ds}.$$

Identité. — Comme application des formules (11), différentions par rapport à s la valeur

$$\cos\theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2;$$

nous aurons

$$-\sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \Sigma a_2 \frac{da_1}{ds} + \Sigma a_1 \frac{da_2}{ds}.$$

Substituant, on obtient l'identité

$$(12)\qquad \frac{1}{L'_1} + \frac{d\theta_1}{ds} = -\left(\frac{1}{L'_2} + \frac{d\theta_2}{ds}\right),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(12')\qquad \frac{1}{L'_1} + \frac{1}{L'_2} + \frac{d\theta}{ds} = 0 :$$

c'est la généralisation des relations (6).

3° *Dérivées totales relatives aux trajectoires orthogonales des lignes coordonnées.* — En suivant la même marche que ci-dessus, on trouvera

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_2}{ds} = -\dfrac{a_1}{L'_1} + \dfrac{a_3}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_2} - \dfrac{\cos\theta}{L''_1}\right), \\ \dfrac{d\alpha_1}{ds} = -\dfrac{a_2}{L'_2} + \dfrac{a_3}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_1} - \dfrac{\cos\theta}{L''_2}\right), \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{L_1'} = -\Sigma a_1 \frac{da_2}{ds} = \Sigma \alpha_2 \frac{da_1}{ds},$$

$$\frac{1}{L_2'} = -\Sigma a_2 \frac{da_1}{ds} = \Sigma \alpha_1 \frac{da_2}{ds}.$$

3° *Dérivée totale relative à la verticale* MN. — Puisqu'on a

$$\frac{da_3}{ds} = \frac{\partial a_3}{\partial s_1} \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + \frac{\partial a_3}{\partial s_2} \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta},$$

il vient immédiatement, au moyen des formules (8),

$$(14) \qquad -\frac{da_3}{ds}\sin^2\theta = \left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos\theta}{L_2''}\right)a_1 + \left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos\theta}{L_1''}\right)a_2.$$

On parviendrait du reste à ce même résultat en différentiant par rapport à s la formule

$$a_3 \sin\theta = b_1 c_2 - c_1 b_2,$$

et tenant compte, dans le calcul, de l'identité (12').

V.

Application des relations précédentes à l'analyse des premières courbures composées ou déviations d'une ligne quelconque.

7. En devenant M'T', la tangente MT à la courbe produite S détermine les variations simultanées M'N' et M'H' de la verticale MN et de la tangente MH à la trajectoire orthogonale de S ; mais il est à remarquer que de ces trois semi-droites MT varie seule dans la direction de l'arc élémentaire ds.

Désignons par $d\sigma$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ les angles de contingence engendrés et posons

$$\frac{1}{r} = \frac{d\sigma}{ds}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{d\upsilon}{ds}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Dans $\frac{1}{r}$ on reconnaît la première courbure proprement dite de la ligne S. Nous l'appellerons plus spécialement ici la *déviation initiale* ou *donnée*.

Quant aux deux autres courbures, nous les qualifierons respectivement de *déviation horizontale* et de *déviation verticale* de

cette même ligne S, à cause du lien de dépendance qui les rattache à la tangente MT.

Il s'agit de calculer ces trois déviations :

1° *Déviation initiale ou donnée.* — Soient $(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale ML de la courbe S (*fig.* 1) ; nous avons les relations connues

$$\frac{a_\sigma}{da} = \frac{b_\sigma}{db} = \frac{c_\sigma}{dc} = \frac{1}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}} = \frac{1}{d\sigma} = \frac{r}{ds},$$

ce qui nous conduit à calculer $\frac{da}{ds}$, par exemple.

Or, d'après (1),

$$a = a_1 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + a_2 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta};$$

par conséquent (1), substituant à $\frac{da_1}{ds}$ et $\frac{da_2}{ds}$ leurs valeurs (11), et développant les deux dernières dérivées, on trouve, eu égard à l'identité (12),

$$\frac{da}{ds} = \alpha\left(\frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds}\right) + \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L_1''} + \frac{\sin\theta_1}{L_2''}\right).$$

Posons

$$(15)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds}, \\ \frac{1}{r''} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L_1''} + \frac{\sin\theta_1}{L_2''}\right); \end{cases}$$

il viendra

$$\frac{da}{ds} = \frac{\alpha}{r'} + \frac{a_3}{r''}$$

et, par suite,

$$\Sigma\left(\frac{da}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}.$$

---

(1) Bien que les dérivées totales $\frac{da_1}{ds}$, $\frac{da_2}{ds}$ (n° 6) deviennent ici des dérivées partielles, par rapport à $\frac{da}{ds}$, nous avons cru devoir leur conserver la caractéristique d.

$$\frac{da}{ds} = \frac{da_1}{ds}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + \frac{da_2}{ds}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta} + a_1\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta}\right) + a_2\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\right).$$

Ainsi, par les formules (15) nous connaissons les expressions générales des deux composantes horizontale et verticale de la déviation donnée $\frac{1}{r}$.

Comme corollaire, on voit que l'on a aussi

$$\frac{1}{r'} = \Sigma\alpha \frac{da}{ds} = -\Sigma a \frac{d\alpha}{ds},$$
$$\frac{1}{r''} = \Sigma a_3 \frac{da}{ds} = -\Sigma a \frac{da_3}{ds}.$$

2° *Déviation horizontale.* — Soit MU la direction du rayon u de cette courbure nécessairement située dans le plan normal NMT. Représentons par (a_0, b_0, c_0) ses cosinus directeurs.

Comme ceux de MH sont (α, β, γ), nous aurons

$$\frac{a_0}{d\alpha} = \frac{b_0}{d\beta} = \frac{c_0}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} = \frac{1}{dv} = \frac{u}{ds}.$$

Calculons $\frac{d\alpha}{ds}$.

D'après (1),

$$\alpha = -a_1 \frac{\cos\theta_2}{\sin\theta} + a_2 \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta};$$

différentiant, on trouve, après réduction,

$$\frac{d\alpha}{ds} = -a\left(\frac{1}{L'_1} + \frac{d\theta_1}{ds}\right) - \frac{a_3}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L''_1} - \frac{\cos\theta_1}{L''_2}\right).$$

Posons, en vue de ce qui doit suivre,

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L''_1} - \frac{\cos\theta_1}{L''_2}\right), \tag{16}$$

il viendra

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{a}{r'} + \frac{a_3}{r_0};$$

et, par suite,

$$\Sigma\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)^2 = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r_0^2}.$$

On en déduit aussi

$$\frac{1}{r'} = -\Sigma a \frac{d\alpha}{ds} = \Sigma\alpha \frac{da}{ds},$$
$$\frac{1}{r_0} = \Sigma a_3 \frac{d\alpha}{ds} = -\Sigma\alpha \frac{da_3}{ds}.$$

3° *Déviation verticale.* — Désignons par MV la direction du rayon v de cette courbure, et soient $(a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon)$ ses cosinus directeurs.

Nous savons que ceux de MN sont (a_3, b_3, c_3); donc, on a

$$\frac{a_\varepsilon}{da_3} = \frac{b_\varepsilon}{db_3} = \frac{c_\varepsilon}{dc_3} = \frac{1}{\sqrt{da_3^2 + db_3^2 + dc_3^2}} = \frac{1}{d\varepsilon} = \frac{v}{ds}.$$

Ici nous n'avons pas à calculer $\frac{da_3}{ds}$, car il nous est donné directement par la formule (14). En y remplaçant θ par sa valeur $\theta_1 + \theta_2$, on peut l'écrire

$$-\frac{da_3}{ds} = \frac{\alpha}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L_1''} + \frac{\sin\theta_1}{L_2''}\right) - \frac{\alpha}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L_1''} - \frac{\cos\theta_1}{L_2''}\right),$$

ou bien, d'après (15) et (16),

$$-\frac{da_3}{ds} = \frac{a}{r''} + \frac{\alpha}{r_0}.$$

On en déduit

$$\Sigma\left(\frac{da_3}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r_0^2},$$

avec

$$\frac{1}{r''} = -\Sigma a\frac{da_3}{ds} = \Sigma a_3\frac{da}{ds},$$

$$\frac{1}{r_0} = -\Sigma\alpha\frac{da_3}{ds} = \Sigma a_3\frac{d\alpha}{ds}.$$

En résumé, si l'on observe que la composante $\frac{1}{r'}$ est une courbure de niveau, $\frac{1}{r''}$ une courbure de profil et $\frac{1}{r_0}$ une courbure de front, on peut dire :

1° La déviation initiale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de profil.

2° La déviation horizontale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de front.

3° La déviation verticale est la résultante orthogonale de la première courbure de profil et de la première courbure de front.

8. Donnons, en terminant, quelques autres expressions fort utiles de ces courbures *élémentaires* que nos calculs viennent de mettre en évidence.

A cet effet, représentons par φ l'angle aigu du plan osculateur TML de la ligne S et du plan de profil ; par ϖ l'angle aigu du plan HMU de la déviation horizontale et du plan de front ; par ω l'angle aigu du plan NMV de la déviation verticale et du plan de profil, nous pourrons, comme conséquence des valeurs trouvées, écrire les trois systèmes suivants :

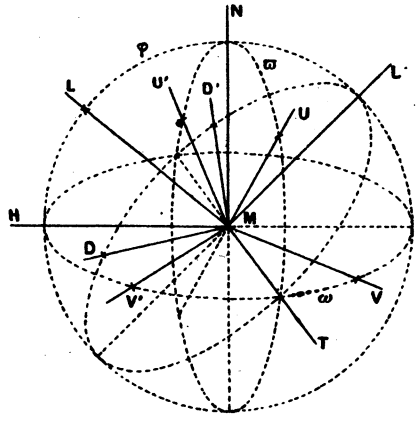
$$(17)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{\sin\varphi}{r}, & \frac{1}{r'} = -\frac{\sin\varpi}{u}, & \frac{1}{r''} = -\frac{\cos\omega}{v}; \\ \frac{1}{r''} = \frac{\cos\varphi}{r}; & \frac{1}{r_0} = \frac{\cos\varpi}{u}; & \frac{1}{r_0} = \frac{\sin\omega}{v}, \end{cases}$$

et par suite les trois équations

$$(17')\qquad \begin{cases} \sin\varphi\, d\sigma = -\sin\varpi\, d\upsilon, \\ -\cos\omega\, d\varepsilon = \cos\varphi\, d\sigma, \\ \cos\varpi\, d\upsilon = \sin\omega\, d\varepsilon; \end{cases}$$

d'où l'on voit que, puisque les angles φ, ϖ, ω ont été choisis aigus, il est nécessaire que les quantités $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ soient désormais considérées comme implicitement *négatives*.

Fig. 3.



Des formules précédentes nous déduisons cette relation fort simple

$$(18)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varpi \operatorname{tang}\omega,$$

qui donne lieu à l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *En tout point d'une courbe quelconque tangente à l'une des arêtes d'un trièdre trirectangle dont l'une des faces adjacentes est prise pour plan horizontal :* 1° *le plan horizontal et le plan de la déviation donnée;* 2° *le plan de front et le plan de la déviation horizontale;* 3° *le plan de profil et le plan de la déviation verticale forment entre eux trois angles tels que, si dans chaque couple on prend l'angle aigu correspondant, le produit de leurs tangentes trigonométriques est toujours égal à l'unité* (1).

Corollaire. — Des trois systèmes (17) on peut déduire aussi l'expression de chacune des différentielles $d\varphi$, $d\varpi$, $d\omega$ en fonction des trois courbures élémentaires $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$, $\frac{1}{r_0}$ et de leurs variations. On a, en effet,

$$(19)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r^2}\,d\varphi = \frac{1}{r''}\,d\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'}\,d\left(\frac{1}{r''}\right), \\ \frac{1}{u^2}\,d\varpi = \frac{1}{r'}\,d\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{1}{r_0}\,d\left(\frac{1}{r'}\right), \\ \frac{1}{v^2}\,d\omega = \frac{1}{r_0}\,d\left(\frac{1}{r''}\right) - \frac{1}{r''}\,d\left(\frac{1}{r_0}\right), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{r'r''}{r^2}\,d\varphi + \frac{r'r_0}{u^2}\,d\varpi + \frac{r''r_0}{v^2}\,d\omega = 0$$

ou bien

$$\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{d\varpi}{\sin 2\varpi} + \frac{d\omega}{\sin 2\omega},$$

relation différentielle qu'on peut, comme vérification, déduire directement de l'équation (18).

---

(1) Quant à la disposition de ces plans, on peut ajouter que, dans tous les cas, le *symétrique* du second plan de chaque groupe pris par rapport à son conjugué coupe les deux autres seconds plans suivant une même droite.

VI.

De quelques formes remarquables de la déviation verticale.

9. Il résulte du paragraphe précédent que l'on a

$$(20)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\cos\omega}{\rho} = \dfrac{1}{r''} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{\sin\theta_2}{L_1''} + \dfrac{\sin\theta_1}{L_2''}\right), \\ \dfrac{\sin\omega}{\rho} = \dfrac{1}{r_0} = -\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{\cos\theta_2}{L_1''} - \dfrac{\cos\theta_1}{L_2''}\right). \end{cases}$$

On en tire

$$(21)\qquad \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} = \frac{1}{L_1''^2} + \frac{1}{L_2''^2} - 2\frac{\cos\theta}{L_1''L_2''}.$$

C'est une première expression générale de la déviation verticale.

Quand les lignes coordonnées sont rectangulaires, elle se réduit à

$$(21')\qquad \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\cos\theta_1}{r_1''} + \frac{\sin\theta_1}{\rho_2''}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta_1}{r_2''} + \frac{\cos\theta_1}{\rho_1''}\right)^2.$$

Faisons, dans la formule (21), ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta$), puis ($\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = 0$); nous obtiendrons les déviations verticales relatives aux lignes coordonnées, savoir

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\theta}{\rho_1^2} = \dfrac{1}{r_1''^2} + \dfrac{1}{\rho_1''^2} - 2\dfrac{\cos\theta}{r_1''\rho_1''}, \\ \dfrac{\sin^2\theta}{\rho_2^2} = \dfrac{1}{r_2''^2} + \dfrac{1}{\rho_2''^2} - 2\dfrac{\cos\theta}{r_2''\rho_2''}; \end{cases}$$

et, comme l'angle des directions ρ_1 et ρ_2 est égal à $\theta + (\omega_1 - \omega_2)$, on en conclut cette seconde expression de $\frac{1}{\rho^2}$

$$(21'')\qquad \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} = \frac{\sin^2\theta_2}{\rho_1^2} + \frac{\sin^2\theta_1}{\rho_2^2} - 2\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\rho_1\rho_2}\cos(\rho_1, \rho_2).$$

Il est facile de dégager les courbures de front qui entrent dans les formules (22) et de fixer leur signe ; il suffit pour cela de remonter à la valeur (16) de $\frac{1}{r_0}$ et d'y introduire les hypothèses ci-

dessus. On trouve ainsi

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{r_{0,1}} = \dfrac{1}{\rho''_1} - \dfrac{\cos\theta}{r''_1}, \\ -\dfrac{\sin\theta}{r_{0,2}} = \dfrac{1}{\rho''_2} - \dfrac{\cos\theta}{r''_2}, \end{cases}$$

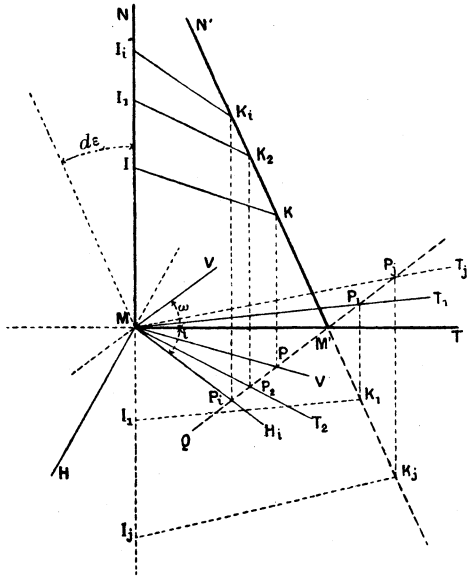
et l'on vérifie aisément que l'on a bien

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{r''^2_1} + \frac{1}{r^2_{0,1}},$$
$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{r''^2_2} + \frac{1}{r^2_{0,2}}.$$

Cherchons, enfin, une troisième expression générale de la déviation $\frac{1}{\rho}$ qui, dans la suite, ne nous offrira pas moins d'avantages que les précédentes.

A cet effet, observons d'abord que la projection M'Q (*fig.* 4)

Fig. 4.



de la pseudo-normale (n° 1) M'N' sur le plan horizontal est une droite parallèle à MV. Abaissons sur elle la perpendiculaire MV'

et soit P leur point de rencontre ; MP sera la projection de la plus courte distance IK des deux droites MN et M'N'.

Soient K_1, K_2 les traces de M'N' sur les plans normaux NMT_1, NMT_2 menés suivant les tangentes aux lignes coordonnées. Désignons par P_1, P_2 les projections sur le plan horizontal de ces traces et posons $K_1P_1 = \zeta_1$, $K_2P_2 = \zeta_2$.

Des triangles $M'K_1P_1$, $M'MP_1$ on tire, en valeur et en signe (n° 8),

$$M'P_1 = \zeta_1 d\varepsilon = \zeta_1 \frac{ds}{\rho} = \frac{\sin\theta_1 ds}{\sin(\omega - \theta_1)}$$

et, par suite,

$$\frac{\sin(\omega - \theta_1)}{\rho} = \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1}.$$

On obtiendrait de même

$$\frac{\sin(\omega + \theta_2)}{\rho} = -\frac{\sin\theta_2}{\zeta_2},$$

ζ_2 étant positif et ζ_1 négatif implicitement.

Cela posé, les formules (20) nous donnent

$$\frac{\sin(\omega - \theta_1)}{\rho} = \frac{\sin\theta_1}{r''} + \frac{\cos\theta_1}{r_0} = \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1},$$

$$\frac{\sin(\omega + \theta_2)}{\rho} = -\frac{\sin\theta_2}{r''} + \frac{\cos\theta_2}{r_0} = -\frac{\sin\theta_2}{\zeta_2};$$

d'où, par une combinaison évidente,

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta_1}{\zeta_1} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L_2''} - \dfrac{\cos\theta}{L_1''}\right), \\ \dfrac{\sin\theta_2}{\zeta_2} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L_1''} - \dfrac{\cos\theta}{L_2''}\right). \end{cases}$$

D'autre part, la formule (14), pouvant s'écrire

$$-\frac{\sin\theta}{\rho}a_\varepsilon = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos\theta}{L_2''}\right)a_1 + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos\theta}{L_1''}\right)a_2,$$

revient à

$$-\frac{\sin\theta}{\rho}a_\varepsilon = \frac{\sin\theta_2}{\zeta_2}a_1 + \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1}a_2.$$

On en tire immédiatement l'expression cherchée

$$(21''') \qquad \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} = \frac{\sin^2\theta_1}{\zeta_1^2} + \frac{\sin^2\theta_2}{\zeta_2^2} + 2\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\zeta_1\zeta_2}\cos\theta.$$

VII.

Des composantes générales de la déviation verticale et de leurs propriétés.

11. Soit MH_i une semi-droite menée par le point M dans le plan horizontal et faisant, dans le sens direct, avec MT un angle quelconque i consécutif de ω; le système (20) nous donne

$$(25)\qquad -\frac{\cos(\omega+i)}{\rho}=\frac{\cos i}{r''}+\frac{\sin i}{r_0}=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\sin(\theta_2-i)}{L''_1}+\frac{\sin(\theta_1+i)}{L''_2}\right].$$

Si maintenant on remplace dans cette formule i par $i-\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à considérer une seconde droite MT_j, telle que MH soit élevée par rapport à elle dans le sens direct, on trouve

$$(26)\qquad -\frac{\sin(\omega+i)}{\rho}=\frac{\sin i}{r''}-\frac{\cos i}{r_0}=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\cos(\theta_2-i)}{L''_1}-\frac{\cos(\theta_1+i)}{L''_2}\right].$$

On est ainsi conduit à poser

$$\frac{\cos(\omega+i)}{\rho}=\frac{1}{\rho_i},\qquad \frac{\sin(\omega+i)}{\rho}=\frac{1}{\rho_j},$$

puisqu'il est évident que ces quantités ne sont autres que les projections positives ou négatives (selon la valeur qu'on attribue à i) de $\frac{1}{\rho}$ sur MH_i et MT_j.

Leur variation est facile à suivre; car si, parmi les valeurs que l'on peut attribuer à i, on choisit les suivantes

$$-\frac{\pi}{2},\quad -\omega,\quad 0,\quad \frac{\pi}{2}-\omega,\quad \frac{\pi}{2},$$

qui correspondent aux directions — MH, MV, MT, MV′, MH, les projections $\frac{1}{\rho_i}$, $\frac{1}{\rho_j}$ prendront les valeurs simultanées

$$\frac{1}{r_0},\ \frac{1}{\rho},\ -\frac{1}{r''},\ 0,\ -\frac{1}{r_0},$$
$$\frac{1}{r''},\ 0,\ \frac{1}{r_0},\ \frac{1}{\rho},\ -\frac{1}{r''}.$$

12. *Propriétés de ces composantes.* — 1° Si, dans l'équation (25), on remplace successivement i par $i-\theta_1$ et $i+\theta_2$, puis, qu'on multiplie la première des équations ainsi formées par

$\sin\theta_2$, la seconde par $\sin\theta_1$ et qu'on les ajoute, on obtiendra pour résultat une expression du second degré homogène en $\sin\theta_1$ et $\sin\theta_2$, ou bien en ds_1 et ds_2, que nous retrouverons, du reste, un peu plus tard :

$$(25')\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\sin^3\theta}{\rho_i} &= \left[\frac{\sin i}{\rho_1''} + \frac{\sin(\theta - i)}{r_1''}\right]\sin^2\theta_2 \\ &+ \left\{\left[\frac{\sin i}{r_2''} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho_2''}\right] - \left[\frac{\sin i}{r_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho_1''}\right]\right\}\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &- \left[\frac{\sin i}{\rho_2''} - \frac{\sin(\theta + i)}{r_2''}\right]\sin^2\theta_1. \end{aligned} \right.$$

On en déduirait immédiatement l'expression correspondante de $\frac{1}{\rho_j}$ en changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$; elle est de même forme que la précédente.

2° Menons les plans normaux NMH_i et NMT_j. Soient K_i, K_j les traces de la pseudo-normale $M'N'$ sur ces plans et P_i, P_j les projections horizontales de ces traces. On obtiendra, ou par la considération de nouveaux triangles, ou bien en posant simplement dans les valeurs trouvées au n° 10 : $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - i$ et $\theta_2 = i$, les formules

$$(25'')\quad -\frac{\cos(\omega + i)}{\rho} = \frac{\cos i}{r''} + \frac{\sin i}{r_0} = \frac{\cos i}{\zeta_j} = -\frac{1}{\rho_i},$$

$$(26'')\quad \frac{\sin(\omega + i)}{\rho} = -\frac{\sin i}{r''} + \frac{\cos i}{r_0} = -\frac{\sin i}{\zeta_i} = \frac{1}{\rho_j},$$

dans lesquelles ζ_i et ζ_j sont les deux ordonnées K_iP_i et K_jP_j construites dans les mêmes conditions que ζ_2 et ζ_1 respectivement.

3° Du système (24) on tire

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin\theta}{L_1''} &= \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1}\cos\theta + \frac{\sin\theta_2}{\zeta_2}, \\ \frac{\sin\theta}{L_2''} &= \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1} + \frac{\sin\theta_2}{\zeta_2}\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on substitue ces expressions dans les formules (20), on trouve

$$(25''')\quad -\frac{\sin\theta}{\rho_i} = \frac{\cos i}{\zeta_j}\sin\theta = \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1}\cos(\theta_2 - i) + \frac{\sin\theta_2}{\zeta_2}\cos(\theta_1 + i),$$

$$(26''')\quad \frac{\sin\theta}{\rho_j} = -\frac{\sin i}{\zeta_i}\sin\theta = \frac{\sin\theta_1}{\zeta_1}\sin(\theta_2 - i) - \frac{\sin\theta_2}{\zeta_2}\sin(\theta_1 + i),$$

ce qui montre que $\frac{1}{\zeta_i}$ et $\frac{1}{\zeta_j}$ s'expriment *linéairement* en $\frac{1}{\zeta_1}$ et $\frac{1}{\zeta_2}$.

VIII.

Secondes courbures ou flexions d'une ligne quelconque.

(Méthode géométrique.)

13. Soient MTLL', MHUU', MNVV' les trièdres trirectangles relatifs aux trois déviations (*fig.* 4). Afin d'obtenir des résultats plus symétriques, nous supposerons que dans le second la disposition des arêtes est inverse, ainsi que la figure l'indique d'ailleurs.

Désignons par $(a'_\sigma, b'_\sigma, c'_\sigma)$, $(a'_\upsilon, b'_\upsilon, c'_\upsilon)$, $(a'_\varepsilon, b'_\varepsilon, c'_\varepsilon)$ les cosinus directeurs des trois arêtes ML', MU', MV' de ces trièdres. D'après ce qu'on a vu au n° 10, nous pouvons écrire

$$(28)\qquad \begin{cases} \cos(N, L') = a_3 a'_\sigma + b_3 b'_\sigma + c_3 c'_\sigma = \sin\varphi, \\ \cos(N, U') = a_3 a'_\upsilon + b_3 b'_\upsilon + c_3 c'_\upsilon = \sin\varpi, \\ \cos(T, V') = a_3 a'_\varepsilon + b_3 b'_\varepsilon + c_3 c'_\varepsilon = \sin\omega, \end{cases}$$

avec les conditions que nous fournit la théorie des courbes gauches :

$$\begin{aligned} da &= a_\sigma d\sigma, & da'_\sigma &= a_\sigma d\tau, \\ da &= a_\upsilon d\upsilon, & da'_\upsilon &= a_\upsilon d\vartheta, \\ da_3 &= a_\varepsilon d\varepsilon, & da'_\varepsilon &= a_\varepsilon d\eta, \end{aligned}$$

et où l'on a représenté par $d\tau$, $d\vartheta$, $d\eta$ les angles de contingence relatifs aux variations des troisièmes arêtes des trièdres.

D'autre part, la Trigonométrie sphérique nous donne

$$\begin{aligned} \cos(V, L') &= \cos\varphi \sin\omega, \\ \cos(V, U') &= -\cos\varpi\cos\omega, \\ \cos(L, V') &= \sin\varphi\cos\omega. \end{aligned}$$

Différentiant les formules (18), il vient

$$(29)\qquad \begin{cases} d\tau = d\varphi - \sin\omega\, d\varepsilon, \\ d\vartheta = d\varpi - \cos\varphi\, d\sigma, \\ d\eta = d\omega - \sin\varphi\, d\sigma, \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les rayons de courbure

$$(29')\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{t} = \dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{1}{r_0}, \\ \dfrac{1}{m} = \dfrac{d\varpi}{ds} - \dfrac{1}{r''}, \\ \dfrac{1}{w} = \dfrac{d\omega}{ds} = \dfrac{1}{r'}. \end{cases}$$

Nous donnerons à ces nouvelles courbures les noms respectifs de *flexions :* 1° de front; 2° de profil; 3° de niveau, parce qu'elles sont situées, comme les courbures élémentaires correspondantes $\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r'}, \frac{1}{r''}$, dans les plans de même désinence.

IX.

Expressions analytiques des trois flexions et de leurs composantes orthogonales.

14. 1° *Flexion de front (ou torsion) de la ligne* S. — Nous commençons par cette seconde courbure, parce que, à la manière de la déviation initiale, elle est *intrinsèque* à la ligne S et n'est pas, comme les deux autres flexions, introduite par le système que définissent les variations du trièdre MNT_1T_2.

Soient donc $(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma)$ et $(a'_\sigma, b'_\sigma, c'_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale ML et de l'axe ML′ du plan osculateur de S. D'après les formules préliminaires (1′), on a, dans le plan normal NMH,

$$a'_\sigma = -\alpha\cos\varphi + a_3\sin\varphi,$$
$$a_\sigma = \alpha\sin\varphi + a_3\cos\varphi,$$

et par suite, d'après (1) et (17),

$$\frac{a'_\sigma}{r} = \frac{a_1}{r'}\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta} - \frac{a_2}{r'}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta} + \frac{a_3}{r'},$$

$$\frac{t}{r}\frac{da'_\sigma}{ds} = \frac{a_\sigma}{r} = -\frac{a_1}{r'}\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta} + \frac{a_2}{r'}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta} + \frac{a_3}{r''}.$$

Différentiant la première, nous connaîtrons deux valeurs identiques de $\frac{1}{r}\frac{da'_\sigma}{ds}$. Égalant entre eux les coefficients de a_3, la question se trouve résolue, car cette condition d'égalité revient à

$$\frac{1}{t} = \frac{r''}{r}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{r'}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L''_1} - \frac{\cos\theta_1}{L''_2}\right).$$

Ajoutons que si, après avoir formé deux équations, analogues pour les coefficients de a_1 et a_2, on multipliait la première par $\sin\theta_1$, la seconde par $\sin\theta_2$ et qu'on les ajoutât, on trouverait, comme seconde expression de l'inconnue $\frac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t} = -\frac{r'}{r}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{r''}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L''_1} - \frac{\cos\theta_1}{L''_2}\right).$$

On constate l'identité de ces deux valeurs en différentiant les relations

$$r = r' \sin\varphi = r'' \cos\varphi,$$

ce qui mène à cette troisième forme que nous avions surtout en vue de retrouver :

$$\frac{1}{t} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta_2}{L''_1} - \frac{\cos\theta_1}{L''_2}\right) \tag{30}$$

ou enfin

$$\frac{1}{t} = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r_0}.$$

Il importe de remarquer ici que les rayons de torsion t et de déviation initiale r coïncident, en direction, suivant ML, puisqu'on a

$$a_\sigma = r\frac{da}{ds} = \cos(r, x),$$

$$a_\sigma = t\frac{da'_\sigma}{ds} = \cos(t, x),$$

.....

On en conclut ces relations, souvent utiles, entre leurs composantes de même nom :

$$\frac{r}{t} = \frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''}.$$

2° *Flexion de profil.* — Les cosinus directeurs de MU et de MU étant respectivement $(a_\upsilon, b_\upsilon, c_\upsilon)$ et $(a'_\upsilon, b'_\upsilon, c'_\upsilon)$, la formule (1′), appliquée à ces directions dans le plan normal NMT, nous donne

$$a'_\upsilon = -a\cos\varpi + a_3\sin\varpi,$$

$$a_\upsilon = a\sin\varpi + a_3\cos\varpi,$$

et, par suite, on a

$$-\frac{a'_\upsilon}{u} = \frac{a_1}{r_0}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} + \frac{a_2}{r_0}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta} + \frac{a_3}{r'},$$

$$\frac{m}{u}\frac{da'_\upsilon}{ds} = \frac{a_\upsilon}{u} = -\frac{a_1}{r'}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} - \frac{a_2}{r'}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta} + \frac{a_3}{r_0}.$$

Différentiant la première et égalant entre eux, ici encore, les coefficients de a_3 dans les deux expressions de $\frac{1}{u}\frac{da'_\upsilon}{ds}$, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{m} = -\frac{r_0}{u}\frac{d}{ds}\left(\frac{u}{r'}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L''_1} + \frac{\sin\theta_1}{L''_2}\right).$$

Une combinaison convenable des deux conditions relatives à a_1 et a_2 donnerait

$$\frac{1}{m} = \frac{r'}{u}\frac{d}{ds}\left(\frac{u}{r_0}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L_1''} + \frac{\sin\theta_1}{L_2''}\right),$$

et, comme on a (17)

$$u = r_0\cos\varpi = -r'\sin\varpi,$$

on en conclut

$$\frac{1}{m} = \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta_2}{L_1''} + \frac{\sin\theta_1}{L_2''}\right) \tag{31}$$

ou enfin

$$\frac{1}{m} = \frac{d\varpi}{dt} - \frac{1}{r''},$$

comme précédemment.

Quant aux composantes suivant MN et — MT, la coïncidence, en direction, des rayons u et m suivant MU permet d'écrire

$$\frac{u}{m} = \frac{u''}{m''} = \frac{u'''}{m'''},$$

avec $u'' = r_0$ et $u''' = -r'$.

3° *Flexion de niveau ou courbure pseudo-conjuguée.* — Il nous faut partir ici des cosinus directeurs $(a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon)$ de MV et $(a'_\varepsilon, b'_\varepsilon, c'_\varepsilon)$ de MV'. On a

$$\begin{cases} a'_\varepsilon = \alpha\cos\omega + a\sin\omega, \\ a_\varepsilon = -\alpha\sin\omega + a\cos\omega \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\frac{a'_\varepsilon}{\rho} = \frac{a_1}{r''}\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta} - \frac{a_2}{r''}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta} + \frac{a}{r_0},$$

$$\frac{w}{\rho}\frac{da'_\varepsilon}{ds} = \frac{a_\varepsilon}{\rho} = \frac{a_1}{r_0}\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta} - \frac{a_2}{r_0}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta} - \frac{a}{r''}.$$

Si l'on différentie la première et qu'on égale les coefficients de a_3, on retombe simplement sur la valeur connue (16) de $\frac{1}{r_0}$. Il devient donc nécessaire et non plus facultatif, comme dans les deux premiers cas, de combiner entre elles les conditions qu'on obtient en égalant entre eux les coefficients de a_1 et de a_2. On trouvera ainsi

$$\frac{1}{w} = \frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\left\{\begin{array}{l} \left[\frac{1}{L_2''}\left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos\theta}{L_1''}\right) - \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r_1''r_2''} - \frac{1}{\rho_1''\rho_2''}\right)\right]\frac{d\theta_1}{ds} \\ -\left[\frac{1}{L_1''}\left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos\theta}{L_2''}\right) - \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r_1''r_2''} - \frac{1}{\rho_1''\rho_2''}\right)\right]\frac{d\theta_2}{ds} \end{array}\right\} - \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds}\right), \tag{32}$$

d'où l'on voit que, pour que la concordance de nos formules soit manifeste, il nous reste à faire voir que cette dernière revient à

$$\frac{1}{w} = \frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{r'}.$$

A cet effet, remarquons d'abord qu'en désignant par θ'_1 et θ'_2 les angles que MV′ fait avec les axes coordonnés, on a, dans les conditions de figure où nous nous sommes placés (n° 8),

$$(33)\qquad \begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \\ \theta'_2 = \theta_2 - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right); \end{cases}$$

d'où

$$d\theta'_1 = d\theta_1 - d\omega,$$
$$d\theta'_2 = d\theta_2 + d\omega,$$

double système dont chacun ne fournit plus qu'une équation lorsqu'on suppose les coordonnées rectangulaires.

D'autre part, pour ce même cas d'orthogonalité, l'équation (32) se réduit à

$$\frac{1}{w} = \left[1 - \rho^2\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right)\right]\frac{d\theta_1}{ds} - \frac{1}{r'},$$

ρ étant alors donné par la formule

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\cos\theta_1}{r''_1} + \frac{\sin\theta_1}{\rho''_2}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta_1}{r''_2} + \frac{\cos\theta_1}{\rho''_1}\right)^2.$$

La question est donc ramenée à prouver que l'on a identiquement

$$\frac{d\omega}{ds} = \left[1 - \rho^2\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right)\right]\frac{d\theta_1}{ds},$$

ou mieux encore

$$d\theta'_1 = \rho^2\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right)d\theta_1.$$

Or, si l'on intègre cette expression, on trouve

$$(34)\qquad \frac{1}{r''_1} + \left(\frac{\operatorname{tang}\theta_1}{\rho''_2} + \frac{\operatorname{tang}\theta'_1}{\rho''_1}\right) + \frac{\operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta'_1}{r''_2} = 0,$$

relation que nous reconnaîtrons plus tard être celle qui lie les directions *pseudo-conjuguées* MT et MV′. Elle exprime que ces deux semi-droites sont deux directions *homologues* dans deux faisceaux

homographiques. La propriété des *tangentes conjuguées* dans les surfaces n'en est qu'un cas particulier correspondant à l'hypothèse $\frac{1}{\rho'_1} = \frac{1}{\rho''_2}$, mais nous ne saurions insister davantage, en ce moment, sur ce point.

Quant aux composantes orthogonales de $\frac{1}{w}$, observons qu'à cause des relations connues (17)

$$v = r_0 \sin\omega = -r'' \cos\omega$$

on a d'abord

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{r_0}{v}\frac{d}{ds}\left(\frac{v}{r''}\right) = -\frac{r''}{v}\frac{d}{ds}\left(\frac{v}{r_0}\right),$$

puis, en vertu de la coïncidence suivant MV des rayons v et w,

$$\frac{v}{w} = \frac{v'}{w'} = \frac{v'''}{w'''},$$

en posant $v' = r_0$ et $v''' = -r''$.

X.

Troisièmes courbures ou courbures rectifiantes.

12. *Troisième courbure absolue.* — La théorie des courbes gauches nous fournit d'elle-même les trois relations suivantes :

$$(35) \qquad \frac{da}{ds} = \frac{a_\sigma}{r}, \qquad \frac{da'_\sigma}{ds} = \frac{a_\sigma}{t}, \qquad \frac{da_\sigma}{ds} = -\frac{a}{r} - \frac{a'_\sigma}{t}.$$

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les deux premières. Considérons actuellement la troisième. La courbure qu'elle définit est relative à la variation de la normale principale, ML, c'est-à-dire, de la direction commune des rayons r et t.

Comme on a manifestement

$$\Sigma\left(\frac{da_\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{p^2},$$

on nomme $\frac{1}{p}$ la troisième courbure absolue de la ligne S.

Soit MD (*fig.* 3) la direction du rayon p. Élevons sur le plan LMD la perpendiculaire MD′ du côté de MN; nous obtiendrons la droite rectifiante (absolue) de la ligne S en M. Il s'agit d'évaluer les cosinus directeurs de MD et de MD′.

Pour cela, remarquons que le trièdre trirectangle MLDD′ est dans les mêmes conditions que le trièdre MTLL′; les formules (35) lui sont donc applicables. Or de la première on tire

$$\frac{\cos(D,x)}{p} = \frac{da_\sigma}{ds};$$

d'où l'on conclut, d'après la troisième,

$$\frac{\cos(D,x)}{p} = -\frac{a}{r} - \frac{a'_\sigma}{t}. \tag{36}$$

Quant à MD′, on a pour déterminer $\cos(D',x)$, par exemple :

$$\frac{\cos(D',x)}{p} = b_\sigma \frac{dc_\sigma}{ds} - c_\sigma \frac{db_\sigma}{ds} = -\left(\frac{c}{r} + \frac{c'_\sigma}{t}\right) b_\sigma + \left(\frac{b}{r} + \frac{b'_\sigma}{t}\right) c_\sigma,$$

d'où

$$\frac{\cos(D',x)}{p} = \frac{a'_\sigma}{r} - \frac{a}{t}. \tag{37}$$

16. *Propriétés.* — On sait que les deux droites MD et MD′ sont situées dans le plan *rectifiant,* c'est-à-dire dans le plan de la tangente MT et de l'axe ML′ du plan osculateur.

A cette propriété nous adjoindrons celles que renferme le tableau suivant :

$$\cos(D,L') = -\frac{p}{t}, \qquad \cos(D',L') = \frac{p}{r},$$

$$\cos(D,T) = -\frac{p}{r}, \qquad \cos(D',T) = -\frac{p}{t},$$

$$\cos(D,N) = -\frac{p}{t'}, \qquad \cos(D',N) = \frac{p}{r'},$$

$$\cos(D,H) = \frac{p}{t'}, \qquad \cos(D',H) = -\frac{p}{r'}.$$

$$\cos(D,U) = \frac{up}{rr'} - \frac{up}{t'r_0}, \qquad \cos(D',U) = \frac{up}{tr'} + \frac{up}{r'r_0},$$

$$\cos(D,U') = \frac{vp}{rr_0} + \frac{up}{t'r'}, \qquad \cos(D',U') = \frac{up}{t'r_0} - \frac{up}{r'^2},$$

$$\cos(D,V) = \frac{vp}{rr'} - \frac{vp}{t'r_0}, \qquad \cos(D',V) = \frac{vp}{tr'} + \frac{vp}{r'r_0},$$

$$\cos(D,V') = -\frac{vp}{rr_0} - \frac{vp}{t'r'}. \qquad \cos(D',V') = -\frac{vp}{tr_0} + \frac{vp}{r'^2}.$$

Ces valeurs sont indépendantes de tout système de coordonnées.

On s'est aidé pour les calculer de ce que l'on a (n° 14)

$$\frac{r}{t} = \frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''}.$$

Quant aux cosinus des angles que font MD et MD′ avec les lignes coordonnées, on trouve

$$\cos(D, T_1) = -\frac{p}{t''}\sin\theta_1 - \frac{p}{r}\cos\theta_1,$$

$$\cos(D, T_2) = \frac{p}{t''}\sin\theta_2 - \frac{p}{r}\cos\theta_2;$$

$$\cos(D', T_1) = \frac{p}{r''}\sin\theta_1 - \frac{p}{t}\cos\theta_1,$$

$$\cos(D', T_2) = -\frac{p}{r''}\sin\theta_2 - \frac{p}{t}\cos\theta_2.$$

17. *Troisièmes courbures dérivées.* — Considérons maintenant les courbures relatives à la variation de MU qui est la direction de $\frac{1}{u}$ et de $\frac{1}{uu}$, et à celle de MV qui est la direction de $\frac{1}{v}$ et de $\frac{1}{w}$. Nous avons

$$\sum\left(\frac{da_y}{ds}\right)^2 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{uu^2} = \frac{1}{q^2},$$

$$\sum\left(\frac{da_z}{ds}\right)^2 = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Il y aurait donc lieu de construire deux nouveaux trièdres analogues au trièdre MLDD′ et dont la troisième arête serait, pour chacun, la droite rectifiante *dérivée* de ces nouvelles courbures.

On pourrait enfin dresser, pour ces courbures rectifiantes *extrinsèques*, deux tableaux qui auraient de grandes analogies avec le précédent. Nous nous contenterons d'écrire les trois formules qui suivent et dont la composition symétrique suffira pour justifier, à vue, pour ainsi dire, notre assertion :

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}\right) + \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r_0}\right)^2,$$

$$\frac{1}{q^2} = \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r_0^2}\right) + \left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r''}\right)^2,$$

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r_0^2}\right) + \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{r'}\right)^2.$$

Que si maintenant on convient de porter ces trois courbures

sur les arêtes d'un trièdre trirectangle quelconque, on aura pour la courbure résultante ou *totale* de la ligne S

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Elle sera donc parfaitement déterminée en grandeur et en direction.

XI.

Première application des théories précédentes à diverses lignes remarquables et d'une définition généralisée. — Lignes géodésiques, lignes asymptotiques, etc.

18. *Lignes géodésiques.* — Par analogie avec ce qui a lieu pour les surfaces, nous appellerons lignes géodésiques de tout système défini par la variation du trièdre MNT_1T_2 donné celles pour lesquelles la première courbure horizontale ou de niveau $\frac{1}{r'}$ est nulle en chacun de leurs points. Leur équation est donc

$$\frac{1}{L'_1} + \frac{d\theta_1}{ds} = 0$$

ou, plus explicitement,

$$\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{\partial\theta}{\partial s_1}\right) ds_1 = \left(\frac{1}{r'_2} + \frac{\partial\theta}{\partial s_2}\right) ds_2.$$

On remarquera, en effet, que, dans tous les calculs qui nous ont donné la valeur de $\frac{1}{r'}$, nous nous sommes constamment affranchi de la condition $\frac{1}{\rho''_1} = \frac{1}{\rho''_2}$ qui, comme on le verra dans la suite, est la condition caractéristique des surfaces.

19. *Indicatrice.* — Reprenons l'expression de la première courbure verticale (15), savoir

$$\frac{\sin\theta}{r''} = \frac{\sin\theta_2}{L''_1} + \frac{\sin\theta_1}{L''_2}$$

ou, en développant,

$$\frac{\sin^2\theta}{r''} = \frac{\sin^2\theta_2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \frac{\sin^2\theta_1}{r''_2}. \tag{38}$$

Posons

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta}\sqrt{r''} = X, \qquad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\sqrt{r''} = Y;$$

il viendra

$$\frac{X^2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) XY + \frac{Y^2}{r''_2} = 1, \tag{39}$$

équation d'une conique située dans le plan T_1MT_2 et qui appartient aux genres ellipse, hyperbole ou parabole, selon que la quantité

$$\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)^2$$

est ou positive, ou négative, ou nulle.

Nous ferons observer que c'est là aussi l'indicatrice proprement dite d'une surface auxiliaire ou fictive F_μ qui aurait pour courbure normale alternante de ses lignes génératrices la moyenne arithmétique des courbures $\frac{1}{\rho''_1}$ et $\frac{1}{\rho'_2}$ des lignes S_1 et S_2.

Cette surface *moyenne* pourrait, ce nous semble, être substituée avantageusement en tout point M au réseau discontinu des triangles $MM_1\mu_2$, $MM_2\mu_1$, dont il a été question au n° 1, s'il s'agissait, par exemple, de définir la courbure d'une pseudo-surface autour de chacun de ses points; mais de telles considérations, sur lesquelles nous comptons revenir, ne sauraient trouver place ici.

L'équation aux carrés des inverses des demi-axes de l'indicatrice (39) est

$$\frac{\sin^2\theta}{R''^2} - \left[\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta\right]\frac{1}{R''} + \left[\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)^2\right] = 0,$$

ce qui fournit les rayons de courbure R''_1 et R''_2 relatifs aux plans dits *principaux* NMA_1, NMA_2 du système rectiligne considéré, et permet d'écrire les invariants :

$$\frac{\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2},$$

$$\frac{\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{R''_1 R''_2}.$$

Rapportée à ses axes de figures, l'indicatrice prend la forme réduite

$$\frac{X^2}{R_1''} + \frac{Y^2}{R_2''} = 1, \tag{39'}$$

en même temps que la courbure verticale ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{r''} = \frac{\cos^2\theta_1}{R_1''} + \frac{\sin^2\theta_1}{R_2''}. \tag{40}$$

20. *Nouvelle forme de l'équation de l'indicatrice.* — En vertu des formules (5), on a

$$\frac{1}{r_1''} = \frac{1}{r_1}(l_1 a_3 + m_1 b_3 + n_1 c_3)$$

ou bien

$$\frac{\sin\theta}{r_1''} = \frac{1}{r_1}[l_1(b_1 c_2 - c_1 b_2) + m_1(c_1 a_2 - a_1 c_2) + n_1(a_1 b_2 - b_1 a_2)],$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\sin\theta}{r_1''} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{l_1}{r_1} \\ b_1 & b_2 & \frac{m_1}{r_1} \\ c_1 & c_2 & \frac{n_1}{r_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s_1^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_1^2} \end{vmatrix} = \Delta_1^1.$$

On trouvera pour valeur de $\frac{\sin\theta}{r_2''}$ un nouveau déterminant Δ_2^2 qui ne différera du précédent qu'en ce que les éléments de la dernière colonne y seront remplacés par $\frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial s_2^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s_2^2}$.

En troisième lieu, on a

$$\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_1}(\lambda_1 a_3 + \mu_1 b_3 + \nu_1 c_3);$$

d'où

$$\frac{\sin\theta}{\rho_1''} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{\lambda_1}{\rho_1} \\ b_1 & b_2 & \frac{\mu_1}{\rho_1} \\ c_1 & c_2 & \frac{\nu_1}{\rho_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial s_2\,\partial s_1} \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s_2\,\partial s_1} \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_2\,\partial s_1} \end{vmatrix} = \Delta_1^2.$$

Enfin, pour $\frac{\sin\theta}{\rho''_2}$, on obtiendra un quatrième déterminant ne différant du précédent qu'en ce que les éléments de la dernière colonne y sont remplacés par $\frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial s_1 \partial s_2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2}$.

Ce n'est que lorsque les lignes S_1 et S_2 engendrent une *même* surface F que l'on a $\frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}$, et, par suite, $\Delta_1^2 = \Delta_2^1$ ou encore $\frac{1}{\rho''_1} = \frac{1}{\rho''_2}$. Hors de là, il n'existe pas, comme on le sait, de fonction $F(x, y, z) = 0$ dont les dérivées partielles puissent servir à exprimer les coefficients différentiels qui entrent dans nos déterminants.

De ce qui précède, il résulte que, pour toute pseudo-surface ou pour tout système rectiligne, on a

$$r''_1 \Delta_1^1 = r''_2 \Delta_2^2 = \rho''_1 \Delta_1^2 = \rho''_2 \Delta_2^1 = \sin\theta. \tag{41}$$

Donc l'indicatrice correspondante peut se mettre sous la forme

$$\Delta_1^1 X^2 + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1) XY + \Delta_2^2 Y^2 = \sin\theta. \tag{39''}$$

21. *Lignes asymptotiques.* — Nous appelons *lignes asymptotiques* celles pour lesquelles la première courbure verticale ou de profil $\frac{1}{r''}$ est nulle en chacun de leurs points.

Leur équation est conséquemment

$$\frac{ds_1^2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) ds_1 ds_2 + \frac{ds_2^2}{r''_2} = 0,$$

ou bien

$$\Delta_1^1 ds_1^2 + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1) ds_1 ds_2 + \Delta_2^2 ds_2^2 = 0.$$

On peut obtenir immédiatement l'équation de ces lignes en posant les conditions

$$\frac{da_3}{\alpha} = \frac{db_3}{\beta} = \frac{dc_3}{\gamma},$$

et exprimant que ces rapports sont indépendants de a_1 et de a_2. On trouve ainsi (1) et (14)

$$\frac{\frac{1}{L''_1} - \frac{\cos\theta}{L''_2}}{-\cos\theta_2} = \frac{\frac{1}{L''_2} - \frac{\cos\theta}{L''_1}}{\cos\theta_1};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{\sin\theta_2}{L_1} + \frac{\sin\theta_1}{L''_2} = 0,$$

ce qui est la forme *primitive* de ces lignes.

22. *Lignes de courbure.* — L'analogie nous conduit à désigner de la sorte les lignes pour lesquelles la courbure de front $\frac{1}{r_0}$ est nulle en chaque point.

Leur équation est donc tout d'abord (16)

$$\frac{\cos\theta_2}{L''_1} = \frac{\cos\theta_1}{L''_1}.$$

Mais

$$ds\cos\theta_1 = ds_1 + ds_2\cos\theta,$$
$$ds\cos\theta_2 = ds_2 + ds_1\cos\theta.$$

Substituant, on a

$$(42)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right) ds_1^2 \\ \quad + \left[\left(\frac{1}{r''_2} - \frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right) - \left(\frac{1}{r''_1} - \frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right)\right] ds_1\, ds_2 - \left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right) ds_2^2 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$(\Delta_1^2 - \Delta_1^1\cos\theta)\, ds_1^2$$
$$+ [(\Delta_2^2 - \Delta_2^1\cos\theta) - (\Delta_1^1 - \Delta_1^2\cos\theta)]\, ds_1\, ds_2 - (\Delta_2^1 - \Delta_2^2\cos\theta)\, ds_2^2 = 0,$$

Ces lignes de courbure, *obliques* ou *angulaires* entre elles, évidemment (1), mais toutefois d'égale inclinaison sur les axes de l'indicatrice du système rectiligne auquel elles appartiennent, sont telles que les deux pseudo-normales qui ont leur pied à l'extrémité M′ de leur premier élément rencontrent la verticale MN, chacune en un point qu'en Optique on nomme *foyers du rayon* MN. Ceci est la conséquence de l'équation ou plutôt de la définition même de ces lignes.

Cherchons à déterminer ces foyers.

---

(1) Ce ne sont donc pas les lignes de courbure proprement dites de la surface auxiliaire F_μ, lesquelles sont représentées par l'équation bien différente

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right] ds_1^2 + \left(\frac{1}{r''_2} - \frac{1}{r''_1}\right) ds_1\, ds_2 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right] ds_2^2 = 0.$$

Pour cela, observons que l'équation $\frac{\cos\theta_2}{L''_1} = \frac{\cos\theta_1}{L''_2}$ revient à

$$\frac{\frac{ds_1}{r''_1} + \frac{ds_2}{\rho''_2}}{ds_1 + ds_2\cos\theta} = \frac{\frac{ds_1}{\rho''_1} + \frac{ds_2}{\rho''_2}}{ds_2 + ds_1\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{ds_1^2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right) ds_1\, ds_2 + \frac{ds_2^2}{r''_2}}{ds^2} = \frac{1}{r''};$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''}\right) ds_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r''_2} - \frac{1}{r''}\right) ds_2 = 0.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(43)\quad \frac{\sin^2\theta}{r''^2_f} - \left[\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta\right]\frac{1}{r''_f} + \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) = 0.$$

Telle est l'équation, de même forme, mais plus simple, que celle qu'a donnée M. Kummer dans sa théorie générale des systèmes rectilignes pour la détermination des mêmes points, qui fournit les distances r_{f_1} et r_{f_2} de l'origine M à chacun des foyers.

On en déduit aussi les relations suivantes

$$\frac{1}{r''_{f_1}} + \frac{1}{r''_{f_1}} = \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2},$$

$$\frac{1}{r''_{f_1} r''_{f_2}} = \frac{1}{R''_{v_1} R''_{v_2}};$$

en désignant par R_{v_1}, R_{v_2} les carrés des demi-axes de l'indicatrice

$$\frac{X^2}{R''_{v_1}} + \frac{Y^2}{R''_{v_2}} = 1$$

ou

$$(44)\quad \frac{X^2}{r''_1} + 2\frac{XY}{\sqrt{\rho''_1 \rho''_2}} + \frac{Y^2}{r''_2} = 1$$

d'une seconde surface auxiliaire F_v correspondant à la moyenne géométrique (supposée toujours réelle) des courbures normales

$\frac{1}{\rho_1''}$ et $\frac{1}{\rho_2''}$, comme l'indicatrice de la surface F_μ correspondait tout à l'heure à la moyenne arithmétique.

En introduisant ce nouvel élément de calcul, on peut dire que la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courbure obliques d'un système donné soient réelles est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1''}+\frac{1}{R_2''}\right) > \frac{1}{R_{\nu_1}'' R_{\nu_2}''}.$$

Quant à l'angle $\mathfrak{I}$ qu'elles font entre elles, on trouve aisément, pour le déterminer,

$$\operatorname{tang}\mathfrak{I} = \frac{\frac{1}{r_{f_1}''} - \frac{1}{r_{f_2}''}}{\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho_1''}-\frac{1}{\rho_2''}\right)}.$$

Les deux termes de cette expression sont des invariants, et le dénominateur, en particulier, est égal à la somme des courbures de front relatives à deux directions rectangulaires, somme nulle, on le sait (23), dans le cas des surfaces.

23. Vu l'importance des lignes qui nous occupent, nous allons indiquer brièvement deux autres méthodes pour les obtenir.

Et d'abord, il suffit de poser, par analogie avec les lignes asymptotiques,

$$\frac{da_3}{a} = \frac{db_3}{b} = \frac{dc_3}{c},$$

ce qui donne

$$\frac{\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos\theta}{L_2''}}{\sin\theta_2} = \frac{\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos\theta}{L_1''}}{\sin\theta_1};$$

d'où

$$\frac{\cos\theta_2}{L_1''} = \frac{\cos\theta_1}{L_2''}.$$

On les obtient aussi, et cette remarque nous sera fort utile, à l'aide des formules (24) mises sous la forme

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin^2\theta}{\zeta_1} = \left(\dfrac{1}{r_2''} - \dfrac{\cos\theta}{\rho_2''}\right) + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{\rho_1''} - \dfrac{\cos\theta}{r_1''}\right), \\ \dfrac{\sin^2\theta}{\zeta_2} = \left(\dfrac{1}{r_1''} - \dfrac{\cos\theta}{\rho_1''}\right) + m\left(\dfrac{1}{\rho_2''} - \dfrac{\cos\theta}{r_2''}\right), \end{cases}$$

après qu'on y a fait

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{ds_2}{ds_1} = m.$$

Il suffit effectivement d'égaler les seconds membres pour retomber sur l'équation (42).

Enfin, il n'est pas sans intérêt d'observer que, lorsque la condition $\frac{1}{r''_1 r'''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2} = 0$ est remplie, l'équation des lignes de courbure se décompose en deux facteurs réels du premier degré et donne pour ces lignes

$$\left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r''_2} - \frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right) ds_2 = 0,$$
$$\left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right) ds_1 - \left(\frac{1}{r''_1} - \frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right) ds_2 = 0,$$

ou bien équivalemment

$$\left(\frac{1}{r''_1} - \frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right) ds_2 = 0,$$
$$\left(\frac{1}{r''_2} - \frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right) ds_1 - \left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right) ds_2 = 0.$$

24. *Lignes pseudo-conjuguées sous angle constant.* — Pour obtenir ces nouvelles lignes, on égalera à zéro la composante $\frac{1}{v_i}$ de la déviation verticale (25'), ce qui donne

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\sin i}{\rho''_1} + \frac{\sin(\theta - i)}{r''_1}\right] ds_1^2 \\ &+ \left\{\left[\frac{\sin i}{r''_2} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho''_2}\right] - \left[\frac{\sin i}{r''_1} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho''_1}\right]\right\} ds_1\, ds_2 \\ &- \left[\frac{\sin i}{\rho''_2} - \frac{\sin(\theta + i)}{r''_2}\right] ds_2^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces lignes, non encore signalées, croyons-nous, généralisent les précédentes; car, pour $i = 0$, on retrouve les lignes asymptotiques, et pour $i = \frac{\pi}{2}$, on a les lignes de courbure angulaires (42).

Nous indiquerons dans l'un des paragraphes suivants une méthode plus directe pour les obtenir

Enfin, si l'on change i en $i - \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (46), on aura

une équation de même forme représentant les courbes *complémentaires* des précédentes, c'est-à-dire des courbes qui se coupent sous le complément de l'angle constant i donné.

XII.

Examen du cas où les lignes précédentes appartiendraient à une surface.

23. Considérons, durant tout le cours de ce paragraphe, les arcs élémentaires ds_1 et ds_2 des lignes coordonnées S_1, S_2 comme fonctions des paramètres u_1 et u_2 dont nous nous sommes occupés au n° 1; on aura

$$d_1 x = a_1 ds_1, \qquad d_2 x = a_2 ds_2;$$

d'où

$$d_2 d_1 x = d_2 a_1 ds_1 + a_1 d_2 ds_1,$$
$$d_1 d_2 x = d_1 a_2 ds_2 + a_2 d_1 ds_2.$$

Les premiers membres étant égaux, par hypothèse, on doit avoir

$$\frac{\partial a_1}{\partial s_2} ds_1 ds_2 + a_1 d_2 ds_1 = \frac{\partial a_2}{\partial s_1} ds_1 ds_2 + a_2 d_1 ds_2.$$

Si l'on substitue à ces dérivées partielles leurs valeurs (5) et qu'on égale, dans les deux membres, les coefficients de a_1, a_2, a_3, on trouvera

$$d_2 ds_1 = \frac{ds_1 ds_2}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho'_1} + \frac{\cos\theta}{\rho'_2}\right),$$
$$d_1 ds_2 = \frac{ds_1 ds_2}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho'_2} + \frac{\cos\theta}{\rho'_1}\right),$$
$$\frac{1}{\rho''_1} = \frac{1}{\rho''_2}.$$

Telles sont les conditions déjà connues qu'il nous faut introduire dans nos formules pour passer du cas général des systèmes rectilignes à celui des surfaces.

Voyons d'abord ce que deviennent les rayons de première courbure horizontale et verticale (qu'il conviendra d'appeler, pour la circonstance, rayons de première courbure tangentielle et normale).

Nous emprunterons la première de ces expressions à l'abbé Aoust qui, après avoir donné les conditions ci-dessus, l'en fait

sortir par un calcul facile et trouve (voir *Analyse infinitésimale des lignes tracées sur une surface*)

$$(a) \qquad \frac{ds_1 ds_2 \sin\theta}{r'} = d_1(ds_2 \cos\theta_2) - d_2(ds_1 \cos\theta_1).$$

Cela étant, posons avec Gauss

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = E, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} = F, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = G;$$

il viendra

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} = \frac{\delta}{\sqrt{EG}},$$

en faisant

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \delta^2.$$

D'autre part,

$$ds\cos\theta_1 = ds_1 + ds_2\cos\theta,$$
$$ds\cos\theta_2 = ds_2 + ds_1\cos\theta.$$

Multipliant respectivement par $\frac{ds_1}{ds}$, $\frac{ds_2}{ds}$ et substituant, on aura cette forme nouvelle

$$(a') \qquad \frac{\delta}{r'} = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F\,du_1 + G\,du_2}{ds}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{E\,du_1 + F\,du_2}{ds}\right),$$

avec

$$ds^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1 du_2 + G\,du_2^2.$$

Quant à la première courbure normale, si, dans son expression générale (38), on fait $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$, il vient

$$(b) \qquad \frac{ds^2}{r''} = \frac{ds_1^2}{r_1''} + 2\frac{ds_1 ds_2}{\rho_1''} + \frac{ds_2^2}{r_2''};$$

d'où, par l'introduction des paramètres différentiels E, F, G,

$$\frac{ds^2}{r''} = \frac{E}{r_1''}du_1^2 + 2\frac{\sqrt{EG}}{\rho_1''}du_1 du_2 + \frac{G}{r_2''}du_2^2.$$

Il n'y a plus qu'à trouver les valeurs de $\frac{1}{r_1''}$, $\frac{1}{\rho_1''}$, $\frac{1}{r_2''}$. Or nous

avons

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2},$$
$$\frac{\lambda_1}{\rho_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 x}{\partial u_2 du_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on voit que, si, pour abréger, on pose

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2} \end{vmatrix},$$

puis qu'on représente par $\Delta_{1,2}$ ou $\Delta_{2,1}$, indifféremment, et par $\Delta_{2,2}$ deux autres déterminants qui ne diffèrent du précédent qu'en ce que la dernière colonne ait pour éléments $\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u_1 \partial u_2}$ dans le premier et $\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u_2^2}$ dans le second, on aura d'abord

$$\text{(c)} \qquad \frac{E}{r_1''} = \frac{\Delta_{1,1}}{\delta}, \qquad \frac{\sqrt{EG}}{\rho_1''} = \frac{\Delta_{1,2}}{\delta}, \qquad \frac{G}{r_2''} = \frac{\Delta_{2,2}}{\delta},$$

et, par suite, la valeur de la courbure normale que nous voulions obtenir pourra s'écrire

$$\text{(d)} \qquad \frac{\delta}{r''} = \frac{\Delta_{1,1}\,du_1^2 + 2\Delta_{1,2}\,du_1\,du_2 + \Delta_{2,2}\,du_2^2}{E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2}.$$

Faisons quelques applications de ces diverses formules.

26. 1° Rien ne change dans l'équation générale des *lignes géodésiques* lorsqu'on passe des systèmes rectilignes aux surfaces (n° 18); mais, outre cette forme, nous avons, par la formule (a'), celle-ci, qui est plus avantageuse pour le calcul :

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{F\,du_1 + G\,du_2}{ds}\right) = \frac{\partial s}{du_2}\left(\frac{E\,du_1 + F\,du_2}{ds}\right).$$

Premier exemple. — Posons $u_1 = x$, $u_2 = y$, $dz = p\,dx + q\,dy$; on trouve

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2.$$

Par suite, l'équation des lignes géodésiques est, dans ce cas,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{ds}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{ds}\right],$$

avec

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2.$$

On en tire, en faisant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

$$(p\,dy-q\,dx)(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)-(1+p^2+q^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0.$$

Or ceci équivaut à

$$p(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+q(dz\,d^2x-dx\,d^2z)-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0,$$

si l'on a soin d'éliminer de cette dernière les différentielles totales de z. On retrouve ainsi l'équation ordinaire des lignes géodésiques.

Deuxième exemple. — Considérons, comme cas particulier, l'hélicoïde gauche à plan directeur représenté par le système

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,\qquad z=a\omega.$$

En posant $u_1=\omega$, $u_2=\rho$, on a

$$E=\rho^2+a^2,\qquad F=0,\qquad G=1$$

et, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2+(\rho^2+a^2)\,d\omega^2}}\right]=\frac{\partial}{d\rho}\left[\frac{(\rho^2+a^2)\,d\omega}{\sqrt{d\rho^2+(\rho^2+a^2)\,d\omega^2}}\right];$$

d'où, en prenant ω pour variable indépendante,

$$\left(\rho+\frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\omega^2}-2\frac{d\rho}{d\omega}-(\rho^2+a^2)=0,$$

équation différentielle de la projection, sur le plan directeur, des lignes géodésiques de l'hélicoïde.

2° L'indicatrice d'une surface s'obtiendra en posant $\frac{1}{\rho_1''}=\frac{1}{\rho_2''}$ dans l'équation (39). On a donc

$$\frac{X^2}{r_1''}+2\frac{XY}{\rho_1''}+\frac{Y^2}{r_2''}=1$$

ou bien

$$\Delta_{1,1}X^2+2\Delta_{1,2}XY+\Delta_{2,2}Y^2=\delta.$$

L'équation aux carrés des inverses de ses demi-axes $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$ étant

$$\frac{\sin^2\theta}{R^2} - \left(\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - 2\frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right)\frac{1}{R} + \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''^2_1}\right) = 0,$$

on saura former l'équation réduite de l'indicatrice

$$\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} = 1.$$

3° Pour avoir les *lignes asymptotiques* d'une surface, il suffira d'introduire l'hypothèse $\frac{1}{\rho''_1} = \frac{1}{\rho''_2}$, soit dans leur équation générale (n° 21)

$$\frac{\sin\theta^2}{L''_1} + \frac{\sin\theta_1}{L''_1} = 0,$$

soit dans les conditions

$$\frac{da_3}{\alpha} = \frac{db_3}{\beta} = \frac{dc_3}{\gamma},$$

ce qui donne

$$\frac{ds_1^2}{r''_1} + 2\frac{ds_1\, ds_2}{\rho''_1} + \frac{ds_2^2}{r''_2} = 0$$

ou encore

$$(f) \qquad \Delta_{1,1}\, du_1^2 + 2\,\Delta_{1,2}\, du_1\, du_2 + \Delta_{2,2} = 0.$$

En tout ceci, nous avons fait abstraction de l'équation de l'indicatrice qui, comme on le sait, pouvait nous les donner directement.

Faisons dans cette dernière équation $u_1 = x$, $u_2 = y$, on aura

$$\Delta_{1,1} = r, \qquad \Delta_{1,2} = s, \qquad \Delta_{2,2} = t;$$

d'où la forme connue

$$r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t dy^2 = 0.$$

S'il s'agit, en particulier, de l'hélicoïde gauche,

$$\Delta_{1,1} = 0, \qquad \Delta_{1,2} = -a, \qquad \Delta_{2,2} = 0;$$

conséquemment il vient

$$\rho\, d\rho\, d\omega = 0,$$

ce qui donne, sur le plan directeur, des circonférences concentriques et leurs trajectoires orthogonales qui sont les rayons.

4° Les *lignes de courbure* d'une surface, c'est-à-dire, celles pour lesquelles la courbure de front $\frac{1}{r_0}$ (bien inexactement appelée *seconde courbure géodésique* ou *torsion géodésique*) résulte, soit de leur équation générale (n° 22)

$$\frac{\cos\theta_2}{L''_1} = \frac{\cos\theta_1}{L''_2},$$

soit des conditions

$$\frac{da_3}{a} = \frac{db_3}{b} = \frac{dc_3}{c}.$$

On a ainsi

$$(g)\quad \left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right) ds_1^2 + \left(\frac{1}{r''_2} - \frac{1}{r''_1}\right) ds_1\, ds_2 - \left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right) ds_2^2 = 0,$$

ou bien, d'après les formules (c) ci-dessus,

$$(E\Delta_{1,2} - F\Delta_{1,1})\, du_1^2 + (E\Delta_{2,2} - G\Delta_{1,1})\, du_1\, du_2 - (G\Delta_{1,2} - F\Delta_{2,2})\, du_2^2 = 0.$$

En posant $u_1 = x$, $u_2 = y$, on a vu que

$$\Delta_{1,1} = r, \qquad \Delta_{1,2} = s, \qquad \Delta_{2,2} = t,$$
$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2;$$

d'où

$$[(1 + p^2)s - pqr]\, dx^2 + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\, dx\, dy - [(1 + q^2)s - pqt]\, dy^2 = 0,$$

ce qui est bien l'équation ordinaire des lignes de courbure.

Entre autres propriétés, observons que, si l'on pose $\frac{ds_2}{ds_1} = m$, l'équation (g) de ces lignes prendra la forme

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}m + \mathfrak{C}m^2 = 0;$$

la condition d'orthogonalité

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{B}\cos\theta = 0$$

est donc satisfaite.

Il y a plus, cette équation (g) est explicitement de la forme

$$(B - A\cos\theta) + (C - A)m - (B - C\cos\theta)m^2 = 0;$$

les lignes de courbure d'une surface sont donc tangentes aux sections principales.

Supposons que l'on ait $\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''^2_1} = 0$, l'indicatrice se réduira

à deux droites parallèles et l'on sera dans le cas des surfaces développables. L'équation des lignes de courbure se décompose alors en

$$\left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos\theta}{r_1''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos\theta}{\rho_1''}\right) ds_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos\theta}{r_1''}\right) ds_1 - \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos\theta}{\rho_1''}\right) ds_2 = 0,$$

et il est aisé de reconnaître dans la première équation de ce système la direction de la génératrice rectiligne ou la tangente à l'arête de rebroussement de la surface, etc.

5° Les *lignes conjuguées* qui se coupent sous un angle constant i ont pour équation (n° 24)

$$(h)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\sin i}{\rho_1''} + \frac{\sin(\theta - i)}{r_1''}\right] ds_1^2 \\ &+ \left\{\left[\frac{\sin i}{r_2''} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho_1''}\right] - \left[\frac{\sin i}{r_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho_1''}\right]\right\} ds_1\, ds_2 \\ &- \left[\frac{\sin i}{\rho_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{r_2''}\right] ds_2^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $i = 0$, on retrouve les lignes asymptotiques et, pour $i = \frac{\pi}{2}$, les lignes de courbure.

Enfin, on obtiendrait les lignes *complémentaires* des lignes (h), en remplaçant dans leur équation i par $i - \frac{\pi}{2}$.

XIII.

Deuxième application : recherche de quelques lieux géométriques.

27. Après cette digression sur les surfaces, revenons à considérer s_1 et s_2 comme variables indépendantes.

Formules préliminaires. — Calculons, en premier lieu, les cosinus directeurs $(a'_\varepsilon, b'_\varepsilon, c'_\varepsilon)$ de MV', troisième arête du trièdre trirectangle MNVV' (*fig.* 4).

On a

$$\frac{a'_\varepsilon}{v} = b_3 \frac{dc_3}{ds} - c_3 \frac{db_3}{ds},$$

et par suite (14)

$$(47)\qquad \frac{a'_\varepsilon}{v} \sin\theta = \frac{a_1}{L_2''} - \frac{a_2}{L_1''}.$$

Mais la première des formules (1) nous permet d'écrire

$$\frac{a'_\varepsilon}{\rho} = \frac{\sin\theta'_2}{\rho}\,\frac{a_1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta'_1}{\rho}\,\frac{a_2}{\sin\theta}.$$

Comparant, il vient

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\theta'_1}{\rho} = -\dfrac{1}{L''_1}, \\ \dfrac{\sin\theta'_2}{\rho} = \dfrac{1}{L''_2}. \end{cases}$$

On en conclut aussitôt, en faisant $\dfrac{\sin\theta'_1}{\sin\theta'_2} = \dfrac{ds'_2}{ds'_1} = m'$,

$$(49)\qquad \frac{ds'_1}{L''_1} + \frac{ds'_2}{L''_2} = 0$$

et, successivement,

$$\frac{ds_1\,ds'_1}{r''_1} + \frac{ds_2\,ds'_1}{\rho''_2} + \frac{ds_1\,ds'_2}{\rho''_1} + \frac{ds_2\,ds'_2}{r''_2} = 0,$$

$$(49')\qquad \frac{1}{r''_1} + \left(\frac{m}{\rho''_2} + \frac{m'}{\rho''_1}\right) + \frac{mm'}{r''_2} = 0,$$

formule qui généralise, pour les coordonnées obliques, la relation (34), et qui, conjointement avec l'expression connue

$$\operatorname{tang} i = \frac{(m'-m)\sin\theta}{1+(m+m')\cos\theta+mm'},$$

fait retomber, par l'élimination de m, sur l'équation des *lignes pseudo-conjuguées* (46). C'est la solution que nous avions annoncée au même lieu.

Quant aux cosinus des angles θ'_1 et θ'_2 relatifs à MV', on peut les tirer des valeurs (48) qui donnent (n° 9)

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\theta'_1}{\rho} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_2} - \dfrac{\cos\theta}{L''_2}\right) = \dfrac{\sin\theta_1}{\zeta_1}; \\ \dfrac{\cos\theta'_2}{\rho} = -\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_1} - \dfrac{\cos\theta}{L''_2}\right) = -\dfrac{\sin\theta_2}{\zeta_2}. \end{cases}$$

2° Il nous sera utile de résoudre, par rapport à θ_1 et θ_2, les formules (48) et (50).

En posant, pour abréger,

$$\frac{\sin\theta'_2}{r''_1} + \frac{\sin\theta'_1}{\rho''_1} = \frac{\sin\theta}{L''_1},$$

$$\frac{\sin\theta'_1}{r_2} + \frac{\sin\theta'_2}{\rho''_2} = \frac{\sin\theta}{L''_2},$$

conjointement avec

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r''_1 r''_2}-\frac{1}{\rho''_1\rho''_2}\right)=k,$$

on trouve

$$(51)\qquad \begin{cases} kv\sin\theta_1 = \dfrac{1}{L''_{1'}}, \\ kv\sin\theta_2 = -\dfrac{1}{L''_{2'}}, \end{cases}$$

résultat qui permet de mettre la relation fondamentale (49) sous la forme

$$\frac{ds_1}{L''_{1'}}+\frac{ds_2}{L''_{2'}}=0,$$

et qui nous donne aussi, pour les cosinus correspondants,

$$(52)\qquad \begin{cases} kv\cos\theta_1 = -\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_{2'}}-\dfrac{\cos\theta}{L''_{1'}}\right), \\ kv\cos\theta_2 = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{1}{L''_{1'}}-\dfrac{\cos\theta}{L''_{2'}}\right). \end{cases}$$

Finalement, on a donc, comme nouvelle expression de la déviation verticale,

$$k^2\rho^2\sin^2\theta=\frac{1}{L''^2_{1'}}+\frac{1}{L''^2_{2'}}-2\frac{\cos\theta}{L''_{1'}L'_{2'}}.$$

On verra, par l'application que nous allons en faire, l'utilité et l'importance de ces formules auxiliaires.

28. Problème I. — *Ligne de striction axiale.* — Cherchons, en projection horizontale, le lieu que décrit l'extrémité K de la plus courte distance de la verticale MN à la pseudo-normale M'N', lorsque celle-ci tourne autour de MN en s'appuyant sur une courbe infinitésimale située dans le plan horizontal (*fig.* 4).

On a d'abord (33)

$$d\lambda = ds\sin\omega = ds\cos(\theta'_1-\theta_1) = ds\cos(\theta_2-\theta'_2);$$

d'où, en développant l'une ou l'autre de ces relations,

$$(53)\qquad kv\,d\lambda=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\cos\theta'_2}{L'_{1'}}-\frac{\cos\theta'_1}{L''_{2'}}\right)ds,$$

l'arc *ds* n'étant assujetti qu'à la condition de rester infiniment petit.

Cette formule résout la question pour le cas très général où l'on voudrait rapporter la direction MV′ du rayon vecteur MP à deux directions quelconques MT_1 et MT_2. Mais il est plus simple de supposer ces deux directions rectangulaires entre elles, et l'on aura alors, dans le système de coordonnées polaires $d\lambda$ et θ'_1,

$$(53') \qquad d\lambda = \frac{\frac{\sin\theta'_1}{\rho''_1} + \left(\frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r''_2}\right)\sin\theta'_1\cos\theta'_1 - \frac{\cos^2\theta'_1}{\rho''_2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos\theta'_1}{r''_1} + \frac{\sin\theta'_1}{\rho'_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta'_1}{r''_2} + \frac{\cos\theta'_1}{\rho'_2}\right)^2}}\, ds,$$

ds étant une fonction quelconque de θ_1 et par conséquent de θ'_1.

Sous cette forme, on voit aisément que $d\lambda$ s'annule dans la *direction* des trajectoires orthogonales des lignes de courbure angulaires, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

Nous donnerons ultérieurement à ce lieu une forme plus simple.

29. Problème II. — *Conoïde de striction axiale.* — Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des perpendiculaires communes à MN et à M′N′.

Soit z' la distance au plan T_1MT_2, mesurée dans le plan projetant NMV′, de la perpendiculaire IK.

Nous partirons des relations évidentes (n° 8)

$$z' = -\frac{M'P}{d\varepsilon} = -\rho\cos\omega = \frac{\rho^2}{r''_\tau},$$

$\frac{1}{r''_\tau}$ désignant la courbure normale relative à la direction MT.

En exprimant cette courbure au moyen des angles θ'_1 et θ'_2 par les formules (51), on trouve

$$(54) \qquad \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1\rho''_2}\right)z' = \frac{\sin^2\theta'_2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\sin\theta'_1\sin\theta'_2 + \frac{\sin^2\theta'_1}{r''_2} = \frac{\sin^2\theta}{r''_{v'}},$$

$\frac{1}{r''_{v'}}$ désignant la courbure normale relative à la direction MV′ pseudo-conjuguée de MT.

Cette équation représente le lieu demandé.

En cherchant par la méthode ordinaire les valeurs limites de z',

on trouve qu'elles sont fournies par l'équation quadratique

$$(55)\qquad \begin{cases} (kz')^2\sin^2\theta - \left[\frac{1}{r''_1}+\frac{1}{r''_2}-\left(\frac{1}{\rho''_1}+\frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta\right]kz' \\ \qquad\qquad +\left[\frac{1}{r''_1 r''_2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho''_1}+\frac{1}{\rho''_2}\right)^2\right]=0. \end{cases}$$

Celle que donne, pour le même objet, M. Kummer, dans sa *Théorie générale des systèmes rectilignes,* bien qu'équivalente à la précédente, est moins simple; car elle renferme, comme éléments surabondants, les déviations verticales relatives aux lignes coordonnées. Elle peut s'écrire, en effet, ainsi

$$\frac{\sin^2(\varphi_1,\varphi_2)}{\varphi_1^2\varphi_2^2}z'^2-\left[\frac{1}{r''_1\varphi_2^2}+\frac{1}{r''_2\varphi_1^2}-\left(\frac{1}{\rho''_1}+\frac{1}{\rho''_2}\right)\frac{\cos(\varphi_1,\varphi_2)}{\varphi_1\varphi_2}\right]z' +\left[\frac{1}{r''_1 r''_2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho''_1}+\frac{1}{\rho''_2}\right)^2\right]=0.$$

Cette équation, avons-nous dit, est équivalente à la nôtre (55), comme on peut le vérifier, en s'aidant des relations suivantes, faciles à établir :

$$\frac{\sin(\varphi_1,\varphi_2)}{\varphi_1\varphi_2}=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r''_1 r''_2}-\frac{1}{\rho''_1\rho''_2}\right)=k\sin\theta,$$

$$\frac{\cos(\varphi_1,\varphi_2)}{\varphi_1\varphi_2}=\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{r''_1}\left(\frac{1}{\rho''_2}-\frac{\cos\theta}{r''_2}\right)+\frac{1}{\rho''_1}\left(\frac{1}{r''_2}-\frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right)\right].$$

Lorsque $\theta=\frac{\pi}{2}$, la somme $\left(\frac{1}{P''_1}+\frac{1}{P''_2}\right)$ relative aux plans principaux est nulle et l'on a, au lieu de l'équation (54), les axes de l'indicatrice servant d'axes de coordonnées,

$$\left(\frac{1}{R''_1R''_2}-\frac{1}{P''_1P''_2}\right)z'=\frac{\cos^2\theta'_1}{R''_1}+\frac{\sin^2\theta''_1}{R''_2}=\frac{1}{r''_{\nu'}}.$$

Mais l'invariant $\frac{1}{R''_1R''_2}-\frac{1}{P''_1P''_2}$ peut être remplacé par l'invariant $\frac{1}{r''_{f_1}r''_{f_2}}$ relatif aux foyers (n° 22); on a donc, pour le maximum z'_1 et pour le minimum z'_2 (R''_2 étant supposé plus grand que R''_1),

$$z'_1=\frac{r''_{f_1}r''_{f_2}}{R''_1},\qquad z'_2=\frac{r''_{f_1}r''_{f_2}}{R''_2}.$$

Ces formules nous paraissent plus simples que toutes celles qui ont été présentées jusqu'ici, à notre connaissance du moins.

30. Problème III. — *Surface d'un pinceau circumaxial de pseudo-normales.* — Il nous reste à trouver l'équation de la surface gauche, lieu des pseudo-normales M'N'.

En représentant par $d\xi$, $d\eta$ et ζ les coordonnées courantes, et cela à cause du peu d'écart des droites M'N' par rapport à la verticale MN, on aura, pour les équations de l'une quelconque d'entre elles, les axes étant supposés obliques sur le plan des XY,

$$\frac{d\xi \sin\theta - ds\sin\theta_2}{d\lambda \sin\theta'_2 - ds\sin\theta_2} = \frac{d\eta \sin\theta - ds\sin\theta_1}{d\lambda \sin\theta'_1 - ds\sin\theta_1} = \frac{\zeta}{z'}.$$

En supprimant, dans ces trois dénominateurs, le facteur commun M'P ou $ds\cos\omega$ qui s'y trouve impliqué sous les formes équivalentes $ds\sin(\theta_2 - \theta'_2)$ et $ds\sin(\theta'_1 - \theta_1)$, il vient

$$\frac{d\xi \sin\theta - ds\sin\theta_2}{-\cos\theta'_2} = \frac{d\eta \sin\theta - ds\sin\theta_1}{\cos\theta'_1} = \frac{\zeta\, ds}{-\nu};$$

puis, finalement, au moyen des formules (50) :

$$\frac{d\xi - ds_1}{\left(\frac{1}{r''_1} - \frac{\cos\theta}{\rho''_1}\right)ds_1 + \left(\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2}\right)ds_2} = \frac{d\eta - ds_2}{\left(\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1}\right)ds_1 + \left(\frac{1}{r''_2} - \frac{\cos\theta}{\rho''_2}\right)ds_2} = \frac{\zeta}{-\sin^2\theta}.$$

On en tire

$$(56)\quad \begin{cases} \Delta_\mu ds_1 = \left[1 - \dfrac{\zeta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{1}{r''_2} - \dfrac{\cos\theta}{\rho''_2}\right)\right]d\xi + \dfrac{\zeta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{1}{\rho''_2} - \dfrac{\cos\theta}{r''_2}\right)d\eta, \\ \Delta_\mu ds_2 = \dfrac{\zeta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{1}{\rho''_1} - \dfrac{\cos\theta}{r''_1}\right)d\xi + \left[1 - \dfrac{\zeta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{1}{r''_1} - \dfrac{\cos\theta}{\rho''_1}\right)\right]d\eta, \end{cases}$$

en posant

$$(57)\quad \Delta_\mu = \frac{\zeta^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) - \frac{\zeta}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta\right] + 1,$$

ou bien (43)

$$(57')\quad \Delta_\mu = \left(1 - \frac{\zeta}{r''_{f_1}}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{r''_{f_2}}\right).$$

Il n'y aura plus qu'à substituer ces trois expressions dans l'équation $F_0(ds_1, ds_2) = 0$ de la directrice donnée pour avoir, dans chaque cas, la surface du pinceau correspondant.

Les sections horizontales de tels pinceaux de droites jouissent de cette propriété, que le rapport de leur aire à celle de la directrice plane donnée est égal à Δ_μ; mais cette propriété, toute remarquable qu'elle est, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général que nous établirons à la fin de ce paragraphe.

Supposons que la directrice soit le cercle

$$ds_1^2 + ds_2^2 = ds^2,$$

ce qui suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, la surface du pinceau correspondant sera

$$\left[\left(1 - \frac{\zeta}{r''_2}\right) d\xi + \frac{\zeta}{\rho''_2}\, d\eta\right]^2 + \left[\frac{\zeta}{\rho''_1}\, d\xi + \left(1 - \frac{\zeta}{r''_1}\right) d\eta\right]^2$$
$$= \left[\zeta^2 \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) - \zeta\left(\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2}\right) + 1\right]^2 ds^2,$$

et l'on vérifie aisément, pour l'aire A_ζ, que l'on a bien

$$\frac{A_\zeta}{\pi\, ds^2} = \Delta_\mu.$$

Le cône des directions asymptotiques, qui est le cône directeur du pinceau, ayant pour équation

$$\left(\frac{d\xi}{r''_2} - \frac{d\eta}{\rho''_2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{\rho''_1} - \frac{d\eta}{r''_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right)^2 \zeta^2\, ds^2,$$

l'aire a_ζ de sa section par le plan $z = \zeta$ donnera de même, comparée au cercle directeur,

$$\frac{a_\zeta}{\pi\, ds^2} = \zeta^2 \left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) = k\zeta^2,$$

et, si l'on pose $\zeta = 1$, ce rapport sera égal à k, propriété connue (n° 5, *Application*).

31. On peut se demander, comme développement de la question présente, si la surface d'un pinceau est susceptible d'être engendrée, dans tous les cas, par le mouvement d'une droite s'appuyant sur une courbe infinitésimale plane et sur deux droites obliques entre elles et parallèles au plan de la courbe.

Pour le reconnaître, reportons-nous aux formules (45). Si l'on y fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\rho''_1} = \frac{1}{\rho''_2} = 0$, il vient $\zeta_1 = R_2$ et $\zeta_2 = R_1$, ce qui est le cas des vraies normales, s'appuyant toujours sur deux droites rec-

tangulaires parallèles aux tangentes des sections principales (Sturm).

Mais, dans tout ce travail, le § XII excepté, nous avons supposé que $\frac{1}{\rho''_1} \gtrless \frac{1}{\rho''_2}$, d'où l'on voit que ζ_1 et ζ_2 ne peuvent devenir simultanément constants que de deux manières : ou bien parce que m et $\frac{1}{m}$ sont eux-mêmes constants, ou bien parce que les coefficients de ces quantités sont nuls.

1° Si m est constant, le pied de la pseudo-normale M'N' parcourt l'élément fixe MM' ou ds et le lieu de cette génératrice doit, *a priori*, être un paraboloïde hyperbolique.

Effectivement, les équations de M'N' pouvant s'écrire, *dans le cas le plus général,*

$$d\xi = \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right) ds_1,$$

$$d\eta = \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) ds_2;$$

on en déduit, pour le cas présent, le paraboloïde hyperbolique

$$\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right) d\eta = m \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi. \tag{58}$$

2° Si les coefficients de m et de $\frac{1}{m}$, dans les équations (45), sont nuls, c'est que l'on a

$$\frac{r''_1}{\rho''_1} = \frac{r''_2}{\rho''_2} = \cos\theta, \tag{59}$$

ce qui entraîne

$$\zeta_1 = r''_2, \qquad \zeta_2 = r''_1, \qquad \Delta_\mu = \left(1 - \frac{\zeta}{r''_1}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{r''_2}\right),$$

$$ds_1 = \frac{d\xi}{1 - \frac{\zeta}{r''_1}}, \qquad ds_2 = \frac{d\eta}{1 - \frac{\zeta}{r''_2}};$$

d'où l'on voit que, dans ce cas du moins, le lieu est produit par le mouvement d'une droite s'appuyant sur la directrice donnée et sur les droites ($x = 0$, $z = r''_1$) et ($y = 0$, $z = r''_2$) respectivement situées dans les plans des coordonnées. Or il est aisé de prouver que ces plans ne sont actuellement autres que les *plans focaux*.

En effet, les conditions (59) pourront s'écrire :

$$\frac{1}{\rho''_1} - \frac{\cos\theta}{r''_1} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho''_2} - \frac{\cos\theta}{r''_2} = 0.$$

On en conclut (23)

$$\frac{1}{r_{0,1}} = \frac{1}{r_{0,2}} = 0.$$

Ainsi, les courbures de front relatives aux lignes coordonnées sont nulles. Les axes OX et OY sont donc tangents *aux lignes de courbure obliques* du système, ce qui démontre la propriété.

Il devient dès lors nécessaire de remplacer dans nos dernières formules r''_1 et r''_2 par r''_{f_1} et r''_{f_2} et θ par $\mathfrak{I}$, qui désigne déjà l'angle des plans focaux.

32. Venons enfin au théorème que nous avons annoncé (n° 30).

THÉORÈME. — *Soient deux courbes fermées* $F_0(x,y) = 0$ *et* $\mathfrak{F}_0(x,y) = 0$, *situées dans un même plan* Π_0 *et rapportées à des axes obliques d'angle* θ *pris dans ce plan.*

Supposons que les aires A_0 et $\mathfrak{A}_0$ de ces courbes soient égales et considérons les deux surfaces représentées par les équations

$$(60)\quad F_0\left(\frac{Mx+Ny}{D}, \frac{Px+Qy}{D}\right) = 0, \qquad \mathfrak{F}_0\left(\frac{\mathfrak{M}x+\mathfrak{N}y}{\mathfrak{D}}, \frac{\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}y}{\mathfrak{D}}\right) = 0,$$

dans lesquelles

$$D = \begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} \end{vmatrix},$$

et où, l'axe des z ayant une direction quelconque, les coefficients M, N, P, Q et $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sont des fonctions continues de cette variable, telles que, pour $z = 0$, on ait les valeurs correspondantes

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= Q_0 = D_0 = 1 \\ \mathfrak{M}_0 &= \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{D}_0 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} N_0 &= P_0 = 0, \\ \mathfrak{N}_0 &= \mathfrak{P}_0 = 0; \end{aligned}\right.$$

le rapport des aires des sections faites dans ces deux surfaces par un même plan parallèle au plan donné est égal à $\frac{D}{\mathfrak{D}}$.

Coupons, en effet, la première surface par le plan $z = \zeta$ et désignons, pour un instant par ξ', η' les coordonnées d'un point quelconque de la section produite.

La différentielle de son aire aura pour valeur

$$dA_\zeta = \tfrac{1}{2}(\xi' d\eta' - \eta' d\xi') \sin\theta;$$

or, à cause des relations

$$x = \frac{M\xi' + N\eta'}{D}, \qquad y = \frac{P\xi' + Q\eta'}{D},$$

ceci revient à

$$dA_\zeta = \tfrac{1}{2} D(x\,dy - y\,dx)\sin\theta = D\,dA_\zeta.$$

On en conclut, en supposant la constante nulle,

$$\frac{A_\zeta}{A_0} = D;$$

mais la seconde surface donnera à son tour

$$\frac{\mathcal{A}_\zeta}{\mathcal{A}_0} = \mathfrak{D},$$

et puisque, par hypothèse, $A = \mathcal{A}_0$, on a donc

$$\frac{A_\zeta}{\mathcal{A}_\zeta} = \frac{D}{\mathfrak{D}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Soient m, n, p, q, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ les termes qu'il faut prendre dans les fonctions de z correspondantes pour constituer les cônes des directions asymptotiques respectifs, ces termes étant, comme on le sait, ceux du degré le plus élevé lorsqu'il s'agit de fonctions algébriques. Si l'on pose

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{d} = \begin{vmatrix} \mathfrak{m} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{q} \end{vmatrix},$$

les équations des cônes considérés pouvant s'écrire généralement

$$F_0\left(\frac{mx + ny}{\mathfrak{d}}, \frac{px + qy}{\mathfrak{d}}\right) = 0 \qquad \mathfrak{F}_0\left(\frac{\mathfrak{m}x + \mathfrak{n}y}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{p}n + \mathfrak{q}y}{\mathfrak{d}}\right) = 0.$$

il suit de la démonstration précédente que le rapport des aires des sections produites dans ces cônes par le plan $z = \zeta$ est égal à $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}}$.

Corollaire II. — Prenons deux surfaces réglées ayant pour génératrices, l'une, un système de pseudo-normales relatives à l'indicatrice de la surface F_μ (n° 19), l'autre un système de vraies normales relatives à l'indicatrice de la surface F_ν (n° 22), leurs directrices planes respectives étant supposées à aires égales. Coupons les deux surfaces par le plan $z = \zeta$; il résulte du théorème précédent que l'on aura

$$\frac{A\zeta}{\mathcal{A}\zeta} = \frac{\Delta_\mu}{\Delta_\nu},$$

proportion dans laquelle on a posé (n° 30)

$$\Delta_\mu = \frac{\zeta^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) - \frac{\zeta}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - \left(\frac{1}{\rho''_1} + \frac{1}{\rho''_2}\right)\cos\theta\right] + 1,$$

$$\Delta_\nu = \frac{\zeta^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r''_1 r''_2} - \frac{1}{\rho''_1 \rho''_2}\right) - \frac{\zeta}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{r''_1} + \frac{1}{r''_2} - 2\frac{\cos\theta}{\sqrt{\rho''_1 \rho''_2}}\right) + 1,$$

ou bien

$$\Delta_\mu = \left(1 - \frac{\zeta}{r''_{f_1}}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{r''_{f_2}}\right),$$

$$\Delta_\nu = \left(1 - \frac{\zeta}{R''_{\nu_1}}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{R''_{\nu_2}}\right),$$

$\frac{1}{r''_{f_1}}, \frac{1}{r''_{f_2}}$ étant les courbures normales des lignes de courbure obliques, et $\frac{1}{R''_{\nu_1}}, \frac{1}{R''_{\nu_2}}$ les courbures normales principales de la surface F_ν au point M.

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on voit que $\Delta_\mu = \Delta_\nu$. Donc aussi $A\zeta = \mathcal{A}\zeta$, propriété remarquable qui n'appartient qu'à ce cas.

Quant aux cônes directeurs, comme le rapport des aires des sections faites dans chacun d'eux par le plan $z = \zeta$ à l'aire commune des directrices planes est égal à $K_\mu \zeta^2$, dans tous les cas, ces sections sont équivalentes.

Cas particulier. — Lorsque les équations (60) sont de la forme

$$F_0\left(\frac{x}{1 - \frac{z}{r_\alpha}}, \frac{y}{1 - \frac{z}{r_\beta}}\right) = 0, \qquad \mathcal{F}_0\left(\frac{x}{1 - \frac{z}{r_\gamma}}, \frac{y}{1 - \frac{z}{r_\delta}}\right) = 0,$$

elles représentent deux sufraces réglées produites par le mouvement de deux droites s'appuyant respectivement sur les directrices

planes F_0 et $\mathcal{F}_0$, et sur deux parallèles au plan commun de ces courbes (n° 31). Comme le théorème est applicable à cette catégorie de surfaces, il l'est aussi aux pinceaux de pseudo-normales *à lignes de courbure réelles* qui rentrent toutes dans ce type.

33. Nous terminerons ce paragraphe par la remarque suivante :

La pseudo-normale M'N' est une génératrice commune à trois paraboloïdes hyperboliques ayant, pour l'un de leurs plans directeurs, les plans des xy. Le premier de ces paraboloïdes (58) qui contient l'axe des z a son équation à coefficients réels ou imaginaires, selon que les lignes de courbure obliques sont réelles ou imaginaires. Quant aux deux autres, qui passent respectivement par les horizontales ($d\xi = ds_1$, $\zeta = 0$) et ($d\eta = ds_2$, $\zeta = 0$), ils sont toujours réels : seulement ils dégénèrent en deux couples de plans sécants lorsque les lignes de courbure sont réelles.

XIV.

Étude nouvelle des foyers et des plans focaux.

34. I. *Transformation préalable de nos principales formules.* — Examinons d'abord ce que deviennent nos plus importantes formules, lorsqu'on prend pour plans des ZX et des ZY les plans focaux du système donné, lesquels sont supposés faire entre eux l'angle aigu $\mathfrak{I}$.

Il suffira d'introduire, dans chacune, les conditions (59).

D'après cela, la première courbure de profil (15), et la première courbure de front (16) devront s'écrire, en posant $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}$,

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\mathfrak{I}}{r''} = \dfrac{\cos\mathfrak{I}_1}{r'_{f_1}}\sin\mathfrak{I}_2 + \dfrac{\cos\mathfrak{I}_2}{r''_{f_2}}\sin\mathfrak{I}_1, \\ \dfrac{\sin\mathfrak{I}}{r_0} = \left(\dfrac{1}{r''_{f_2}} - \dfrac{1}{r''_{f_1}}\right)\sin\mathfrak{I}_1\sin\mathfrak{I}_2, \end{cases}$$

ce qui généralise les formules d'Euler et de M. Bertrand.

De même, la déviation verticale prendra, entre autres formes (*voir* 21'''), la suivante

$$(62)\qquad \frac{\sin^2\mathfrak{I}}{\rho^2} = \frac{\sin^2\mathfrak{I}_2}{r''^2_{f_1}} + \frac{\sin^2\mathfrak{I}_1}{r''^2_{f_2}} + 2\frac{\sin\mathfrak{I}_1\sin\mathfrak{I}_2}{r''_{f_1}r''_{f_2}}\cos\mathfrak{I}_1$$

et ses composantes générales (25‴) et (26‴) pourront, tout spécialement, s'écrire, à cause de $\zeta_1 = r''_{f_2}$ et $\zeta_2 = r''_{f_1}$,

$$(63)\quad \begin{cases} -\dfrac{\sin\Im}{\rho_i} = \dfrac{\cos i}{\zeta_j}\sin\Im = \dfrac{\cos(\Im_1+i)}{r''_{f_1}}\sin\Im_2 + \dfrac{\cos(\Im_2-i)}{r''_{f_2}}\sin\Im_1, \\ -\dfrac{\sin\Im}{\rho_j} = \dfrac{\sin i}{\zeta_i}\sin\Im = \dfrac{\sin(\Im_1+i)}{r''_{f_1}}\sin\Im_2 - \dfrac{\sin(\Im_2-i)}{r''_{f_2}}\sin\Im_1. \end{cases}$$

Quant aux lignes pseudo-conjuguées (46) qui se coupent sous l'angle i, leur équation deviendra

$$\frac{\cos i}{r''_{f_1}}\,ds_1^2 + \left[\frac{\cos(\Im+i)}{r''_{f_1}} + \frac{\cos(\Im-i)}{r''_{f_1}}\right] ds_2\,ds_2 + \frac{\cos i}{r''_{f_2}}\,ds_2^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

35. II. *Propriétés diverses.* — 1° L'équation de la ligne de striction axiale (53) se transformant en

$$d\lambda = \frac{(r''_{f_2} - r''_{f_1})\cos\Im'_1\cos\Im'_2}{\sqrt{r''^2_{f_1}\cos^2\Im'_2 + r''^2_{f_2}\cos^2\Im'_1 - 2r''_{f_1}r''_{f_2}\cos\Im'_1\cos\Im'_2\cos\Im}}\,ds,$$

il s'ensuit que, tandis que l'arc ds tourne autour du point M, le point *représentatif* de M. Mannheim, c'est-à-dire, le point x de IK, tel que $Mx = \rho$, et par conséquent tel que

$$Ix = r' = \rho\sin\omega\,\frac{\rho^2}{r_0},$$

décrit, en projection horizontale, la courbe

$$(x)\qquad r'\sin\Im = (r''_{f_2} - r''_{f_1})\cos\Im'_1\cos\Im'_2;$$

et comme, d'autre part, on a aussi

$$Ix = \frac{ds}{d\varepsilon}\sin\omega = \frac{d\lambda}{d\varepsilon},$$

on voit que le lieu obtenu de la sorte mesure, par ses rayons vecteurs successifs, la variation du *paramètre de distribution* des plans centraux des *pseudo-normalies* MNM'N'.

2° Quant au point χ de IK, à partir duquel on aperçoit constamment le segment *focal*, $r''_{f_2} - r''_{f_1}$, sous un angle droit, on trouve à l'aide des relations

$$r'^2 = (r''_{f_2} - z')(z' - r''_{f_1}),$$
$$z'\sin\Im = r''_{f_1}\sin\Im'_1\cos\Im'_2 + r''_{f_2}\sin\Im'_2\cos\Im'_1.$$

dont la seconde n'est que la formule (54) transformée, on trouve, dis-je, que le lieu que ce point décrit sur le plan horizontal est la courbe

$$(\chi) \qquad r'^2 \sin^2 \Im = \tfrac{1}{4}(r''_{f_2} - r''_{f_1})^2 \sin 2\Im'_1 \sin^2 \Im'_2.$$

3° Lorsque $\Im = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, dans le cas des surfaces, les deux lieux $(\varkappa)$ et (χ) se transforment simultanément en la rosace à quatre branches,

$$r' = \tfrac{1}{2}(R_2 - R_1) \sin 2\theta'_1.$$

4° Si l'on cherche, au moyen de la seconde des formules (63), l'équation du conoïde que décrit l'horizontale $I_i K_i$ (*fig.* 4) durant la rotation de l'arc *ds*, on trouvera

$$\frac{\xi^2 + \eta_1^2 + 2\xi\eta_1 \cos \Im}{\zeta} = \frac{\xi^2}{r''_{f_2}} + \left[\frac{\sin(\Im + i)}{\sin i}\frac{1}{r''_{f_1}} - \frac{\sin(\Im - i)}{\sin i}\frac{1}{r''_{f_3}}\right]\xi\eta_1 + \frac{\eta_1^2}{r''_{f_1}}.$$

Le conoïde décrit par l'horizontale $I_j K_j$ peut s'en déduire en changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$.

Enfin, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'une surface, le premier de ces deux lieux géométriques devient

$$\frac{X^2 + Y^2}{Z} = \frac{X^2}{R_2} + \cot i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) XY + \frac{Y^2}{R_1}.$$

36. III. *Formule d'Hamilton.* — Reprenons la valeur de z écrite plus haut. En annulant sa dérivée, on est conduit à résoudre l'équation

$$\cos(\Im'_1 - \Im'_2) = 0.$$

Cette équation fournit un maximum z'_1 correspondant à la direction $\frac{\Im}{2} - \frac{\pi}{4}$, et un minimum z'_2 correspondant à la direction $\frac{\Im}{2} + \frac{\pi}{4}$. Donc ces valeurs limites correspondent aux plans principaux NMA_1 et NMA_2, ce que l'on savait déjà par l'équation (55).

Du reste, ces valeurs maxima et minima, déduites de la valeur générale de z', vérifient le système

$$z'_1 + z'_2 = r''_{f_1} + r''_{f_2}.$$

$$z'_1 - z'_2 = \frac{r''_{f_2} - r''_{f_1}}{\sin \Im}.$$

Rappelant que l'on a aussi (n° 29)

$$z'_1 = \frac{r''_{f_1} r''_{f_2}}{R''_1}, \qquad z'_2 = \frac{r''_{f_1} r''_{f_2}}{R''_2},$$

on en conclut

$$z' = z'_1 \cos^2\left[\mathfrak{I}'_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathfrak{I}\right)\right] + z'_2 \sin^2\left[\mathfrak{I}'_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mathfrak{I}\right)\right] = z'_1 \cos^2\theta'_1 + z'_2 \sin^2\theta'_1,$$

l'angle polaire θ'_1 étant compté à partir du premier plan principal NMA_1. C'est la formule d'Hamilton.

Il en résulte qu'on peut écrire ces relations nouvelles

$$k = \frac{1}{r''_{f_1} r''_{f_2}} = \frac{1}{R''_{v_1} R''_{v_2}} = \frac{1}{R''_1 z'_1} = \frac{1}{R''_2 z'_2} = \frac{1}{r'' z'}.$$

37. Comme complément, proposons-nous aussi de fixer les traces horizontales des pseudo-normales limites, c'est-à-dire de celles qui correspondent aux valeurs limites de z'.

En désignant par m_1 et m_2 les coefficients angulaires des rayons vecteurs qui aboutissent à ces traces, un calcul direct donne d'abord

$$m_1 = -\frac{r''_{f_2}}{r''_{f_1}} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathfrak{I}}{2}\right),$$
$$m_2 = -\frac{r''_{f_2}}{r''_{f_1}} \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathfrak{I}}{2}\right).$$

Il s'ensuit que ces quantités sont les racines de l'équation du second degré

$$r''^2_{f_1} m^2 + 2\frac{r''_{f_1} r''_{f_2}}{\cos\mathfrak{I}} m + r''^2_{f_2} = 0.$$

On en déduit facilement, pour les angles que les deux rayons vecteurs font soit entre eux, soit avec la trace du plan principal le plus voisin,

$$\operatorname{tang}(m_1, m_2) = -\frac{2 r''_{f_1} r''_{f_2}}{(r''_{f_2} - r''_{f_1})^2} \frac{\sin^2\mathfrak{I}}{\cos\mathfrak{I}},$$
$$\frac{\operatorname{tang}(m_1, A_1)}{z'_1} = \frac{\operatorname{tang}(A_2, m_2)}{z'_2} = \frac{\operatorname{tang}\mathfrak{I}}{\frac{1}{2}(r''_{f_2} - r''_{f_1})},$$

ce qu'on peut vérifier directement par des considérations géométriques analogues à celles du n° 9.

38. IV. *Formule de Kummer.* — *Son extension.* — Considérons les deux plans normaux NMH_i et NMT_j dont il a été question au n° 12. Ces plans interceptent sur la pseudo-normale M'N' (*fig.* 4) un segment K_iK_j dont la projection sur MN est I_iI_j. Soient ζ_i et ζ_j les deux segments partiels (le premier positif et le second négatif, tant que l'angle donné i satisfait à la condition $\omega + i > \frac{\pi}{2}$), suivant lesquels le plan horizontal T_1MT_2 coupe le segment total. Il s'agit d'évaluer ζ_i et ζ_j en fonction de l'angle constant i et des valeurs maxima et minima que prennent ces deux segments partiels, lorsque MM' ou *ds* tourne autour du point M.

C'est, au fond, l'étude de l'intervalle compris entre les deux conoïdes *co-segmentaires*, que nous avons fait connaître dans la quatrième des propriétés signalées au n° 35, qu'il s'agit d'opérer sommairement.

A cet effet, nous partirons successivement de chacune des équations (63).

1° On a d'abord

$$\frac{\sin i}{\zeta_i}\sin\vartheta = \frac{\sin(\vartheta_1 + i)}{r''_{f_1}}\sin\vartheta_2 - \frac{\sin(\vartheta_2 - i)}{r''_{f_2}}\sin\vartheta_1.$$

Différentiant, on trouve que les valeurs limites de $\frac{1}{\zeta_i}$ correspondent à l'équation

$$\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 + i) = 0,$$

c'est-à-dire aux angles $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = 0$ et $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = \pi$.

Soient $\frac{1}{\zeta'_i}$ et $\frac{1}{\zeta''_i}$ le maximum et le minimum de $\frac{1}{\zeta_i}$, il vient

$$\frac{\sin i}{\zeta'_i}\sin\vartheta = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\vartheta + i)}{r''_{f_1}} - \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\vartheta - i)}{r''_{f_2}},$$

$$\frac{\sin i}{\zeta''_i}\sin\vartheta = -\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\vartheta + i)}{r''_{f_1}} + \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\vartheta - i)}{r''_{f_2}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{r''_{f_1}} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\vartheta - i)}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\vartheta - i)}{\zeta''_i},$$

$$\frac{1}{r''_{f_2}} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}(\vartheta + i)}{\zeta'_1} + \frac{\sin^2\frac{1}{2}(\vartheta + i)}{\zeta''_i}.$$

Substituant dans l'expression de $\frac{1}{\zeta_i}$, en ayant soin de remplacer les produits et les puissances des lignes trigonométriques par les sommes (algébriques) qui leur sont équivalentes, on aura, après réduction,

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2[\vartheta_1 - \frac{1}{2}(\vartheta - i)]}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2[\vartheta_1 - \frac{1}{2}(\vartheta - i)]}{\zeta''_i}.$$

Mais, si l'on prend la trace MA_1 pour axe polaire, on a

$$\vartheta_1 = \theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right),$$

donc

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2\left[\theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta'_i} + \frac{\sin^2\left[\theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta''_i}.$$

C'est la célèbre formule de Kummer sur les segments relatifs au *rayon* axial d'une congruence élémentaire.

2° Considérons, en second lieu, la première des équations (63)

$$\frac{\cos i}{\zeta_j}\sin\vartheta = \frac{\cos(\vartheta_1 + i)}{r''_{f_1}}\sin\vartheta_2 + \frac{\cos(\vartheta_2 - i)}{r''_{f_2}}\sin\vartheta_1.$$

Ici les valeurs limites de $\frac{1}{\zeta_j}$ dépendent de l'équation

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2 + i) = 0,$$

c'est-à-dire des angles $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = \pm\frac{\pi}{2}$, directions perpendiculaires à celles trouvées dans le premier cas.

En désignant par $\frac{1}{\zeta'_j}$ le minimum et par $\frac{1}{\zeta''_j}$ le maximum de $\frac{1}{\zeta_j}$ et substituant inversement, si l'on veut, les sommes algébriques aux produits, on trouve

$$\frac{2}{r''_{f_1}} = \frac{1 - \sin(\vartheta - i)}{\zeta'_j} + \frac{1 + \sin(\vartheta - i)}{\zeta''_j},$$

$$\frac{2}{r''_{f_2}} = \frac{1 + \sin(\vartheta + i)}{\zeta'_j} + \frac{1 - \sin(\vartheta + i)}{\zeta''_j},$$

d'où

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\cos^2\left[\vartheta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta - i\right)\right]}{\zeta'_j} + \frac{\sin^2\left[\vartheta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta - i\right)\right]}{\zeta''_j}$$

et, finalement,

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\sin^2\left(\theta_1 + \frac{i}{2}\right)}{\zeta'_j} + \frac{\cos^2\left(\theta_1 + \frac{i}{2}\right)}{\zeta''_j}.$$

C'est la formule *complémentaire* de celle de Kummer, qui n'avait pas encore été remarquée, croyons-nous.

39. Il ne sera pas inutile de montrer, en terminant, comment on pourrait parvenir aux mêmes résultats en prenant comme point de départ la formule (58), savoir :

$$\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right) d\eta = m\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi.$$

Il suffit d'observer pour le premier cas, par exemple, que $d\xi$ et $d\eta$ ne différant pas des coordonnées horizontales de l'extrémité K_i de I_iK_i, on doit avoir

$$m = \frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\sin \Im_1}{\sin \Im_2}, \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin(\Im_1 + i)}{\sin(\Im_2 - i)}.$$

Faisant, après cela, $\zeta = \zeta_i$, $\zeta_1 = r''_{f_2}$ et $\zeta_2 = r''_{f_1}$, afin de prendre pour plans des coordonnées les plans focaux, on retombera sur la seconde des formules (63).

Pour le second cas, il faudra remplacer i par $i - \frac{\pi}{2}$ dans le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, poser $\zeta = \zeta_j$ avec $\zeta_1 = r''_{f_2}$ et $\zeta_2 = r''_{f_1}$, et ces hypothèses, introduites dans l'équation (58), feront obtenir la première des formules (63). Les calculs s'achèveront ensuite comme précédemment.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages
Objet du Mémoire		19
I.	Préliminaires : Définitions et notations	21
II.	Relations de première espèce (valeurs finies)	23
III.	Relations de deuxième espèce (dérivées partielles) : Application	25
IV.	Relations de troisième espèce (dérivées totales) : Identité	28
V.	Application des relations précédentes à l'analyse des premières courbures composées ou déviations d'une ligne quelconque : Déviation initiale ou donnée. Déviation horizontale. Déviation verticale. Théorème des trois tangentes trigonométriques. Corollaire	30
VI.	De quelques formes remarquables de la déviation verticale : Triple expression générale de cette courbure	36
VII.	Des composantes générales de la déviation verticale et de leurs propriétés	39
VIII.	Deuxièmes courbures ou flexions d'une ligne quelconque (méthode géométrique)	41
IX.	Expressions analytiques des trois flexions et de leurs composantes orthogonales : Flexion de front (ou torsion) de la ligne donnée. Flexion de profil. Flexion de niveau ou courbure pseudo-conjuguée.	42
X.	Troisièmes courbures ou courbures rectifiantes : Troisième courbure absolue. Droite rectifiante absolue. Troisièmes courbures et droites rectifiantes dérivées. Leurs propriétés. Courbure totale	46
XI.	Première application des théories précédentes à diverses lignes remarquables et d'une définition généralisée : Lignes géodésiques. Indicatrice; double forme de son équation. Lignes asymptotiques. Lignes de courbures obliques. Foyers et plans focaux. Double méthode pour obtenir facilement ces dernières lignes. Lignes pseudo-conjuguées sous angle constant	49
XII.	Examen du cas où les lignes précédentes appartiendraient à une surface : Expressions diverses de ces mêmes lignes. Application à des exemples	57
XIII.	Deuxième application : recherche de quelques lieux géométriques : Formules préliminaires. Ligne de striction axiale. Conoïde de striction axiale. Surface d'un pinceau circumaxial de pseudo-normales. Théorème général sur une certaine classe de surfaces réglées. — Corollaires. Application aux pinceaux de droites	63
XIV.	Étude nouvelle des foyers et des plans focaux : Transformation préalable de nos principales formules. Propriétés diverses. Formule d'Hamilton complétée. Formule de Kummer : son extension. Autre méthode pour retrouver les derniers résultats	71