BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur un problème de probabilités

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 221-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__221_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur un problème de probabilités; par M. HALPHEN.

(Séance du 30 avril 1875)

Une tige se brise en n morceaux; quelle est la probabilité que ces n morceaux soient propres à former un polygone fermé?

Le cas le plus simple de ce problème, celui où le nombre n est égal à 3, a été traité par M. Lemoine, qui a trouvé $\frac{1}{4}$ pour la probabilité demandée.

Chaque événement possible est caractérisé par les longueurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$, des n morceaux dans lesquels se sépare

la tige A de longueur a. On fait l'hypothèse que ces morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a, et que la probabilité de chaque événement est la même; c'est-à-dire que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Prenons une autre tige B de même longueur a, supposons que $n-1$ points s'y placent *au hasard*, et qu'on la brise en ces $n-1$ points. La probabilité d'obtenir de cette façon n morceaux donnés, et *disposés dans un ordre donné sur la tige*, est évidemment indépendante des longeurs de ces morceaux et de leur ordre. Car ce n'est pas autre chose que la probabilité que les $n-1$ points se placent en $n-1$ positions données sur la tige. Or cette probabilité ne dépend pas de ces positions, puisque les points se placent au hasard. Par suite, la probabilité d'obtenir, avec la tige B, n morceaux donnés, *indépendamment de leur ordre sur cette tige*, est égale à $1.2.3\ldots n$ fois cette dernière probabilité; c'est-à-dire qu'elle est constante. D'ailleurs, sur la tige B, les morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de 0 à a. Donc la probabilité de chaque événement $[x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est la même avec les tiges A et B.

Pour que les n morceaux d'une tige soient propres à former un polygone, il faut et il suffit que chacun d'eux soit inférieur à la moitié de la tige. Il sera plus simple de considérer l'événement opposé, et de chercher la probabilité pour qu'un morceau soit supérieur à la moitié de la tige, condition qui ne peut être réalisée que par un seul morceau à la fois.

Il est clair que cette probabilité est la même pour les tiges A et B,

Supposons maintenant $n-1$ autres tiges $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, sur chacune desquelles $n-1$ points se placent de la façon suivante. Quand, sur la tige B, les morceaux sont, en tenant compte de leur ordre, à partir d'une extrémité déterminée, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ils seront les mêmes sur les autres tiges, mais dans l'ordre suivant à partir d'une extrémité déterminée sur chaque tige; sur B_2 : $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1$; sur B_3 : $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2$; sur B_i : $x_i, x_{i+1}, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}$; etc. On voit immédiatement que, sur chacune de ces tiges, considérée isolément, les $n-1$ points se placent au hasard. Par suite, pour chacune de ces tiges, la probabilité de l'événement dont il s'agit est la même que pour B et A.

Chaque fois qu'un des morceaux est plus grand que $\frac{a}{2}$, il y une des tiges B, $B_1, \ldots, B_{n-1}$ et une seule, sur laquelle le morceau ayant l'origine pour extrémité est supérieur à $\frac{a}{2}$. Par suite, la probabilité cherchée est égale à n fois celle que, *sur une tige* B, *où $n-1$ points se placent au hasard, le segment qui contient une extrémité donnée soit supérieur à la moitié de la tige.* Pour que cet événement se produise, il faut et il suffit que les $n-1$ points se placent dans la moitié de la tige contenant l'autre extrémité. Pour

qu'un point donné s'y place, la probabilité est $\frac{1}{2}$. Pour qu'ils s'y placent tous, la probabilité est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2^{n-1}}$, et celle de l'événement opposé, qui fait l'objet du problème proposé, est $1-\frac{n}{2^{n-1}}$

Le même problème peut être également résolu par un calcul assez simple.

L'hypothèse est que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Elle est donc de la somme

$$\frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{A},$$

A étant une constante que nous allons déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} &= S_{n-1},\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2} &= S_{n-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_1+x_2 &= S_2. \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ étant donnés, x_{n-1} peut varier dans toute l'étendue des valeurs qui rendent $x_n = a - S_{n-1}$ positif, c'est-à-dire de 0 à $a - S_{n-2}$; de même, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ étant donnés, x_{n-2} peut varier de 0 à $a - S_{n-3}$; etc. En sorte que l'on aura tous les cas possibles en faisant varier : x_{n-1} de 0 à S_{n-2}, x_{n-2} de 0 à $a - S_{n-3}$, ..., x_2 de 0 à $a - x_1$, et x_1 de 0 à a. Tous les cas seront répétés $1.2.3 \ldots n$ fois. Par suite, si l'on intègre la différentielle ci-dessus entre ces limites, on aura la probabilité totale de tous les événements possibles, c'est-à-dire *l'unité*, répétée $1.2.3 \ldots n$ fois.

On a d'ailleurs :

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \int_0^{a-S_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-S_{n-1}} dx_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Par suite, $A = \frac{a_{n-1}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(n-1)}$.

Pour chercher la probabilité d'un événement défini par des limites spéciales attribuées aux variables, on intégrera la différentielle $dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$ entre les limites convenables. Soit X cette intégrale. Si, par le procédé suivi, chaque cas est répété M fois, la probabilité cherchée sera $\frac{X}{MA}$.

Si l'on demande la probabilité qu'un morceau soit supérieur à $\frac{a}{2}$, on fera varier x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2 entre les mêmes limites que précédemment, et x_1 de $\frac{a}{2}$ à a. Chaque événement est alors répété $1.2.3\ldots(n-1)$ fois. Donc la probabilité cherchée est $\frac{X}{1.2.3\ldots(n-1)A} = \frac{1.2\ldots n}{a_{n-1}} X$. Mais on a ici :

$$X = \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_2 \ldots \int_0^{a-S_{n-2}} dx_{n-1}$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \frac{(a-x_1)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} = \frac{a^{n-1}}{2^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}.$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2_{n-1}}$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment.