

## BLOCS DE CHIFFRES DE TAILLE CROISSANTE DANS LES NOMBRES PREMIERS

PAR GAUTIER HANNA

---

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons un théorème à la Mauduit et Rivat (théorème des nombres premiers, principe d’aléa de Möbius) pour des fonctions qui comptent les blocs de chiffres dont la taille grandit lorsque la fonction tend à l’infini. Ces suites ne sont pas automatiques. Pour obtenir nos résultats, nous contrôlons des sommes de type I et II et utilisons une version améliorée de la propriété de propagation, ainsi que des méthodes classiques d’analyse harmonique.

ABSTRACT (*Blocks of digits of increasing size in primes*). — In this article, we prove a theorem à la Mauduit et Rivat (prime number theorem, Moebius randomness principle) for functions that count digital blocks whose length is a growing function tending to infinity. These sequences are not automatic. To obtain our results, we control sums of type I and II and use an adapted and refined version of the carry propagation property as well as standard methods from harmonic analysis.

### 1. Introduction

Dans [5], Gelfond fournit l’estimation asymptotique du nombre d’entiers en progression arithmétique dont la somme des chiffres est dans une classe de congruence fixée. Il termine son article par une série de questions, dont celle de l’estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à  $x$  tels que

---

*Texte reçu le 30 novembre 2016, modifié le 6 février 2019, accepté le 27 février 2019.*

GAUTIER HANNA, CNRS, Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR 7502, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54506, France • E-mail : gautier.hanna@univ-lorraine.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 11A63; 11B85, 11N05, 11L20.

Mots clefs. — Nombres premiers, Sommes d’exponentielles, Chiffres.

$s_q(p) \equiv a \pmod{m}$ , où  $s_q(\cdot)$  désigne la somme des chiffres en base  $q$  ( $q$  étant, et sera pour tout cet article, un entier supérieur ou égal à 2), et  $a$  et  $m$  deux entiers presque quelconques (une obstruction naturelle pour  $a$  et  $m$ , conséquence d'une généralisation de la preuve par 9, apparaît). Dans [14], Mauduit et Rivat arrivent à estimer cette quantité près de 40 ans après que cette question fut posée.

Peu de temps après la parution de [14], Kalai, dans [11], a posé une question qui peut s'apparenter à une extension de la question de Gelfond : il s'agit de montrer un théorème des nombres premiers pour une suite liée à une somme partielle des chiffres d'un entier. Green [7] répond partiellement à cette question, puis Bourgain [2] en s'inspirant des travaux de [14] complète la réponse de Green. Cette question possède une généralisation naturelle également proposée par Kalai [12]. Cette généralisation consiste à démontrer, si  $\mu$  est la fonction de Möbius,  $P \in \mathbb{F}_2[X_1, \dots, X_N]$  de degré inférieur à  $\text{polylog}(N)$  (le degré est ici le nombre maximal de variables entrant en compte dans un monôme, le polylog une puissance quelconque du logarithme), et si pour tout entier  $n < 2^N$ ,  $\epsilon_0(n), \dots, \epsilon_{N-1}(n)$  désignent les  $N$  premiers chiffres de  $n$  en base 2,  $\epsilon_0$  étant le chiffre des unités (les chiffres au-delà de  $N$  sont nécessairement nuls, il n'est pas utile de les marquer) que

$$(1) \quad \sum_{n < 2^N} \mu(n)(-1)^{P(n)} = o(2^N),$$

avec ici

$$(2) \quad P(n) := P(\epsilon_0(n), \dots, \epsilon_{N-1}(n)).$$

Avec ces notations, puisque  $s_2(n) = P(n)$  avec  $P(X_1, \dots, X_N) = \sum_i X_i$ , on voit bien que cette question peut être perçue comme une généralisation de celle de Gelfond. La première question de Kalai concernait les polynômes de degré au plus 1, la seconde s'intéresse aux polynômes de degré strictement plus grand que 1. Un exemple de polynôme de degré 2 est donné par  $P(X_1, \dots, X_N) := \sum_i X_i X_{i+1}$  et  $f(n) := (-1)^{P(n)}$  engendre alors la suite de Rudin-Shapiro. Dans ce cas, Tao [12] a esquissé une démonstration de (1) sans terme d'erreur explicite, et Mauduit et Rivat [15] en utilisant la méthode qu'ils ont développée dans [14] ont fourni un terme d'erreur explicite. De plus, Mauduit et Rivat ne se contentent pas de regarder la suite de Rudin-Shapiro, mais une classe de suite  $(e(\alpha a(n)))_{n \geq 0}$  où  $e(x) := \exp(2i\pi x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $(a(n))_{n \geq 0}$  est une suite liée aux comptages de blocs en base 2, ce que Mauduit et Rivat nomment suites de Rudin-Shapiro généralisée.

Dans [9], les résultats de [15] ont été étendus dans le cas où  $(a(n))_{n \geq 0}$  est une suite  $\beta$ -réursive possédant certaines propriétés peu restrictives. Les suites  $\beta$ -réversives généralisent les suites bloc-additives (parfois nommées suites digitales) [1, Section 3.3], [3] dans le sens où cette fois-ci il est permis de compter les blocs  $0 \cdots 0$ . En particulier, dans [9], les résultats de [15] ont été étendus

à toutes les suites comptant les blocs, que ceux-ci soient connexes ou non (le bloc  $1 * 1 * 00$  est non connexe) en base  $q$  quelconque. Les résultats de [15] et de [9] concernent des suites qui sont automatiques, et de ce fait sont impliqués par [16].

Une explicitation des calculs effectués dans [15] et [9] permet de montrer qu'il existe deux constantes absolues strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$(3) \quad \sum_{n < 2^N} \mu(n)(-1)^{P_N(n)} \ll N^{C_1} 2^{N - C_2 N^{\frac{1}{\beta^2 \beta}} + o\left(\frac{N}{\beta^2 \beta}\right)} \quad (N \rightarrow \infty),$$

avec  $P_N(X_1, \dots, X_N) := \sum_{i \leq N-\beta+1} \tilde{P}(X_i, \dots, X_{i+\beta-1})$  et  $\tilde{P}$  un polynôme à  $\beta$ -variables vérifiant une non-trivialité proche de celle réclamée aux suite  $\beta$ -récursives, pour plus de précisions voir [8, Théorème 0.4.1]. En particulier le terme majorant de (3) reste  $o(2^N)$  pour  $\beta < \log N / \log 2$ , degré tout à fait acceptable dans l'optique de la conjecture de Kalai. La conjecture de Kalai s'inscrit dans l'historique de la conjecture de Sarnak (voir [16] pour plus de références à ce sujet).

Une extension naturelle de ces résultats consiste à s'intéresser à la même question, mais pour des suites liées aux comptages de blocs de taille croissante. Si nous notons à présent  $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  non plus un polynôme mais une application croissante, il convient de s'intéresser à

$$(4) \quad a_P(n) := \sum_{i \geq 0} \epsilon_{i+P(T_q(n))}(n) \cdots \epsilon_i(n)$$

où

$$(5) \quad T_q(\cdot) := \lfloor \log(\cdot) / \log q \rfloor$$

indique l'indice du dernier chiffre non nul dans l'écriture en base  $q$ .

En base 2,  $a_P(n)$  compte les blocs composés de  $P(T_2(n))$  ‘1’ consécutifs ; si  $P$  est la fonction constante ceci correspond à la suite  $(b_d(n))_{n \geq 0}$  introduite dans [15]. S'il était possible d'utiliser la méthode de Mauduit et Rivat pour  $P(x) = x$  ; puisque celle-ci fournit un résultat d'équirépartition [15, Corollary 2], une conséquence serait que la moitié des nombres premiers seraient des nombres de Mersenne (voir Partie 11 pour plus de précision). Dans cet article, nous montrons que la vitesse  $P(y) < \log y / \log q$  est admissible en démontrant le théorème suivant (ici et dans le reste de l'article, la constante implicite dépend de  $q$ ) :

**THÉORÈME 1.1.** — *Soit  $P$  une fonction croissante, positive, et à valeurs entières pour laquelle il existe une constante strictement positive  $c < 1 / \log q$  telle que  $P(y) \leq c \log y$  pour tout réel  $y$  assez grand. Alors uniformément en  $\vartheta \in \mathbb{R}$  :*

$$(6) \quad \left| \sum_{n \leq x} \Lambda(n) f_P(n) e(\vartheta n) \right| \ll c_1(q) (\log x)^{3 + \frac{\omega(q)}{4}} x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P \left( \frac{1}{120} \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \right)},$$

avec

$$(7) \quad \gamma_P(l, k) = l \left( 1 - \frac{\log \left( q^{P(k)} - 8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2 \right)}{P(k) \log q} \right),$$

où  $\Lambda$  est la fonction de von Mangoldt,  $f_P(n) = e(\alpha a_P(n))$  et

$$c_1(q) = q^{13/64} \max \left( (\log q)^3, \tau(q)^{1/4} \right) (\log q)^{-3 - \frac{\omega(q)}{4}}.$$

De plus ce théorème reste valable avec  $\mu$  en lieu et place de  $\Lambda$ .

REMARQUE 1.2. — Si  $P(x)$  vérifie les conditions du théorème, alors le majorant de l'équation (6) est  $o(x)$  si  $x \rightarrow \infty$ . Pour plus de détail, nous laissons le lecteur se reporter à la remarque 9.1

Si  $\alpha = 1/2$ ,  $f_P$  n'est pas automatique (voir Partie 10), de sorte que les résultats de cet article ne sont pas impliqués par [16].

## 2. Notations

Pour des raisons techniques nous ne regarderons pas la suite  $(a_P(n))_{n \geq 0}$  mais une application  $a_P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  à deux variables définie par :

$$(8) \quad a_P(x, y) := \sum_{i \geq 0} \epsilon_{i+P(y)}(x) \cdots \epsilon_i(x).$$

Nous définissons alors pour  $\rho$  un entier,  $a_P^{(\rho)}(x, y) := a_P(x \bmod q^\rho, y)$ . Avec ces définitions, nous avons  $a_P(n) = a_P(n, T_q(n))$  et  $a_P^{(\rho)}(n) = a_P^{(\rho)}(n, T_q(n)) = a_P(n \bmod q^\rho, T_q(n))$ , en rappelant que  $T_q$  est définie par (5).

Si  $\alpha$  est un nombre réel, nous définissons  $f_P(x, y) := e(\alpha a_P(x, y))$ ,  $f_P(n) := f_P(n, T_q(n))$ , etc. Nous définissons également pour  $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2$  des entiers

$$f_P^{(\mu_1, \mu_2)}(x, y) := f_P^{(\mu_2)}(x, y) \overline{f_P^{(\mu_1)}(x, y)}.$$

Il s'agit d'une fonction doublement tronquée qui jouera un rôle crucial dans les estimations des sommes de type II.

Si  $\mu_0, \mu_2$  et  $n$  sont des entiers tels que  $\mu_0 \leq \mu_2$ , nous notons  $r_{\mu_0, \mu_2}(n)$  l'entier  $u$  tel que  $n = kq^{\mu_2} + uq^{\mu_0} + (n \bmod q^{\mu_0})$  et  $0 \leq u < q^{\mu_2 - \mu_0}$ .

REMARQUE 2.1. — La fonction  $\gamma_P$  définie par (7) intervient dans le contrôle de la transformée de Fourier de  $f_P$ . Ainsi, tout comme dans [15, equation (25)] nous avons uniformément en  $t \in \mathbb{R}$

$$1 = \sum_{0 \leq h < q^\lambda} \left| \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq u < q^\lambda} f_P(uq^\kappa, k) e(-u(h+t)) \right|^2 \leq q^{\lambda - 2\gamma_P(\lambda, k)}$$

et donc  $\gamma_P(\lambda, k) \leq \lambda/2$ .

### 3. Panorama de la preuve

Depuis [15], une stratégie naturelle pour prouver un principe d’aléa de Möbius pour une fonction définie sur les chiffres est de vérifier les définitions de Mauduit et Rivat [15, Definition 1 – 2]. S’il est possible dans notre cas, en ajustant les idées de [15], d’obtenir [15, Definition 2], en revanche, dès que  $P$  n’est plus constante, il est impossible d’obtenir l’autre condition.

En effet, si  $\tau$  est tel que  $P(\tau) \neq P(\tau - 1)$ , alors, pour  $n$  et  $\rho$  tels que  $T_q(n) = \tau$  et  $n \bmod q^\rho < n$ , nous avons alors  $P(T_q(n)) = P(\tau) \neq P(T_q(n \bmod q^\rho))$ . Ceci veut dire que le nombre de chiffres considérés dans nos comptages de blocs pour  $n$  et  $n \bmod q^\rho$  n’est pas le même et on ne peut pas espérer de simplification dans l’expression  $a_P(n) - a_P(n \bmod q^\rho)$ . Il n’y a donc *a priori* aucune raison de pouvoir contrôler le nombre de  $l$  tels que

$$\begin{aligned} a_P(lq^\kappa + k_1) - a_P(lq^\kappa + k_1 + k_2) &\neq a_P((lq^\kappa + k_1) \bmod q^\rho) \\ &\quad - a_P((lq^\kappa + k_1 + k_2) \bmod q^\rho) \end{aligned}$$

si  $lq^\kappa$  est “beaucoup plus grand” que  $q^\rho$ . Il devient nécessaire de reprendre en profondeur les arguments de [15] pour espérer obtenir un résultat.

L’obtention du [15, Theorem 1] se fait à l’aide de l’étude des sommes de type I et de type II. L’adaptation de la technique utilisée dans [15] pour contrôler  $S_I$ , la somme de type I nécessite la définition suivante : pour  $n$  un entier en considérant l’écriture  $n = u + vq^\kappa$  avec  $0 \leq u < q^\kappa$ , en posant  $T_q(n) = l$ , et  $w = v \bmod q^\rho$ , nous introduisons  $n' = u + wq^\kappa + q^{\kappa+\rho}\lfloor q^{l-\rho} \rfloor$ . Cette introduction permet de séparer l’information digitale de l’information multiplicative, ingrédient primordial dans la méthode de Mauduit et Rivat.

Pour  $S_{II}$ , l’introduction de la fonction doublement tronquée nécessite le Lemme 6.3, qui dit que si  $m$  et  $n$  sont des entiers, et  $m'$  et  $n'$  des petites perturbations de ces entiers, alors les produits respectifs auront le même nombre de chiffres. Il y a (au moins) deux manières différentes de démontrer ce lemme, l’une consistant en l’étude de la série de Fourier de la fonction  $T_q(\cdot) := \lfloor \log(\cdot)/\log q \rfloor$ , et elle nous a été suggérée par Olivier Robert, l’autre consiste à reprendre certaines idées évoquées dans [4, Lemma 3.5], et nous a été fournie par Thomas Stoll.

Ces introductions faites, plusieurs difficultés surgissent, mais leur résolution est plus de l’ordre de la technique et se fait à travers l’utilisation de résultats classiques (Kusmin-Landau, comportement en moyenne de la fonction  $\tau$ , etc.)

Cet article est présenté comme suit. Les Parties 4 et 6 sont dédiées à la collecte de résultats utiles, respectivement, au traitement des sommes de type I et de type II. Ces résultats sont de différentes natures (analytiques, digitaux et harmoniques) et leur démonstration est assez différente du schéma global de la preuve principale : les inclure nuirait à la compréhension structurelle du traitement des sommes. Dans la Partie 5 nous exerçons un contrôle sur les sommes de type I, et dans la Partie 7, sur les sommes de type II. Dans la Partie 8 nous

réunissons les résultats des Parties 5 et 7 afin d'obtenir le Théorème 1.1. Dans la Partie 9, nous réunissons les différentes contraintes obtenues sur la fonction  $P$  dans les parties précédentes afin de déterminer une croissance possible de  $P$ . Nous obtenons notamment que pour toute fonction à valeurs entières  $P$ , telle qu'il existe une constante strictement positive  $c < 1/\log q$  satisfaisant à  $P(x) \leq c \log x$  pour tout réel  $x$ , la fonction  $f_P(n) = e(\alpha a_P(n))$  vérifie un théorème des nombres premiers et un principe d'aléa de Möbius pour tout  $\alpha$  non entier. Dans la Partie 10, nous montrons que les résultats présentés ici ne découlent pas de [16] dans le sens où les suites traitées dans cet article ne sont pas automatiques. Enfin, dans la Partie 11, nous montrons que les résultats obtenus sont optimaux. Dans tout cet article,  $P$  désigne une fonction à valeurs entières.

#### 4. Travail préparatoire pour les sommes de type I

L'essentiel des résultats présentés ici servent à la Partie 5. Le Lemme 4.2 sert aussi à la Partie 6, il est de nature digitale. Le Lemme 4.3 relève de l'analyse harmonique.

L'énoncé du lemme suivant est le résultat final d'un (assez) long calcul voué à apparaître plusieurs fois dans la Partie 5.

**LEMME 4.1.** — *Soient  $\mu, \nu, q \geq 2$  et  $d$  des entiers. Soit  $M$  un entier tel que  $q^{\mu-1} \leq M < q^\mu$  et  $\kappa_d$  un entier tel que  $1 \leq \kappa_d \leq \frac{2}{3}(\mu+\nu)$  et  $q^{\kappa_d-1} < M^2/d^2 \leq q^{\kappa_d}$ . Considérons enfin  $\rho_1, h, u$  des entiers tels que  $0 \leq \rho_1 \leq \mu + \nu - \kappa_d$ ,  $0 \leq h < q^{\rho_1}$  et  $0 \leq u < q^{\kappa_d}$  ainsi que  $\vartheta'$  un réel. Nous posons pour  $l$  un entier quelconque*

$$c_{\kappa_d, \rho_1, l}(u, h) = \frac{1}{q^{\rho_1}} \sum_{w < q^{\rho_1}} f_P^{(\kappa_d + \rho_1)}(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d + \rho_1} \lfloor q^l/q^{\rho_1} \rfloor) \\ \cdot \overline{f_P^{(\kappa_d + \rho_1)}(wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d + \rho_1} \lfloor q^l/q^{\rho_1} \rfloor)} e\left(-\frac{hw}{q^{\rho_1}}\right),$$

et, si  $(k, m)$  désigne le pgcd de  $k$  et  $m$  :

$$S(M, d, l) = \sum_{0 \leq h < q^{\rho_1}} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m')=1}} \left| \sum_{0 \leq u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d, \rho_1, l}(u, h) e\left(-\frac{u\vartheta'}{q^{\mu+\nu}} + \frac{uk'}{m'}\right) \right|.$$

Alors

$$|S(M, d, l)| \ll (\log q) q^{\rho_1/2 + \kappa_d}.$$

*Démonstration.* — Nous assemblons des parties éparses de la démonstration des sommes de type I de [15].

Pour commencer

$$(9) \quad \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m') = 1}} \frac{1}{m'^2} \leq \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \ll \log q,$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|S(M, d, l)|^2 \ll$$

$$(\log q) q^{\rho_1} \sum_{0 \leq h < q^{\rho_1}} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m') = 1}} \left| \sum_{0 \leq u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d, \rho_1, l}(u, h) e \left( -\frac{u\vartheta'}{q^{\mu+\nu}} + \frac{uk'}{m'} \right) \right|^2.$$

Nous utilisons alors l'inégalité du Grand Crible pour affirmer

$$|S(M, d, l)|^2 \ll (\log q) q^{\rho_1} \sum_{0 \leq h < q^{\rho_1}} \left( q^{\kappa_d} + \frac{M^2}{d^2} \right) \sum_{0 \leq u < q^{\kappa_d}} |c_{\kappa_d, \rho_1, l}(u, h)|^2.$$

Cependant, par orthogonalité des caractères,

$$\sum_{0 \leq h < q^{\rho_1}} |c_{\kappa_d, \rho_1, l}(u, h)|^2 = \frac{1}{q^{\rho_1}} \sum_{0 \leq w < q^{\rho_1}} \left| f_P^{(\kappa_d + \rho_1)}(wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d + \rho_1} \lfloor q^l/q^{\rho_1} \rfloor) \right|^2 \\ \cdot \left| f_P^{(\kappa_d + \rho_1)}(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d + \rho_1} \lfloor q^l/q^{\rho_1} \rfloor) \right|^2$$

qui vaut 1 par définition de  $f_P$ . Ainsi

$$|S(M, d, l)|^2 \ll (\log q) q^{\rho_1} \left( q^{\kappa_d} + \frac{M^2}{d^2} \right) q^{\kappa_d},$$

et comme  $q^{\kappa_d - 1} < M^2/d^2 \leq q^{\kappa_d}$  le résultat est obtenu.  $\square$

Nous démontrons à présent un pendant de la propriété de propagation [15, Definition 1].

**LEMME 4.2.** — Soient  $\rho, \lambda$  et  $\kappa$  des entiers tels que  $P(\lambda + \kappa + 1) \leq \rho$  et  $\rho \leq \frac{3}{4}\lambda$ . Soit  $B$  l'ensemble des  $l$  tels que  $0 \leq l < q^\lambda$  et tels qu'il existe  $0 \leq k_1, k_2 < q^\kappa$  tels que

$$a_P(lq^\kappa + k_1 + k_2) - a_P(lq^\kappa + k_1) \neq a_P^{(\kappa+\rho)}(lq^\kappa + k_1 + k_2) - a_P^{(\kappa+\rho)}(lq^\kappa + k_1).$$

Alors

$$\#B \ll q^{\lambda - \rho + P(\lambda + \kappa + 1)}.$$

*Démonstration.* — Nous rappelons qu'ici *a priori*

$$a_P^{(\rho)}(n) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_{i+T_q(n)}(n \bmod q^\rho) \cdots \epsilon_i(n \bmod q^\rho) \\ \neq \sum_{i \geq 0} \epsilon_{i+T_q(n \bmod q^\rho)}(n \bmod q^\rho) \cdots \epsilon_i(n \bmod q^\rho).$$

Commençons par montrer que le nombre de  $l < q^\lambda$  tels que  $T_q(lq^\kappa + k_1 + k_2) \neq T_q(lq^\kappa + k_1)$  est majoré par  $\lambda + 1$ . En effet, cela n'arrive que s'il existe un  $m$  satisfaisant à  $lq^\kappa + k_1 < q^m < lq^\kappa + k_1 + k_2$ . Ceci implique  $0 \leq l < q^{m-\kappa} < l+2$  et donc  $l = q^{m-\kappa} - 1$  si  $m \geq \kappa$  et  $l = 0$  si  $m \leq \kappa$ . Les valeurs de  $l$  possibles sont donc  $\{0, q-1, q^2-1, \dots, q^\lambda-1\}$  soit  $\lambda+1$  valeurs.

Nous pouvons à présent supposer que  $T_q(lq^\kappa + k_1 + k_2) = T_q(lq^\kappa + k_1)$  quels que soient  $l, k_1, k_2$ . Des techniques classiques sur les retenues (voir par exemple [15, Section 11] ou [9, Proposition 4.2]) montrent qu'alors, à  $y$  fixé, le cardinal à estimer est  $O(q^{\lambda-\rho+P(y)})$ , nous exploitons la croissance de  $P$  pour affirmer

$$\#\mathcal{B} \ll q^{\lambda-\rho+P(\lambda+\kappa+1)} + \lambda + 1$$

et nous concluons la preuve en utilisant  $\rho \leq 3\lambda/4$ .  $\square$

**LEMME 4.3.** — Soient  $l \geq 0$  et  $\kappa$  des entiers tel que  $P(\kappa + l) \leq l$ , alors uniformément en  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\left| \sum_{q^{l-1} \leq u < q^l} f_P(uq^\kappa, T_q(uq^\kappa)) e(-ut) \right| \leq q^{\gamma(l, \kappa)},$$

avec

$$(10) \quad \gamma(l, \kappa) := l \frac{\log \left( q^{P(\kappa+l)} - 8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2 \right)}{P(\kappa+l) \log q}.$$

*Démonstration.* — Nous commençons par remarquer que, à  $\kappa$  fixé,  $T_q(uq^\kappa)$  est constante sur  $q^{l-1} \leq u < q^l$  et donc  $P(T_q(uq^\kappa)) = P(\kappa + l - 1)$ . Soit donc  $\beta = P(\kappa + l - 1)$  et  $V_u$  le  $u$ -ième vecteur généalogique lié à la fonction  $\beta$ -récursive  $a(n) = \sum \epsilon_{i+\beta}(n) \cdots \epsilon_i(n)$  ([9, Définitions 2.1 et 5.4]); alors, de manière similaire à [9], nous obtenons

$$\left| \sum_{q^{l-1} \leq u < q^l} f_P(uq^\kappa, T_q(uq^\kappa)) e(-ut) \right| \leq \left( q^{P(l+\kappa)} - 8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2 \right) \frac{l}{P(\kappa+l)},$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

## 5. Sommes de type I

Soient  $M$  et  $N$  des entiers,  $1 \leq M \leq N$  tels que

$$(11) \quad M \leq (MN)^{1/3}$$

et  $\mu$  et  $\nu$  les uniques entiers tels que  $q^{\mu-1} \leq M < q^\mu$  et  $q^{\nu-1} \leq N < q^\nu$ .

Soient également  $\vartheta \in \mathbb{R}$  et  $I := I(M, N) \subset [0, MN]$  un intervalle. Nous posons alors

$$(12) \quad S_I(\vartheta) = \sum_{M/q < m \leq M} \left| \sum_{\substack{n: \\ mn \in I(M, N)}} f_P(mn) e(\vartheta mn) \right|.$$

THÉORÈME 5.1. — Soit  $P$  tel que

$$(13) \quad P(\mu + \nu + 1) \leq \gamma_P \left( \frac{1}{3}(\mu + \nu), \mu + \nu \right),$$

alors nous avons uniformément en  $\vartheta \in \mathbb{R}$  :

$$S_I(\vartheta) \ll (\mu + \nu)^3 (\log q)^3 q^{\mu + \nu - \frac{1}{4}} \gamma_P \left( \frac{1}{3}(\mu + \nu), \mu + \nu \right),$$

où  $\gamma_P(k, l)$  est définie en (7).

Démonstration. — En suivant la preuve de [15], c'est-à-dire en réécrivant la somme intérieure et en posant

$$S'_I(\vartheta) = \sum_{M/q < m \leq M} \frac{1}{m} \sum_{0 \leq k < m} \left| \frac{1}{q^{\mu + \nu}} \sum_{0 \leq l < q^{\mu + \nu}} f_P(l) e \left( -\frac{l(\vartheta - \frac{k}{m} q^{\mu + \nu})}{q^{\mu + \nu}} \right) \right|,$$

nous obtenons [15, équation (31)] :

$$(14) \quad S_I(\vartheta) \ll q^{\mu + \nu} \log q^{\mu + \nu} \left( \max_{\vartheta' \in \mathbb{R}} S'_I(\vartheta') \right).$$

Pour tout

$$(15) \quad 1 \leq \kappa \leq \frac{2}{3}(\mu + \nu),$$

nous introduisons  $1 \leq \rho \leq \mu + \nu - \kappa$ , que l'on choisira explicitement par la suite.

En écrivant  $l = u + vq^\kappa$ , on obtient, si  $\tilde{\mathcal{W}}_\kappa := \{u, v : f_P(u + vq^\kappa) \overline{f_P(vq^\kappa)} \neq f_P^{(\kappa+\rho)}(u + vq^\kappa) \overline{f_P^{(\kappa+\rho)}(vq^\kappa)}\}$

$$(16) \quad g(t) := \frac{1}{q^{\mu + \nu}} \sum_{l < q^{\mu + \nu}} f_P(l) e \left( -\frac{lt}{q^{\mu + \nu}} \right) \\ = \frac{1}{q^{\mu + \nu - \kappa}} \sum_{v < q^{\mu + \nu - \kappa}} f_P(vq^\kappa) e \left( -\frac{vt}{q^{\mu + \nu - \kappa}} \right) \frac{1}{q^\kappa} \\ \cdot \sum_{u < q^\kappa} f_P^{(\kappa+\rho)}(u + vq^\kappa) \overline{f_P^{(\kappa+\rho)}(vq^\kappa)} e \left( -\frac{ut}{q^{\mu + \nu}} \right) \\ (17) \quad + \frac{1}{q^{\mu + \nu}} \sum_{(u, v) \in \tilde{\mathcal{W}}_\kappa} f_P(vq^\kappa) e \left( -\frac{vt}{q^{\mu + \nu - \kappa}} - \frac{ut}{q^{\mu + \nu}} \right) \\ \cdot \left[ f_P(u + vq^\kappa) \overline{f_P(vq^\kappa)} - f_P^{(\kappa+\rho)}(u + vq^\kappa) \overline{f_P^{(\kappa+\rho)}(vq^\kappa)} \right].$$

On rappelle qu'ici

$$f_P^{(\kappa+\rho)}(n) = e\left(\alpha a_P\left(n \bmod q^{\kappa+\rho}, T_q(n)\right)\right).$$

Nous incorporons (16), qu'on nomme  $G_{\kappa,1}(t)$ , et (17), qu'on nomme  $G_{\kappa,2}(t)$ , dans  $S'_I(\vartheta)$  avec la valeur  $\kappa = \kappa_d$  définie par

$$(18) \quad q^{\kappa_d-1} < M^2/d^2 \leq q^{\kappa_d}.$$

Nous avons alors que la suite  $(\kappa_d)_{d \geq 0}$  est décroissante, et donc satisfait à  $1 \leq \kappa_d \leq \kappa_1 \leq 2\mu$ , de sorte que, par (11), (15) est satisfaite. En posant  $t = \vartheta - \frac{k}{m}q^{\mu+\nu}$ , nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} (19) \quad S'_I(\vartheta) &\leq \sum_{1 \leq d \leq M} \sum_{\frac{M}{q} < m \leq M} \frac{1}{m} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ (k,m)=d}} \left| G_{\kappa_d,1}\left(\vartheta - \frac{k}{m}q^{\mu+\nu}\right) \right. \\ &\quad \left. + G_{\kappa_d,2}\left(\vartheta - \frac{k}{m}q^{\mu+\nu}\right) \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq d \leq M} \sum_{\frac{M}{q} < m \leq M} \frac{1}{m} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ (k,m)=d}} \left| G_{\kappa_d,1}\left(\vartheta - \frac{k}{m}q^{\mu+\nu}\right) \right| \\ &\quad + \sum_{1 \leq d \leq M} \sum_{\frac{M}{q} < m \leq M} \frac{1}{m} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ (k,m)=d}} \left| G_{\kappa_d,2}\left(\vartheta - \frac{k}{m}q^{\mu+\nu}\right) \right| \\ (20) \quad &= S'_{I,1} + S'_{I,2}. \end{aligned}$$

Contrôlons à présent le terme d'erreur  $S'_{I,2}(\vartheta)$ . Supposons

$$(21) \quad P(\mu + \nu + 1) \leq \rho \leq \frac{\mu + \nu}{4}.$$

Par (15) et (21), nous avons  $\rho \leq \frac{3}{4}(\mu + \nu - \kappa_d)$  de sorte que le Lemme 4.2 s'applique avec  $\lambda = \mu + \nu - \kappa_d$ ,  $\kappa = \kappa_d$  et  $\rho = \rho$ . Il vient donc que le nombre de  $0 \leq v < q^{\mu+\nu-\kappa_d}$  tels qu'il existe  $0 \leq u < q^{\kappa_d}$  avec

$$f_P(u + vq^{\kappa_d})\overline{f_P(vq^{\kappa_d})} \neq f_P^{(\kappa_d+\rho)}(u + vq^{\kappa_d})\overline{f_P^{(\kappa_d+\rho)}(vq^{\kappa_d})}$$

est  $O(q^{\mu+\nu-\kappa_d-\rho+P(\mu+\nu+1)})$ . En nommant  $\widetilde{\mathcal{W}}_{\kappa_d}$  l'ensemble des couples  $(u, v)$  pour lesquels cette inégalité est vérifiée, on a

$$(22) \quad \#\widetilde{\mathcal{W}}_{\kappa_d} \ll q^{\mu+\nu-\rho+P(\mu+\nu+1)}.$$

Il est possible, en divisant par  $(k, m)$  de montrer que

$$S'_{I,2}(\vartheta) \leq \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{S''_{I,2}(M, d)}{dq^{\mu+\nu}},$$

avec

$$S''_{I,2}(M, d) = \sum_{\frac{M}{qd} < m' \leq \frac{M}{d}} \sum_{\substack{0 \leq k' \leq m' \\ (k', m') = 1}} \left| \sum_{0 \leq w < q^{\mu+\nu}} c'_{\kappa_d, \rho_1}(w) e\left(-\frac{w\vartheta'}{q^{\mu+\nu}} + \frac{wk'}{m'}\right) \right|$$

où  $|c'_{\kappa_d, \rho_1}(w)| \leq 2$  et vaut 0 si  $w \notin \mathcal{W}_{\kappa_d} := \{u + vq^{\kappa_d}, (u, v) \in \tilde{\mathcal{W}}_{\kappa_d}\}$ . Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Grand Crible, tout comme [15], nous avons en sommant sur tous les  $w$  possibles :

$$|S''_{I,2}(M, d)|^2 \ll (\log q)(q^{\mu+\nu} + M^2/d^2) \#\tilde{\mathcal{W}}_{\kappa_d}.$$

En réunissant ces deux équations avec (22), et le fait que  $M^2 \leq q^{2\mu} \leq q^{\mu+\nu}$  nous concluons :

$$\begin{aligned} S'_{I,2}(\vartheta') &\ll (\log q)^{1/2} \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{1}{d} q^{-\rho/2+P(\mu+\nu+1)/2} \\ (23) \quad &\ll \mu(\log q)^{3/2} q^{-\rho/2+P(\mu+\nu+1)/2}. \end{aligned}$$

Pour estimer  $S'_{I,1}(\vartheta')$  (on rappelle que  $S'_{I,1}$  a été défini en (20)), il convient de séparer la partie multiplicative de la partie digitale de la question. Notre fonction  $f_P^{(\rho)}$  ne correspond pas exactement à la fonction tronquée, telle que l'utilisent Mauduit et Rivat, leur technique ne s'applique pas ici.

Pour contourner ce problème on note  $l = T_q(v)$  et on pose  $0 \leq u < q^{\kappa_d}$ . Alors on a, toujours si  $w = v \bmod q^\rho$  :

$$\begin{cases} T_q(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho}\lfloor q^{l-\rho} \rfloor) = T_q(vq^{\kappa_d}) \\ \epsilon_i((u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho}\lfloor q^{l-\rho} \rfloor) \bmod (q^{\kappa_d+\rho})) = \epsilon_i(u + vq^{\kappa_d}), \end{cases}$$

et ce pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i < \kappa_d + \rho$ .

En effet, si  $\rho > l$ , alors  $w = v$  et  $\lfloor q^{l-\rho} \rfloor = 0$  et donc  $u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho}\lfloor q^{l-\rho} \rfloor = u + vq^{\kappa_d}$ . Inversement, si  $\rho \leq l$ , comme  $0 \leq w \leq q^\rho - 1$  et  $0 \leq u \leq q^{\kappa_d} - 1$ , nous avons  $u + wq^{\kappa_d} \leq q^{\kappa_d} - 1 + q^{\kappa_d+\rho} - q^{\kappa_d} = q^{\kappa_d+\rho} - 1$  et donc  $T_q(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho}\lfloor q^{l-\rho} \rfloor) = T_q(q^{l+\kappa_d}) = l + \kappa_d = T_q(vq^{\kappa_d}) = T_q(u + vq^{\kappa_d})$ , et comme  $q^{l+\kappa_d} \equiv 0 \bmod (q^{\rho+\kappa_d})$ , on a la seconde ligne.

Avec ces considérations nous avons :

$$\begin{aligned}
 & G_{\kappa_d,1}(t) \\
 &= \frac{1}{q^{\mu+\nu-\kappa_d}} \sum_{w < q^\rho} \sum_{\substack{0 \leq l \\ < \mu+\nu-\kappa_d}} \sum_{q^{l-1} \leq v < q^l} f_P(vq^{\kappa_d}) e\left(-\frac{vt}{q^{\mu+\nu-\kappa_d}}\right) \frac{1}{q^\rho} \sum_{h < q^\rho} e\left(h \frac{v-w}{q^\rho}\right) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{q^{\kappa_d}} \sum_{u < q^{\kappa_d}} f_P^{(\kappa_d+\rho)}(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho} \lfloor q^{l-\rho} \rfloor) \\
 &\quad \cdot \overline{f_P^{(\kappa_d+\rho)}(wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho} \lfloor q^{l-\rho} \rfloor)} e\left(-\frac{ut}{q^{\mu+\nu}}\right). \\
 (24) \quad &= \sum_{0 \leq l < \mu+\nu-\kappa_d} \sum_{h < q^\rho} \left[ \frac{1}{q^{\kappa_d}} \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d,\rho,l}(u, h) e\left(-\frac{ut}{q^{\mu+\nu}}\right) \right] \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{q^{\mu+\nu-\kappa_d}} \sum_{q^{l-1} \leq v < q^l} f_P(vq^{\kappa_d}) e\left(-\frac{vt}{q^{\mu+\nu-\kappa_d}} + \frac{hv}{q^\rho}\right) \right],
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 c_{\kappa_d,\rho,l}(u, h) &= \frac{1}{q^\rho} \sum_{w < q^\rho} f_P^{(\kappa_d+\rho)}(u + wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho} \lfloor q^l/q^\rho \rfloor) \\
 &\quad \cdot \overline{f_P^{(\kappa_d+\rho)}(wq^{\kappa_d} + q^{\kappa_d+\rho} \lfloor q^l/q^\rho \rfloor)} e\left(-\frac{hw}{q^\rho}\right).
 \end{aligned}$$

Soit

$$M_d = \max\{0 \leq l \leq \mu + \nu - \kappa_d : P(l + \kappa_d) > l\}.$$

Nous séparons la somme dans (24) selon que  $l \leq M_d$  notée  $G'_{\kappa_d,1}(t)$  ou que  $l > M_d$  notée  $G''_{\kappa_d,1}(t)$ . En majorant la seconde somme trivialement dans  $G'_{\kappa_d,1}(t)$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 |G'_{\kappa_d,1}(t)| &\leq \sum_{0 \leq l \leq M_d} q^{l-(\mu+\nu-\kappa_d)} \sum_{h < q^\rho} \frac{1}{q^{\kappa_d}} \left| \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d,\rho,l}(u, h) e\left(-\frac{ut}{q^{\mu+\nu}}\right) \right| \\
 &\ll q^{M_d-(\mu+\nu)} \sum_{0 \leq l \leq M_d} \sum_{h < q^\rho} \left| \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d,\rho,l}(u, h) e\left(-\frac{ut}{q^{\mu+\nu}}\right) \right|,
 \end{aligned}$$

et par le Lemme 4.1, nous obtenons

$$(25) \quad \begin{aligned} & \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{1}{d} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m') = 1}} \left| G'_{\kappa_d, 1} \left( \vartheta' - \frac{k}{m} q^{\mu+\nu} \right) \right| \\ & \ll \frac{\log q}{q^{\mu+\nu}} \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{1}{d} q^{M_d + \kappa_d + \rho/2} M_d. \end{aligned}$$

Cependant, comme la fonction  $P$  est croissante et que nous avons déjà remarqué que  $1 \leq \kappa_d \leq \kappa_1 \leq \frac{2}{3}(\mu + \nu)$ , nous avons

$$M_d \leq \max \left\{ 0 \leq l \leq \mu + \nu - \kappa_d : P \left( l + \frac{2}{3}(\mu + \nu) \right) > l \right\}.$$

Supposons maintenant que  $P(x) \leq x/10$ , ceci implique

$$\frac{1}{10} \left( l + \frac{2}{3}(\mu + \nu) \right) > l, \text{ c'est-à-dire : } l < \frac{2}{27}(\mu + \nu),$$

et donc  $M_d \leq \frac{2}{27}(\mu + \nu)$ . Comme  $\kappa_d \leq \frac{2}{3}(\mu + \nu)$ , nous obtenons quel que soit  $d$  :

$$(26) \quad \begin{aligned} & \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{1}{d} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m') = 1}} \left| G'_{\kappa_d, 1} \left( \vartheta' - \frac{k}{m} q^{\mu+\nu} \right) \right| \\ & \ll (\mu + \nu)^2 (\log q)^2 q^{-\frac{7}{27}(\mu+\nu)+\rho/2}. \end{aligned}$$

À présent contrôlons le terme restant. Comme  $l > M_d$ , nous pouvons à présent utiliser le Lemme 4.3 ce qui nous donne :

$$|G''_{\kappa_d, 1}(t)| \leq \sum_{\substack{M_d < l \\ \leq \mu + \nu - \kappa_d}} q^{\gamma(l, \kappa_d) - (\mu + \nu - \kappa_d)} \sum_{h < q^\rho} \frac{1}{q^{\kappa_d}} \left| \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d, \rho, l}(u, h) e \left( -\frac{ut}{q^{\mu+\nu}} \right) \right|.$$

Soit

$$h(l, k) := \frac{\log \left( q^{P(\kappa+l)} - 8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2 \right)}{P(\kappa+l) \log q}.$$

On a alors

$\gamma(l, \kappa_d) := lh(l, \kappa_d) = lh(l + \kappa_d, 0) \leq lh(\mu + \nu, 0) \leq (\mu + \nu - \kappa_d)h(\mu + \nu, 0)$ , car quel que soit  $k$ , l'application  $l \mapsto lh(k, 0)$  est croissante quitte à supposer  $P(0) \geq 4$ . Mais  $m(1 - h(k, 0)) = \gamma_P(m, k)$  et donc :

$$\begin{aligned} & |G''_{\kappa_d, 1}(t)| \\ & \leq q^{-\gamma_P(\mu+\nu-\kappa_d, \mu+\nu)} \sum_{M_d < l \leq \mu + \nu - \kappa_d} \sum_{h < q^\rho} \frac{1}{q^{\kappa_d}} \left| \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d, \rho, l}(u, h) e \left( -\frac{ut}{q^{\mu+\nu}} \right) \right|. \end{aligned}$$

L'application  $m \mapsto \gamma_P(m, k)$  est croissante (linéaire de coefficient directeur strictement positif), et donc l'application  $k \mapsto -\gamma_P(l - k, r)$  l'est également. Ainsi par le Lemme 4.1, comme  $1 \leq \kappa_d \leq \frac{2}{3}(\mu + \nu)$ , nous obtenons

(27)

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{1}{d} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ (k', m') = 1}} \left| G''_{\kappa_d, 1} \left( \vartheta' - \frac{k}{m} q^{\mu+\nu} \right) \right| \\ & \leq \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{q^{-\gamma_P(\mu+\nu-\kappa_d, \mu+\nu)}}{dq^{\kappa_d}} \\ & \quad \cdot \sum_{M_d < l \leq \mu+\nu-\kappa_d} \sum_{\frac{M}{qd} \leq m' < \frac{M}{d}} \frac{1}{m'} \sum_{\substack{0 \leq k' < m' \\ h < q^\rho \\ (k', m') = 1}} \left| \sum_{u < q^{\kappa_d}} c_{\kappa_d, \rho, l}(u, h) e \left( -\frac{ut}{q^{\mu+\nu}} \right) \right| \\ & \ll q^{-\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)} \sum_{1 \leq d \leq M} \frac{q^{\rho/2}}{d} (\mu + \nu) \log q, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$(28) \quad (27) \ll q^{\rho/2 - \gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)} (\mu + \nu)^2 (\log q)^2.$$

Nous avons donc par les équations (14), (19), (23), (26) et (28) :

$$\begin{aligned} S_I(\vartheta) & \ll (\log q^{\mu+\nu}) \left( \mu (\log q)^{3/2} q^{\mu+\nu-\rho/2+P(\mu+\nu+1)/2} \right. \\ & \quad + (\mu + \nu)^2 (\log q)^2 q^{\frac{20}{27}(\mu+\nu)+\rho/2} \\ & \quad \left. + q^{\mu+\nu+\rho/2-\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)} (\mu + \nu)^2 (\log q)^2 \right). \end{aligned}$$

Nous choisissons  $\rho = \frac{P(\mu+\nu+1)}{2} + \gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)$ , et par (13) et la Remarque 2.1, (21) est vérifiée. Le choix de  $\rho$  fournit

$$\begin{aligned} S_I(\vartheta) & \ll q^{\mu+\nu} (\mu + \nu)^3 (\log q)^3 \left( q^{\frac{P(\mu+\nu+1)}{4} - \frac{1}{2}\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)} \right. \\ & \quad \left. + q^{\frac{3}{4}\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu) - \frac{7}{27}(\mu+\nu)} \right) \\ & \ll q^{\mu+\nu} (\mu + \nu)^3 (\log q)^3 \left( q^{-\frac{1}{4}\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)} \right. \\ & \quad \left. + q^{\frac{3}{4}\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu) - \frac{7}{27}(\mu+\nu)} \right). \end{aligned}$$

De plus la Remarque 2.1 nous donne la majoration

$$(29) \quad S_I(\vartheta) \ll (\mu + \nu)^3 (\log q)^3 q^{\mu+\nu - \frac{1}{4}\gamma_P(\frac{1}{3}(\mu+\nu), \mu+\nu)}$$

qui achève notre preuve.  $\square$

## 6. Travail préparatoire pour les sommes de type II

De même que pour les sommes de type I, le traitement des sommes de type II nécessite un certain nombre de résultats préliminaires. La stratégie pour contrôler les sommes de type II consiste à introduire une fonction doublement tronquée et à exploiter sa structure pour mettre en exergue dans nos estimations la propriété de Fourier de  $e(\alpha_A(\cdot))$ . Les Lemmes 6.3, 6.4 et 6.5, issus directement de la méthode de Mauduit et Rivat, permettent d'introduire la fonction doublement tronquée. Le Lemme 6.6 nous permet de faire apparaître la propriété de Fourier dans l'estimation des sommes de type II. Pour conclure la Partie 7, nous serons amené à évaluer des sommes d'exponentielles pondérées de deux types différents. Les Lemmes 6.1 et 6.2 sont les estimations des sommes d'exponentielles que nous serons amenés à regarder par la suite.

**LEMME 6.1.** — *Soient  $\mu, \nu, M, N, q$  des entiers tels que  $2\mu \leq \nu$ ,  $q^{\mu-1} \leq M < q^\mu$  et  $q^{\nu-1} \leq N < q^\nu$ . Soient  $k \in \{\mu + \nu - 4, \dots, \mu + \nu - 1\}$  et  $M/q \leq m < M$  des entiers. Définissons*

$$I(k, m) = \left\{ \frac{N}{q} \leq n < N : \frac{q^k}{m} \leq n < \frac{q^{k+1}}{m} \right\},$$

alors, si  $I_1 \subseteq [M/q, M[$  est un intervalle, nous avons :

$$\left| \sum_{m \in I_1} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right) \#I(k, m) \right| \ll q^\nu \min\left(q^\mu, \left| \sin \pi \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} \right|^{-1}\right).$$

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que

$$\#I(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq \frac{q^k}{N} \text{ ou } m \geq \frac{q^{k+2}}{N} \\ \left\lceil \frac{q^{k+1}}{m} \right\rceil - \left\lceil \frac{N}{q} \right\rceil & \text{si } \frac{q^{k+1}}{N} \leq m < \frac{q^{k+2}}{N} \\ N - \left\lfloor \frac{q^k}{m} \right\rfloor & \text{si } \frac{q^k}{N} \leq m < \frac{q^{k+1}}{N} \end{cases}.$$

Commençons par traiter le cas  $(M, N) = (q^{\mu-1}, q^{\nu-1})$ . Sous ces conditions, nous avons  $q^{\mu+\nu-4} \leq mn < q^{\mu+\nu-2}$ . Ainsi pour  $k \geq \mu + \nu - 2$ , les conditions imposent  $\#I(k, m)$  nul ainsi que

$$(30) \quad \#I(\mu + \nu - 4, m) = \left\lceil \frac{q^{\mu+\nu-3}}{m} \right\rceil - q^{\nu-2}$$

et

$$(31) \quad \#I(\mu + \nu - 3, m) = q^{\nu-1} - \left\lceil \frac{q^{\mu+\nu-3}}{m} \right\rceil.$$

La technique de majoration étant quasi identique, nous nous contenterons de l'expliciter pour  $\#I(\mu + \nu - 3, m)$ . Une sommation d'Abel fournit

(32)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in I_1} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right) \left| q^{\nu-1} - \left\lfloor \frac{q^{\mu+\nu-3}}{m} \right\rfloor \right| \right| \\ & \ll \max \left( \left| q^{\nu-1} - \left\lfloor \frac{q^{\mu+\nu-3}}{\max I_1 + 1} \right\rfloor \right| \left| \sum_{m \in I_1} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right) \right|, \right. \\ & \quad \left. \sup_{q^{\mu-2} < K \leq q^{\mu-1}} \left| \sum_{m \in I_1 \cap [q^{\mu-2}, K)} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right) \left| \sum_{m \in I_1} \left| \left\lfloor \frac{q^{\mu+\nu-3}}{m+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{q^{\mu+\nu-3}}{m} \right\rfloor \right| \right| \right). \end{aligned}$$

Majorons d'abord le premier terme du max. Comme  $I_1 \subseteq [q^{\mu-2}, q^{\mu-1}[$ , nous avons

$$\left| q^{\nu-1} - \left\lfloor \frac{q^{\mu+\nu-3}}{\max I_1 + 1} \right\rfloor \right| \ll q^\nu$$

et comme

$$(33) \quad \left| \sum_{m \in I_1} e(\alpha m) \right| \leq \min \left( |I_1|, \frac{1}{|\sin \pi \alpha|} \right),$$

nous avons la majoration désirée car  $|I_1| \ll q^\mu$ . Pour le second terme, on remarque que la somme interne est télescopique et devient de fait  $O(q^\nu)$  car  $I_1 \subseteq [q^{\mu-2}, q^{\mu-1}[$  et on conclut en utilisant (33).

Pour traiter le cas  $(M, N) \neq (q^{\mu-1}, q^{\nu-1})$ , on remarque que si  $m < q^{k+1}/N < m+1$ , c'est-à-dire tel que  $\#I(k, m)$  ne soit pas de la même forme que  $\#I(k, m+1)$ , alors  $m = \lfloor q^{k+1}/N \rfloor$ . On sépare le reste de la somme selon que  $m < q^{k+1}/N$  ou  $m \geq q^{k+1}/N$  et nous appliquons le procédé précédent à chaque sous-cas. Nous concluons par le fait que  $\#I\left(k, \left\lfloor \frac{q^{k+1}}{N} \right\rfloor\right) \leq \#\{N/q \leq n < N\} \ll q^\nu$ .  $\square$

**LEMME 6.2.** — Soient  $\mu, \nu$  des entiers tels que  $\frac{1}{4}(\mu + \nu) \leq \mu \leq \nu \leq \frac{3}{4}(\mu + \nu)$ . Soient  $M, m, k$  et  $I(k, m)$  définis dans le Lemme 6.1. Alors si  $h, h_1, \mu_0, \mu_1, \mu_2, s$  sont des entiers tels que  $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$  et  $hq^{\mu_1-\mu_2}s \notin \mathbb{Z}$ , nous avons pour tout  $I_1 \subseteq [q^{\mu-2}, q^\mu[$  :

$$\left| \sum_{m \in I_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_2}}\right) \sum_{n \in I(k, m)} e(hsnq^{\mu_1-\mu_2}) \right| \ll \left( shq^{3(\mu_2-\mu_1)} \right)^{1/2} q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)}$$

*Démonstration.* — Soient  $a_m$  et  $b_m$  des entiers tels que  $I(k, m) = [a_m, b_m[$  (les entiers dépendent de  $k$ , mais pour ne pas alourdir les notations nous ne le

marquons pas). Comme  $hq^{\mu_1-\mu_2}s \notin \mathbb{Z}$ , nous pouvons écrire en explicitant la sommation sur  $n$  :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in I_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}}\right) \sum_{n \in I(k,m)} e(hq^{\mu_1-\mu_2}sn) \right| \\ & \ll \frac{1}{|\sin(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s)|} \left| \sum_{m \in I_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}}\right) e\left(hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{a_m + b_m}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \sin(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s(b_m - a_m)) \right|. \end{aligned}$$

Rappelons que  $|\sin(\pi x)| \geq 2\|x\|_{\mathbb{Z}}$ . Comme  $q^{\mu_1-\mu_2}hs \notin \mathbb{Z}$ , nous pouvons écrire  $hs = kq^{\mu_2-\mu_1} + l$  avec  $1 \leq l \leq q^{\mu_2-\mu_1} - 1$ , et donc  $\|q^{\mu_1-\mu_2}hs\|_{\mathbb{Z}} \geq q^{\mu_1-\mu_2}$ . Ainsi

$$|\sin(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s)|^{-1} \ll q^{\mu_1-\mu_2}.$$

Quitte à découper l'intervalle, du fait de la forme de  $I(k,m)$  (comme le laisse comprendre (30)), la somme interne se ramène à estimer :

$$\sum_{m \in J_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}} + hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{2m}\right) \sin\left(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{m}\right),$$

avec  $J_1 \subseteq I_1 \subseteq [q^{\mu-2}, q^{\mu}]$ .

Une sommation d'Abel fournit

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in J_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}} + hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{2m}\right) \sin\left(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{m}\right) \right| \\ & \ll \max \left( \left| \sum_{m \in J_1} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}} + hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{2m}\right) \right|, \right. \\ & \quad \left. \sup_{M/q < K \leq M} \left| \sum_{l \in J_1 \cap [M/q, K)} e\left(\frac{h_1 rm}{q^{\mu_1}} + hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{2m}\right) \right| \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_{m \in I_1} \left| \sin\left(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{m+1}\right) - \sin\left(\pi hq^{\mu_1-\mu_2}s \frac{q^k}{m}\right) \right| \right). \end{aligned}$$

La fonction

$$f(x) := \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} x + \frac{1}{2x} h s q^{\mu_1-\mu_2+k}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[q^{\mu-2}, q^{\mu}]$  et de plus sa dérivée seconde vérifie

$$\lambda := \frac{1}{2} s h q^{\mu_1-\mu_2+k-3\mu} \leq f''(x) = \frac{s h q^{\mu_1-\mu_2+k}}{2x^3} \leq s h q^{\mu_1-\mu_2+k-3\mu+3} = \lambda q^3,$$

nous pouvons alors utiliser [6, Theorem 2.2] pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l \in J_1 \cap [q^{\mu-1}, K]} e\left(\frac{h_1 r}{q^{\mu_1}} l + \frac{1}{2l} h s q^{\mu_1 - \mu_2 + k}\right) \right| \\ & \ll q^\mu (sh q^{\mu_1 - \mu_2 + k - 3\mu})^{1/2} + (sh q^{\mu_1 - \mu_2 + k - 3\mu})^{-1/2}. \end{aligned}$$

En exploitant le fait que  $\mu + \nu - 4 \leq k \leq \mu + \nu - 1$  dans l'estimation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l \in J_1 \cap [q^{\mu-1}, K]} e\left(\frac{h_1 r}{q^{\mu_1}} l + \frac{1}{2l} h s q^{\mu_1 - \mu_2 + k'}\right) \right| \\ & \ll q^\mu (sh q^{\mu_1 - \mu_2 + \nu - 2\mu})^{1/2} + (sh q^{\mu_1 - \mu_2 + \nu - 2\mu})^{-1/2} \\ & \ll (sh q^{\mu_1 - \mu_2})^{1/2} q^{\nu/2} + (sh q^{\mu_1 - \mu_2})^{-1/2} q^{\mu - \nu/2}. \end{aligned}$$

En majorant trivialement le terme de la somme sur les sinus, et en utilisant  $J_1 \subseteq I_1 \subseteq [q^{\mu-2}, q^\mu]$ , et donc  $|J_1| \ll q^\mu$  nous obtenons la majoration :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in J_1} e\left(\frac{h_1 r m}{q^{\mu_1}} + h q^{\mu_1 - \mu_2} s \frac{q^k}{2m}\right) \sin\left(\pi h q^{\mu_1 - \mu_2} s \frac{q^k}{2m}\right) \right| \\ & \ll (sh q^{\mu_2 - \mu_1})^{1/2} q^{\mu + \nu/2} + (sh q^{\mu_1 - \mu_2})^{-1/2} q^{2\mu - \nu/2}. \end{aligned}$$

Cependant, nous avons  $\frac{1}{4}(\mu + \nu) \leq \mu \leq \nu \leq \frac{3}{4}(\mu + \nu)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in J_1} e\left(\frac{h_1 r m}{q^{\mu_1}} + h q^{\mu_1 - \mu_2} s \frac{q^k}{2m}\right) \sin\left(\pi h q^{\mu_1 - \mu_2} s \frac{q^k}{2m}\right) \right| \\ & \ll (sh q^{\mu_2 - \mu_1})^{1/2} q^{\frac{7}{8}(\mu + \nu)}, \end{aligned}$$

et le lemme est démontré.  $\square$

Le lemme ci dessous est le lemme crucial du présent article. Il dit en quelque sorte que si on ne perturbe pas trop des entiers  $m$  et  $n$  en  $m'$  et  $n'$ , le produit  $m' n'$  aura la même taille que le produit  $mn$ . Ceci nous permet d'introduire dans  $S_{II}$  la notion essentielle de fonction doublement tronquée. Les explications de la nécessité d'un tel résultat se trouvent dans la Partie 7.

**LEMME 6.3.** — Soient  $\mu, \nu, \rho$  des entiers tels que  $2\rho \leq \nu - 1$ . Soient  $q^{\mu-2} \leq m < q^\mu$  et  $q^{\nu-2} \leq n < q^\nu$  des entiers. Posons  $m' = m + q^{\mu-\rho}$  et  $n' = n + q^\rho$ .

Alors :

$$\#\{q^{\mu-1} \leq m < q^\mu, q^{\nu-1} \leq n < q^\nu : T_q(mn) \neq T_q(m'n')\} \ll \log(q^{\mu+\nu}) q^{\mu+\nu-\rho}.$$

*Démonstration.* — Observons que  $m'n' = mn + mq^\rho + nq^{\mu-\rho} + q^\mu$ . Par ailleurs

$$\begin{aligned} mq^\rho + nq^{\mu-\rho} + q^\mu &< q^{\mu+\rho} + nq^{\mu-\rho} + q^\mu \\ &\leq q^{\mu+\rho+1} + nq^{\mu-\rho} \\ &\leq q^{\mu+\nu+1-\rho}. \end{aligned}$$

Comme  $mn \geq q^{\mu+\nu-4}$ , pour que la taille de  $mn$  soit perturbée par l'ajout d'un terme inférieur à  $q^{\mu+\nu+1-\rho}$ , il faut que les chiffres de  $mn$  d'indice entre  $\mu + \nu + 1 - \rho$  et  $\mu + \nu - 4$  soient égaux à  $q - 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  le nombre des  $(m, n)$  tels que  $T_q(mn) \neq T_q(m'n')$ . Si

$$\chi(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_i(a) = q - 1, \quad \mu + \nu + 1 - \rho \leq i \leq \mu + \nu - 4 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\leq \sum_{q^{\mu+\nu+1-\rho} \leq a < q^{\mu+\nu}} \tau(a)\chi(a) \\ &\leq \sum_{b < q^{\mu+\nu+1-\rho}} \sum_{c < q^4} \tau(b + (q - 1)q^{\mu+\nu+1-\rho} + \dots + (q - 1)q^{\mu+\nu-4} + q^{\mu+\nu-3}c). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer [4, Lemma 3.5], avec  $x = q^{\mu+\nu+1-\rho} - 1 + (q - 1)q^{\mu+\nu+1-\rho} + \dots + (q - 1)q^{\mu+\nu-2} + q^{\mu+\nu-1}c \leq q^{\mu+\nu+1}$  et  $y = q^{\mu+\nu+1-\rho}$  pour pouvoir dire

$$\mathcal{M} \ll q^{\mu+\nu-\rho} \log q^{\mu+\nu}. \quad \square$$

**LEMME 6.4.** — Soient  $(\mu, \nu, \rho) \in \mathbb{N}^3$  avec  $2\rho < \nu$  et tels que  $P(\mu + \nu) \leq \rho$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  des couples  $(m, n) \in \{q^{\mu-2}, \dots, q^\mu - 1\} \times \{q^{\nu-2}, \dots, q^\nu - 1\}$  tels qu'il existe  $k < q^{\mu+\rho}$  avec  $f_P(mn + k)\overline{f_P(mn)} \neq f_P^{(\mu+2\rho)}(mn + k)f_P^{(\mu+2\rho)}(mn)$  satisfait à

$$\#\mathcal{E} \ll (\log q)q^{\mu+\nu-\rho+P(\mu+\nu+1)}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des  $l < q^{\nu-\rho}$  tels qu'il existe  $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, q^{\mu+\rho} - 1\}^2$  avec

$$a_P(lq^\kappa + k_1 + k_2) - a_P(lq^\kappa + k_1) \neq a_P^{(\kappa+\rho)}(lq^\kappa + k_1 + k_2) - a_P^{(\kappa+\rho)}(lq^\kappa + k_1).$$

Alors nous utilisons le Lemme 4.2 avec  $\lambda = \nu - \rho$ ,  $\kappa = \mu + \rho$  et  $\rho = \rho$  pour obtenir  $\#\mathcal{B} \ll q^{\nu-2\rho+P(\mu+\nu+1)}$ .

Il suffit donc de compter le nombre  $\mathcal{N}$  de couples  $(m, n) \in \{q^{\mu-2}, \dots, q^\mu - 1\} \times \{q^{\nu-2}, \dots, q^\nu - 1\}$  tels que  $mn = k_1 + lq^{\mu+\rho}$  avec  $l \in \mathcal{B}$ , le  $k$  de notre énoncé ici correspondant alors à  $k_2$ . En utilisant [15, Lemma 7] avec  $\mu' = \mu + \rho$ , nous obtenons

$$\#\mathcal{E} \ll (q^{\mu+\rho} \log q + q^\mu + q^{\mu+\rho-\mu+2})\#\mathcal{B} \ll (\log q)q^{\mu+\nu-\rho+P(\mu+\nu+1)}. \quad \square$$

LEMME 6.5. — Soient  $(\mu, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}^5$  avec  $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ ,  $\mu_1 - \mu_0 \leq \frac{3}{4}(\mu_2 - \mu_0)$  et  $2(\mu_2 - \mu) \leq \mu_0$ . Supposons également que  $P(\mu_2) \leq \mu_1 - \mu_0$ . Alors, pour  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  l'ensemble  $\mathcal{E}(a, b, c)$  des couples  $(m, n) \in \{q^{\mu-2}, \dots, q^\mu - 1\} \times \{q^{\nu-2}, \dots, q^\nu - 1\}$  tels que

$$(34) \quad \begin{aligned} & f_P^{(\mu_2)}(mn + am + bn + c, T_q(mn + am + bn + c)) \\ & \cdot \overline{f_P^{(\mu_1)}(mn + am + bn + c, T_q(mn + am + bn + c))} \\ & \neq f_P^{(\mu_2)}(q^{\mu_0}r_{\mu_0, \mu_2}(mn + am + bn + c), T_q(mn + am + bn + c)) \\ & \cdot \overline{f_P^{(\mu_1)}(q^{\mu_0}r_{\mu_0, \mu_2}(mn + am + bn + c), T_q(mn + am + bn + c))} \end{aligned}$$

satisfait à

$$(35) \quad \#\mathcal{E}(a, b, c) \ll \max(\tau(q), \log q) \mu_2^{\omega(q)} q^{\mu+\nu+\mu_0-\mu_1+P(\mu_2+1)}.$$

Démonstration. — Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des  $l \in \{0, \dots, q^{\mu_2-\mu_0}-1\}$  tel qu'il existe  $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, q^{\mu_0}-1\}^2$  avec

$$f_P^{(\mu_2)}(q^{\mu_0}l + k_1 + k_2) \overline{f_P^{(\mu_2)}(q^{\mu_0}l + k_1)} \neq f_P^{(\mu_1)}(q^{\mu_0}l + k_1 + k_2) \overline{f_P^{(\mu_1)}(q^{\mu_0}l + k_1)}.$$

Pour  $0 \leq l \leq q^{\mu_2-\mu_0} - 2$ , nous avons  $0 \leq q^{\mu_0}l + k_1 + k_2 \leq q^{\mu_2} - 2$  et ainsi

$$f_P^{(\mu_2)}(q^{\mu_0}l + k_1 + k_2) \overline{f_P^{(\mu_2)}(q^{\mu_0}l + k_1)} = f_P(q^{\mu_0}l + k_1 + k_2) \overline{f_P(q^{\mu_0}l + k_1)}$$

sauf possiblement si  $l = q^{\mu_2-\mu_0} - 1$ . Comme  $\mu_1 - \mu_0 \leq 3/4(\mu_2 - \mu_0)$ , nous pouvons utiliser le Lemme 4.2 avec  $\lambda = \mu_2 - \mu_0$ ,  $\kappa = \mu_0$ ,  $\rho = \mu_1 - \mu_0$ , et donc

$$(36) \quad \#\mathcal{B} = O(q^{\mu_2-\mu_0-(\mu_1-\mu_0)+P(\mu_2-\mu_0+\mu_0+1)}) = O(q^{\mu_2-\mu_1+P(\mu_2+1)}).$$

Le reste de la preuve est identique à [15, Lemma 9]. □

L'objet du lemme suivant est de dire que la fonction doublement tronquée a une transformée de Fourier qui décroît. Pour l'expliciter nous introduisons un objet intermédiaire.

Soit

$$G_{\mu_0, \lambda}(t, k) = \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq u < q^\lambda} f_P^{(\mu_1, \mu_2)}(uq^{\mu_0}, k) e\left(-\frac{ut}{q^\lambda}\right).$$

LEMME 6.6. — Uniformément pour  $\lambda \in \mathbb{N}$  tel que

$$(37) \quad \frac{1}{3}(\mu_2 - \mu_0) \leq \lambda \leq \frac{4}{5}(\mu_2 - \mu_0),$$

et tout entier  $k$  tel que

$$(38) \quad P(k) \leq \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_0)$$

et  $t \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$(39) \quad \sum_{0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} |G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0}(h + t, k)|^2 \\ \ll q^{1/2(\mu_1 - \mu_0 - \gamma_P(\lambda, k)) + 3P(k)/4} (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2.$$

*Démonstration.* — De même que [15, Lemma 11], en observant que les conditions imposées permettent de se passer de la troncature en  $\mu_2$  et ainsi d'en introduire une autre, nous pouvons écrire :

$$G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0}(t, k) = G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 1}(t, k) + G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 2}(t, k),$$

avec

$$G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 1}(t, k) := \frac{1}{q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} \sum_{0 \leq v < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} f_P(vq^{\mu_0 + \lambda}, k) e\left(-\frac{vq^\lambda t}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) \\ \cdot \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq u < q^\lambda} f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(q^{\mu_0}(u + vq^\lambda), k) \\ \cdot \overline{f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(vq^{\mu_0 + \lambda}, k) f_P^{(\mu_1)}(uq^{\mu_0}, k)} e\left(-\frac{ut}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right),$$

qui est le terme principal, et

$$G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 2}(t, k) \\ := \frac{1}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \sum_{(u, v) \in \widetilde{\mathcal{W}_\lambda}} f_P(vq^{\mu_0 + \lambda}, k) f_P^{(\mu_1)}(uq^{\mu_0}, k) e\left(-\frac{(u + vq^\lambda)t}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) \\ \cdot \left( f_P(q^{\mu_0}(u + vq^\lambda), k) \overline{f_P(vq^{\mu_0 + \lambda}, k)} \right. \\ \left. - f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(q^{\mu_0}(u + vq^\lambda), k) \overline{f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(vq^{\mu_0 + \lambda}, k)} \right),$$

qui est le terme d'erreur, où

$$(40) \quad 1 \leq \rho_3 \leq \mu_2 - \mu_0 - \lambda.$$

Si nous introduisons dans  $G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 1}(t, k)$  le résidu  $w$  de  $v \bmod q^{\rho_3}$  dans le but de rendre les variables  $u$  et  $v$  indépendantes (notons que contrairement aux sommes de type I il n'y a pas de difficultés ici : la taille est fixée), nous obtenons en suivant pas à pas la preuve de [15] :

$$G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 1}(t, k) \\ = \sum_{0 \leq l < q^{\rho_3}} \frac{\tilde{c}_l(t)}{q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} \sum_{0 \leq v < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} f_P(vq^{\mu_0 + \lambda}, k) e\left(-\frac{vt}{q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} + \frac{vl}{q^{\rho_3}}\right)$$

où on a posé

$$\tilde{c}_l(t) = \frac{1}{q^{\rho_3}} \sum_{0 \leq w < q^{\rho_3}} c_\lambda(w, t) e\left(-\frac{wl}{q^{\rho_3}}\right)$$

et

$$c_\lambda(w, t) = \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq u < q^\lambda} f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(q^{\mu_0}(u + wq^\lambda), k) \cdot \overline{f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(wq^{\mu_0 + \lambda}, k) f_P^{(\mu_1)}(uq^{\mu_0}, k)} e\left(-\frac{ut}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right).$$

Si nous supposons

$$(41) \quad P(k) \leq \lambda + \rho_3,$$

une démonstration analogue au Lemme 4.3 nous donne l'estimation uniforme suivante

$$\left| \frac{1}{q^{\lambda + \rho_3}} \sum_{0 \leq u' < q^{\lambda + \rho_3}} f_P(u'q^{\mu_0}, k) e\left(-\frac{u't}{q^{\mu_2 - \mu_0}} - \frac{l'u'}{q^{\lambda + \rho_3}}\right) \right| \leq q^{-\gamma_P(\lambda + \rho_3, k)}.$$

Suivant [15, p 2626], nous rattachons cette estimation à  $c_\lambda(w, t)$  en effectuant des jeux d'écriture par rapport à la fonction tronquée. Ces calculs sont assez lourds à écrire, et, du fait qu'ici la taille ne change pas, ne présentent aucune nouveauté par rapport à [15]. Suivant toujours le fil de la preuve, l'identité de Cauchy-Schwarz, la croissance de  $\gamma_P(l, k)$  en  $l$  assurée par (7) et l'orthogonalité des caractères permettent alors de conclure à

$$(42) \quad \sum_{0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} |G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 1}(h + t, k)|^2 \ll q^{3\rho_3 + 2(\mu_1 - \mu_0) - 2\gamma_P(\lambda, k)} (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2.$$

Pour le terme d'erreur, par des résultats classiques sur les propagations des retenues (là encore, voir [15] ou [9]), le nombre de  $v \in \{0, \dots, q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}\}$  tels qu'il existe  $u \in \{0, \dots, q^\lambda - 1\}$  pour lequel

$$(43) \quad \begin{aligned} & f_P(uq^{\mu_0} + vq^{\mu_0 + \lambda}, k) \overline{f_P(vq^{\mu_0 + \lambda}, k)} \\ & \neq f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(uq^{\mu_0} + vq^{\mu_0 + \lambda}, k) \overline{f_P^{(\mu_0 + \lambda + \rho_3)}(vq^{\mu_0 + \lambda}, k)} \end{aligned}$$

est  $O(q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda - \rho_3 + P(k)})$ . Ainsi, en sommant sur  $u$ , l'ensemble  $\widetilde{\mathcal{W}}_\lambda$  des couples  $(u, v)$  satisfaisant à (43) satisfont également à

$$(44) \quad \#\widetilde{\mathcal{W}}_\lambda \ll q^{\mu_2 - \mu_0 - \rho_3 + P(k)}.$$

En développant les modules au carré et en utilisant l'orthogonalité des caractères, en suivant le fil de la preuve de [15], on peut montrer que :

$$(45) \quad \sum_{\substack{0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda} \\ 0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}}} |G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0, \lambda, 2}(h + t, k)|^2 \ll \frac{\#\widetilde{\mathcal{W}}_\lambda}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \ll q^{-\rho_3 + P(k)}.$$

En rassemblant (42) et (45), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0 - \lambda}} |G_{\mu_0, \mu_2 - \mu_0}(h + t, k)|^2 \\ & \ll q^{-\rho_3 + P(k)} + q^{3\rho_3 + 2(\mu_1 - \mu_0) - 2\gamma_P(\lambda, k)} (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2, \end{aligned}$$

et en posant  $\rho_3 = \max(1, \frac{1}{2}(\gamma_P(\lambda, k) - \mu_1 + \mu_0) + P(k)/4)$ , nous avons le résultat demandé. Par ailleurs

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\gamma_P(\lambda, \kappa) - \mu_1 + \mu_0) + \frac{P(k)}{4} \leq \mu_2 - \mu_0 - \lambda \\ & \Leftrightarrow \lambda + \frac{\gamma_P(\lambda, k)}{2} \leq (\mu_2 - \mu_0) + \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_0) - \frac{P(k)}{4}, \end{aligned}$$

or, comme  $\gamma_P(\lambda, k) \leq \lambda/2$ , par (37) nous avons  $\lambda + \frac{\gamma_P(\lambda, k)}{2} \leq (\mu_2 - \mu_0)$ . La condition (38) permet de conclure à (40).

Enfin, toujours par (38), nous avons

$$P(k) \leq \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_0) \leq \frac{1}{3}(\mu_2 - \mu_0) \leq \lambda,$$

où la dernière inégalité résulte de (37), et donc (41) est vérifiée.  $\square$

## 7. Sommes de type II

Soient  $M$  et  $N$  des entiers tels que  $1 \leq M \leq N$ , nous notons, tout comme dans la Partie 5,  $q^{\mu-1} \leq M < q^\mu$  et  $q^{\nu-1} \leq N < q^\nu$ . Nous supposons ici en outre

$$(46) \quad \frac{1}{4}(\mu + \nu) \leq \mu \leq \nu \leq \frac{3}{4}(\mu + \nu)$$

Soit  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $a_m \in \mathbb{C}$ ,  $b_n \in \mathbb{C}$  avec  $|a_m| \leq 1$ ,  $|b_n| \leq 1$ . Nous écrivons alors

$$(47) \quad S_{II}(\vartheta) := \sum_{\frac{M}{q} < m \leq M} \sum_{\frac{N}{q} < n \leq N} a_m b_n f_P(mn) e(\vartheta mn).$$

Nous allons prouver le

THÉORÈME 7.1. — Soit  $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$(48) \quad P(\mu + \nu + 1) \leq \frac{2}{3} \left\lfloor \frac{1}{16} \gamma_P \left( \frac{\mu + \nu}{640}, \mu + \nu - 2 \right) \right\rfloor.$$

Alors nous avons uniformément en  $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$(49) \quad |S_{II}(\vartheta)| \ll (\max(\tau(q), (\log q)^3)(\mu + \nu)^{\omega(q)+3})^{1/4} q^{\mu + \nu - \frac{1}{64}\gamma_P(\frac{\mu+\nu}{640}, \mu+\nu-2)},$$

où  $\gamma_P(k, l)$  est définie en (7)

*Démonstration.* — Pareillement à [15], si  $\rho$  est un entier tel que

$$(50) \quad 1 \leq 7\rho \leq \mu,$$

en posant  $R = q^\rho$  de sorte que  $1 \leq R \ll N$ , on obtient par l'inégalité de van der Corput :

$$(51) \quad |S_{II}(\vartheta)|^2 \ll \frac{M^2 N^2}{R} + \frac{MN}{R} \sum_{1 \leq r < R} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Re(S_1(r)),$$

avec

$$S_1(r) := \sum_m \sum_{n \in I_1(N, r)} b_{n+r} \overline{b_n} f_P(mn + mr) \overline{f_P(mn)} e(\vartheta mr),$$

et  $I_1(N, r) = (N/q, N - r]$ .

Si de plus  $\rho$  satisfait à

$$(52) \quad P(\mu + \nu) \leq \rho$$

on peut utiliser le Lemme 6.4 pour obtenir

$$(53) \quad S_1(r) = S'_1(r) + O((\log q) q^{\mu + \nu - \rho + P(\mu + \nu + 1)}),$$

avec

$$S'_1(r) = \sum_m \sum_{n \in I_1(N, r)} b_{n+r} \overline{b_n} f_P^{(\mu+2\rho)}(mn + mr) \overline{f_P^{(\mu+2\rho)}(mn)} e(\vartheta mr),$$

et on pose

$$(54) \quad \mu_2 := \mu + 2\rho.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en étendant la sommation sur  $n$  à l'intervalle  $(N/q, N]$ , on trouve :

$$|S'_1(r)|^2 \ll N \sum_n \left| \sum_m f_P^{(\mu_2)}(mn + mr) \overline{f_P^{(\mu_2)}(mn)} e(\vartheta mr) \right|^2,$$

et une utilisation du [14, Lemme 4] avec des paramètres  $\mu_1$  et  $S$  tels que

$$(55) \quad 1 \leq q^{\mu_1} S \ll M$$

donne :

$$(56) \quad \sum_{1 \leq r < R} |S'_1(r)|^2 \ll \frac{M^2 N^2 R}{S} + \frac{MN}{S} \Re(S_2),$$

où

$$(57) \quad S_2 := \sum_{1 \leq r < R} \sum_{1 \leq s < S} \left(1 - \frac{s}{S}\right) S'_2(r, s) e(\vartheta q^{\mu_1} rs)$$

et

$$S'_2(r, s) = \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_n f_P^{(\mu_2)}((m + sq^{\mu_1})(n + r)) \\ \cdot \overline{f_P^{(\mu_2)}(m(n + r)) f_P^{(\mu_2)}((m + sq^{\mu_1})n)} f_P^{(\mu_2)}(mn),$$

avec  $I_2(M, s) = (M/q, M - sq^{\mu_1}]$ .

Si nous posons  $S = q^{2\rho}$  et  $\mu_1 = \mu - 3\rho$ , et

$$S''_2(r, s) := \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_n f_P^{(\mu_1, \mu_2)}((m + sq^{\mu_1})(n + r)) \\ \cdot \overline{f_P^{(\mu_1, \mu_2)}(m(n + r)) f_P^{(\mu_1, \mu_2)}((m + sq^{\mu_1})n)} f_P^{(\mu_1, \mu_2)}(mn),$$

nous avons  $S'_2(r, s) = S''_2(r, s) + S'''_2(r, s)$  où  $S'''_2(r, s)$  satisfait à

$$|S'''_2(r, s)| \leq \#\{(m, n) : T_q(mn) \neq T_q((m + Sq^{\mu_1})(n + q^\rho))\}.$$

En effet, pour les  $m$  et  $n$  tels que  $T_q(mn) = T_q((m + Sq^{\mu_1})(n + q^\rho))$ , on peut remplacer directement la fonction tronquée par la fonction doublement tronquée car  $m + sq^{\mu_1} \equiv m \pmod{q^{\mu_1}}$ , et donc  $f_P^{(\mu_1)}((m + sq^{\mu_1})n) = f_P^{(\mu_1)}(mn)$ , et de même pour  $m(n + r)$  et  $(m + sq^{\mu_1})(n + r)$ . Il suffit alors d'écrire  $f_P^{(\mu_2)} = \overline{f_P^{(\mu_1)}} f_P^{(\mu_2)} f_P^{(\mu_1)}$ .

En imposant

$$(58) \quad \rho \leq \frac{\nu - 1}{2}$$

pour pouvoir utiliser le Lemme 6.3. Nous obtenons alors :

$$(59) \quad S'_2(r, s) = S''_2(r, s) + O((\mu + \nu)q^{\mu + \nu - \rho}).$$

Soit à présent  $\rho'$  tel que

$$(60) \quad \rho' \leq \rho,$$

nous posons

$$(61) \quad \mu_0 = \mu_1 - 2\rho',$$

de sorte que  $\mu_1 - \mu_0 = 2\rho' \leq 3/4(5\rho + 2\rho') = 3/4(\mu_2 - \mu_0)$ .

Si nous avons

$$(62) \quad P(\mu + 2\rho) = P(\mu_2) \leq \mu_1 - \mu_0 = 2\rho'$$

par le Lemme 6.5 :

$$(63) \quad S''_2(r, s) = S_3(r, s) + O\left(\max(\tau(q), \log q) \mu_2^{\omega(q)} q^{\mu + \nu + \mu_0 - \mu_1 + P(\mu_2 + 1)}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} S_3(r, s) = & \sum_m \sum_n \varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}((m + sq^{\mu_1})(n + r)), T_q((m + sq^{\mu_1})(n + r)) \right) \\ & \cdot \overline{\varphi_P \left( (r_{\mu_0, \mu_2} m(n + r)), T_q(m(n + r)) \right)} \\ & \cdot \overline{\varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}((m + sq^{\mu_1})n), T_q((m + sq^{\mu_1})n) \right)} \\ & \cdot \varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}(mn), T_q(mn) \right), \end{aligned}$$

où on a posé

$$\varphi_P(x, y) := e \left( \alpha \sum_{i=\mu_1-P(y)}^{\mu_2-P(y)} \epsilon_{i+P(y)}(q^{\mu_0}x) \cdots \epsilon_i(q^{\mu_0}x) \right).$$

Nous rappelons que nous pouvons supposer  $T_q(mn) = T_q((m + sq^{\mu_1})(n + r))$ ; mais comme  $T_q(m)T_q(n) \leq T_q(mn) \leq T_q(m)T_q(n) + 1$  et que  $m$  et  $n$  sont pris de sorte que

$$q^{\mu-2} \leq M/q \leq m < M < q^\mu \quad \text{et} \quad q^{\nu-2} \leq N/q \leq n < N < q^\nu,$$

nous avons  $\mu + \nu - 4 \leq T_q(mn) \leq \mu + \nu - 1$ , ce qui nous donne la réécriture suivante :

$$\begin{aligned} S_3(r, s) = & \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_m \sum_n \varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}((m + sq^{\mu_1})(n + r)), k \right) \overline{\varphi_P \left( (r_{\mu_0, \mu_2} m(n + r)), k \right)} \\ & \cdot \overline{\varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}((m + sq^{\mu_1})n), k \right)} \varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}(mn), k \right), \end{aligned}$$

En posant  $u_0 := r_{\mu_0, \mu_2}(mn)$  et  $u_1 := r_{\mu_0, \mu_2}(mn + mr)$ , on a

$$r_{\mu_0, \mu_2}(mn + q^{\mu_1}sn) = r_{\mu_2 - \mu_0}(u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0}sn) = u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0}sn \pmod{q^{\mu_2 - \mu_0}}$$

et

$$r_{\mu_0, \mu_2}(mn + mr + q^{\mu_1}sn + q^{\mu_1}sr) = u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0}sn + q^{\mu_1 - \mu_0}sr \pmod{q^{\mu_2 - \mu_0}}.$$

Et donc, comme  $\varphi_P(x, y) = \varphi_P(x \pmod{q^{\mu_2 - \mu_0}}, y)$ , nous avons :

$$\varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}((m + sq^{\mu_1})n), k \right) = \varphi_P \left( u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0}sn, k \right)$$

et

$$\varphi_P \left( r_{\mu_0, \mu_2}(m(n + r) + nsq^{\mu_1} + rsq^{\mu_1}), k \right) = \varphi_P \left( u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0}sn + q^{\mu_1 - \mu_0}sr, k \right).$$

Nous rappelons que ([15, equation (11)])

$$r_{\mu_0, \mu_2}(n) = u \Leftrightarrow \frac{n}{q^{\mu_2}} \in \left[ \frac{u}{q^{\mu_2 - \mu_0}}, \frac{u+1}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \right] + \mathbb{Z}$$

et que  $\chi_\alpha(x)$  désigne la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \alpha)$  translaté par  $\mathbb{Z}$ , si bien que

$$\begin{aligned} S_3(r, s) = & \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_n \sum_{\substack{0 \leq u_0, u_1 < q^{\mu_2 - \mu_0} \\ 0 \leq u_0, u_1 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} \chi_{q^{\mu_0 - \mu_2}} \left( \frac{mn}{q^{\mu_2}} - \frac{u_0}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \right) \\ & \cdot \chi_{q^{\mu_0 - \mu_2}} \left( \frac{mn + mr}{q^{\mu_2}} - \frac{u_1}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \right) \\ & \cdot \overline{\sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \varphi_P(u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn + q^{\mu_1 - \mu_0} sr, k) \varphi_P(u_1, k)} \\ & \cdot \overline{\varphi_P(u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn, k)} \varphi_P(u_0, k). \end{aligned}$$

En refaisant sans autre modification que celle induite par la notation les calculs de [15, Sections 6.1-6.2], on peut dire à l'aide de [15, equation (64)] et par [15, Lemma 2] que

$$(64) \quad S_3(r, s) = S_4(r, s) + O(\max(\log q^{\mu_0}, \tau(q^{\mu_0})) q^{\mu+\nu-2\rho}),$$

avec

$$\begin{aligned} S_4(r, s) = & \sum_k \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_n \sum_{\substack{0 \leq u_0, \\ u_1 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} \sum_{|h_0| \leq H} a_{h_0}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) e \left( h_0 \frac{mn}{q^{\mu_2}} - h_0 \frac{u_0}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \right) \\ & \cdot \sum_{|h_1| \leq H} a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) e \left( h_1 \frac{mn + mr}{q^{\mu_2}} - h_1 \frac{u_1}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \right) \varphi_P(u_0, k) \\ & \cdot \overline{\varphi_P(u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn + q^{\mu_1 - \mu_0} sr, k)} \overline{\varphi_P(u_1, k)} \varphi_P(u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn, k), \end{aligned}$$

avec  $H = q^{\mu_2 - \mu_0 + 2\rho}$ , mais nous conserverons la notation  $H$  tant que sa valeur explicite n'est pas utile, et où les coefficients  $a_h$  satisfont à

$$(65) \quad a_0(\alpha, H) = \alpha, \quad |a_h(\alpha, H)| \leq \min \left( \alpha, \frac{1}{\pi|h|} \right).$$

En écrivant  $u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn \equiv u_2 \pmod{q^{\mu_2 - \mu_0}}$  et  $u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn + q^{\mu_1 - \mu_0} sr \equiv u_3 \pmod{q^{\mu_2 - \mu_0}}$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
S_4(r, s) &= \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_n \sum_{\substack{0 \leq u_0, \\ |h_0| \leq H \\ u_1 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} a_{h_0}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) e\left(h_0 \frac{mn}{q^{\mu_2}} - h_0 \frac{u_0}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) \\
&\cdot \sum_{\substack{|h_1| \leq H \\ h_1}} a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) e\left(h_1 \frac{mn + mr}{q^{\mu_2}} - h_1 \frac{u_1}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) \\
&\cdot \sum_{\substack{0 \leq u_2, \\ u_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} \frac{1}{q^{2(\mu_2 - \mu_0)}} \\
&\cdot \sum_{\substack{0 \leq h_2, \\ h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} e\left(h_2 \frac{u_0 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn - u_2}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) e\left(h_3 \frac{u_1 + q^{\mu_1 - \mu_0} sn + q^{\mu_1 - \mu_0} sr - u_3}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right) \\
&\cdot \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \varphi_P(u_3, k) \overline{\varphi_P(u_1, k)} \varphi_P(u_2, k) \varphi_P(u_0, k).
\end{aligned}$$

ce qui fait qu'en posant

$$\widetilde{\varphi}_P(h, y) := \frac{1}{q^{\mu_2 - \mu_0}} \sum_{0 \leq u < q^{\mu_2 - \mu_0}} \varphi_P(u, y) e\left(\frac{-uh}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right),$$

nous avons l'écriture suivante, toujours si  $m \in I_2(M, s)$  :

$$\begin{aligned}
S_4(r, s) &= q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_0| \leq H} a_{h_0}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) \sum_{|h_1| \leq H} a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H) \\
&\cdot \sum_{\substack{0 \leq h_2, \\ h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}}} e\left(\frac{h_3 sr}{q^{\mu_1 - \mu_0}}\right) \overline{\widetilde{\varphi}_P(h_3, k)} \overline{\widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k)} \overline{\widetilde{\varphi}_P(-h_2, k)} \overline{\widetilde{\varphi}_P(h_0 - h_2, k)} \\
&\cdot \sum_{\substack{m, n \\ T_q(mn)=k}} e\left(h_0 \frac{mn}{q^{\mu_2}} + h_1 \frac{mn + mr}{q^{\mu_2}} + h_2 \frac{q^{\mu_1 - \mu_0} sn}{q^{\mu_2 - \mu_0}} + h_3 \frac{q^{\mu_1 - \mu_0} sn}{q^{\mu_2 - \mu_0}}\right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que les variables de  $\widetilde{\varphi}_P$  sont "indépendantes". Nous séparons ici la double somme sur  $h_0, h_1$  en deux sommes :  $S'_4(r, s)$  qui correspond au cas où  $h_0 + h_1 = 0$ , qui consiste en la contribution principale (du fait que  $e(0) = 1$ ) et  $S''_4(r, s)$  qui rassemble les autres termes.

**7.1. Estimation de  $S_4''(r, s)$ .** — Soit  $k \in \{\mu+\nu-4, \mu+\nu-1\}$  fixé, nous traitons d'abord la sommation sur  $m$  et  $n$  comme suit :

(66)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_{\substack{N/q \leq n < N \\ T_q(mn)=k}} e \left( h_0 \frac{mn}{q^{\mu_2}} + h_1 \frac{mn+mr}{q^{\mu_2}} + h_2 \frac{q^{\mu_1-\mu_0} sn}{q^{\mu_2-\mu_0}} + h_3 \frac{q^{\mu_1-\mu_0} sn}{q^{\mu_2-\mu_0}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{N/q \leq n < N} e((h_2 + h_3)q^{\mu_1-\mu_2}sn) \sum_{\substack{m \in I_2(M, s) \\ \cap \left[ \frac{q^k}{n}, \frac{q^{k+1}}{n} \right]}} e \left( m \left[ \frac{n(h_0 + h_1)}{q^{\mu_2}} + \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} \right] \right) \right| \end{aligned}$$

et comme  $I_2(M, s) \subseteq [M/q, M] \subseteq [q^{\mu-2}, q^\mu]$ , la dernière ligne est

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{N/q \leq n < N} \min \left( \left| [M/q, M) \cap \left[ \frac{q^k}{n}, \frac{q^{k+1}}{n} \right] \right|, \left| \sin \pi \frac{(h_0 + h_1)n + h_1 r}{q^{\mu_2}} \right|^{-1} \right) \\ & \leq \sum_{q^{\nu-1} \leq n < q^\nu} \min \left( q^\mu, \left| \sin \pi \frac{(h_0 + h_1)n + h_1 r}{q^{\mu_2}} \right|^{-1} \right) \\ & \ll \lceil q^{\nu-\mu_2} \rceil ((h_0 + h_1, q^{\mu_2})q^\mu + q^{\mu_2} \log q^{\mu_2}), \end{aligned}$$

par [14, Lemme 6]. Mais  $|h_0 + h_1| \leq 2H$ , par ailleurs, en ayant choisi  $H = q^{\mu_2-\mu_0+2\rho}$ , nous avons  $Hq^\mu \geq q^{\mu+\mu_2-\mu_0} \geq q^{\mu_2}$ , et donc

$$(66) \ll \lceil q^{\nu-\mu_2} \rceil Hq^\mu \log q^{\mu_2}.$$

Par orthogonalité des caractères, nous avons pour tout  $k$  et  $y$  :

$$(67) \quad \sum_{0 \leq h < q^{\mu_2-\mu_0}} |\widetilde{\varphi_P}(h+y, k)|^2 = 1$$

et nous obtenons donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq h_3 < q^{\mu_2-\mu_0}} \left| \widetilde{\varphi_P}(h_3, k) \widetilde{\varphi_P}(h_3 - h_1, k) \right| \leq 1 \quad \text{et} \\ & \sum_{0 \leq h_2 < q^{\mu_2-\mu_0}} \left| \widetilde{\varphi_P}(-h_2, k) \widetilde{\varphi_P}(h_0 - h_2, k) \right| \leq 1. \end{aligned}$$

De plus, d'après (65) et le choix  $H = q^{\mu_2-\mu_0+2\rho}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{|h| \leq H} |a_h(q^{\mu_0-\mu_2}, H)| & \leq \sum_{|h| \leq q^{\mu_2-\mu_0}} \frac{1}{q^{\mu_2-\mu_0}} + \sum_{q^{\mu_2-\mu_0} < |h| \leq H} \frac{1}{\pi|h|} \\ & \ll \log(H/q^{\mu_2-\mu_0}) = \log q^\rho. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$|S_4''(r, s)| \ll (\log q)^2 \rho^2 q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \lceil q^{\nu - \mu_2} \rceil H q^\mu \log q^{\mu_2},$$

et avec le choix  $H = q^{\mu_2 - \mu_0 + 2\rho}$ , et comme  $\lceil x \rceil \leq x + 1$ ,

$$(68) \quad |S_4''(r, s)| \ll (\log q)^3 (\mu + \nu)^3 q^{\mu + \nu + 3(\mu_2 - \mu_0) + 2\rho} (q^{-\mu_2} + q^{-\nu}).$$

**7.2. Estimation de  $S_4'(r, s)$ .** — Posons  $h = h_2 + h_3$ , de sorte à unifier les termes en  $n$ . Ceci nous donne

$$\begin{aligned} S_4'(r, s) &\ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 \\ &\cdot \sum_{\substack{0 \leq h \\ < 2q^{\mu_2 - \mu_0}}} \sum_{\substack{0 \leq h_3 \\ < q^{\mu_2 - \mu_0}}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1 - h, k)| \\ &\cdot \left| \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_{\substack{q^{\nu-1} \leq n < q^\nu \\ T_q(mn)=k}} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} + n \frac{sh}{q^{\mu_2 - \mu_1}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de rendre les lignes indépendantes les unes des autres. Si nous posons

$$\begin{aligned} S_6(h, h_1, k) &= \sum_{0 \leq h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1 - h, k)| \\ &\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par } q^{\mu_2 - \mu_0} \text{ périodicité, nous avons :} \end{aligned}$$

$$|S_6(h, h_1, k)| \leq \sum_{0 \leq h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k)|^2 =: S_6'(h_1, k).$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} S_4'(r, s) &\ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S_6'(h_1, k) \\ &\cdot \sum_{1 \leq h < 2q^{\mu_2 - \mu_0}} \left| \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_{\substack{N/q \leq n < N \\ T_q(mn)=k}} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} + n \frac{sh}{q^{\mu_2 - \mu_1}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Nous constatons qu'il y a essentiellement deux termes :

$$(69) \quad \sum_{1 \leq s < S} |S'_4(r, s)| \ll \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < 2q^{\mu_2 - \mu_0} \\ q^{\mu_2 - \mu_1} \nmid hs}} S_5(r, h) + \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < 2q^{\mu_2 - \mu_0} \\ q^{\mu_2 - \mu_1} \nmid hs}} S'_5(r, h, s),$$

avec

$$S_5(r, h) := q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) \\ \cdot \left| \sum_{\substack{m, n \\ T_q(mn)=k}} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right) \right|,$$

et

$$S'_5(r, h, s) := q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) \\ \cdot \left| \sum_{\substack{m, n \\ T_q(mn)=k}} e\left(m \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} + n \frac{hs}{q^{\mu_2 - \mu_1}}\right) \right|$$

où la sommation sur  $m$  se fait sur l'intervalle  $I_2(M, s)$ .

Les termes où l'argument concernant  $n$  est altéré sont les plus faciles à traiter. D'après le Lemme 6.2, nous avons

$$S'_5(r, h, s) \ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) \\ \cdot q^{\mu_2 - \mu_1} (sq^{\mu_1 - \mu_0} q^{\mu_2 - \mu_1})^{1/2} q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)}.$$

Cependant

$$(70) \quad \sum_{\substack{0 \leq h_1 \\ < q^{\mu_2 - \mu_0}}} S'_6(h_1, k) = \sum_{\substack{0 \leq h_1 \\ < q^{\mu_2 - \mu_0}}} \sum_{\substack{0 \leq h_3 \\ < q^{\mu_2 - \mu_0}}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k)|^2 = 1.$$

Nous séparons donc  $S'_5(r, h, s)$  selon  $|h_1| \leq q^{\mu_2 - \mu_0}$ , qu'on nomme  $S_{7,1}(r, h, s)$  et selon  $q^{\mu_2 - \mu_0} < |h_1| \leq H$  qu'on nomme  $S'_{7,1}(r, h, s)$ . Cette séparation est justifiée par la contribution des coefficients  $a_h$ . Par (70), en utilisant  $|a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)| \leq q^{\mu_0 - \mu_2}$ , nous avons l'estimation

$$(71) \quad S_{7,1}(r, h, s) \ll q^{\mu_2 - \mu_1} (sq^{\mu_1 - \mu_0} q^{\mu_2 - \mu_1})^{1/2} q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)} \\ \ll q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu) + \frac{3}{2}(\mu_2 - \mu_1) + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_0)} s^{1/2}.$$

À présent, si  $q^{\mu_2 - \mu_0} < |h_1| \leq H$ , alors  $|a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)| \leq \frac{1}{\pi|h_1|}$ , et donc

$$S'_{7,1}(r, h, s)$$

$$\ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{\substack{q^{\mu_2 - \mu_0} \\ \leq |h_1| \leq H}} \frac{S'_6(h_1, k)}{|h_1|^2} q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)} q^{\mu_2 - \mu_1} (sq^{\mu_1 - \mu_0} q^{\mu_2 - \mu_1})^{1/2}.$$

Mais  $S'_6(h_1, k)$  est  $q^{\mu_2 - \mu_0}$  périodique en  $h_1$ . Nous pouvons séparer la sommation en  $j q^{\mu_2 - \mu_0} \leq |h| \leq (j+1) q^{\mu_2 - \mu_0}$  avec  $1 \leq j \leq H/q^{\mu_2 - \mu_0}$  et borner  $|h_1|^{-2}$  par  $j^{-2} q^{2(\mu_0 - \mu_2)}$ . Ceci nous mène à dire que

$$\begin{aligned} S'_{7,1}(r, h, s) \\ \ll q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_1)+2(\mu_2-\mu_0)} (sq^{\mu_1-\mu_0})^{1/2} \\ \cdot \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2 q^{2(\mu_2-\mu_0)}} \sum_{0 \leq |h_1| < q^{\mu_2-\mu_0}} S'_6(h_1, k) \\ \ll q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_1)+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_0)} s^{1/2}, \end{aligned}$$

et par (71), nous obtenons

$$(72) \quad \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0} \\ q^{\mu_2 - \mu_1} \nmid hs}} S'_5(r, h, s) \ll q^{\frac{7}{8}(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_1)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_0)} S^{3/2}.$$

À présent contrôlons  $S_5(r, h)$ . Nous utilisons le Lemme 6.1 pour pouvoir dire

$$(73) \quad \left| \sum_{m \in I_2(M, s)} \sum_{\substack{N/q \leq n < N \\ T_q(mn)=k}} e\left(h_1 \frac{mr}{q^{\mu_2}}\right) \right| \ll q^\nu \min\left(q^\mu, \left|\sin \pi \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right|^{-1}\right),$$

ce qui amène à

$$\begin{aligned} S_5(r, h, s) &\ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{\substack{|h_1| \leq H \\ |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|}} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) q^\nu \\ &\quad \cdot \min\left(q^\mu, \left|\sin \pi \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}}\right|^{-1}\right). \end{aligned}$$

Notons que  $|h_1 r| \leq HR = q^{\mu_2 - \mu_0 + 3\rho} = q^{\mu_2 - \mu + 6\rho + 2\rho'} \leq q^{\mu_2 - \mu + 8\rho}$ . Si l'on suppose

$$(74) \quad 8\rho < \mu,$$

nous avons  $|h_1 r| < q^{\mu_2}$  et donc  $\left| \sin \pi \frac{h_1 r}{q^{\mu_2}} \right|^{-1} \leq \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}$ , ce qui donne

$$S_5(r, h)$$

$$\ll q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq H} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) q^\nu \min\left(q^\mu, \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}\right).$$

Nous séparons cette dernière somme en  $S_{7,2}(r, h)$ ,  $S'_{7,2}(r, h)$  et  $S''_{7,2}(r, h)$  selon  $|h_1| \leq q^{2\rho}$ ,  $q^{2\rho} < |h_1| \leq q^{\mu_2 - \mu_0}$  et  $q^{\mu_2 - \mu_0} < |h_1| \leq H$ . En effet, si  $|h_1| < q^\rho$ ,  $\min\left(q^\mu, \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}\right) = q^\mu$ , alors que  $\min\left(q^\mu, \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}\right) = \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}$  sinon. Notons ici un enjeu dans le fait que la sommation sur  $n$  soit maximale.

En prenant en compte cette particularité, en utilisant (70) pour  $S'_{7,2}$  et en effectuant le même découpage que pour  $S'_{7,1}$  et la majoration  $|a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)| \leq \frac{1}{\pi|h_1|}$  pour  $S''_{7,2}$ , on peut démontrer que

$$S'_{7,2}(r, h) + S''_{7,2}(r, h) \ll q^{\mu+\nu}/r.$$

Par exemple

$$\begin{aligned} S'_{7,2}(r, h) &= q^{\nu+2(\mu_2-\mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{q^{2\rho} < |h_1| \leq q^{\mu_2-\mu_0}} |a_{h_1}|^2 S'_6(h_1, k) \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|} \\ &\ll q^{\nu+\mu_2-2\rho} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{0 \leq h_1 < q^{\mu_2-\mu_0}} S'_6(h_1, k), \end{aligned}$$

et le même genre de calculs, adaptés avec le découpage de  $S'_{7,1}$  s'applique pour obtenir la majoration de  $S''_{7,2}(r, h)$ .

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{RS} \sum_{1 \leq r < R} \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2-\mu_0} \\ q^{\mu_2-\mu_1} | hs}} (S'_{7,2}(r, h) + S''_{7,2}(r, h)) &\ll \frac{1}{RS} \sum_{1 \leq r < R} \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2-\mu_0} \\ q^{\mu_2-\mu_1} | hs}} \frac{q^{\nu+\mu}}{r} \\ &\ll q^{\mu+\nu} \frac{\log R}{R} \frac{\#\{1 \leq s < S, 0 \leq h < q^{\mu_2-\mu_0} : q^{\mu_2-\mu_1} | hs\}}{S} \\ &\ll q^{\mu+\nu} \frac{\log R}{R} \frac{q^{\mu_2-\mu_0-\mu_2+\mu_1} S}{S}, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire

$$(75) \quad \frac{1}{RS} \sum_{1 \leq r < R} \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2-\mu_0} \\ q^{\mu_2-\mu_1} | hs}} (S'_{7,2}(r, h) + S''_{7,2}(r, h)) \ll q^{\mu+\nu+\mu_1-\mu_0} \frac{\log R}{R}.$$

Traitons maintenant le cas  $S_{7,2}(h, r)$ . Nous rappelons que

$$\begin{aligned} & S_{7,2}(h, r) \\ &:= q^{2(\mu_2 - \mu_0)} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq q^{2\rho}} |a_{h_1}(q^{\mu_0 - \mu_2}, H)|^2 S'_6(h_1, k) q^\nu \min\left(q^\mu, \frac{q^{\mu_2}}{r|h_1|}\right) \\ &\ll q^{\mu+\nu} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq q^{2\rho}} S'_6(h_1, k) \\ &\ll q^{\mu+\nu} \sum_{k=\mu+\nu-4}^{\mu+\nu-1} \sum_{|h_1| \leq q^{2\rho}} \sum_{0 \leq h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k)|^2. \end{aligned}$$

Supposons

$$(76) \quad P(\mu + \nu + 1) \leq \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_0)$$

Nous utilisons ici le Lemme 6.6 avec  $\lambda = \mu_2 - \mu_0 - 2\rho$  pour pouvoir dire

$$\begin{aligned} & \sum_{|h_1| \leq q^{2\rho}} \sum_{0 \leq h_3 < q^{\mu_2 - \mu_0}} |\widetilde{\varphi}_P(h_3, k) \widetilde{\varphi}_P(h_3 - h_1, k)|^2 \\ &\ll q^{\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_0 - \gamma_P(\mu_2 - \mu_0 - 2\rho, \mu + \nu - 2) + \frac{3P(k)}{4})} (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2, \end{aligned}$$

donc nous obtenons par croissance de  $P$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{RS} \sum_{1 \leq r < R} \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0} \\ q^{\mu_2 - \mu_1} \nmid hs}} S_{7,2}(h, r) \\ &\ll q^{(\mu+\nu)+\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_0 - \gamma_P(\mu_2 - \mu_0 - 2\rho, \mu + \nu - 2) + \frac{3}{4}P(\mu+\nu))} (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2 \\ &\quad \cdot \frac{\#\{1 \leq s < S, 0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0} : q^{\mu_2 - \mu_1} \mid hs\}}{S}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de dire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{RS} \sum_{1 \leq r < R} \sum_{\substack{1 \leq s < S \\ 0 \leq h < q^{\mu_2 - \mu_0} \\ q^{\mu_2 - \mu_1} \mid hs}} S_7(h, r) \\ (77) \quad &\ll (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2 q^{(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_1 - \mu_0) - \frac{1}{2}\gamma_P(\mu_2 - \mu_0 - 2\rho, \mu + \nu - 2) + \frac{3}{4}P(\mu+\nu)}. \end{aligned}$$

En rassemblant les équations (51), (53), (56), (57), (59), (63), (64), (68), (69), (72), (75) et (77), ainsi qu'en posant  $S = q^{2\rho}$  nous avons :

$$\begin{aligned} |S_{II}(\vartheta)|^4 &\ll (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2 q^{4(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_1-\mu_0)-\frac{1}{2}\gamma_P(\mu_2-\mu_0-2\rho,\mu+\nu-2)+\frac{3}{4}P(\mu+\nu)} \\ &+ q^{4(\mu+\nu)+\mu_1-\mu_0-\rho} \log q^\rho \\ &+ q^{(4-\frac{1}{8})(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_1)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_0)+\rho} \\ &+ (\log q)^3(\mu+\nu)^3 q^{4(\mu+\nu)+3(\mu_2-\mu_0)+2\rho}(q^{-\mu_2} + q^{-\nu}) \\ &+ \max(\log q^{\mu_0}, \tau(q^{\mu_0})) q^{4(\mu+\nu)-2\rho} \\ &+ \max(\tau(q), \log q) \mu_2^{\omega(q)} q^{4(\mu+\nu)+\mu_0-\mu_1+P(\mu_2+1)} \\ &+ q^{4(\mu+\nu)-\rho}(\mu+\nu) + q^{4(\mu+\nu)-2\rho} + q^{4(\mu+\nu)-2\rho}. \end{aligned}$$

Nous faisons quelques réductions élémentaires pour pouvoir dire

$$\begin{aligned} |S_{II}(\vartheta)|^4 &\ll (\log q^{\mu_2 - \mu_1})^2 q^{4(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_1-\mu_0)-\frac{1}{2}\gamma_P(\mu_2-\mu_0-2\rho,\mu+\nu-2)+\frac{3}{4}P(\mu+\nu)} \\ &+ q^{(4-\frac{1}{8})(\mu+\nu)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_1)+\frac{3}{2}(\mu_2-\mu_0)+\rho} \\ &+ (\log q)^3(\mu+\nu)^3 q^{4(\mu+\nu)+3(\mu_2-\mu_0)+2\rho}(q^{-\mu_2} + q^{-\nu}) \\ &+ \max(\log q^\rho, \log q^{\mu_0}, \tau(q^{\mu_0}), (\mu+\nu)) q^{4(\mu+\nu)+\mu_1-\mu_0-\rho} \\ &+ \max(\tau(q), \log q) \mu_2^{\omega(q)} q^{4(\mu+\nu)+\mu_0-\mu_1+P(\mu_2+1)}. \end{aligned}$$

Nous rappelons à présent que nous avons posé  $\mu_2 = \mu + 2\rho$ ,  $\mu_1 = \mu - 3\rho$  et  $\mu_0 = \mu_1 - 2\rho' = \mu - 3\rho - 2\rho'$ . Quitte à choisir  $2\rho < \nu$ , en remarquant que par (76), nous avons  $P(\mu + \nu + 1) \leq 2\rho'/3$  et que par ailleurs,  $\rho' \leq \rho \leq \mu$ , et  $\gamma_P(l, k)$  est croissante en  $l$  et décroissante en  $k$  (pour voir ce dernier point, on remarque que l'application  $x \mapsto \log(x - K)/\log x$  a sa dérivée positive si  $x \geq K$  du fait de la croissance de  $x \log x$ ), une fois posé

$$(78) \quad P(\mu + \nu) \leq \gamma_P(3\rho, \mu + \nu)/3,$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |S_{II}(\vartheta)|^4 &\ll q^{4(\mu+\nu)} \left[ (\log q^{5\rho})^2 q^{3\rho' - \frac{1}{4}\gamma_P(3\rho, \mu+\nu-2)} \right. \\ &+ q^{-\frac{1}{8}(\mu+\nu)+19\rho} \\ &+ (\log q)^3(\mu+\nu)^3 q^{23\rho}(q^{-\mu-2\rho} + q^{-\nu}) \\ &+ \max(\tau(q^{\mu-3\rho-2\rho'}), \mu+\nu) q^{2\rho'-\rho} \\ &\left. + \max(\tau(q), \log q)(\mu+2\rho)^{\omega(q)} q^{-\frac{4}{3}\rho'} \right]. \end{aligned}$$

Nous faisons alors le choix de prendre  $\rho = \lfloor \frac{\mu}{160} \rfloor \leq \frac{\mu}{160} \leq \frac{3}{4*160}(\mu + \nu)$  et  $\rho' = \lfloor \frac{1}{16}\gamma_P(3\rho, \mu + \nu - 2) \rfloor \leq \frac{3}{32}\rho$ . On voit aisément que  $\rho$  satisfait à (58) et d'après la Remarque 2.1 et par (48), nous sommes certains que (76) et (78)

sont satisfaites. Ces choix, avec la condition (46) et les estimations classiques des parties entières, nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} |S_{II}(\vartheta)|^4 &\ll q^{4(\mu+\nu)} \left[ \max(\tau(q), \log q)(\mu+\nu)^{\omega(q)}, (\log q^{5\rho})^2 \right] q^{-\frac{1}{16}\gamma_P(\frac{\mu+\nu}{640}, \mu+\nu-2)} \\ &+ q^{-\frac{184}{5120}(\mu+\nu)} + (\log q)^3(\mu+\nu)^3 q^{-\frac{139}{4*160}(\mu+\nu)} \\ &+ (\log q)^3(\mu+\nu)^3 q^{-\frac{137}{4*160}(\mu+\nu)} \\ &+ q^{\frac{26}{32}} \max(\tau(q^{\mu-3\rho-2\rho'}), \mu+\nu) q^{-\frac{26}{32*4*160}(\mu+\nu)} \Big] \\ &\ll q^{4(\mu+\nu)} q^{\frac{26}{32}} \left( q^{-\frac{26}{20480}(\mu+\nu)} + q^{-\frac{1}{16}\gamma_P(\frac{\mu+\nu}{640}, \mu+\nu-2)} \right) \\ &\cdot \max \left( \tau(q)(\mu+\nu)^{\omega(q)}, \log q(\mu+2\rho)^{\omega(q)}, \right. \\ &\quad \left. (\log q^{5\rho})^2 \tau(q^{\mu-3\rho-2\rho'}), (\log q)^3(\mu+\nu)^3 \right). \end{aligned}$$

Cependant, par la Remarque 2.1 :

$$\frac{1}{16}\gamma_P\left(\frac{\mu+\nu}{640}, \mu+\nu-2\right) \leq \frac{\mu+\nu}{160*32} \leq \frac{26}{20480}(\mu+\nu)$$

et donc finalement :

(79)

$$S_{II}(\vartheta) \ll q^{\frac{26}{128}} \left( \max(\tau(q), (\log q)^3)(\mu+\nu)^{\omega(q)+3} \right)^{1/4} q^{\mu+\nu-\frac{1}{64}\gamma_P(\frac{\mu+\nu}{640}, \mu+\nu-2)}. \quad \square$$

## 8. Fin de l'estimation

Nous utilisons [14, Lemme 1] et son pendant que l'on peut retrouver par [10, equation (13.40)] avec nos estimations (29) et (79). En rappelant que  $\gamma_P(l, k)$ , est croissante en  $l$  et décroissante en  $k$  et en posant

$$c_1(q) = q^{26/128} \max((\log q)^3, \tau(q)^{1/4}) (\log q)^{-3-\frac{\omega(q)}{4}}$$

et en rappelant que  $x = q^{\mu+\nu}$ , nous obtenons :

$$\left| \sum_{x/q < n \leq x} \Lambda(n) f_P(n) e(\vartheta n) \right| \ll c_1(q) (\log x)^{3+\frac{\omega(q)}{4}} x q^{-\frac{1}{64}\gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \frac{1}{160}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)}$$

et la même équation en remplaçant  $\Lambda$  par  $\mu$ .

Il reste à remplacer  $x$  par  $xq^{-k}$  et sommer sur  $k$ . Soit  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $q^K \leq x^{1/4} < q^{K+1}$ . Comme  $\gamma_P(l, k)$  est croissante en  $l$  et décroissante en  $k$ , nous

avons

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq K} x q^{-k} q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x q^{-k}}{\log q} \rfloor \frac{1}{160}, \lfloor \frac{\log x q^{-k}}{\log q} \rfloor)} &\leq \sum_{k \leq K} x q^{-k} q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x q^{-k}}{\log q} \rfloor \frac{1}{160}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} \\ &\leq q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x^{3/4}}{\log q} \rfloor \frac{1}{160}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} \sum_{k \leq K} x q^{-k} \\ &\ll x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \frac{1}{120}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)}, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \sum_{k > K} \frac{x}{q^k} q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x q^{-k}}{\log q} \rfloor \frac{1}{160}, \lfloor \frac{\log x q^{-k}}{\log q} \rfloor)} &\leq \sum_{k > K} \frac{x}{q^k} \\ &\ll \frac{x}{q^{K+1}} \ll x^{3/4} \\ &\ll x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \frac{1}{120}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} \end{aligned}$$

et finalement

$$(80) \quad \left| \sum_{n \leq x} \Lambda(n) f_P(n) e(\vartheta n) \right| \ll c_1(q) (\log x)^{3 + \frac{\omega(q)}{4}} x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \frac{1}{120}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)}$$

et

$$(81) \quad \left| \sum_{n \leq x} \mu(n) f_P(n) e(\vartheta n) \right| \ll c_1(q) (\log x)^{3 + \frac{\omega(q)}{4}} x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor \frac{1}{120}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)}.$$

## 9. Conditions sur P

Nous devons à présent choisir  $P$  de sorte que (13) et (48) soient satisfaites. Comme la fonction  $P$  est croissante, que  $\lfloor x \rfloor \geq x/2$ , et que  $\rho \leq \frac{3}{4*160}(\mu + \nu)$ , les deux équations sont impliquées par

$$(82) \quad P(2(\mu + \nu)) \leq \frac{1}{48} \gamma_P \left( \frac{\mu + \nu}{640}, \mu + \nu \right)$$

Constatons que pour tout  $0 \leq x < 1$ , nous avons  $\log(1 - x) \leq -x$ , ce qui implique que

$$\gamma_P(l, k) \geq l \frac{8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2}{q^{P(k)} P(k) \log q},$$

et donc il suffit que la fonction  $P$  satisfasse à

$$(83) \quad P(2x) q^{P(x)} P(x) \log q \leq \frac{x}{640 \cdot 48} 8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2.$$

et nous constatons que pour tout  $c$  tel que  $0 < c < 1/\log q$ , toute fonction  $P(x)$  satisfaisant à  $P(x) \leq c \log x$  satisfait également à (83).

Pour que les équations (80) et (81) ne soient pas triviales, il faut que

$$(84) \quad c_1(q)(\log x)^{3+\frac{\omega(q)}{4}} x q^{-\frac{1}{64} \gamma_P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor, \frac{1}{120}, \lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} = o(x)$$

Comme  $0 < c < 1/\log q$  et  $P(x) < c \log x$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{12 + \omega(q)}{4 \log q} \log \log x - \frac{1}{64 * 120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor \frac{8 \left( \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2}{q^{P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} P(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor) \log q} \\ & \leq \frac{12 + \omega(q)}{4 \log q} \log \log x - \frac{\left( 8 \sin \frac{\pi \|\alpha\|}{4} \right)^2}{64 * 120 c \log q \log(\lfloor \frac{\log x}{\log q} \rfloor)} \left\lfloor \frac{\log x}{\log q} \right\rfloor^{1-c \log q} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty, \end{aligned}$$

de sorte que (84) est satisfaite.

**REMARQUE 9.1.** — Voici les calculs détaillés dans le cas  $q = 2, \alpha = 1/2$ . Comme  $\log(1-u) \leq -u$  si  $u \in [0, 1[$  :

$$\begin{aligned} \gamma_P \left( \frac{1}{120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right) &= -\frac{1}{120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \log \left( 1 - \frac{8 (\sin \pi/8)^2}{2^{P(\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor)}} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{P \left( \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right) \log 2} \\ &\geq \frac{1}{120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \frac{8 (\sin \pi/8)^2}{2^{P(\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor)}} \frac{1}{P \left( \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right) \log 2} \end{aligned}$$

et si

$$P(x) = \left\lfloor \frac{2 \log x}{3 \log 2} \right\rfloor \leq \frac{2 \log x}{3 \log 2},$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \gamma_P \left( \frac{1}{120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \right) \\ & \geq \frac{1}{120} \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor \frac{8 (\sin \pi/8)^2}{[\log x / \log 2]^{2/3}} \frac{1}{2/3 \log ([\log x / \log 2])}. \end{aligned}$$

En posant  $c'_2 = \frac{3 \cdot 8 (\sin \pi/8)^2}{2 \cdot 64 \cdot 120} > 0$ , nous trouvons que dans ce cas précis, le membre de droite de l'équation (6) est majoré par

$$x (\log x)^{c'_1} 2^{-c'_2 \frac{[\log x / \log 2]^{1/3}}{\log [\log x / \log 2]}}$$

qui est  $o(x)$  si  $x \rightarrow \infty$ . Une démonstration plus générale de ce fait est donnée dans la Partie 9.

## 10. Non automatité

Dans cette partie, nous montrons que les suites  $((-1)^{a_{P(n)}})_{n \geq 0}$  étudiées ne sont pas automatiques dans le cas  $q = 2$ . Ceci nous permet d'affirmer que les résultats de cet article ne sont pas recouverts par [16]. La preuve que nous présentons, plus élégante que notre preuve initiale est due à Julien Cassaigne, que nous remercions pour nous avoir autorisé à la reproduire ici.

Soit  $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction croissante majorée par  $\log n / \log 2$ . Nous allons montrer que l'ensemble  $E$  des entiers possédant dans leur développement binaire un nombre pair de blocs de taille  $P(T_2(n))$  "1" n'est reconnaissable par aucun automate fini.

Supposons que  $E$  est reconnu par un automate à  $k$  états. Parmi les  $k+1$  mots  $x_l = 0^{k-l}1^l$ , pour  $l$  de 0 à  $k$ , il y en a donc deux qui conduisent au même état, disons  $x_i$  et  $x_j$ ,  $i < j$ . Soit  $m$  un entier suffisamment grand pour que  $P(m) > k$  et  $m > P(m) + k$ . Soit  $y = 1^{P(m)-j}0^{m-P(m)+j-k}$ . Alors les mots  $x_i \cdot y$  et  $x_j \cdot y$  sont deux mots de longueur  $m$  qui conduisent au même état, et pourtant le premier code un élément de  $E$  (il ne contient aucun bloc de taille  $P(m)$ ) et pas le second (il contient exactement un bloc de taille  $P(m)$ ). Le choix de  $m$  est valable puisque  $\min(P(m), m - P(m))$  est non majoré dans notre cas.

## 11. Optimalité de la méthode

Dans cette partie, nous allons montrer que si  $P(x) > 2c \log x$  alors les résultats obtenus dans la Partie 8 se trouvent être mis en défaut.

Les résultats obtenus dans [9] (tout comme ceux obtenus dans [15]) sont très dépendants de ce qui est nommé la propriété de Fourier, qui implique notamment qu'il existe une application  $\gamma$  tendant vers l'infini à l'infini telle que, si  $k$  est un entier supérieur ou égal à 1,

$$(85) \quad \frac{1}{2^N} \left| \sum_{n < 2^N} e \left( \alpha \sum_{i \geq 0} \epsilon_i(n) \cdots \epsilon_{i+k}(n) \right) \right| \leq 2^{-\gamma(N)}.$$

On se convainc aisément que ce problème est quasi identique à celui rencontré dans cet article pour le contrôle de la transformée de Fourier. L'adapter à notre cas n'entraînerait qu'un alourdissement des notations. Par ailleurs c'est la propriété de propagation qui a posé problème dans cet article, et qui a poussé à adapter la méthode.

En prenant  $\alpha = 1/2$ , nous cherchons donc à montrer que

$$\frac{1}{2^N} |E_k(2^N) - I_k(2^N)| \leq 2^{-\gamma(N)},$$

où  $E_k(m)$  désigne le nombre de  $u < m$  tels que  $u$  a un nombre pair de blocs de taille  $k+1$  de '1' dans son écriture binaire, et  $I_k(m)$ , un nombre impair.

Elémentairement :

$$(86) \quad \begin{aligned} |E_k(2^N) - I_k(2^N)| &= 2^N - 2 \min(E_k(2^N), I_k(2^N)) \\ &= 2 \max(E_k(2^N), I_k(2^N)) - 2^N. \end{aligned}$$

Nous allons montrer le résultat négatif suivant :

**PROPOSITION 11.1.** — Soient  $N$  et  $k$  deux entiers, et  $E_k(2^N)$  et  $I_k(2^N)$  définis comme précédemment.

Nous avons pour tout  $A > 1$ , et pour tout entier  $k \geq A \log_2(N)$  :

$$\frac{E_k(2^N)}{2^N} \geq 1 - 2N^{1-A} + o(N^{1-A}) \quad \text{et donc} \quad \frac{I_k(2^N)}{2^N} \leq 2N^{1-A} + o(N^{1-A}).$$

Par (86), ceci veut dire que sous les conditions de la proposition, on a pour  $N$  assez grand

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^N} \left| \sum_{u < 2^N} e \left( \frac{1}{2} \sum_{i \geq 0} \epsilon_{i+k}(u) \dots \epsilon_i(u) \right) \right| &= \frac{2 \max(E_k(2^N), I_k(2^N)) - 2^N}{2^N} \\ &\geq 2(1 - 2N^{1-A} + o(N^{1-A})) - 1 \\ &= 1 - 4N^{1-A} + o(N^{1-A}) \end{aligned}$$

et en particulier (85) n'a aucune chance de se réaliser. Le Théorème suivant découle facilement de la Proposition 11.1.

**THÉORÈME 11.2.** — Soient  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application,  $A > 1$  un réel,  $N$  un entier positif, et

$$P_N(X_1, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^{N-k} X_i \dots X_{i+k-1}$$

un polynôme, avec  $k$  un entier supérieur ou égal à  $A \log N / \log 2$ . Alors, si pour tout entier  $n$  inférieur à  $2^N$ , nous notons  $P_N(n) := P_N(\epsilon_0(n), \dots, \epsilon_{N-1}(n))$  où les  $\epsilon_i$  désignent les chiffres binaires de  $n$ , nous avons

$$\sum_{n < 2^N} f(n)(-1)^{P_N(n)} = \sum_{n < 2^N} f(n) + \varepsilon(N),$$

avec  $|\varepsilon(N)| \leq 2^{N+1} N^{1-A} \sup_{n < 2^N} |f(n)|(1 + o(1))$ .

*Démonstration.* — Soient  $E_k$  et  $I_k$  définis comme précédemment. Sous les conditions de la Proposition 11.1, nous avons pour  $N \gg_A 1$  :

$$(87) \quad I_k(2^N) = \min(E_k(2^N), I_k(2^N)) = 2^N - \max(E_k(2^N), I_k(2^N))$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n < 2^N} f(n)(-1)^{P_N(n)} &= \sum_{\substack{n < 2^N \\ 2|P_N(n)}} f(n) - \sum_{\substack{n < 2^N \\ 2\nmid P_N(n)}} f(n) \\ &= \sum_{n < 2^N} f(n) - 2 \sum_{\substack{n < 2^N \\ 2\nmid P_N(n)}} f(n). \end{aligned}$$

À présent remarquons que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n < 2^N \\ 2\nmid P_N(n)}} f(n) \right| &\leq \sup_{n < 2^N} |f(n)| \# \{n < 2^N : P_N(n) \not\equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \sup_{n < 2^N} |f(n)| I_k(2^N) \end{aligned}$$

et la Proposition 11.1 permet de conclure.  $\square$

En appliquant la proposition avec  $f(n) = \mu(n)$  et en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme  $\sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$ , nous obtenons que pour tout  $A > 1$ ,

$$\sum_{n < 2^N} \mu(n)(-1)^{P_N(n)} = o(2^N)$$

avec le polynôme regardé dans l'énoncé où  $k \geq A \log N / \log 2$  et  $P_N(n) = P_N(\epsilon_0(n), \dots, \epsilon_{N-1}(n))$ . De même, avec cette définition de  $P_N(n)$ , le théorème des nombres premiers permet de conclure que pour tout  $A > 2$  et  $k \geq A \log N / \log 2$ ,

$$\sum_{n < 2^N} \Lambda(n)(-1)^{P_N(n)} \sim 2^N.$$

En effet,  $\sup_{n < 2^N} \Lambda(n) \leq N \log 2 < N$  et  $|\varepsilon(N)| \leq N^{1-A} 2^{N+1} \sup_{n < 2^N} \Lambda(n)(1 + o(1)) = o(2^N)$ , car  $A > 2$ . Ceci montre en particulier que toute méthode utilisant l'identité de Vaughan est vouée à l'échec dans ce cas précis.

La preuve de la Proposition 11.1 repose sur un résultat probabiliste. Ce n'est pas si étonnant si on tient compte du fait que, pour un entier  $n$  pris aléatoirement entre 0 et  $2^N - 1$ , en écrivant

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} \epsilon_i(n) 2^i,$$

où  $\epsilon_{N-1}(n)$  peut être égal à 0, les  $\epsilon_i$  suivent des lois de Bernoulli et sont indépendantes et uniformément distribuées.

Introduisons des notations : soit  $\mathcal{A} := \{0, 1\}$  l'alphabet à deux éléments,  $\mathcal{A}^N$  les mots sur  $\mathcal{A}$  de taille  $N$ . Nous identifions totalement  $\{0, \dots, 2^N - 1\}$  à  $\mathcal{A}^N$ .

Pour  $\omega$  un mot de taille  $N$ , nous notons  $\mathcal{N}(\omega)$  son nombre de blocs constitués du même chiffre, pour chaque  $i$ -ième bloc,  $X_i(\omega)$  sa taille. Nous notons enfin  $\mathcal{M}(\omega)$  la taille du plus grand bloc constitué du même chiffre.

Ainsi  $\omega := 111000011$  est constitué de trois blocs : ‘111’ de taille 3, ‘0000’ de taille 4 et ‘11’ de taille 2. Donc dans ce cas  $\mathcal{N}(\omega) = 3$ ,  $X_1(\omega) = 3$ ,  $X_2(\omega) = 4$ ,  $X_3(\omega) = 2$  et  $\mathcal{M}(\omega) = 4$ .

Nous commençons cette partie en générant un mot aléatoire de taille  $N$ . Cette construction est standard et peut être retrouvée dans [13].

**CONSTRUCTION 11.3.** — Soient  $(Z_i)_{i \geq 0}$  des lois géométriques de paramètre  $1/2$  définies sur un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Supposons-les indépendantes et identiquement distribuées. Soit  $\epsilon$  une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$  définie sur  $\Omega$  et indépendante des  $Z_i$ . Alors nous construisons une suite infinie de 0 et de 1 de la manière suivante :

- si  $\epsilon = 1$  nous écrivons  $Z_1$  ‘0’, puis  $Z_2$  ‘1’ puis  $Z_3$  ‘0’ etc.
- si  $\epsilon = 0$  nous écrivons  $Z_1$  ‘1’, puis  $Z_2$  ‘0’ puis  $Z_3$  ‘1’ etc.

Gardant les premiers symboles, nous obtenons un mot aléatoire de taille  $N$ . Avec ces notations, nous avons

$$\mathcal{N}(\omega) = \inf \left\{ k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^k Z_i(\omega) \geq N \right\}$$

et

$$(88) \quad \begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}(\omega) - 1\} : X_i(\omega) = Z_i & \quad \text{et} \\ X_{\mathcal{N}(\omega)}(\omega) = N - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}(\omega)-1} Z_i & \leq Z_{\mathcal{N}(\omega)}. \end{aligned}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

**PROPOSITION 11.4.** — Pour tout  $1 < A < 2$ , tout  $N \geq 2$  et tout  $\omega \in \mathcal{A}^l$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) \geq A \log N / \log 2) \leq 2N^{1-A}.$$

*Démonstration.* — Soit  $y > 0$ , comme pour tout  $i$ ,  $X_i \leq Z_i$  et que  $\mathcal{N}(\omega) \leq N$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) < y) &= \mathbb{P}(\forall i \in [1, \mathcal{N}(\omega)] : X_i(\omega) < y) \\ &\geq \mathbb{P}(\forall i \in [1, \mathcal{N}(\omega)] : Z_i < y) \\ &\geq \mathbb{P}(\forall i \in [1, N] : Z_i < y) \\ &\geq (1 - 2^{-\lfloor y \rfloor})^N. \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat à  $y = A \log N / \log 2$ , ceci montre que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) \geq A \log N / \log 2) &= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) < A \log N / \log 2) \\
&\leq 1 - (1 - 2^{-\lfloor A \log N / \log 2 \rfloor})^N \\
&\leq N 2^{-\lfloor A \log N / \log 2 \rfloor} + o(N 2^{-\lfloor A \log N / \log 2 \rfloor}) \\
&\leq N 2^{1 - A \log N / \log 2} + o(N 2^{-\lfloor A \log N / \log 2 \rfloor}) \\
&= 2^{N^{1-A}} + o(N^{1-A}).
\end{aligned}$$
□

Voyons maintenant comment la Proposition 11.4 nous donne la Proposition 11.1.

*Démonstration de la Proposition 11.1.* — Nous avons clairement, comme 0 est pair :

$$\begin{aligned}
E_k(2^N) &\geq 2^l \cdot \mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) < k) \\
&\geq 2^l \cdot \mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) < A \log N / \log 2) \\
&= 2^l \cdot (1 - \mathbb{P}(\mathcal{M}(\omega) \geq A \log N / \log 2)) \\
&\geq 2^N \cdot (1 - 2^{N^{1-A}}) + o(2^N N^{1-A}),
\end{aligned}$$

ce qui conclut notre preuve. □

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. ALLOCHE & J. SHALLIT – *Automatic sequences. theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [2] J. BOURGAIN – « Möbius–walsh correlation bounds and an estimate of mauduit and rivat », *J. Anal. Math.* **119** (2013), p. 147–163.
- [3] E. CATELAND – « Suites digitales et suites  $k$ -régulières », Thèse, 1992.
- [4] M. DRMOTA, C. MAUDUIT & J. RIVAT – « Primes with an average sum of digits », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 2, p. 271–292.
- [5] A. O. GELFOND – « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données », *Acta Arith.* **13** (1967/1968), p. 259–265.
- [6] S. W. GRAHAM & G. KOLESNIK – *Van der Corput’s method of exponential sums*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] B. GREEN – « On (not) computing the mobius function using bounded depth circuit », *Combinatorics, Probability and Computing* **21** (2012), p. 942–951.
- [8] G. HANNA – « Blocs de chiffres des nombres premiers », Thèse, <http://hannagautier.wixsite.com/hannagautier/research>.
- [9] \_\_\_\_\_, « Sur les occurrences des mots dans les nombres premiers », *Acta Arith.* **178** (2017), p. 15–42.

- [10] H. IWANIEC & E. KOWALSKI – *Analytic number theory*, Colloquium Publications, no. 53, American Mathematical Society.
- [11] G. KALAI – « Walsh fourier transform of the möbius function », 2011, <http://mathoverflow.net/questions/57543/walsh-fourier-transform-of-the-mobius-function>.
- [12] \_\_\_\_\_, « Möbius randomness of the rudin–shapiro sequence », 2012, <http://mathoverflow.net/questions/97261/mobius-randomness-of-the-rudin–shapiro-sequence>.
- [13] R. MARCHAND & E. ZOHORIAN AZAD – « Limit law of the length of the standard right factor of a lyndon word », *Combin. Probab. Comput.* **16** (2007), no. 3, p. 417–434.
- [14] C. MAUDUIT & J. RIVAT – « Sur un problème de gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers », *Ann. of Math.* **2** (2010), no. 171, p. 1591–1646.
- [15] \_\_\_\_\_, « Prime numbers along rudin–shapiro sequences », *J. Eur. Math. Soc.* **17** (2015), p. 2595–2642.
- [16] C. MÜLLNER – « Automatic sequences fulfill the full sarnak conjecture », *Duke Math. J.* **166** (2017), no. 17, p. 3219–3290.