BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BROCARD

Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 224-226

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__224_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Démonstration de la proposition de Steiner relative à l'enveloppe de la droite de Simson; par M. H. Brocard.

(Séance du 30 avril 1873)

1. On doit à Th. Simson la proposition suivante :

Les projections des points de la circonférence d'un cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés de ce triangle sont en ligne droite.

Steiner a montré le premier que :

L'enveloppe de cette droite est une hypocycloïde régulière à trois rebroussements.

La démonstration de cette proposition remarquable a été donnée par M. Ferrers et par M. P. Serret.

Je n'ai pas eu connaissance du travail de M. Ferrers, et j'ai cherché de mon côté une démonstration de ce théorème. Celle que je présente aujourd'hui m'a paru très-simple, et, pour ce fait, je l'avais déjà communiquée à M. Gérono.

Soient A, B, C les sommets du triangle (fig. 1), H le point de rencontre des hauteurs, M un point du cercle circonscrit, D, E les projections de ce point sur les côtés AB, AC (nous supprimons le troisième côté pour simplifier la figure) ; DE sera la position de la *droite de Simson*, ou *ligne pédale*, correspondant au point M.

On sait que le milieu I de MH se trouve sur DE(*). Le lieu du poi r,

(*) Cette proposition fait l'objet de la question 708, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 177.

quand le point M varie, est donc la figure semblable au cercle BACM, le centre de similitude étant le point H, et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$. Ce lieu est donc un cercle, et, comme il passe par les milieux des segments HA, HB, HC, il se confond avec le *cercle des neuf points*.

Remarquons enfin que si le point I se projette sur AC au point I′, on aura OI′ = EI′ ; la recherche de l'enveloppe de la droite DE est donc ramenée à la question suivante :

Étant données une circonférence fixe et une droite fixe OC *qui la coupe au point* O, *on projette un point* I *de la circonférence sur la droite* OC *en* I, *et l'on prend* I′E = I′O. *Trouver l'enveloppe de la droite* EI.

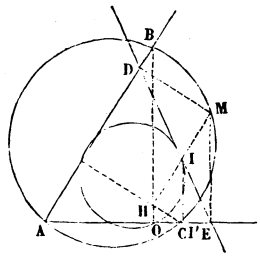

Fig. 3.

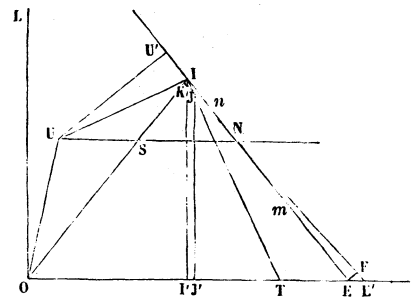

Fig. 4.

2. Soient (fig. 4) U le centre, UI = OU = a le rayon de la circonférence, U′ la projection de U sur EI. Menons par U une parallèle US à OE et par O une perpendiculaire OL à OE. Désignons par α, θ, φ, δ les angles IUS, UOL, U′UI et OII′ = I′IE. Prenons sur la tangente IT au cercle en I, à partir du point I, un élément IJ projeté en I′J′ sur OE, puis, à partir de E, EE′ = 2I′J′, et joignons E′J qui coupe EI en un certain point N dont la position limite est le point de contact de IE avec son enveloppe. Soient m, n les segments NE, NI. On a

$$EE' = 2I'J',$$

$$\frac{m}{n} = \frac{EF}{IK} = \frac{EE'\cos\delta}{IJ\sin\varphi} = \frac{EE'}{I'J'}\,\frac{\cos\delta\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{2\cos\delta\sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$(m+n)\sin\delta = a(\sin\theta + \cos\alpha),$$

d'où l'on tire

$$n = 2a\sin\varphi\,\frac{\sin\theta+\cos\alpha}{2\sin 2\delta\sin\alpha + 2\sin\delta\sin\varphi}.$$

Mais

(1) $$\delta = \alpha + \varphi, \quad 2\delta = 90^\circ + \theta - \alpha;$$

donc

$$n = \mathrm{IN} = 2a \sin\varphi = 2\mathrm{IU}'.$$

Ainsi le point N est déterminé par l'intersection de IE avec la circonférence égale à la première et tangente au point I.

3. Soit U_1 le centre de cette circonférence, situé sur la droite IU. Elle est tangente à une circonférence ayant U pour centre et un rayon triple. L'angle IU_1N est double de U'UI ou de φ. Mais, des deux relations (1), on déduit

$$2\varphi = 90^\circ + \theta - 3\alpha.$$

L'angle 2φ est donc fonction de 3α. Ainsi le point N appartient à l'*hypocycloïde régulière à trois rebroussements engendrée par un point de la circonférence d'un cercle égal au cercle des neuf points, roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon triple, concentrique au cercle des neuf points du triangle proposé.*

4. Pour chaque triangle donné, il y a un angle θ différent; c'est de cet angle seul que dépend l'orientation de l'hypocycloïde.

Cet angle θ joue le rôle de *paramètre d'orientation.*

Les angles *aigus* formés par les trois axes de la courbe avec OE ont pour valeurs

$$\omega,\ 120^\circ - \omega,\ 60^\circ - \omega,$$

avec

$$\omega = 90^\circ - \frac{2\theta}{3}.$$