Bull. Soc. Math. France
147 (4), 2019, p. 705-748

POINTS ALGÉBRIQUES DE HAUTEUR BORNÉE SUR UNE SURFACE

PAR CÉCILE LE RUDULIER

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article le problème du comptage du nombre de points algébriques, de degré donné m et de hauteur bornée, sur une surface X définie sur un corps de nombres et le relions à la conjecture de Batyrev-Manin-Peyre, concernant les points rationnels de hauteur bornée, sur le schéma de Hilbert de m points sur X. Nous montrons alors que ces schémas de Hilbert ponctuels fournissent, sous certaines conditions, de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin-Peyre et étudions plus précisément les cas des points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ des surfaces $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\mathbf{P}^2$. Dans ces deux cas, nous montrons que le schéma de Hilbert associé vérifie néanmoins une version légèrement affaiblie de la conjecture.

ABSTRACT (*Algebraic points of bounded height on a surface*). — In this article, we study the asymptotic cardinality of the set of algebraic points of fixed degree and bounded height of a surface defined over a number field, when the bound on the height tends to infinity. In particular, we show that this can be connected to the Batyrev-Manin-Peyre conjecture, *i.e.* the case of rational points, on some punctual Hilbert scheme. Our study shows that these associated Hilbert schemes provide, under certain conditions, new counterexamples to the Batyrev-Manin-Peyre conjecture. However, in the cases of $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ and $\mathbf{P}^2$ detailed in this article, the associated Hilbert schemes satisfy a slightly weaker version of the Batyrev-Manin-Peyre conjecture.

Texte reçu le 5 juillet 2018, modifié le 9 avril 2019, accepté le 15 avril 2019.

CÉCILE LE RUDULIER, Institut de recherche mathématique de Rennes (IRMAR), Université de Rennes 1, Beaulieu – Bâtiment 22–23, 263 avenue du Général Leclerc, F-35042 Rennes cedex • *E-mail :* `cecile.lerudulier@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G05, 11G35, 14C05, 11G50.

Mots clefs. — Théorie des nombres, Point algébrique, Schéma de Hilbert, Hauteur.

doi:10.24033/bsmf.2796

1. Introduction

Un des problèmes majeurs de la géométrie diophantienne est l'étude de la répartition, selon leur hauteur, des points rationnels d'une variété projective lisse X définie sur un corps de nombres K. Il existe notamment de nombreux travaux visant à étudier la conjecture de Batyrev-Manin [2] qui propose une formule asymptotique pour le nombre de points rationnels de hauteur bornée. Récemment, cette étude s'est élargie au cas des points algébriques de degré donné, en particulier sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ (voir les travaux de [9, 14, 21, 25]). Nous souhaiterions ici examiner ce problème sous un nouvel angle et le mettre en relation avec la conjecture de Batyrev-Manin sur une variété auxiliaire. Nous considérerons ici, plus précisément, une variante des conjectures énoncées dans [2] et [17] et qui peut être formulée de la manière suivante.

Conjecture 1.1. — *Soit V une variété projective lisse définie sur un corps de nombres K et dont le fibré anticanonique ω_V^{-1} est gros. On se donne une métrique adélique sur le fibré en droites ω_V^{-1} et on notera $H_{\omega_V^{-1},K}$ la hauteur exponentielle sur $V(K)$ associée. Alors pour une extension assez grande L de K, il existe un ensemble mince $Z \subset V(L)$ tels que*

$$\#\{x \in V(L) - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_{H_{\omega_V^{-1},L},L}(V)\, B(\log B)^{\mathrm{rg}\ \mathrm{Pic}(V)-1},$$

où $c_{H_{\omega_V^{-1},L},L}(V)$ est la constante définie par Peyre.

Un ensemble mince, au sens de [22], est défini de la manière suivante.

Définition 1.2. — Soit V une variété définie sur K. Un *ensemble mince* de $V(K)$ est une réunion finie d'ensembles de la forme $f(Y(K))$, où Y est une variété intègre sur K et $f\colon Y \to V$ est un morphisme génériquement fini sans section rationnelle sur K.

Dans la conjecture originelle de Batyrev-Manin [2], il était supposé que l'ensemble exceptionnel Z était l'ensemble des points rationnels d'une sous-variété fermée stricte de V, qui est un cas particulier d'ensemble mince. Dans la suite, nous parlerons de la *Conjecture 1.1 forte* lorsque l'ensemble Z sera supposé de cette forme. La Conjecture 1.1 forte a été démontrée pour de nombreuses variétés de Fano, l'ensemble Z étant éventuellement vide (c'est le cas, par exemple, lorsque la variété V est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ [17, Corollaire 6.2.18 p. 169]). Cette conjecture forte est cependant trop restrictive, comme l'a montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [3]. C'est pourquoi nous avons ici formulé une conjecture légèrement plus faible, en suivant une suggestion de Peyre [18, fin du paragraphe 6]. De plus, si la conjecture a d'abord été énoncée dans le cas des variétés de Fano, pour lesquelles le fibré anticanonique est ample, elle est ici généralisée au cas où ce fibré est seulement supposé gros, puisque c'est ce cas qui va nous intérésser dans cet article. Dans cet article, nous donnerons toute une famille de nouveaux contre-exemples, à fibrés anticanoniques gros mais pas amples, à la conjecture forte (voir le Paragraphe 2.4.1) et démontrerons, dans certains cas particuliers, que la Conjecture 1.1 est néanmoins vraie.

Revenons maintenant à notre problème initial, qui est d'étudier le nombre de points de degré m sur K et de hauteur bornée d'une variété algébrique X définie sur K. Ce problème nous amène naturellement à étudier le nombre de points rationnels du m-ième produit symétrique de X, variété algébrique définie sur K, notée $\mathrm{Sym}^m X$. Dans le cas où X est la droite projective $\mathbf{P}^1$, la variété $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1$ n'est autre que $\mathbf{P}^m$, variété pour laquelle la Conjecture 1.1 forte est vérifiée ([17]). Nous avons traité ce cas dans [12], avec $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ muni d'une hauteur adélique admissible quelconque relative à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Ceci a permis de généraliser le résultat de [14] valable pour la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$. Nous souhaiterions employer la même méthode dans le cas des points algébriques sur une variété de dimension supérieure. Cependant, lorsque l'entier m et la dimension de la variété X sont supérieurs ou égaux à 2, la variété $\mathrm{Sym}^m X$ est singulière. Dans ce cas, la méthode générale pour étudier la conjecture de Batyrev-Manin sur cette variété consiste à passer par une désingularisation. Si la variété X est une surface projective lisse, le morphisme de Hilbert-Chow, défini sur le schéma de Hilbert de m points sur X, noté $\mathrm{Hilb}^m X$, et à valeurs dans $\mathrm{Sym}^m X$, remplit cette fonction.

Le premier objectif de cet article sera donc d'expliquer précisément le lien entre le problème de la répartition des points algébriques sur une surface projective lisse X et la Conjecture 1.1 sur le schéma de Hilbert ponctuel de cette surface. L'étude de celle-ci fait intervenir le fibré anticanonique, le groupe de Picard et, dans la constante de Peyre, le cône effectif de $\mathrm{Hilb}^m X$, que nous déterminerons, au moins dans des cas particuliers.

Le second objectif est de démontrer la Conjecture 1.1 dans les cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, sur le corps $\mathbf{Q}$. Le premier cas est en fait une conséquence directe du travail de Schmidt [21] sur les points quadratiques de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. Nous montrons que la Conjecture 1.1 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, pour une certaine hauteur, si on enlève un ensemble mince dense dont la contribution est du même ordre de grandeur. Notre travail ne permet pas encore de déterminer s'il est nécessaire d'écarter cet ensemble dense pour obtenir l'équivalent proposé par Batyrev, Manin et Peyre, mais nous pensons que c'est effectivement le cas. Pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$, nous obtiendrons un contre-exemple plus flagrant à la Conjecture 1.1 forte. En effet, nous allons montrer la Conjecture 1.1 avec Z un ensemble mince et dense de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ strictement accumulateur, dont nous déterminerons précisément la contribution. L'ensemble Z sera une union disjointe $Z = Z_0 \cup Z_1 \cup E(\mathbf{Q})$, avec $E(\mathbf{Q})$ le fermé strict de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$ au-dessus du lieu singulier de $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, $Z_0 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince et dense et $Z_1 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince inclus, lui, dans une sous-variété stricte de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. Ces ensembles sont définis dans le Théorème 4.3.

Nous montrerons alors, pour une certaine hauteur anticanonique $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$, le théorème suivant.

Théorème 1.3. — 1. *Pour tout ouvert non vide U de* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$,

$$\#\{z \in U(\mathbf{Q}) \cap Z_0 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\zeta(2)^4} B \log^3 B;$$

2. *Pour tout nombre réel B,*

$$\#\{z \in Z_1(\mathbf{Q}) \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^{3/2} + O(B \log B);$$

3. *Pour tout nombre réel B,*

$$\begin{aligned} &\#\{z \in \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q}) - Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \\ &\quad = c_3 B \log^2 B + O(B \log^{3/2} B) \end{aligned}$$

et c_3 est la constante définie par Peyre pour la hauteur $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$.

Remarque 1. — *Le contre-exemple à la conjecture forte est donné par l'ensemble mince et dense Z_1 et porte sur la puissance du $\log B$, comme dans le contre-exemple de Batyrev-Tschinkel.*

Quelques notations. — Nous noterons M_K l'ensemble des places du corps de nombres K et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques de K. De plus, r_K désignera le nombre de plongements réels de K, s_K le nombre de paires de plongements complexes (non réels) conjugués de K, Δ_K le discriminant de K, h_K le nombre de classes d'idéaux de K, w_K le nombre de racines de l'unité de K, R_K le régulateur de K et ζ_K la fonction zêta du corps de nombres K.

L'ensemble $M_{\mathbf{Q}}$ sera identifié à l'ensemble $\{p \mid p = \infty \text{ ou } p \text{ nombre premier}\}$; nous noterons $|\cdot|_\infty$ la restriction à $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue usuelle de $\mathbf{R}$ et, si p est un nombre premier, $|\cdot|_p$ la valeur absolue p-adique vérifiant $|p|_p = \frac{1}{p}$. Lorsque K est un corps de nombres quelconque, nous noterons $|\cdot|_v$ le représentant de la place $v \in M_K$ dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est l'une des valeurs absolues sur $\mathbf{Q}$ définies ci-dessus et nous noterons p_v la place de $\mathbf{Q}$ correspondante. Nous noterons K_v le complété de K pour la topologie induite par la valeur absolue $|\cdot|_v$ et $\mathbf{C}_v$ le complété de la clôture algébrique de K_v. Le nombre d_v de plongements de K dans $\mathbf{C}_{p_v}$ est alors égal au degré $[K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$.

Nous appellerons *hauteur usuelle* sur $\mathbf{P}^n(K)$, la hauteur H_K définie, pour tout $x \in \mathbf{P}^n(K)$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_n]$, par

$$H_K(x) = \prod_{v \in M_K} \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v}$$

et nous appellerons *hauteur absolue usuelle* sur $\mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, la hauteur H donnée, pour tout $x \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$, par

$$H(x) = H_K(x)^{1/[K:\mathbf{Q}]},$$

où K est un corps de nombres quelconque tel que $x \in \mathbf{P}^n(K)$.

2. Points algébriques et schéma de Hilbert

Soit X une variété projective lisse définie sur un corps de nombre K de degré $d = [K : \mathbf{Q}]$. Nous supposerons de plus que son fibré anticanonique est ample (X est alors dite *de Fano*). On munit le fibré anticanonique ω_X^{-1} d'une métrique adélique admissible $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Pour les définitions et les propriétés de ces métriques, nous renvoyons à [12]. Nous noterons $H_{\omega_X^{-1}}$ la hauteur absolue (exponentielle) sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ associée à cette métrique. Intéressons-nous aux points algébriques de X. Le degré d'un point $x \in X(\bar{K})$ est par définition le degré sur K du corps résiduel $K(x)$ de x. Puisque le fibré ω_X^{-1} est ample, l'ensemble

$$\{x \in X(\bar{K}) \mid [K(x) : K] = m,\ H_{\omega_X^{-1}}(x) \leqslant B\}$$

est fini pour tout $m \geqslant 1$ et tout réel $B \geqslant 0$. Il est donc légitime d'étudier son cardinal.

Le but de cette partie est d'établir le lien entre l'ensemble des points algébriques de degré m de X et l'ensemble des points rationnels sur le m-ième produit symétrique de X. Nous préciserons ensuite la Conjecture 1.1 sur $\mathrm{Sym}^m X$, lorsque X est une surface.

2.1. Produit symétrique et points algébriques. — Pour tout entier $m \geqslant 1$, le m-ième produit symétrique de X est la variété projective quotient

$$\mathrm{Sym}^m X = X^m/\mathfrak{S}_m,$$

où $\mathfrak{S}_m$ est le groupe symétrique d'ordre m, agissant sur X^m par permutation des facteurs. Nous noterons $\pi\colon X^m \to \mathrm{Sym}^m X$ la projection canonique.

Considérons un point $x \in X(\bar{K})$ de degré $m \geqslant 1$. Alors l'orbite de x sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ contient exactement m points, notés $x_1, \dots, x_m$ et appelés conjugués de x. Nous pouvons alors définir un point $\tilde{x} = \pi(x_1, \dots, x_m)$ de $\mathrm{Sym}^m X(\bar{K})$. Celui-ci est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, donc est rationnel sur K, ou encore de degré 1.

DÉFINITION 2.1. — Les points de $\mathrm{Sym}^m X(K)$ de la forme $\tilde{x}$, provenant d'un point x de degré m de $X(\bar{K})$, seront dits *irréductibles* ; les autres seront dits *réductibles.*

Il nous reste maintenant à définir une hauteur sur $\mathrm{Sym}^m X(K)$ s'exprimant facilement à partir de la hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$. Le fibré en droites anticanonique de X^m est le fibré

$$\omega_{X^m}^{-1} = p_1^*\omega_X^{-1} \otimes \cdots \otimes p_m^*\omega_X^{-1} \tag{1}$$

où $p_i\colon X^m \to X$ est la i-ième projection. Celui-ci est $\mathfrak{S}_m$-linéarisé, donc il existe un unique fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathrm{Sym}^m X$ tel que

$$\pi^*\mathcal{L} = \omega_{X^m}^{-1}. \tag{2}$$

Proposition 2.2. — *Soit $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique admissible sur ω_X^{-1} définissant une hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ sur $X(\bar{\mathbf{Q}})$. On considère l'application $H_{\mathcal{L},K}\colon \mathrm{Sym}^m X(K) \to [0;+\infty[$ définie, pour tout $\alpha = \pi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ élément de $\mathrm{Sym}^m X(K)$, par*

$$H_{\mathcal{L},K}(\alpha) = H_{\omega_X^{-1}}(\alpha_1)^d \cdots H_{\omega_X^{-1}}(\alpha_m)^d. \tag{3}$$

Alors il existe une métrique adélique admissible sur $\mathcal{L}$ dont la hauteur associée sur $\mathrm{Sym}^m X(K)$ est $H_{\mathcal{L},K}$.

Démonstration. — Notons toujours $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ la métrique donnée par 1. On définit alors la métrique $(\|\cdot\|_v')_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{L}$ par

$$\|s(\alpha)\|_v' = \|(\pi^*s)(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\|_v\,,$$

pour tout $\alpha = \pi(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathrm{Sym}^m X(\mathbf{C}_v)$ et toute section s de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en α. Cette métrique est continue puisque, comme π est un morphisme fini, l'application $\pi\colon X^m(\mathbf{C}_v) \to \mathrm{Sym}^m X(\mathbf{C}_v)$ est fermée pour la topologie v-adique (voir [15, Proposition 2.2.1]). Cette métrique est alors bien adélique admissible et la hauteur associée est donnée par la formule (3). □

Par conséquent, si le point $x \in X(\bar{K})$ est de degré m et $x_1,\dots x_m \in X(\bar{K})$ sont ses conjugués, par invariance de la hauteur par conjugaison, la hauteur du point $\tilde{x} = \pi(x_1,\dots,x_m)$ de $\mathrm{Sym}^m X(K)$ vérifie

$$H_{\mathcal{L},K}(\tilde{x}) = H_{\omega_X^{-1}}(x)^{dm}.$$

Proposition 2.3. — *Les fibres de l'application qui à*

$$x \in \{x \in X(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m,\ H_{\omega_X^{-1}}(x) \leqslant B\}$$

associe

$$\bar{x} \in \{y \in \mathrm{Sym}^m X(K) \mid H_{\mathcal{L},K}(y) \leqslant B^{dm}\}$$

sont soit vides (au-dessus d'un point réductible), soit de cardinal exactement m.

Nous nous retrouvons donc face au problème de déterminer le nombre de points rationnels de hauteur bornée de la variété $\mathrm{Sym}^m X_K$. Puisque le morphisme π est surjectif et que $\pi^*\mathcal{L}$ est ample, le fibré en droites $\mathcal{L}$ est également ample. La hauteur $H_{\mathcal{L},K}$ définie ci-dessus vérifie donc la propriété de finitude.

Proposition 2.4. — *Pour tout réel $B \geqslant 0$, l'ensemble*

$$\{y \in \operatorname{Sym}^m X(K) \mid H_{\mathcal{L},K}(y) \leqslant B\}$$

est fini.

Nous souhaitons maintenant étudier la Conjecture 1.1 pour $\operatorname{Sym}^m X$ muni de cette hauteur. Le cas où $X = \mathbf{P}^1$ a été traité dans un précédent article [12]. Remarquons qu'alors, la variété $\operatorname{Sym}^m X$ est simplement l'espace projectif $\mathbf{P}^m$. Dans le cas général, si $m = 1$, alors il s'agit d'étudier la conjecture de Batyrev-Manin sur la variété initiale X. Nous ne développerons pas ce cas. Supposons à présent $m \geqslant 2$. Alors, dès que $\dim X \geqslant 2$ la variété $\operatorname{Sym}^m X$ est singulière. Son lieu singulier est $D = \pi(\Delta)$, où

$$\Delta = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{(a_1, \dots, a_m) \in X^m \mid a_i = a_j\}.$$

La Conjecture 1.1 ne portant que sur des variétés lisses, il est nécessaire de passer par une désingularisation. Lorsque X est une surface, le schéma de Hilbert de m points sur X, noté $\operatorname{Hilb}^m X$, est une variété projective lisse de dimension $2m$ et le morphisme birationnel de Hilbert-Chow $\varepsilon\colon \operatorname{Hilb}^m X \to \operatorname{Sym}^m X$ (voir [7, 16]) est une résolution des singularités de $\operatorname{Sym}^m X$. En dimension supérieure, aucune désingularisation de $\operatorname{Sym}^m X$ n'est connue. Ainsi, à partir de maintenant, nous supposerons que X est une surface projective lisse, dont le fibré anticanonique ω_X^{-1} est ample, et nous étudierons la Conjecture 1.1 sur $\operatorname{Hilb}^m X$. Celle-ci faisant intervenir le fibré anticanonique, le groupe de Picard et le cône effectif, nous commencerons par étudier ces propriétés géométriques du schéma de Hilbert ponctuel.

2.2. Schéma de Hilbert ponctuel d'une surface. — Soit X une surface projective lisse définie sur un corps de nombres K. Le schéma de Hilbert de m points sur X paramètre les sous-schémas fermés de dimension nulle de X et de longueur m. Le morphisme ε de Hilbert-Chow induit un isomorphisme de $\operatorname{Hilb}^m X - \varepsilon^{-1}(D)$ sur $\operatorname{Sym}^m X - D$. De plus, $E = \varepsilon^{-1}(D)$ est un diviseur irréductible de $\operatorname{Hilb}^m X$ (voir [7, 16] et [4, Section 6 (c)]).

Nous noterons

$$U_0 = \operatorname{Hilb}^m X - E \text{ et } V_0 = \operatorname{Sym}^m X - D. \tag{4}$$

2.2.1. *Groupe de Picard et fibré canonique.* — Nous reprenons ici des éléments de [8] et [4] concernant le groupe de Picard et le fibré canonique de $\operatorname{Hilb}^m X$.

Notons $\operatorname{Sym}^m_* X$ l'ensemble des 0-cycles effectifs de degré m sur X dont le support contient au moins $m-1$ points et $\operatorname{Hilb}^m_* X = \varepsilon^{-1}\big(\operatorname{Sym}^m_* X\big)$. Alors le complémentaire de $\operatorname{Hilb}^m_* X$ dans $\operatorname{Hilb}^m X$ est de codimension 2 ([4, Section 6 (d)]). Soient enfin $X^m_* = \pi^{-1}\big(\operatorname{Sym}^m_* X\big)$ et

$$D_* = \{\pi(a_1, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}) \in \operatorname{Sym}^m X \mid a_i \in X \text{ distincts}\} \subset D.$$

Alors $\operatorname{Hilb}^m_* X$ s'identifie à l'éclatement $\widetilde{X^m_*}$ de Δ dans X^m_* quotienté par l'action de $\mathfrak{S}_m$, ou encore à l'éclatement de D_* dans $\operatorname{Sym}^m_* X$. Nous obtenons le diagramme commutatif suivant ([4, Section 6 (f)])

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X^m_*} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\rho"'] & X^m_* \arrow[d, "\pi"] \\
\operatorname{Hilb}^m_* X \arrow[r, "\varepsilon"] & \operatorname{Sym}^m_* X
\end{tikzcd}$$

où η est l'éclatement de $\Delta \cap X^m_*$. Considérons alors les isomorphismes

$$\lambda\colon \operatorname{Pic}\left(\operatorname{Hilb}^m X\right) \to \operatorname{Pic}\left(\operatorname{Hilb}^m_* X\right)$$

et

$$\mu\colon (\operatorname{Pic} X^m_*)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z} \to (\operatorname{Pic} \widetilde{X^m_*})^{\mathfrak{S}_m},$$

induit par η (voir [8, Preuve du Théorème 6.2 p. 679]). Alors le morphisme de groupes

$$\tau = (\pi^* \times id)^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \rho^* \circ \lambda\colon \operatorname{Pic}\left(\operatorname{Hilb}^m X\right) \longrightarrow \operatorname{Pic}\left(X^m\right)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z}$$

est une bijection ([8]). Il envoie le diviseur E sur un générateur du facteur $\mathbf{Z}$. Ceci permet de déterminer le groupe de Picard de $\operatorname{Hilb}^m X$.

Proposition 2.5 ([8, Corollaire 6.3]). — *Soit X une surface projective lisse de Fano définie sur une corps de nombres K. Alors, pour $m \geqslant 2$,*

$$\operatorname{Pic}(\operatorname{Hilb}^m X) \simeq \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbf{Z}E.$$

Démonstration. — D'après ce qui précède, le groupe de Picard $\operatorname{Pic}\left(\operatorname{Hilb}^m X\right)$ est isomorphe à $\operatorname{Pic}\left(X^m\right)^{\mathfrak{S}_m} \oplus \mathbf{Z}E$. Or, en caractéristique nulle, la variété d'Albanese d'une variété de Fano est de dimension nulle (par le théorème d'annulation de Kodaira ou [6, p. 79]), donc triviale. On en déduit que $\operatorname{Pic}\left(X^m\right)^{\mathfrak{S}_m}$ est isomorphe à $\operatorname{Pic} X$ ([8, (6') p. 678]). $\square$

Intéressons-nous maintenant au fibré canonique de $\operatorname{Hilb}^m X$.

Proposition 2.6. — *La résolution ε est crépante, ce qui signifie que*

$$\omega_{\operatorname{Hilb}^m X} = \varepsilon^* \omega_{\operatorname{Sym}^m X},$$

où $\omega_{\operatorname{Sym}^m X}$ est le faisceau dualisant de $\operatorname{Sym}^m X$*. De plus, le fibré en droites $\mathcal{L}$ est l'inverse du faisceau $\omega_{\operatorname{Sym}^m X}$.*

Remarque 2. — *Le fibré en droites $\mathcal{L} = \omega^{-1}_{\operatorname{Sym}^m X}$ est ample. Ainsi, le fibré anticanonique de* $\operatorname{Hilb}^m X$*, $\omega^{-1}_{\operatorname{Hilb}^m X} = \varepsilon^* \mathcal{L}$, est le tiré en arrière d'un diviseur ample par un morphisme birationnel. Nous en déduisons que $\omega^{-1}_{\operatorname{Hilb}^m X}$ est gros.*

Démonstration. — Soit ω une 2-forme sur X. Elle induit une $2m$-forme ω_m sur X_*^m donnée par

$$\omega_m = (p_1^*\omega + \cdots + p_m^*\omega)^m,$$

où $p_i\colon X^m \to X$ désigne la i-ième projection. Les formes $\eta^*\omega_m$ sur $\widetilde{X_*^m}$ et ω_m sur X_*^m sont invariantes sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_m$ donc proviennent respectivement d'une $2m$-forme $\omega_{[m]}$ sur $\mathrm{Hilb}_*^m X$ et d'une $2m$-forme $\omega_{(m)}$ sur $\mathrm{Sym}_*^m X$. Par ailleurs, localement ω s'exprime de la forme $\omega = fs$, où s est une 2-forme locale non nulle et f une fonction rationnelle. Comme précédemment, on en déduit des $2m$-formes locales s_m, $s_{(m)}$ et $s_{[m]}$ sur X_*^m, $\mathrm{Sym}^m X_*$ et $\mathrm{Hilb}^m X_*$ respectivement, ainsi que des fonctions rationnelles f_m, $f_{(m)}$ et $f_{[m]}$ vérifiant localement

$$\omega_m = f_m s_m, \quad \omega_{(m)} = f_{(m)} s_{(m)} \quad \text{et} \quad \omega_{[m]} = f_{[m]} s_{[m]}.$$

D'après [4, Proposition 5 p. 766], $\mathrm{div}(s_{[m]}) = 0$. Puisque $s_{[m]} = \varepsilon^* s_{(m)}$, nous en déduisons que $\mathrm{div}(s_{(m)}) = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$\varepsilon^*\mathrm{div}(\omega_{(m)}) = \varepsilon^*\mathrm{div}(f_{(m)}) = \mathrm{div}(\varepsilon^* f_{(m)}) = \mathrm{div}(f_{[m]}) = \mathrm{div}(\omega_{[m]})$$

et

$$\pi^*\mathrm{div}(\omega_{(m)}) = \mathrm{div}(\pi^* f_{(m)}) = \mathrm{div}(f_m) = \mathrm{div}(\omega_m).$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^*\omega_{\mathrm{Sym}^m X} = \omega_{\mathrm{Hilb}^m X} \quad \text{et} \quad \pi^*\omega_{\mathrm{Sym}^m X} = \omega_{X^m}.$$

Cette dernière relation et la relation 2 entraînent la deuxième partie de la proposition. □

2.3. Conjecture pour le schéma de Hilbert. — Revenons maintenant à la Conjecture 1.1, que nous souhaitons formuler pour le schéma de Hilbert ponctuel d'une surface.

Rappelons que X est une surface projective lisse de Fano. On munit $X(\overline{\mathbf{Q}})$ d'une hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ définie par une métrique adélique admissible sur le fibré en droites ω_X^{-1}. Nous avons déjà défini une hauteur $H_{\mathcal{L},K}$ sur $\mathrm{Sym}^m X(K)$ relative au fibré en droites $\mathcal{L} = \omega_{\mathrm{Sym}^m X}^{-1}$ (Proposition 2.2, relation (3)). Celle-ci induit naturellement, via le morphisme $\varepsilon\colon \mathrm{Hilb}^m X \to \mathrm{Sym}^m X$, une hauteur sur $\mathrm{Hilb}^m X(K)$, relative au fibré en droites $\varepsilon^*\mathcal{L} = \omega_{\mathrm{Hilb}^m X}^{-1}$ et vérifiant

$$H_{\omega_{\mathrm{Hilb}^m X}^{-1},K} = H_{\mathcal{L},K} \circ \varepsilon.$$

2.3.1. *Propriété de finitude.* — Tout d'abord, puisque le morphisme ε est birationnel et que $\mathcal{L}$ est ample, le fibré en droites $\omega_{\mathrm{Hilb}^m X}^{-1}$ est gros. Celui-ci n'est pas ample car le morphisme ε n'est pas fini. La propriété de finitude sera cependant vérifiée sur un ouvert non vide de $\mathrm{Hilb}^m X$, éventuellement strict. Nous déterminons ici l'ouvert maximal sur lequel nous avons la propriété de finitude. Nous rappelons que E désigne toujours le diviseur irréductible de $\mathrm{Hilb}^m X$ au dessus du lieu singulier de $\mathrm{Sym}^m X$. L'ensemble U_0 a été défini en (4).

Proposition 2.7. — 1. *Pour tout réel B, l'ensemble*

$$\{z \in U_0(K) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},K}(z) \leqslant B\}$$

est fini.

2. *Pour tout ouvert non vide U de E, il existe un réel B tel que l'ensemble*

$$\{z \in U(K) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},K}(z) \leqslant B\}$$

soit infini.

Ceci signifie donc que l'ouvert $U_0 = \mathrm{Hilb}^m X - E$ est le plus grand ouvert de $\mathrm{Hilb}^m X$ sur lequel la hauteur $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},K}$ vérifie la propriété de finitude.

Démonstration. — Comme le schéma de Hilbert est l'éclatement du produit symétrique le long de la diagonale, le diviseur exceptionnel E est tel que $\mathcal{O}(-E)$ est relativement ample. Autrement dit, si un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur le produit symétrique est ample, il existe un entier N tel que $\mathcal{M} = \epsilon^*\mathcal{L}^N \otimes \mathcal{O}(-E)$ soit ample sur le schéma de Hilbert — donc vérifiera la propriété de Northcott. D'autre part, la hauteur associée à $\mathcal{O}(-E)$ est majorée sur le complémentaire de E. Par suite, la hauteur associée à $\epsilon^*\mathcal{L}$ est minorée par la hauteur de $\mathcal{M}$ (puissance $1/N$) hors de E, donc y vérifie encore la propriété de Northcott. Le fibré $\mathcal{L}$ induit par le fibré anticanonique de X^m est ample, et $\mathcal{M}$ est le fibré anticanonique du schéma de Hilbert (car la résolution ϵ est crépante). Ceci démontre la première partie.
Montrons maintenant la deuxième partie. Soit U un ouvert non vide de E. Puisque $E_* = \varepsilon^{-1}(D_*)$ est ouvert non vide de E, $U \cap E_*$ est également un ouvert non vide de E ; soit $z_0 \in (U \cap E_*)(K)$. Notons $y_0 = \varepsilon(z_0) \in D_*(K)$. D'après [8, lemme 4.3], la fibre $W_0 = \varepsilon^{-1}(\{y_0\})$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1_K$ et, de plus, $U \cap W_0$ est un ouvert non vide de W_0. Ainsi, $(U \cap W_0)(K)$ est un ensemble infini et tous ses points ont même hauteur, égale à $H_{\mathcal{L},K}(y_0)$. Il suffit alors de prendre $B = H_{\mathcal{L},K}(y_0)$. □

2.3.2. *Énoncé de la conjecture.* — D'après la Proposition 2.5, le rang du groupe de Picard de $\mathrm{Hilb}^m X$ est égal à $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, X) + 1$. Ainsi, la Conjecture 1.1 se formule, pour cette variété, de la manière suivante.

Conjecture 2.8. — *Il existe une extension assez grande L de K et un ensemble mince Z de $\mathrm{Hilb}^m X(L)$ tels que*

$$\#\{z \in \mathrm{Hilb}^m X(L) - Z \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}(z) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} c\, B (\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, X)},$$

où $c = c_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L},L}$ est la constante définie par Peyre.

Remarquons tout d'abord que, d'après la Proposition 2.7, l'ensemble mince exceptionnel Z doit contenir au moins l'ensemble des points rationnels de $E = \varepsilon^{-1}(D)$. Nous développerons dans la suite les cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et

$\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$. Pour chacun d'eux, nous montrerons la Conjecture 2.8 avec pour Z un ensemble mince et dense.

Comme précédemment, nous parlerons de la *Conjecture 2.8 forte* lorsqu'il sera supposé que l'ensemble Z est l'ensemble des points rationnels d'un fermé strict de $\mathrm{Hilb}^m X$.

Définissons maintenant ce que nous entendons par ensemble accumulateur.

DÉFINITION 2.9. — Supposons que $\mathrm{Hilb}^m X$ vérifie la Conjecture 2.8, sur le corps K. Un sous-ensemble F de $\mathrm{Hilb}^m X(K)$ est dit *accumulateur* pour la hauteur $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},K}$ si, pour tout ensemble mince Z de $\mathrm{Hilb}^m X(K)$ ne contenant pas F,

$$\frac{\#\{z \in F - Z \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},K}(z) \leqslant B\}}{c_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X}},K}\, B(\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, X)}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Puisque nous nous sommes d'abord intéressés au nombre de points rationnels de hauteur bornée sur le produit symétrique, voici la traduction de cette conjecture sur $\mathrm{Sym}^m X$.

CONJECTURE 2.10. — *Il existe une extension assez grande L de K et un ensemble mince Y de* $\mathrm{Sym}^m X(L)$ *tels que*

$$\#\{y \in \mathrm{Sym}^m X(L) - Y \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Sym}^m X},L}(y) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c\, B(\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, X)}.$$

où $c = c_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X}},L},L}$.

2.4. Premières études de la conjecture. — Dans cette partie, nous donnons les premiers résultats relatifs à la Conjecture 2.8. Nous montrerons tout d'abord que cette conjecture dans sa version forte est, sous certaines conditions, incompatible avec la Conjecture 1.1 forte sur la surface X. Nous verrons ensuite que les points du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m X$ provenant d'un m-uplet de points de X situés sur une droite rationnelle de X forment en général un fermé strict de $\mathrm{Hilb}^m X$ contenant un ensemble accumulateur, c'est-à-dire qui contient plus de points rationnels que ce la Conjecture 2.8 prédit.

2.4.1. *Incompatibilités avec la Conjecture 1.1 forte.* — Parmi les points rationnels de $\mathrm{Hilb}^m X_K$ se trouvent les points de l'ensemble

$$Z_0 = \varepsilon^{-1}(\pi(X^m(K)))$$

qui proviennent des points rationnels de X^m_K. C'est un ensemble mince de $\mathrm{Hilb}^m X_K$ qui est dense pour la topologie de Zariski, si $X(K)$ est dense dans X. Or, puisque le rang du groupe de Picard de X^m_K est en général plus grand que celui de $\mathrm{Hilb}^m X_K$, si la conjecture forte est vraie sur X^m_K, cet ensemble devrait contenir un ensemble accumulateur. Ces ensembles fournissent donc de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin (Conjecture 1.1 forte). Plus précisément, nous allons montrer ceci.

Proposition 2.11. — *Soit X une surface de Fano définie sur K, munie d'une hauteur adélique $H_{\omega^{-1},K}$ relative au fibré anticanonique ω_X^{-1}. Supposons que*

1. *X vérifie la Conjecture 1.1 forte pour cette hauteur, sur un ouvert non vide W de X et sur le corps de nombres K ;*
2. *pour tout fermé strict F de W^m,*

$$\frac{\#\{x \in F(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x) \leqslant B\}}{\#\{x \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x) \leqslant B\}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons $Z_W = \varepsilon^{-1}\big(\pi(W^m(K))\big) \cap U_0(K)$ et t le rang du groupe de Picard de X.

Alors il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ouvert non vide U de $\operatorname{Hilb}^m X$,

$$\#\{z \in Z_W \cap U(K) \mid H_{\omega_{\operatorname{Hilb}^m X}^{-1},K}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} cB(\log B)^{tm-1}.$$

Rappelons que le rang du groupe de Picard de $\operatorname{Hilb}^m X$, pour $m \geqslant 2$, est égal à $t+1$. Cette proposition implique donc directement le résultat suivant.

Corollaire 2.12. — *Sous les hypothèses de la Proposition 2.11, la Conjecture 2.8 forte est fausse si $m \geqslant 3$ ou ($m = 2$ et $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} X \geqslant 2$).*

Par exemple, les variétés toriques vérifient les hypothèses de la Proposition 2.11 (voir [5, 3.10], donc leurs schémas de Hilbert ponctuels fournissent toute une famille de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin forte. Jusqu'à présent, très peu de contre-exemples étaient connus.

En particulier, la variété $X = \mathbf{P}^2$ vérifie ces hypothèses, donc nous pouvons dire que la conjecture de Batyrev-Manin est fausse sur $\operatorname{Hilb}^m \mathbf{P}^2$ pour tout entier $m \geqslant 3$. Lorsque $m = 2$ la contribution de l'ensemble Z_0 est du même ordre de grandeur que ce que prédit la conjecture. Nous verrons cependant plus loin qu'il est nécessaire de l'écarter pour que la Conjecture 2.8, avec la constante de Peyre, soit vérifiée.

Nous en déduisons également que la Conjecture 2.8 forte est fausse sur $\operatorname{Hilb}^m(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ pour tout entier $m \geqslant 2$. Dans la partie 4, nous montrerons que la Conjecture 2.8 est vraie pour $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, sur le corps $\mathbf{Q}$, en écartant un ensemble Z mince et dense contenant l'ensemble Z_0.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\#\{x \in W(K) \mid H_{\omega_X^{-1},K}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_1 B(\log B)^{t-1}.$$

D'après la compatibilité au produit de la conjecture de Batyrev-Manin [17, Proposition 4.1], il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\#\{x' \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_2 B(\log B)^{tm-1}.$$

Or, la contribution de tout fermé strict de W^m est négligeable. Ainsi, pour tout ouvert U non vide de $\operatorname{Hilb}^m X$, en notant $W' = \pi^{-1}(\varepsilon(U \cap U_0))$,

$$\begin{aligned}
&\#\{z \in Z_W \cap U(K) \mid H_{\omega^{-1},K}(z) \leqslant B\} \\
&\quad = \frac{1}{m!}\#\{x' \in (W^m \cap W')(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \\
&\quad \sim \frac{1}{m!}\#\{x' \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \\
&\quad \sim \frac{c_2}{m!} B(\log B)^{tm-1}.
\end{aligned}$$ □

2.4.2. *Étude des points issus d'une courbe rationnelle géométriquement irréductible.* — Soit X une surface projective lisse supposée de Fano définie sur K. On considère une courbe rationnelle $\mathcal{C}$ de X, définie sur K et géométriquement irréductible. L'estimation du nombre de points rationnels de hauteur bornée de $\operatorname{Hilb}^m \mathcal{C}$ se déduit du cas de la droite projective [12, Théorème 4.2]. Nous noterons K_X le diviseur canonique de X et on se donne une hauteur anticanonique $H_{\omega_X^{-1}}$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$ relative au fibré anticanonique ω_X^{-1}.

Théorème 2.13. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe rationnelle géométriquement irréductible définie sur K telle que $\mathcal{C}(K) \neq \varnothing$. Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droites ample sur $\mathcal{C}$ et notons $a = \deg \mathcal{M} > 0$. Nous noterons $\mathcal{L}_{\mathcal{M},m}$ le fibré en droite induit sur $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ ainsi que $H_{\mathcal{M},K}$, $H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}$ les hauteurs associées (voir [12]). Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert non vide de lissité de $\mathcal{C}$. Alors il existe une constante $C(H_{\mathcal{M}}, m, K) > 0$ telle que*

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}(y) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} C(H_{\mathcal{M}}, m, K) B^{\frac{m+1}{a}}.$$

Démonstration. — Il existe un morphisme birationnel $\varphi\colon \mathbf{P}^1 \to \mathcal{C}$ défini sur K qui induit un isomorphisme de l'ouvert non vide $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$. De plus, $\varphi^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$ ce qui, par composition par φ et fonctorialité, définit une hauteur $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)}$ sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ relative à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$. Ce morphisme φ induit également un morphisme birationnel $\tilde{\varphi}_m\colon \operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1 \to \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ et $\operatorname{Sym}^m \mathcal{V}$ est isomorphe à $\operatorname{Sym}^m \mathcal{U}$ via celui-ci.

Nous noterons $\mathcal{W} = \tilde{\varphi}_m^{-1}(\operatorname{Sym}^m \mathcal{U})$, ensemble ouvert non vide de $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$. Le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$ induit un fibré $\mathcal{L}_{a,m}$ sur W. Alors le cardinal

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}(y) \leqslant B\}$$

est égal à

$$\#\{y' \in \mathcal{W}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{a,m},K}(y') \leqslant B\}$$

ce qui est équivalent, lorsque B tend vers l'infini, à

$$C_{H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)},K}(\mathbf{P}^m) B^{\frac{m+1}{a}},$$

d'après [12, Théorème 4.2] et puisque les ensembles fermés stricts de $\mathbf{P}^m$ ne sont pas accumulateurs (voir [22, 13.1.3]). □

Ce théorème nous permet de déterminer des exemples de sous-ensembles *a priori* accumulateurs, c'est-à-dire dont le cardinal est asymptotiquement strictement supérieur à ce que prédit la Conjecture 2.8.

Corollaire 2.14. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de la surface de Fano X, rationnelle, géométriquement irréductible et définie sur K et soit $m \geqslant 2$ en entier.*

1. *Si $\mathcal{C}$ a un point de degré $k \leqslant m$ sur K et si $k(m+1) \leqslant [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C}$, alors l'ensemble $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ n'est a priori pas accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de $\operatorname{Sym}^m X$ de hauteur inférieure à B.*
2. *Si $\mathcal{C}(K) \neq \varnothing$, l'ensemble $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ est a priori fortement accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de $\operatorname{Sym}^m X$ de hauteur inférieure à B si, et seulement si, $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \leqslant m$.*

Démonstration. — Il nous suffit de considérer, sur $\mathcal{C}$, le fibré en droites

$$\mathcal{M} = \omega_X^{-1}{}_{|\mathcal{C}}$$

de degré

$$a = [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} > 0.$$

La courbe $\mathcal{C}$ a un point algébrique de degré k sur K, défini sur un corps de nombres L tel que $[L : K] \leqslant k$. Puisque $(H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},L})_{|\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)} = H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}^{[L:K]}$, nous avons

$$\begin{aligned} &\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}(y) \leqslant B\} \\ &\quad \leqslant \#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(L) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},L}(y) \leqslant B^{[L:K]}\} \\ &\quad \ll B^{k(m+1)/a}. \end{aligned}$$

Ceci montre le premier résultat. Et le deuxième se déduit directement du Théorème 2.13. □

Par exemple, lorsque $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, une courbe rationnelle $\mathcal{C}$ de bidegré (d_1, d_2), avec $d_1, d_2 \geqslant 0$ et $(d_1, d_2) \neq (0,0)$, vérifie

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} = 2d_1 + 2d_2.$$

Lorsque $m = 2$, les courbes de bidegré $(1,0)$ ou $(0,1)$ induisent donc un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur. Nous retrouverons ceci dans l'étude des points quadratiques de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (voir partie 4 concernant le *points irréductibles de type 1*).

Si X est le plan projectif $\mathbf{P}^2$, une courbe rationnelle $\mathcal{C}$ sur X, définie sur K et de degré $d > 0$,

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} = 3d.$$

Si $\mathcal{C}$ a un point rationnel et si $3d \leqslant m$, la courbe $\mathcal{C}$ induit un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur dans $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^2$. Si $m = 2$, la condition $3d \leqslant m$ n'est jamais vérifiée. En revanche, si $m \geqslant 3$, toute droite – de degré 1 – induit un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur. C'est d'ailleurs de ces sous-ensembles que provient la borne inférieure pour les points de degré $m \geqslant 3$ sur $\mathbf{P}^2$ dans [20] et [9]. Lorsque $m = 2$ que que $\mathcal{C}$ n'a pas de point rationnel mais a un point quadratique, elle est de degré anticanonique au moins 6 et donc la condition

$$2(m+1) \leqslant [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C}$$

est vérifiée. Ainsi, aucune courbe rationnelle géométriquement irréductible de $\mathbf{P}^2$ n'induit d'ensemble accumulateur dans $\operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2$

Pour compléter cette étude, il convient de déterminer si la réunion des sous-ensembles $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ qui sont *a priori* accumulateurs peut contredire ou non la Conjecture 2.8 forte sur le schéma de Hilbert. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas.

Proposition 2.15. — *Soient $m \geqslant 2$ et $a \geqslant 1$ deux entiers. La réunion $\mathcal{Y}_a$ des $\operatorname{Hilb}^m \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une courbe rationnelle définie sur K de la surface de Fano X et de degré anticanonique a, est contenue dans un fermé de dimension inférieure ou égale à $m + a - 1$.*

Remarque 3. — *Par conséquent, lorsque $a \leqslant m$, la réunion $\mathcal{Y}_a$ est un ensemble* a priori *accumulateur de* $\operatorname{Hilb}^m X$ *mais de dimension strictement inférieure à $2m$, donc ne contredit pas la Conjecture 2.8 forte.*

Démonstration. — Notons $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)$ l'ensemble des morphismes de $\mathbf{P}^1$ dans X de degré a par rapport au diviseur anticanonique de X. Une courbe rationnelle de degré anticanonique est alors un élément de $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)/\mathrm{PGL}_2$. La variété X étant de Fano, on peut écrire

$$\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i,$$

où $\mathcal{M}_i$ sont les composantes de $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)$, $r \geqslant 1$. Si $\mathcal{M}$ est l'une des ces composantes, nous noterons $\mathrm{ev}_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1 \to X$ le morphisme d'évaluation donné par $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$. Si celui-ci est dominant, alors

$$\dim \mathcal{M} = a + \dim X = a + 2. \tag{5}$$

Soit alors

$$F = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \mathrm{ev}_{\mathcal{M}_i} \text{ non dominant}}} \overline{\mathrm{ev}_{\mathcal{M}_i}(\mathcal{M}_i \times \mathbf{P}^1)}.$$

Cet ensemble est un fermé strict de X. Nous pouvons définir

$$H_a = (\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a) - \operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, F))/\mathrm{PGL}_2$$

et

$$W_a = \{(x, \mathcal{C}) \in \operatorname{Sym}^m X \times H_a \mid x \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}\}.$$

Si H_a est vide, alors $\mathcal{Y}_a$ est inclus dans $\operatorname{Hilb}^m F$, donc de dimension inférieure à m. Sinon, d'après (5), H_a est de dimension $a+2-3$ soit $a-1$. Les deux projections p_1 et p_2 envoient W_a sur

$$V_a = \bigcup_{\mathcal{C}\in H_a} \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$$

et sur H_a, respectivement. Les fibres de p_2 étant de dimension m, nous en déduisons que la dimension de W_a est égale à $a-1+m$. Par ailleurs, puisque la projection p_1 est surjective,

$$\dim V_a \leqslant \dim W_a.$$

Enfin, comme $\operatorname{Sym}^m F$ est un fermé strict de $\operatorname{Sym}^m X$, la dimension de $\mathcal{Y}_a$ est égale à celle de V_a. Par conséquent,

$$\dim \mathcal{Y}_a \leqslant a+m-1. \qquad \square$$

Nous allons maintenant étudier cette conjecture dans les cas de $\operatorname{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$.

3. Cas du plan projectif

Le premier nouvel exemple que nous pouvons donner pour lequel la Conjecture 2.8 est vérifiée est celui de $\operatorname{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$, sur le corps des nombres rationnels $\mathbf{Q}$. Nous le déduisons de l'étude de Schmidt [21] sur les points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{P}^2$ de hauteur bornée.

Sur $\mathbf{P}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ nous choisirons la hauteur absolue anticanonique donnée par

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)} = H^3,$$

où H est la hauteur absolue usuelle sur $\mathbf{P}^2(\overline{\mathbf{Q}})$. La construction de la Section 2.3 nous donne des hauteurs $H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}$ et $H_{\omega^{-1}_{\operatorname{Hilb}^2\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}$ sur $\operatorname{Sym}^2\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ et $\operatorname{Hilb}^2\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$, respectivement. Puisque nous avons un isomorphisme

$$\operatorname{Hilb}^2\mathbf{P}^2 - E \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^2\mathbf{P}^2 - D,$$

il suffit d'étudier les points rationnels de $\operatorname{Sym}^2\mathbf{P}^2 - D$ de hauteur $H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}$ bornée.

Dans la Section 2.4.1, nous avons déjà étudié la répartition des points de

$$V_r(\mathbf{Q}) = \pi(\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})) \tag{6}$$

qui constituent les points réductibles de $\operatorname{Sym}^2\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. L'ensemble de ces points n'est pas accumulateur, puisque $2\cdot\operatorname{rg}\operatorname{Pic}\mathbf{P}^2 = 1+\operatorname{rg}\operatorname{Pic}\mathbf{P}^2$. Cependant, comme nous allons le voir, il est nécessaire d'écarter celui-ci si nous voulons que la constante intervenant dans l'équivalent de la Conjecture 2.8 soit bien celle définie par Peyre.

3.1. Cône effectif et constante de Peyre pour $\mathrm{Hilb}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{P}^{\mathbf{2}}$. — Le cône effectif de $\mathrm{Hilb}^m\,\mathbf{P}^2$ a été récemment déterminé par Huizenga [10, 11], pour tout entier m. Nous proposons ici une démonstration élémentaire du cas $m = 2$.

Le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)$ peut être vu comme l'éclaté de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ le long de la diagonale Δ, quotienté par l'action du groupe $\mathfrak{S}_2$.

Nous avons déjà vu que

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2) = \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^2) \oplus \mathbf{Z}E = \mathbf{Z}H \oplus \mathbf{Z}E,$$

où, toujours avec les notations du Paragraphe 2.2.1, $\rho^*H = \eta^*[\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(1,1)]$.

Proposition 3.1. — *Le cône effectif de* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ *est*

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

Démonstration. — Tout d'abord, le diviseur E est effectif et, si $aH + bE$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$, est effectif, alors en tirant par ρ ce diviseur puis en le poussant par η sur $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, on remarque que nécessairement $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(a, a)$ est effectif, donc $a \geqslant 0$. Soit maintenant $L = aH - bE$, avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $ab \neq 0$. On a

$$\rho^*L = \eta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(a, a) - b\mathcal{E},$$

où $\mathcal{E} = \eta^{-1}(\Delta)$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Si le diviseur L est effectif, alors, sur la carte affine $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{A}^2$, on obtient (en tirant L par ρ puis en poussant par η) le diviseur d'un polynôme $P \in K[X, Y, X', Y']$ s'annulant au moins à l'ordre b le long de $\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$ et vérifiant

$$\deg_{(X,Y)}(P) \leqslant a, \quad \deg_{(X',Y')}(P) \leqslant a.$$

Un tel polynôme est élément de l'idéal $(X - X', Y - Y')^b$. Notons $U = X - X'$ et $V = Y - Y'$. Alors, nous pouvons écrire P sous la forme

$$P(X, Y, X', Y') = \sum_{u+v\geqslant b} P_{u,v}(X, Y)U^uV^v = Q(X, Y, U, V).$$

D'une part, $\deg_{(U,V)}(Q) \geqslant b$ et d'autre part, $\deg_{(U,V)}(Q) \leqslant \deg_{(X',Y')}(P)$. Ainsi, $0 \leqslant b \leqslant a$. Le cône effectif est donc inclus dans le cône

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

Réciproquement, $H - E$ est bien un diviseur effectif car, sur $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, le polynôme homogène

$$P(X, Y, Z, X', Y', Z') = XY' - X'Y + YZ' - ZY' + XZ' - ZX'$$

est de degré 1 en (X, Y, Z) et en (X', Y', Z') et s'annule à l'ordre 1 le long de $[X : Y : Z] = [X' : Y' : Z']$. □

Comme nous l'avons déjà mentionné, en suivant [17, page 120], nous pouvons préciser la Conjecture 1.1 en donnant une expression conjecturale de la constante $c = C_{H_{\omega_V^{-1}},L}(V)$. Celle-ci se définit comme le produit d'une constante $\alpha(\omega_V^{-1})$, donnée par

$$\alpha(\omega_V^{-1}) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, V) - 1)!} \int_{C_{\mathrm{eff}}^\vee(V)} \mathrm{e}^{-\langle \omega_V^{-1}, u\rangle} \,\mathrm{d}u,$$

où $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est le cône effectif de V, dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$, et $C_{\mathrm{eff}}^\vee(V)$ est son cône dual, et d'un nombre de Tamagawa $\boldsymbol{\tau}_{H_{\omega_V^{-1}},L}(V)$ (voir [17, pages 110-119] pour la définition). Cette définition est valable lorsque le cône effectif de V est de type fini. Ceci est, par exemple, le cas pour les variétés de Fano. Le cône effectif de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ est, d'après la Proposition 3.1, également de type fini. Nous allons ici calculer la constante pour cette variété, définie sur un corps de nombres K, pour des hauteurs particulières.

Nous utiliserons les mesures de Haar $\mathrm{d}x_v$ sur K_v, pour v place de K, normalisées comme suit :

1. $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$, où $\mathcal{O}_v = \{x \in K_v \mid v(x) \geqslant 0\}$, si v est ultramétrique ;
2. si $\mathbf{K}_v \simeq \mathbf{R}$, $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$;
3. si $\mathbf{K}_v \simeq \mathbf{C}$, $\mathrm{d}x_v$ est le double de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$.

Nous avons ici $\omega_{\mathbf{P}^2}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$.

Proposition 3.2. — *La constante de Peyre pour la hauteur sur* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2(K)$ *induite par* $H_{\omega_{\mathbf{P}^2}^{-1}}$ *est égale à*

$$\frac{2^{3r_K+5s_K}3^{r_K+2s_K}\pi^{6s_K}h_K^2R_K^2}{9w_K^2\,|\Delta_K|^3\,\zeta_K(3)^2}(12+\pi^2)^{r_K}.$$

Démonstration. — D'après la Proposition 3.1,

$$C_{\mathrm{eff}}^\vee(\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2) = \{aH + bE,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid a - b \geqslant 0,\ b \geqslant 0\}$$

et par ailleurs,

$$\omega_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2}^{-1} = 3H.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha(\omega_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2}^{-1}) &= \frac{1}{(2-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}b \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-3a}\,\mathrm{d}a \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3b}\,\mathrm{d}b \\ &= \frac{1}{9}.\end{aligned} \tag{7}$$

Pour alléger les notations de cette preuve, nous utiliserons la notation $\tilde{H} = H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2}, K}$. Le nombre de Tamagawa associé à cette hauteur est ici donné par

$$\boldsymbol{\tau}_{\tilde{H}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \lim_{s \to 1} (s-1)^2 \zeta_K(s)^2 \frac{1}{\Delta_K^2} \prod_{v \in M_K} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)).$$

Le terme λ_v^{-1} garantit la convergence du produit infini. Lorsque la place v est infinie, celui vaut 1 et, lorsque $v \in M_K$ est une place finie correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}_v$ de $\mathcal{O}_K$, nous avons

$$\lambda_v^{-1} = \left(1 - \frac{1}{q_v}\right)^2,$$

où q_v est la norme de l'idéal $\mathfrak{p}_v$. Dans ce second cas, puisque la métrique $\|\cdot\|_v$ est la métrique induite par le modèle entier, nous avons (voir [17, Lemme 2.2.1])

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)) = \frac{\# \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_{q_v})}{q_v^4}$$

Or les points de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_{q_v})$ sont d'exactement un des trois types suivants.

1. Nous avons tout d'abord les points de $E(\mathbf{F}_{q_v})$. Puisque les fibres de ε au dessus de D sont isomorphes à des droites projectives $\mathbf{P}^1$, nous avons
$$\# E(\mathbf{F}_{q_v}) = ({q_v}^2 + q_v + 1)(1 + q_v) = {q_v}^3 + 2{q_v}^2 + 2q_v + 1.$$
2. Ensuite, les points réductibles, de la forme $\varepsilon^{-1}(\pi(a,b))$, $a, b \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{q_v})$, $a \neq b$, sont au nombre de
$$\frac{1}{2}({q_v}^2 + q_v + 1)({q_v}^2 + q_v) = \frac{1}{2}{q_v}^4 + {q_v}^3 + {q_v}^2 + \frac{1}{2}q_v.$$
3. Enfin, les points irréductibles, de la forme $\varepsilon^{-1}(\pi(a,\bar{a}))$, $a \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{{q_v}^2}) \setminus \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{q_v})$ et $\bar{a}$ est son conjugué, sont au nombre de
$$\frac{1}{2}(({q_v}^4 + {q_v}^2 + 1) - ({q_v}^2 + q_v + 1)) = \frac{1}{2}{q_v}^4 - \frac{1}{2}q_v.$$

Par conséquent, $\# \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_{q_v}) = {q_v}^4 + 2{q_v}^3 + 3{q_v}^2 + 2q_v + 1$. Ainsi,

$$\prod_{v \nmid \infty} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{K}_v)) = \prod_{v \nmid \infty} \left(1 - \frac{1}{q_v^3}\right)^2 = \zeta_K(3)^{-2}.$$

Passons aux volumes archimédiens. Nous rappelons que U_0 et V_0 ont été définis en (4). Lorsque $v \in M_K$ est une place archimédienne,

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(U_0(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^2)}, v}}(V_0(K_v)). \tag{8}$$

La première égalité se déduit par densité. La seconde provient du fait que ε est un isomorphisme en dehors du lieu singulier et de la relation entre les hauteurs anticanoniques sur $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et $\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2$, via la résolution crépante ε.

Dans le cas des places réelles, c'est-à-dire telles que $K_v \simeq \mathbf{R}$, l'ensemble $V_0(\mathbf{R})$ se divise en deux sous-ensembles mesurables

$$V_r(\mathbf{R}) = \{\pi(x,y) \in \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x, y \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}),\ x \neq y\} \tag{9}$$

et

$$V_i(\mathbf{R}) = \{\pi(x,\bar{x}) \in \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) - \mathbf{P}^2(\mathbf{R})\}, \tag{10}$$

où $\bar{x}$ désigne le conjugué complexe de x. La volume du premier est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}_{\operatorname{Sym}^2(\mathbf{P}^2)}},v}(V_r(\mathbf{R})) &= \frac{1}{2}\int_{(\mathbf{R}^2)^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\max\{1,|x_1|,|x_2|\}^3 \max\{1,|y_1|,|y_2|\}^3} \\ &= 72\end{aligned}$$

et celui du second

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}_{\operatorname{Sym}^2(\mathbf{P}^2)}},v}(V_i(\mathbf{R})) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\max\{1,|x_1|,|x_2|\}^6} \\ &= \frac{1}{2}\int_{([0;+\infty[\times[0,2\pi])^2} \frac{(2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta)(2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi)}{\max\{1,r,\rho\}^6} \\ &= 8\pi^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\rho}{\max\{1,r,\rho\}^6} \\ &= 6\pi^2.\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas réel,

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(V_0(K_v)) = 72 + 6\pi^2.$$

Dans le cas complexe, nous obtenons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(V_0(K_v)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^4} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|,|y_1|\}\max\{1,|x_2|,|y_2|\})^6} \\ &= 72\pi^4.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta_K(z) = \frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K} h_K R_K}{w_K\sqrt{|\Delta_K|}}.$$

La constante de Peyre $\alpha(\omega^{-1}_{\operatorname{Hilb}^2\mathbf{P}^2})\boldsymbol{\tau}_{\tilde{H}}(\operatorname{Hilb}^2\mathbf{P}^2)$ est alors égale à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}\left(\frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K} h_K R_K}{w_K\sqrt{|\Delta_K|}}\right)^2 \frac{1}{\Delta_K^2}\zeta_K(3)^{-2}(72+6\pi^2)^{r_K}(72\pi^4)^{s_K} \\ &= \frac{2^{3r_K+5s_K}3^{r_K+2s_K}\pi^{6s_K}h_K^2R_K^2}{9w_K^2|\Delta_K|^3\zeta_K(3)^2}(12+\pi^2)^{r_K}.\end{aligned} \tag{11}$$

□

Remarque 4. — *Lorsque le corps de base est le corps* $\mathbf{Q}$ *des nombres rationnels, cette constante est égale à*

$$\frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2}. \tag{12}$$

3.2. Le résultat. —

Théorème 3.3. — *Pour tout ouvert non vide* V *de* $\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$,

$$\#\{y\in V_r(\mathbf{Q})\cap V(\mathbf{Q})\mid H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}(y)\leqslant B\}\underset{B\to+\infty}{\sim}\frac{8}{\zeta(3)^2}B\log B$$

et

$$\#\{y\in \mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})-V_r(\mathbf{Q})\mid H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}(y)\leqslant B\}\underset{B\to+\infty}{\sim}\frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2}B\log B$$

avec V_r *défini en* (6).

Remarque 5. — *Nous retrouvons, dans le deuxième équivalent, la constante de Peyre donnée en* (12). *De plus, ce théorème montre que, sur l'ouvert* U_0 *de* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$,

$$\#\{z\in U_0(\mathbf{Q})\mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\}\underset{B\to+\infty}{\sim}cB\log B$$

avec

$$c=\frac{48+2\pi^2}{3\zeta(3)^2}>C_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}}(\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2).$$

La Conjecture 1.1 est donc vraie sur $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$, *en restriction à l'ouvert* U_0, *si on ne demande pas à la constante d'être celle définie par Peyre. Ce théorème ne contredit pas pour autant la Conjecture 1.1 forte avec constante de Peyre. Pour cela il faudrait montrer que pour tout ouvert non vide* V *de* $\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$,

$$\#\{y\in (\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})-V_r(\mathbf{Q}))\cap V(\mathbf{Q})\mid H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}(y)\leqslant B\}\underset{B\to+\infty}{\sim}\tilde{c}B\log B$$

avec $\tilde{c}>\frac{2\pi^2}{\zeta(3)^2}$.

Démonstration. — La première partie est exactement la Proposition 2.11, en remarquant que la constante de Peyre pour $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ avec la hauteur

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}\colon (x_1,x_2)\mapsto H(x_1)^3H(x_2)^3$$

considérée est

$$\left(\frac{4}{\zeta(3)}\right)^2=\frac{16}{\zeta(3)^2}.$$

En utilisant la définition des points irréductibles (Définition 2.1), nous avons, en notant $\bar{x} \in \mathbf{P}^2(\overline{\mathbf{Q}})$ le conjugué du point quadratique x,

$$\begin{aligned}&\#\{y \in \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) - V_r(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}(y) \leqslant B\}\\ &\quad = \frac{1}{2}\#\{(x,\bar{x}) \in (\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2)(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x):\mathbf{Q}] = 2,\ H(x)^6 \leqslant B\}\\ &\quad = \frac{1}{2}\#\{x \in \mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x):\mathbf{Q}] = 2,\ H(x)^6 \leqslant B\}\\ &\quad \sim \frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2} B \log B,\end{aligned}$$

d'après le résultat de Schmidt [21, Théorème 3]. □

4. Cas de la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Nous réalisons ici la même étude que précédemment, cette fois dans le cas de $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$.

4.1. Cône effectif et constante de Peyre pour $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$.

— Le groupe de Picard de $\operatorname{Hilb}^2(P^1 \times \mathbf{P}^1)$ est

$$\operatorname{Pic}(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)) = \operatorname{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \oplus \mathbf{Z}E = \mathbf{Z}H_1 \oplus \mathbf{Z}H_2 \oplus \mathbf{Z}E,$$

$\rho^* H_1 = \eta^*[\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)^2}(1,0,1,0)]$ et $\rho^* H_2 = \eta^*[\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)^2}(0,1,0,1)]$.

Comme en (4), nous noterons pour cette partie $U_0 = \operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - E$ et $V_0 = \operatorname{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - D$.

Proposition 4.1. — *Le cône effectif de* $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ *est*

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_1 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_2 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

Démonstration. — Comme précédemment, le diviseur E est effectif et si le diviseur $aH_1 + bH_2 + cE$ est effectif, alors $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)^2}(a,b,a,b)$ est effectif, donc $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

Soit $L = aH_1 + bH_2 - cE$, avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ et $abc \neq 0$. Si le diviseur L est effectif, alors, sur $(\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1)^2$, il induit le diviseur d'un polynôme $P \in K[X,Y,X',Y']$ s'annulant au moins à l'ordre c le long de $\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$ et vérifiant

$$\deg_X(P) \leqslant a, \quad \deg_{X'}(P) \leqslant a, \quad \deg_Y(P) \leqslant b, \quad \deg_{Y'}(P) \leqslant b.$$

Un tel polynôme est élément de l'idéal $(X - X', Y - Y')^c$. Notons toujours $U = X - X'$ et $V = Y - Y'$. Alors

$$P(X,Y,X',Y') = \sum_{u+v\geqslant c} P_{u,v}(X,Y)U^u V^v = Q(X,Y,U,V).$$

On en déduit que

$$0 \leqslant c \leqslant \deg_U(Q) + \deg_V(Q) \leqslant \deg_{X'}(P) + \deg_{Y'}(P) \leqslant a + b.$$

Le cône effectif est donc inclus dans le cône

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_1 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_2 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

Réciproquement, $H_1 - E$ est bien un diviseur effectif car le polynôme homogène

$$P(X, Z, Y, T, X', Z', Y', T') = XZ' - ZX'$$

est de degré 1 en X, X', Z et Z', de degré 0 en Y, Y', T et T' et s'annule à l'ordre 1 le long de $([X : Z], [Y : T]) = ([X' : Z'], [Y' : T'])$. De la même façon, on montre que $H_2 - E$ est également effectif. $\square$

Passons à la constante de Peyre.

Proposition 4.2. — *Considérons, sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$, la hauteur absolue anti-canonique*

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}} : (x_1, x_2) \mapsto H^2(x_1)H^2(x_2).$$

Alors la hauteur $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)},K}$ sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(K)$ associée vérifie

$$\frac{2^{6r_K+10s_K}\pi^{7s_K}h_K^3R_K^3}{32w_K^3\,|\Delta_K|^{7/2}}(16+\pi^2)^{r_K} \prod_{\substack{\mathfrak{p}\neq 0\\ \textit{idéal}\\ \textit{premier}}} \left(1 - \frac{7}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^3} + \frac{7}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^4} - \frac{1}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^7}\right).$$

Démonstration. — La preuve suivra le même schéma que celle de la Proposition 3.2. Commençons par calculer la constante $\alpha(\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)})$. Nous avons

$$\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)} = 2H_1 + 2H_2$$

et d'après la Proposition 4.1, $C^\vee_{\mathrm{eff}}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1))$ est égal à

$$\{aH_2 + bH_2 + cE,\ (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a - c \geqslant 0,\ b - c \geqslant 0,\ c \geqslant 0\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\alpha(\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)}) &= \frac{1}{(3-1)!}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}c \int_c^{+\infty}\int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-2a-2b}\ \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}c \left(\int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-2a}\ \mathrm{d}a\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4c}\ \mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{32}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Dans la suite de cette preuve, nous utiliserons la notation $\tilde{H} = H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)},K}$. Le nombre de Tamagawa associé à cette hauteur est donné par

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\tau}_{\tilde{H}}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1))\\&\quad=\lim_{s\to1}(s-1)^3\zeta_K(s)^3\frac{1}{\Delta_K^2}\prod_{v\in M_K}\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v)).\end{aligned}$$

Le terme de convergence λ_v^{-1} est égal à 1 lorsque v est une place infinie et si $v\in M_K$ est une place finie, correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}_v$ de $\mathcal{O}_K$, ce terme vaut

$$\lambda_v^{-1}=\left(1-\frac{1}{q_v}\right)^3,$$

où q_v est la norme de l'idéal $\mathfrak{p}_v$. Comme précédemment,

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v))=\frac{\#\,\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{F}_{q_v})}{q_v^4}.$$

De plus, $\#\,\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{F}_{q_v})=1+3q_v+6q_v^2+3q_v^3+q_v^4$. Ainsi, pour toute place finie v,

$$\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{K}_v))=1-\frac{7}{q_v^3}+\frac{7}{q_v^4}-\frac{1}{q_v^7}.$$

Passons aux volumes de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v)$ pour la mesure de Tamagawa aux places v archimédiennes. Comme en (8)

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v))=\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(U_0(K_v))=\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)}},v}(V_0(K_v)),$$

Dans le cas des places réelles, nous avons

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(V_0(K_v))\\&\quad=\frac12\int_{\mathbf{R}^4}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|x_2|\}\max\{1,|y_1|\}\max\{1,|y_2|\})^2}\\&\qquad+\frac12\int_{\mathbf{C}^2}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|y_1|\})^4}\\&\quad=128+8\pi^2.\end{aligned}$$

Et dans le cas complexe,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_{H_{\omega^{-1}},v}(V_0(K_v))\\&\quad=\frac12\int_{\mathbf{C}^4}\frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|x_2|\}\max\{1,|y_1|\}\max\{1,|y_2|\})^4}\\&\quad=\frac12\left(\int_{\mathbf{C}}\frac{\mathrm{d}x_1}{\max\{1,|x_1|\}^4}\right)^4\\&\quad=\frac12(4\pi)^4\\&\quad=128\pi^4.\end{aligned}$$

□

4.2. Théorème principal. — On considère la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définie sur le corps $\mathbf{Q}$ et munie de la hauteur anticanonique donnée par

$$H_{\mathcal{O}(2,2)}(x,y) = H(x)^2 H(y)^2,$$

où H est la hauteur absolue usuelle sur $\mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$. Nous nous intéressons ici, en particulier, aux points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, donc à la Conjecture 2.8 sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ pour la hauteur induite $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)},\mathbf{Q}}$. Nous avons, pour tout $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2(\mathbf{Q})$,

$$H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1,2},\mathbf{Q}}(\pi((x_1,x_2),(y_1,y_2))) = H(x_1)^2 H(x_2)^2 H(y_1)^2 H(y_2)^2$$

et

$$H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)},\mathbf{Q}} = H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1,2},\mathbf{Q}} \circ \varepsilon.$$

Pour plus de clarté dans les énoncés et les démonstrations, nous noterons ici

$$\omega^{-1} = \omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)}.$$

Nous allons séparer les points rationnels de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ en trois catégories que nous décrivons ici sur $(\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1))(\mathbf{Q})$. Nous considérerons

1. l'ensemble $V_r(\mathbf{Q}) = \pi((\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2(\mathbf{Q}))$ des points *réductibles* ;
2. l'ensemble $V_1(\mathbf{Q}) \subset V_0(\mathbf{Q})$ des points dits *irréductibles de type 1* de la forme $x + \bar{x}$ avec $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$, $[\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2$, et $x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ (ou, de manière symétrique, $x_2 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$, avec $[\mathbf{Q}(x_2) : \mathbf{Q}] = 2$, et $x_1 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$) et $\bar{x}$ est son conjugué ;
3. et l'ensemble $V_2(\mathbf{Q}) \subset V_0(\mathbf{Q})$ des points dits *irréductibles de type 2* de la forme $x + \bar{x}$ où $x = (x_1, x_2)$, avec $x_1, x_2 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}})$ et $[\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(x_2) : \mathbf{Q}] = 2$, et $\bar{x}$ est son conjugué.

Nous noterons $Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}$ la fonction zêta des hauteurs pour $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ muni de la hauteur absolue usuelle H. Cette fonction est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, par

$$Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(s) = \sum_{x\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \frac{1}{H(x)^s}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3. — *Soient* $Z_0 = \varepsilon^{-1}(V_r(\mathbf{Q})) - E(\mathbf{Q})$, $Z_1 = \varepsilon^{-1}(V_1(\mathbf{Q}))$ *et*

$$Z = Z_0 \cup Z_1.$$

Nous avons

1. *Pour tout ensemble ouvert non vide U de* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, *le cardinal de l'ensemble*
$$\{z \in U(\mathbf{Q}) \cap Z_0 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\}$$
est équivalent, lorsque B tend vers l'infini, à
$$\frac{8}{\zeta(2)^4} B \log^3 B.$$

2. *Lorsque B tend vers l'infini,*

$$\#\{z \in Z_1 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \frac{8Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^{3/2} + O(B\log B).$$

3. *Lorsque B tend vers l'infini,*

$$\begin{aligned}&\#\{z \in \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q}) - Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\}\\ &\quad = c_3 B\log^2 B + O(B\log^{3/2} B),\end{aligned}$$

avec

$$c_3 = \frac{1}{4}(16+\pi^2)\prod_{p \text{ premier}}\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right).$$

Remarque 6. — 1. *La troisième partie du théorème montre que la Conjecture 2.8 est vraie pour* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ *avec pour ensemble exceptionnel l'ensemble Z, mince et dense. De plus, d'après la Proposition 4.2, la constante c_3 est exactement la constante de Peyre pour la variété* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$ *munie de la hauteur* $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1),\mathbf{Q}}}$.

2. *Comme nous l'avons déjà remarqué au Paragraphe* 2.4.1, *la première partie fournit un contre-exemple à puissance du* $\log B$ *dans la Conjecture 2.8 forte (conjecture de Batyrev-Manin). Ce théorème constitue le premier exemple où la conjecture forte est fausse mais où l'on peut prouver une conjecture affaiblie.*

3. *Si on considère le morphisme*

$$\begin{aligned}\varphi_1\colon\ (\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^1)\times\mathbf{P}^1 &\longrightarrow \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)\\ (\pi(x,y),z) &\longmapsto \pi((x,z),(y,z))\end{aligned}$$

et son symétrique $\varphi_2\colon(\pi(x,y),z)\mapsto\pi((z,x),(z,y))$, *alors* $V_1(\mathbf{Q})$ *est égal à*

$$\big(\varphi_1(\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}))\cup\varphi_2(\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})\times\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}))\big)\cap V_0(\mathbf{Q}).$$

Ainsi, $V_1(\mathbf{Q})$ *est un ensemble mince de* $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ *contenu dans un fermé de dimension 3 de* $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$. *La deuxième partie ne donne donc pas de contre-exemple à la puissance de B dans la conjecture forte.*

4. *Revenons à notre problème initial, l'étude de la répartition des points quadratiques de* $(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$. *Comme nous allons le voir dans la démonstration (Théorèmes 4.4 et 4.5), le cardinal de l'ensemble*

$$\{x=(x_1,x_2)\in(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\overline{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x):\mathbf{Q}]=2,\ H(x_1)H(x_2)\leqslant B\}$$

est égal, lorsque B tend vers l'infini, à

$$c_2B^6 + O(B^4\log^2 B),$$

le terme principal étant donné par la contribution des points quadratiques de la forme (x_1, x_2) *où l'un des* x_i *est rationnel (points quadratiques de type 1).*

La fin de cette partie se concentre sur la preuve du Théorème 4.3. La première partie a déjà été traitée dans la Proposition 2.11. En effet, la variété $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2$ est une variété de drapeaux généralisée, donc ses points rationnels sont équidistribués sur tout ensemble ouvert non vide (Condition 2 de la Proposition 2.11). De plus, d'après le théorème de Schanuel sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ et la stabilité de la constante de Peyre par produit, la constante associée à $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2$ est

$$\left(\frac{2}{\zeta(2)}\right)^4.$$

De la même manière que pour $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$, le reste du théorème sera déduit de l'étude des points quadratiques de la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Nous étudions donc maintenant la répartition des points quadratiques de type 1, puis de type 2.

4.3. Points quadratiques de type 1. — Intéressons-nous aux points quadratiques de type 1, de la forme $x = (x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\bar{\mathbf{Q}})$ où l'un des x_i est rationnel et l'autre de degré 2. Notons

$$\mathcal{N}_1(B) = \#\{(x_1, x_2) \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}.$$

THÉORÈME 4.4. — *Lorsque* B *tend vers l'infini,*

$$\mathcal{N}_1(B) = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^6 + O(B^4 \log B).$$

Ce Théorème suivant démontre le point 2. du Théorème 4.3, étant donné la relation

$$\#\{z \in Z_1 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \mathcal{N}_1(B^{1/4}).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\mathcal{N}_1(B) = \sum_{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \#\left\{x_1 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2,\ H(x_1) \leqslant \frac{B}{H(x_2)}\right\}.$$

Or, d'après [21, Théorème 3],

$$\#\{x_1 \in \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2],\ H(x_1) \leqslant B\} = \frac{8}{\zeta(3)} B^6 + O(B^4 \log B).$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_1(B) = \sum_{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \left(\frac{8}{\zeta(3)} \frac{B^6}{H(x_2)^6} + O\left(\frac{B^4}{H(x_2)^4} \log\left(\frac{B}{H(x_2)}\right)\right)\right).$$

De plus,

$$\sum_{x_2\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})}\frac{\log H(x_2)}{H(x_2)^4}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\log(n)\frac{\#\{x_2\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})\mid n\leqslant H(x_2)<n+1\}}{n^4}$$
$$\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2},$$

car

$$\#\{x_2\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})\mid H(x_2)\leqslant B\}=\frac{2}{\zeta(2)}B^2+O(B\log B). \tag{14}$$

d'après le théorème de Schanuel [19]. Donc la série du terme d'erreur converge et

$$\mathcal{N}_1(B)=\frac{8Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)}B^6+O(B^4\log B).$$

□

4.4. Points quadratiques de type 2. — Notons $\mathcal{N}_2(B)$ l'ensemble des points quadratiques de type 2 de $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$, de la forme $x=(x_1,x_2)\in(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\bar{\mathbf{Q}})$ avec x_1 et x_2 des points quadratiques de $\mathbf{P}^1$, et vérifiant

$$H(x_1)H(x_2)\leqslant B.$$

Le point x est de degré 2 si, et seulement si, les points x_1 et x_2 engendrent un même corps quadratique L. Nous avons donc

$$\mathcal{N}_2(B)=\sum_{[L:\mathbf{Q}]=2}\#\{(x_1,x_2)\in(\mathbf{P}^1)^2(L),\ \mathbf{Q}(x_i)=L,\ H(x_1)H(x_2)\leqslant B\}.$$

Théorème 4.5. — *Lorsque B tend vers l'infini, $\mathcal{N}_2(B)$ est égal à*

$$8(16+\pi^2)\prod_p\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right)B^4(\log B)^2+O(B^4(\log B)^{3/2}).$$

Ceci démontre le point 3 du Théorème 4.3, étant donné que

$$\#\{z\in\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})-Z\mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\}=\frac{1}{2}\mathcal{N}_2(B^{1/4}).$$

Pour la preuve du Théorème 4.5, nous utiliserons une méthode semblable à celle utilisée par Schmidt dans [21]. Commençons par étudier, pour tout corps quadratique L et tout nombre réel B, le cardinal

$$\mathcal{N}_{2,L}(B)=\#\{(x_1,x_2)\in(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(L)\mid\mathbf{Q}(x_i)=L,\ H(x_1)H(x_2)\leqslant B\}. \tag{15}$$

Remarque 7. — *Dans la suite, les constantes implicites dans les notations O, $\ll$ ou $\gg$ seront indépendantes du corps quadratique L. Pour tout nombre réel $u>0$, nous notons*

$$\log^+(u)=\max\{1,\log u\}.$$

Soient

$$c_L = \frac{\gamma_L \lambda_L h_L R_L}{w_L \zeta_L(2)\,|\Delta_L|}, \quad c_L^* = \sqrt{\frac{h_L R_L \log^+(h_L R_L)}{|\Delta_L|}}, \tag{16}$$

avec

$$\gamma_L = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \Delta_L < 0 \\ 8 & \text{si } \Delta_L > 0 \end{cases} \quad \lambda_L = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \Delta_L < 0 \\ 4 & \text{si } \Delta_L > 0 \end{cases},$$

et

$$\delta_L = \max\left\{1, \frac{|\Delta_L|^{1/4}}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{17}$$

Rappelons le résultat suivant, dû à Schmidt, qui donne une version plus précise du théorème de Schanuel.

Proposition 4.6 ([21, Théorème 2]). — *Soit L un corps quadratique. Alors, lorsque B tend vers l'infini,*

$$\#\{\alpha \in \mathbf{P}^1(L) \mid \mathbf{Q}(\alpha) = L,\ H(\alpha) \leqslant B\} = c_L B^4 + O(c_L^* B^3)$$

et le grand O est uniforme en le corps quadratique L.

Remarque 8. — 1. *Si $\alpha \in \mathbf{P}^1(L)$ et $\mathbf{Q}(\alpha) = L$ est quadratique, alors le discriminant de L vérifie*

$$|\Delta_L| \leqslant 4H(\alpha)^4. \tag{18}$$

(borne de Silverman, voir [24, Théorème 2]*).*

2. *Nous en déduisons que le cardinal de la Proposition 4.6 est nul si $B < \delta_L$. Ainsi,*

$$c_L \delta_L = O(c_L^*). \tag{19}$$

Nous pouvons alors montrer la proposition suivante.

Proposition 4.7. — *Soit L un corps quadratique. Le cardinal $\mathcal{N}_{2,L}(B)$ de l'ensemble*

$$\{(x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(L) \mid \mathbf{Q}(x_i) = L,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}.$$

vérifie

1. *si $B < \delta_L^2$, $\mathcal{N}_{2,L}(B) = 0$;*
2. *pour tout réel $B \geqslant \delta_L^2$, $\mathcal{N}_{2,L}(B)$ est égal à*

$$4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^* c_L}{\delta_L} B^4 + (c_L^*)^2 B^3 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + (c_L^*)^2 B^3\right)$$

et le grand O est uniforme en le corps quadratique L.

Démonstration. — Dans cette preuve, les grands O seront uniformes en le corps quadratique L.

Tout d'abord, si L est un corps quadratique et si y est un point de $\mathbf{P}^1(L)$ tel que $\mathbf{Q}(y) = L$ alors nous avons, d'après (18),

$$H(y) \geqslant \frac{|\Delta_L|^{1/4}}{\sqrt{2}} = \delta_L$$

car la hauteur H est à valeurs dans $[1; +\infty[$. Nous en déduisons la première partie. De plus, en reprenant (15) nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{2,L}(B) &= \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \# \left\{ y \in \mathbf{P}^1(L) \mid \mathbf{Q}(y) = L,\ H(y) \leqslant \frac{B}{H(x)} \right\} \\ &= c_L B^4 \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^4} + O\left(c_L^* B^3 \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^3} \right),\end{aligned}$$

d'après 4.6. Notons, pour tout entier naturel n et tous nombres réels $M \geqslant N \geqslant 1$,

$$Z_L(n, N, M) = \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ N \leqslant H(x) \leqslant M}} \frac{1}{H(x)^n}.$$

Nous allons montrer que

$$Z_L(4, \delta_L, B/\delta_l) = 4 c_L \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^*}{\delta_L}\right)$$

et

$$Z_L(3, \delta_L, B/\delta_l) = O\left(\frac{c_L}{\delta_L} B + c_L^* \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + c_L^*\right),$$

ce qui démontrera la proposition. Posons, pour tout entier naturel $j \geqslant 1$,

$$a_L(j) = \#\{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x) = L,\ j - 1 \leqslant H(x) < j\}$$

et

$$A_L(j) = \sum_{k=1}^{j} a_L(k).$$

Alors, d'après la Proposition 4.6,

$$A_L(j) = c_L j^4 + O(c_L^* j^3)$$

et, par ailleurs, pour $M > N \geqslant 1$ entiers naturels,

$$\begin{aligned} Z_L(n,N,M) &= \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{\substack{x\in\mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ j-1\leqslant H(x)<j}} \frac{1}{H(x)^n} \\ &= \sum_{j=N+1}^{M} \frac{a_L(j)}{j^n} + O\left(\sum_{j=N+1}^{M} \frac{a(j)}{j^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

De plus, par la formule sommatoire d'Abel, pour tous entiers naturels n et $M > N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+1}^{M} \frac{a_L(j)}{j^n} &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + n\int_N^M \frac{A_L(u)}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + n\int_N^M \frac{c_L u^4 + O(c_L^* u^3)}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + nc_L\int_N^M \frac{1}{u^{n-3}}\,\mathrm{d}u + O\left(c_L^*\int_N^M \frac{1}{u^{n-2}}\,\mathrm{d}u\right). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tous entiers $M > N \geqslant 1$,

$$Z_L(4,N,M) = 4c_L \log\left(\frac{M}{N}\right) + O\left(c_L + \frac{c_L^*}{N}\right)$$

et

$$Z_L(3,N,M) = O\left(c_L M + c_L N + c_L^* + c_L^* \log\left(\frac{M}{N}\right)\right).$$

En prenant maintenant $M = \lfloor B/\delta_L \rfloor + 1$ et $N = \lfloor \delta_L \rfloor$, et d'après la relation (19) de la Remarque 8, on en déduit que

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L\leqslant H(x)\leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^4} = 4c_L \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^*}{\delta_L}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L\leqslant H(x)\leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^3} = O\left(\frac{c_L}{\delta_L}B + c_L^* + c_L^* \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)\right).$$

□

Les termes de la somme

$$\sum_{[L:\mathbf{Q}]=2} \#\{(x_1,x_2) \in (\mathbf{P}^1)^2(L),\ \ \mathbf{Q}(x_i) = L,\ \ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}$$

sont nuls dès que $|\Delta_L|^2 > 16B^4$. On peut donc récrire

$$\mathcal{N}_2(B) = \sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant 4B^2}} \mathcal{N}_{2,L}(B).$$

On obtient alors

$$\mathcal{N}_2(B) = \sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant 4B^2}} \Bigg[4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + \\ + O\left(\frac{c_L^* c_L}{\delta_L} B^4 + (c_L^*)^2 B^3 + (c_L^*)^2 B^3 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)\right)\Bigg].$$

Il reste à sommer des constantes arithmétiques sur l'ensemble des corps quadratiques. Nous rappelons que le grand O est uniforme en L. Le calcul de ces sommes repose sur des méthodes dont l'esprit est différent du reste de cet article et est détaillé dans la partie 5. Nous énonçons ici le résultat obtenu.

Proposition 4.8. — *Soient $Y \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$ des nombres réels.*

1. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant Y}} c_L^2 = 2(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right) \log(Y) + O(1).$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant Y}} c_L^2 \log(\delta_L^2) = \frac{1}{2}(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right) \log^2(Y)$ $+ O(\log Y).$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant Y}} \frac{c_L^* c_L}{\delta_L} = O((\log Y)^{3/2}).$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant Y}} (c_L^*)^2 = O(Y^{1/2} \log Y).$
5. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant Y}} (c_L^*)^2 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) = O\left(Y^{1/2} \log Y \log\left(\frac{B}{Y^{1/2}}\right) + Y^{1/2}\log Y\right).$

En prenant $Y = 4B^2$, cette proposition permet de montrer que

$$\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant 4B^2}} 4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)$$

a pour terme principal

$$4B^4(\pi^2+16)\prod_p\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right)\left(2\log(B)\log(B^2)-\frac{1}{2}\log^2(B^2)\right),$$

soit

$$8(\pi^2+16)\prod_p\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right)B^4\log^2(B),$$

avec pour terme d'erreur $O(B^4\log B)$. Finalement,

$$\mathcal{N}_2(B)=8(\pi^2+16)\prod_p\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right)B^4\log^2 B+O(B^4(\log B)^{3/2}).$$

5. Estimations de sommes arithmétiques

L'objectif de ce partie est de démontrer la Proposition 4.8 que nous avons laissée en suspens dans la preuve du Théorème 4.3. Nous commencerons par évaluer une somme faisant intervenir des fonctions L de Dirichlet. À partir de celle-ci, nous en déduirons les estimations qui nous intéressent.

5.1. Une somme de fonctions L. — Les corps quadratiques sont paramétrés par leur discriminant, entier (relatif) Δ vérifiant l'un des deux cas suivants :

1. $\Delta=1 \pmod 4$ et $\Delta\neq 1$ est sans facteur carré
2. $\Delta=4\Delta'$, $\Delta'=2$ ou $3 \pmod 4$ et Δ' est sans facteur carré.

Nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des tels entiers Δ et, pour Y un nombre réel strictement positif, $\mathcal{D}^+(Y)$ (respectivement $\mathcal{D}^-(Y)$) désignera l'ensemble des entiers $\Delta\in\mathcal{D}$ tels que $0<\Delta\leqslant Y$ (respectivement $-Y\leqslant\Delta<0$).

Nous considérons, pour $\Delta\in\mathcal{D}$, le caractère $\chi_\Delta\colon n\mapsto\left(\frac{\Delta}{n}\right)$, où $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est le symbole de Kronecker défini par les conditions suivantes :

1. Pour $p>2$ premier, $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ est le symbole de Legendre ;
2. $\left(\frac{\Delta}{n}\right)=0$ si n divise Δ ;
3. $\left(\frac{\Delta}{2}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \Delta=1 \pmod 8\\ -1 & \text{si } \Delta=5 \pmod 8\end{cases}$
4. $\left(\frac{\Delta}{-1}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \Delta>0\\ -1 & \text{si } \Delta<0\end{cases}$
5. $n\mapsto\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est totalement multiplicative.

Le caractère χ_Δ est un caractère de Dirichlet primitif modulo $|\Delta|$.

On peut alors considérer la série L de Dirichlet associée

$$L(s,\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{n}\right)n^{-s},$$

définie sous cette forme pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et se prolongeant en une fonction entière à $\mathbf{C}$.

On définit maintenant, pour $a, s \in \mathbf{C}$,

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(s,\Delta)^2}{L(a,\Delta)^2},$$

où $\mathcal{S}^{+}(s,a,Y)$ (respectivement $\mathcal{S}^{-}(s,a,Y)$) est la somme portant sur $\mathcal{D}^{+}(Y)$ (respectivement $\mathcal{D}^{-}(Y)$). Nous souhaitons montrer la proposition suivante, donnant une formule asymptotique de $\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y)$, lorsque Y tend vers l'infini.

Proposition 5.1. — *Soient $s = \sigma + i\tau$ et $a = \alpha + i\beta$ deux nombres complexes, avec $\sigma, \tau, \alpha, \beta$ des nombres réels tels que $7/8 < \sigma < \alpha$ et $\alpha > 3/2$. Alors, pour tout $\delta > 0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = c(s,a)Y + O\left(Y^{\frac{1}{6}\max\{13-8\sigma, 9-4\sigma, 3\}+\delta}\right)$$

avec

(20)

$$c(s,a) = \frac{\zeta(2s)^2}{2} \prod_{\substack{p \\ premier}} \left(\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^{2a}} + \frac{1}{p^{2(a+s)}} - \frac{4}{p^{a+s}} - \frac{1}{p^{4s}} + \frac{3}{p^{2s}}\right)\right).$$

De plus, la constante implicite dans le O ne dépend que de δ, α et σ.

En particulier, lorsque $s = 1$ et que $a = 2$, nous obtenons l'estimation suivante, que nous utiliserons dans la suite.

Corollaire 5.2. — *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(1,\Delta)^2}{L(2,\Delta)^2} = c(1,2)Y + O\left(Y^{\frac{5}{6}+\delta}\right),$$

avec

$$c(1,2) = \frac{\zeta(2)^2}{2} \prod_p \left(1 - 7p^{-3} + 7p^{-4} - p^{-7}\right).$$

Démontrons maintenant la Proposition 5.1. Dans toute la démonstration, les constantes implicites dans les O, ou les symboles $\ll$ et $\gg$, ne dépendront que de δ, α et σ. La démonstration s'inspire du travail de Schmidt [21, Annexe] pour l'estimation de

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(1,\Delta)}{L(2,\Delta)}.$$

Nous introduisons ici un paramètre $Z \geqslant 1$, qui sera choisi plus tard en fonction de Y.

LEMME 5.3. — *Pour tout $Z \geqslant 1$, tout $\Delta \in \mathcal{D}$, tout $s = \sigma + i\tau$ et tout $\delta > 0$,*

$$L(s,\Delta)^2 = \sum_{n \leqslant Z^2} \frac{d(n,Z)}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right) + \\ + O\big(Z^{-2\sigma} |\Delta|^{1+\delta} + Z^{-2\sigma+1} |\Delta|^{1/2+\delta} + Z^{-\sigma+\delta} |\Delta|^{1/2+\delta}\big),$$

où $d(n,Z) = \#\{(n_1,n_2) \in \mathbf{N}^2 \mid n_1 \leqslant Z,\ n_2 \leqslant Z \text{ et } n_1 n_2 = n\}$.

REMARQUE 9. — *Si $n \leqslant Z$, alors $d(n,Z) = d(n)$, le nombre de diviseurs positifs de n. Dans tous les cas, $d(n,Z) \leqslant d(n)$. De plus, la fonction $n \mapsto d(n)$ est multiplicative et vérifie, pour tout $n \geqslant 1$ et tout nombre réel $\delta > 0$,*

$$d(n) \ll n^\delta$$

(voir [1, Théorème 13.12]*).*

Démonstration. — Nous avons, d'après [21, Lemme 16, page 372],

$$L(s,\Delta) = \sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right) + O\big(Z^{-\sigma} |\Delta|^{1/2+\delta}\big).$$

Alors

$$L(s,\Delta)^2 = \left(\sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right)\right)^2 \\ + O\left(Z^{-\sigma} |\Delta|^{1/2+\delta} \left|\sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right)\right| + Z^{-2\sigma} |\Delta|^{1+2\delta}\right)$$

De plus,

$$\left(\sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right)\right)^2 = \sum_{n \leqslant Z^2} \frac{d(n,Z)}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right)\right| &\ll \sum_{n \leqslant Z} \frac{1}{n^\sigma} \\ &\ll \begin{cases} \log Z & \text{si } \sigma \geqslant 1 \\ Z^{-\sigma+1} & \text{sinon} \end{cases} \\ &\ll Z^\delta + Z^{-\sigma+1}. \end{aligned}$$

□

Dans la suite, μ désignera la fonction de Möbius. Nous avons alors, pour tout $\Delta \in \mathcal{D}$ et tout $a = \alpha + i\beta$,

$$L(a, \Delta)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{-a}.$$

De plus, si $\alpha > 1$,

$$L(a, \Delta) \geqslant \zeta(\alpha)^{-1} \gg 1$$

(voir [21, Lemme 16]). Nous pouvons donc récrire la somme $\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y)$, pour $\alpha > 1$, sous la forme

$$\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y) = \sum_{n \leqslant Z^2} \sum_{m,\ell \geqslant 1} \frac{d(n, Z)}{n^s} \frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right) + O\left(\sum_{|\Delta| \leqslant Y} \left(Z^{-2\sigma} |\Delta|^{1+\delta} + Z^{-2\sigma+1} |\Delta|^{1/2+\delta} + Z^{-\sigma+\delta} |\Delta|^{1/2+\delta}\right)\right)$$

et donc

$$\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y) = \sum_{n \leqslant Z^2} \sum_{m,\ell \geqslant 1} \frac{d(n, Z)}{n^s} \frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right) + O\big(Y^{2+\delta} Z^{-2\sigma} + Y^{3/2+\delta} Z^{-2\sigma+1} + Y^{3/2+\delta} Z^{-\sigma+\delta}\big). \tag{21}$$

Nous allons maintenant séparer le terme principal en deux parties, selon que l'entier $nm\ell$ est un carré ou non. Nous noterons donc

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s, a, Y, Z) = \sum_{\substack{n \leqslant Z^2 \\ m,\ell \geqslant 1 \\ nm\ell \text{ non carré}}} \frac{d(n, Z)}{n^s} \frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right) \tag{22}$$

et

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s, a, Y, Z) = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \leqslant Z^2 \\ m,\ell \geqslant 1 \\ nm\ell = u^2}} \frac{d(n, Z)}{n^s} \frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a} \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{u^2}\right). \tag{23}$$

Commençons par la contribution des $nm\ell$ non carrés (22).

Lemme 5.4. — *Pour tout $s = \sigma + i\tau$, tout $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 5/4$ et tout $\delta > 0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s, a, Y, Z) \ll Y^{1/2} + Y^{1/2} Z^{-2\sigma+5/2+\delta}.$$

Démonstration. — D'après [21, Lemme 15], pour tout entier $\ell \geqslant 1$ qui n'est pas un carré et pour tout $\delta > 0$,

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{\ell}\right) \ll \ell^{1/4+\delta} Y^{1/2}.$$

De plus, $d(n,Z) \ll n^{\delta}$ pour tout $\delta > 0$. Ainsi nous obtenons

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s,a,Y,Z) \ll Y^{1/2} \cdot \sum_{n \leqslant Z^2} \frac{1}{n^{\sigma-1/4-2\delta}} \cdot \sum_{m,\ell \geqslant 1} \frac{1}{(m\ell)^{\alpha-1/4-\delta}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant Z^2} \frac{1}{n^{\sigma-1/4-2\delta}} &\ll \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 5/4 \text{ et } \delta \text{ assez petit} \\ Z^{-2\sigma+5/2+\delta} & \text{si } \sigma \leqslant 5/4 \end{cases} \\ &\ll 1 + Z^{-2\sigma+5/2+\delta}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{m,\ell \geqslant 1} \frac{1}{(m\ell)^{\alpha-1/4-\delta}} &= \left(\sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{(m)^{\alpha-1/4-\delta}} \right)^2 \\ &\ll 1\end{aligned}$$

car $\alpha - 1/4 - \delta > 1$ pour δ suffisament petit. □

Passons à la contribution des *nml* carrés (23), donnant le terme principal de l'estimation.

Lemme 5.5. — *Pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 1/2$, tout $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 3/2$ et $\sigma < \alpha$ et tout $\delta > 0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s,a,Y,Z) = c(s,a)Y + O(YZ^{1/2-\sigma+\delta} + Y^{1/2}Z^{2-2\sigma+\delta} + Y^{1/2}),$$

où $c(s,a)$ est la constante donnée dans la Proposition 5.1.

Démonstration. — Nous noterons φ l'indicatrice d'Euler et

$$\psi(u) = \begin{cases} 3/8 & \text{si } u \text{ est impair;} \\ 1/2 & \text{si } u \text{ est pair,} \end{cases}$$

comme dans [21, p. 370]. D'après [21, Lemme 15], pour tout entier $u \geqslant 1$ et tout $Y > 0$,

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \left(\frac{\Delta}{u^2} \right) = u^{-1}\psi(u)\varphi(u) \Bigg(\sum_{\substack{q=1 \\ (2u,q)=1}}^{\infty} \mu(q)q^{-2} \Bigg) Y + O(uY^{1/2}).$$

De plus, $\varphi(u) \leqslant u$, donc

$$u^{-1}\psi(u)\varphi(u) \sum_{\substack{q=1 \\ (2u,q)=1}}^{\infty} \mu(q)q^{-2} \ll 1.$$

Nous obtenons donc, en utilisant la Remarque 9,

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s,a,Y,Z) = Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{d(n,Z)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a} + O\left(Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right)$$

En séparant les cas $n\leqslant Z$ et $Z<n\leqslant Z^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\pm}_{\square}&(s,a,Y,Z)\\ &= Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\ &\quad - Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n>Z\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\ &\quad + O\left(Y\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{Z<n\leqslant Z^2\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}} + Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

En regroupant tous les termes dépendants de Z dans le grand O, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\pm}_{\square}&(s,a,Y,Z)\\ &= Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\ &\quad + O\left(Y\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>Z\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}} + Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\m,\ell\geqslant 1\\nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right).\end{aligned}\tag{24}$$

Vérifions maintenant que le nombre multipliant Y dans le terme principal de (24) est bien la constante $c(s,a)$ (20). Exprimons donc

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\psi(u)\varphi(u)}{u} \sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q^2} \sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}$$

sous la forme d'un produit eulérien. On a (voir [21, p. 374]) pour tout $u \geqslant 1$

$$\psi(u) \sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q^2} = \frac{1}{2\zeta(2)} \prod_{\substack{p \text{ premier}\\ p\mid u}} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

De plus, la fonction arithmétique

$$A\colon u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u} \prod_{\substack{p \text{ premier}\\ p\mid u}} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nml=u^2}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}$$

est multiplicative. Nous pouvons donc écrire

$$A(u) = \prod_{\substack{p\\ \text{premier}}} \left(1+\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varphi(p^r)}{p^r}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nml=p^{2r}}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\right).$$

De plus, pour tout nombre premier p et tout nombre entier $r \geqslant 1$,

$$\frac{\varphi(p^r)}{p^r} = 1-\frac{1}{p}.$$

Par ailleurs, les termes de la somme

$$\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=p^{2r}}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}$$

sont nuls sauf si $(m,\ell) \in \{(1,1),(1,p),(p,1),(p,p)\}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nml=p^{2r}}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a} &= \frac{d(p^{2r})}{(p^{2r})^s} - 2\frac{d(p^{2r-1})}{(p^{2r-1})^s p^a} + \frac{d(p^{2r-2})}{(p^{2r-2})^s p^{2a}}\\
&= \frac{2r+1}{p^{2rs}} - 2\frac{2r}{p^{(2r-1)s}p^a} + \frac{2r-1}{p^{(2r-2)s}p^{2a}}\\
&= \frac{1}{p^{2rs}}\left(2r\left(1-\frac{1}{p^{a-s}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{p^{2(a-s)}}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2rs}}\left(2r\left(1-\frac{1}{p^{a-s}}\right)^2+1-\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}\left(\frac{1}{p^{2a}}+\frac{1}{p^{2(a+s)}}-\frac{4}{p^{a+s}}-\frac{1}{p^{4s}}+\frac{3}{p^{2s}}\right).$$

Ainsi, la constante du terme principal de (24) est égale à

$$\frac{\zeta(2s)^2}{2}\prod_{\substack{p\\ \text{premier}}}\left(\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^{2a}}+\frac{1}{p^{2(a+s)}}-\frac{4}{p^{a+s}}-\frac{1}{p^{4s}}+\frac{3}{p^{2s}}\right)\right).$$

Pour terminer la preuve, il nous reste à calculer le terme d'erreur dans (24), à savoir

$$YE_1+Y^{1/2}E_2$$

où

$$E_1=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>Z\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\quad\text{et}\quad E_2=\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}.$$

Nous avons, pour $\delta>0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned}E_1&\ll\sum_{m,\ell\geqslant 1}(m\ell)^{-\alpha+\sigma-\delta}\sum_{\substack{u>\sqrt{m\ell Z}\\ m\ell\mid u^2}}u^{-2\sigma+2\delta}\\
&\ll\sum_{m,\ell\geqslant 1}(m\ell)^{-\alpha+\sigma-\delta}(\sqrt{m\ell Z})^{1-2\sigma+2\delta}\\
&\ll Z^{1/2-\sigma+\delta}\sum_{m,\ell\geqslant 1}(m\ell)^{1/2-\alpha}\\
&\ll Z^{1/2-\sigma+\delta}\end{aligned}$$

puisque $\sigma>1/2$ et $\alpha>3/2$. Enfin,

$$E_2\ll\sum_{u=1}^{\infty}u^{1-2\sigma+2\delta}\sum_{\substack{m,\ell\geqslant 1\\ ml\mid u^2\\ m\ell\geqslant u^2/Z^2}}(m\ell)^{\sigma-\alpha-\delta}$$

Nous aurons besoin de l'estimation suivante : pour tout nombre entier $u \geqslant 1$ et tout $\delta > 0$,

$$\#\{(m,\ell) \in \mathbf{N}^2,\ m\ell \mid u\} \leqslant d(u)^2 \ll u^\delta.$$

Puisque $\sigma < \alpha$,

$$\sum_{\substack{m,\ell \geqslant 1 \\ ml \mid u^2 \\ m\ell \geqslant u^2/Z^2}} (m\ell)^{\sigma-\alpha-\delta} \ll \begin{cases} \#\{(m,\ell), m\ell \mid u^2\} \cdot 1 & \text{si } u \leqslant Z \\ \#\{(m,\ell), m\ell \mid u^2\} \cdot \left(\frac{u^2}{Z^2}\right)^{\sigma-\alpha-\delta} & \text{si } u > Z \end{cases}$$

$$\ll \begin{cases} u^\delta & \text{si } u \leqslant Z \\ Z^{2\alpha-2\sigma+2\delta} u^{2\sigma-2\alpha+\delta} & \text{si } u > Z. \end{cases}$$

Donc, pour δ assez petit,

$$\begin{aligned} E_2 &\ll \sum_{u \leqslant Z} u^{1-2\sigma+3\delta} + Z^{2\alpha-2\sigma+2\delta} \sum_{u > Z} u^{1-2\alpha+3\delta} \\ &\ll \max\{1, Z^{2-2\sigma+\delta}\} + Z^{2-2\sigma+\delta} \\ &\ll Z^{2-2\sigma+\delta} + 1. \end{aligned}$$

□

D'après les Lemmes 5.4 et 5.5 et la relation (21), nous déduisons que, pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 1/2$, tout $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 3/2$ et $\sigma < \alpha$ et tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = c(s,a)Y + O\Big(&Y^{2+\delta}Z^{-2\sigma} + Y^{3/2+\delta}Z^{-2\sigma+1} + Y^{3/2+\delta}Z^{-\sigma+\delta} \\ &+ Y^{1/2} + Y^{1/2}Z^{-2\sigma+5/2+\delta} + YZ^{1/2-\sigma+\delta} + Y^{1/2}Z^{2-2\sigma+\delta}\Big). \end{aligned}$$

Posons alors $Z = Y^{2/3}$ pour obtenir

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = c(s,a)Y + O\left(Y^{\max\{13/6-4\sigma/3+\delta, 3/2-2\sigma/3, 1/2\}}\right).$$

Ceci clôt la démonstration de la Proposition 5.1.

5.2. Démonstration de la Proposition 4.8. — L'estimation de la Proposition 5.1 nous permet maintenant de démontrer la Proposition 4.8 donnant certaines sommes arithmétiques dont nous avons eu besoin pour la preuve du Théorème 4.3.

Nous reprenons les notations (16) et (17). On considère un corps quadratique L, de discriminant Δ_L.

1. D'après le Corollaire 5.2 et en utilisant les égalités

$$\frac{\lambda^{\pm} h_L R_L}{w_L \left|\Delta_L\right|^{1/2}} = L(1,\Delta_L) \quad \text{et} \quad \zeta_L(2) = \zeta(2)L(2,\Delta), \tag{25}$$

on obtient :

$$c_L^2 = (\gamma^{\pm})^2 \zeta(2)^{-2} \frac{L(1,\Delta_L)^2}{|\Delta_L|\, L(2,\Delta_L)^2}.$$

Par la formule sommatoire d'Abel, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta_L \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_L^2 &= \frac{(\gamma^{\pm})^2}{\zeta(2)^2} \Bigg(\frac{c(1,2)Y + O(Y^{5/6+\delta})}{Y} \\ &\qquad + \int_1^Y \frac{c(1,2)u + O(u^{5/6+\delta})}{u^2}\, \mathrm{d}u \Bigg) \\ &= \frac{(\gamma^{\pm})^2}{\zeta(2)^2} c(1,2) \log Y + O(1). \end{aligned} \tag{26}$$

2. Remarquons que le seul discriminant Δ_L tel que $\delta_L = 1$ est $\Delta_L = -3$. Ainsi, d'après (26) et une transformation d'Abel,

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta_L \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_L^2 \log(\delta_L^2) &= \sum_{\Delta_L \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_L^2 \log\left(\frac{\sqrt{|\Delta|_L}}{2}\right) + O(1) \\ &= \big(c_0^{\pm} \log(Y) + O(1)\big) \log\left(\frac{\sqrt{Y}}{2}\right) \\ &\quad - \int_1^Y \frac{c_0^{\pm}\log(u) + O(1)}{2u}\, \mathrm{d}u + O(1) \\ &= \frac{1}{2} c_0^{\pm} \log^2(Y) - \frac{1}{4} c_0^{\pm} \log^2(Y) + O(\log Y). \\ &= \frac{1}{4} c_0^{\pm} \log^2(Y) + O(\log Y). \end{aligned}$$

3. D'après le théorème de Siegel (voir [13, 23]), $h_L R_L \ll |\Delta_L|$, donc

$$\begin{aligned}\frac{c_L^* c_L}{\delta_L} &\ll \frac{(h_L R_L)^{3/2}}{w_L \zeta_L(2)\, |\Delta_L|^{7/4}} (\log Y)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\frac{h_L R_L}{|\Delta_L|^{3/2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{L(1,\Delta_L)}{L(2,\Delta_L)\sqrt{|\Delta_L|}} (\log Y)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

toujours d'après les relations (25). Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (26),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{c_L^* c_L}{\delta_L} \\
&\ll \left(\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{h_L R_L}{|\Delta_L|^{3/2}}\right)^{\frac12} \left(\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{L(1,\Delta_L)^2}{L(2,\Delta_L)^2\,|\Delta_L|}\right)^{\frac12} (\log Y)^{\frac12} \\
&\ll \left(\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{1}{|\Delta_L|}\right)^{\frac12} (\log Y^{\frac12})(\log Y)^{\frac12} \\
&\ll (\log Y)^{3/2}
\end{aligned}$$

en reprenant, pour le terme central, le calcul du premier point de cette démonstration.

4. Étant donné que $\log^+(h_L R_L) \ll \log Y$ pour $\Delta_L \in \mathcal{D}^\pm(Y)$ et que

$$\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} h_L R_L \ll Y^{3/2}$$

(voir [21, p. 362] par exemple), la formule sommatoire d'Abel donne

$$\sum_{\Delta_L\in\mathcal{D}^\pm(Y)} (c_L^*)^2 \ll Y^{1/2}\log Y.$$

5. On utilise le résultat 4 et une sommation d'Abel, de la même manière qu'au deuxième point de cette démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. M. Apostol – « Introduction to analytic number theory », (1976), Undergraduate Texts in Mathematics.

[2] V. V. Batyrev & Y. I. Manin – « Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques », *Math. Ann.* **286** (1990), no. 1-3, p. 27–43.

[3] V. V. Batyrev & Y. Tschinkel – « Rational points on some Fano cubic bundles », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 1, p. 41–46.

[4] A. Beauville – « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782 (1984).

[5] A. Chambert-Loir & Y. Tschinkel – « Integral points of bounded height on toric varieties », *arXiv :1006.3345* (2010).

[6] O. Debarre – « Higher-dimensional algebraic geometry », (2001).

[7] J. Fogarty – « Algebraic families on an algebraic surface », *Amer. J. Math.* **90** (1968), no. 2, p. 511–521.

[8] ———, « Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme », *Amer. J. Math.* **95** (1973), p. 660–687.

[9] X. Gao – *On Northcott's theorem*, 1995, Thesis (Ph.D.)–University of Colorado.

[10] J. Huizenga – « Restrictions of Steiner bundles and divisors on the Hilbert scheme of points in the plane », (2012), Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[11] ———, « Effective divisors on the Hilbert scheme of points in the plane and interpolation for stable bundles », *J. Algebraic Geom.* **25** (2016), no. 1, p. 19–75.

[12] C. Le Rudulier – « Points algébriques de hauteur bornée sur la droite projective », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **26** (2014), no. 3, p. 789–812.

[13] R. Lipschitz – « Sitzungsber », *Akad. Berlin* (1865), p. 174–185.

[14] D. Masser & J. D. Vaaler – « Counting algebraic numbers with large height. II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 1, p. 427–445.

[15] L. Moret-Bailly – « Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos », *Math. Scand.* **111** (2012), no. 2, p. 161–168.

[16] A. Neeman – « Zero cycles in $\mathbf{P}^n$ », *Adv. Math.* **89** (1991), no. 2, p. 217–227.

[17] E. Peyre – « Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano », *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 1, p. 101–218.

[18] ———, « Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.) », *Astérisque* (2002), no. 282, p. 323–344, Séminaire Bourbaki, vol. 2000/2001, exposés 880–893, talk no. 891.

[19] S. H. Schanuel – « Heights in number fields », *Bull. Soc. Math. France* **107** (1979), no. 4, p. 433–449.

[20] W. M. Schmidt – « Northcott's theorem on heights. I. A general estimate », *Monatsh. Math.* (1993), no. 115, p. 169–181.

[21] ———, « Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case », *Acta Arith.* **70** (1995), no. 4, p. 343–375.

[22] J.-P. Serre – *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, third éd., Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.

[23] C. L. Siegel – « Abschätzung von Einheiten », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969** (1969), p. 71–86.

[24] J. H. Silverman – « Lower bounds for height functions », *Duke Math. J.* **51** (1984), no. 2, p. 395–403.

[25] M. Widmer – « Counting points of fixed degree and bounded height », *Acta Arith.* **140** (2009), no. 2, p. 145–168.