Bull. Soc. Math. France
147 (2), 2019, p. 259-287

NOMBRES PREMIERS AVEC CONTRAINTES DIGITALES MULTIPLES

PAR BRUNO MARTIN, CHRISTIAN MAUDUIT & JOËL RIVAT

RÉSUMÉ. — Soit $q \geqslant 2$ un nombre entier. Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ et $k \in \{0,\dots,q-1\}$ nous notons $|n|_k$ le nombre d'apparitions du chiffre k dans le développement de n en base q. Nous étudions la distribution jointe des fonctions $(n \mapsto |n|_k)_{1\leqslant k<q}$ le long de la suite des nombres premiers. Nous obtenons notamment une formule asymptotique pour le cardinal de l'ensemble des nombres premiers p n'excédant pas x et équilibrés en base q (*i.e.* dont les chiffres en base q satisfont à la condition $||p|_i - |p|_j| \leqslant 1$ pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,q-1\}^2$).

Texte reçu le 28 septembre 2017, modifié le 20 juin 2018, accepté le 21 septembre 2018.

BRUNO MARTIN, Univ. Littoral Côte d'Opale, EA 2797 – LMPA – Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville, 62228 Calais, France • *E-mail :* `Bruno.Martin@univ-littoral.fr`

CHRISTIAN MAUDUIT, Université d'Aix-Marseille et Institut Universitaire de France, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France • *E-mail :* `mauduit@iml.univ-mrs.fr`

JOËL RIVAT, Université d'Aix-Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France • *E-mail :* `rivat@iml.univ-mrs.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11A63, 11J71, 11L20, 11N05.

Mots clefs. — nombres premiers, sommes d'exponentielles, fonctions digitales, équirépartition modulo 1.

Ce travail a bénéficié de l'aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant les références « ANR-14-CE34-0009 » MUDERA.

doi:10.24033/bsmf2781

Abstract (*Prime numbers with multiple digital constraints*). — Let $q \geqslant 2$ be an integer. For every positive integer n and $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ we denote by $|n|_k$ the number of occurrences of the digit k in the representation of n in base q. We study the joint distribution of the functions $(n \mapsto |n|_k)_{1 \leqslant k < q}$ along the sequence of prime numbers. We obtain an asymptotic formula for the number of primes less than x which are balanced in base q (*i.e.* such that the digits in base q satisfy the condition $||p|_i - |p|_j| \leqslant 1$ for all $(i, j) \in \{0, \ldots, q-1\}^2$).

1. Notations et rappels

Dans tout ce qui suit, q est un nombre entier supérieur ou égal à 2 et p désigne systématiquement un nombre premier. On note $\log_q$ la fonction logarithme en base q. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers n'excédant pas x, tandis que pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $\pi(x; a, b)$ désigne le nombre de nombres premiers p n'excédant pas x et tels que $p \equiv a \mod b$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\|t\|$ la distance de t au nombre entier le plus proche et l'on pose $\mathrm{e}(t) = e^{2i\pi t}$. Si $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, on note $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$ leur produit scalaire usuel et $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j|$. La fonction indicatrice d'Euler est désignée par la lettre φ.

Rappelons que tout nombre entier strictement positif n admet un unique développement q-adique de la forme

$$n = \sum_{j=0}^{\nu} n_j q^j, \quad 0 \leqslant n_j \leqslant q-1, \quad n_\nu \geqslant 1. \tag{1}$$

Pour $n = 0$, on convient de poser $\nu = 0$ et $n_0 = 0$. Conformément à l'usage, on désigne pour tout $0 \leqslant k \leqslant q-1$ par $|\cdot|_k$ la fonction comptant le nombre d'apparitions du chiffre k dans le développement en base q, soit

$$|n|_k = \#\{0 \leqslant j \leqslant \nu \,:\, n_j = k\}$$

et on appelle fonction digitale (à valeurs entières) toute fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la forme

$$g(n) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k |n|_k,$$

avec $(a_0, ..., a_{q-1}) \in \mathbb{Z}^q$. Un exemple classique de fonction digitale est donné par la fonction somme des chiffres en base q définie, pour tout nombre entier n, par

$$\mathrm{s}_q(n) = \sum_{j=0}^{\nu} n_j = \sum_{k=1}^{q-1} k |n|_k.$$

2. Présentation des résultats

L'objet de cet article est d'étudier la distribution jointe du $(q-1)$-uplet de fonctions $(n \mapsto |n|_k)_{1\leqslant k\leqslant q-1}$ le long de la suite des nombres premiers.

2.1. Distribution dans les progressions arithmétiques. — C'est avec l'article [5] de Gelfond que s'ouvre le problème de déterminer la répartition dans les progressions arithmétiques des valeurs prises par une fonction digitale à valeurs entières le long d'une suite donnée. En particulier Gelfond pose la question de déterminer la répartition de $\mathrm{s}_q(p)$ dans les progressions arithmétiques lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Ce problème a été résolu par Mauduit et Rivat qui obtiennent, étant donné un nombre entier $m \geqslant 2$, l'existence de $\sigma_{q,m} > 0$ tel que pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $x \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, \mathrm{s}_q(p) \equiv a \bmod m\} = \frac{\operatorname{pgcd}(m,q-1)}{m}&\pi(x;a,\operatorname{pgcd}(m,q-1))\\ &+ O\left(x^{1-\sigma_{q,m}}\right).\end{aligned}$$

Plusieurs auteurs ont étendu ce résultat à d'autres classes de fonctions digitales ou automatiques (cf. [10], [1], [12], [6], [14]). Nous obtenons dans cet article un premier exemple de résultat de ce type dans le cas multi-dimensionnel.

THÉORÈME 2.1. — *Il existe $c = c(q) > 0$ tel que l'on a uniformément pour tous $x \geqslant 2$, $\boldsymbol{m} = (m_1,\dots,m_{q-1}) \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})^{q-1}$ et $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_{q-1}) \in \mathbb{Z}^{q-1}$,*

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, \forall k \in \{1,\dots,q-1\}, |p|_k \equiv \ell_k \bmod m_k\} = \\ \frac{d_{\boldsymbol{m}}\pi(x;v_{\boldsymbol{\ell}},d_{\boldsymbol{m}})}{m_1\dots m_{q-1}} + O\left((\log x)^3 x^{1-c/\|\boldsymbol{m}\|_\infty^4}\right),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$d_{\boldsymbol{m}} = \operatorname{pgcd}(m_1, 2m_2,\dots,km_k,\dots,(q-1)m_{q-1},q-1) \quad \text{et} \quad v_{\boldsymbol{\ell}} = \sum_{k=1}^{q-1} k\ell_k. \tag{2}$$

La constante implicite ne dépend que de q.

Le théorème 2.1 n'a d'intérêt que si $(v_{\boldsymbol{\ell}}, d_{\boldsymbol{m}}) = 1$, puisque l'on a l'inclusion $\{p \leqslant x \,:\, \forall k \in \{1,\dots,q-1\}, |p|_k \equiv \ell_k \bmod m_k\} \subseteq \{p \leqslant x \,:\, p \equiv v_{\boldsymbol{\ell}} \bmod d_{\boldsymbol{m}}\}$.

2.2. Loi locale. — Étant donnée une fonction arithmétique $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$, un problème classique consiste à déterminer sa loi locale, c'est-à-dire obtenir une estimation asymptotique pour tout $k \in \mathbb{Z}$ de la quantité

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x \,:\, g(n) = k\}$$

lorsque $x \to +\infty$. Les exemples classiques sont les fonctions Ω et ω (voir par exemple [15] chapitre II.6.1) qui dénombrent le nombre de facteurs premiers d'un nombre entier, comptés avec ou sans leur ordre de multiplicité. Plusieurs travaux récents traitent du cas où g est une fonction digitale. Le premier résultat de cet ordre a été obtenu par Mauduit et Sárközy dans [13] qui établissent une formule asymptotique pour $\mathrm{card}\{n < q^\nu \,:\, \mathrm{s}_q(n) = k\}$, uniforme pour $\nu \to +\infty$ et $0 \leqslant k \leqslant \frac{q-1}{2}\nu$. En s'appuyant sur ces résultats lorsque k est proche de la valeur moyenne $\frac{q-1}{2}\nu$, Fouvry et Mauduit étudient dans [4] l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \,:\, \mathrm{s}_q(n) = \tfrac{q-1}{2}\left\lfloor \log_q n \right\rfloor + B(\left\lfloor \log_q n \right\rfloor)\right\},$$

où $B : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\frac{q-1}{2}j + B(j) \in \mathbb{N}$ et telle que

$$\text{(3)} \qquad \text{il existe } K > 0 \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, |B(n)| \leqslant Kn^{1/4}.$$

Par exemple, pour $g = \mathrm{s}_2$ et $B(j) = \lfloor j/2 \rfloor - j/2$, on a [1]

$$\mathcal{E} = \left\{n \in \mathbb{N}^* \,:\, \mathrm{s}_2(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2 n \right\rfloor \right\}.$$

Le théorème 1.1 de [4] montre que pour tout $x \geqslant 2$, on a

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{card}\{n \leqslant x \,:\, n \in \mathcal{E}\} = \sqrt{\frac{6}{\pi(q^2-1)}}\frac{x}{\sqrt{\log_q x}} + O\left(\frac{x}{\log_q x}\right),$$

où la constante implicite ne dépend que de K et q. Fouvry et Mauduit étudient alors la régularité statistique de l'ensemble $\mathcal{E}$ en établissant que pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $(n\beta)_{n\in\mathcal{E}}$ est équirépartie modulo 1 (théorème 1.2 de [4]).

Remarque 2.2. — La formule (4) n'est plus valable en toute généralité sous la condition [2] :

$$\text{(5)} \qquad \text{il existe } K > 0 \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, |B(n)| \leqslant Kn^{1/2},$$

mais le théorème 1.2 de [4] reste valide sous la condition (5). En effet, sous la condition (5), on peut assez rapidement vérifier qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant de K et q telles que pour tout $x \geqslant x_0(K,q)$ on a

$$C_1\frac{x}{\sqrt{\log x}} \leqslant \mathrm{card}\{n \leqslant x \,:\, n \in \mathcal{E}\} \leqslant C_2\frac{x}{\sqrt{\log x}}$$

1. Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor y/2 \rfloor = \lfloor \lfloor y \rfloor /2 \rfloor$.

2. Par exemple pour $q = 2$, et

$$B(j) = \begin{cases} \left\lfloor \sqrt{j} \right\rfloor & \text{si } j \text{ est pair,} \\ -\{j/2\} & \text{si } j \text{ est impair,} \end{cases}$$

on peut montrer, à l'aide de la formule de Stirling, que la suite

$$\left(\left(\frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}}\right)^{-1} \mathrm{card}\{n \leqslant 2^\nu \,:\, n \in \mathcal{E}\}\right)_{\nu\in\mathbb{N}^*} = \left(\left(\frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}}\right)^{-1} \binom{\nu}{\frac{\nu}{2} + B(\nu)}\right)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$$

ne converge pas.

et ceci permet de constater, en examinant la démonstration du théorème 1.2 de [4], que la condition (5) reste suffisante pour garantir que pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ la suite $(\beta n)_{n \in \mathcal{E}}$ est équirépartie modulo 1.

Dans [11], Mauduit étudie les ensembles de nombres entiers reconnaissables par un q-automate infini déterministe associé à une marche aléatoire de moyenne nulle sur un réseau de dimension d, l'exemple le plus simple étant l'ensemble des nombres entiers $n \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant à $|n|_0 = |n|_1 = \ldots = |n|_{q-1}$ (on a ici $d = q-1$). Plus généralement Drmota et Mauduit [2] considèrent

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,:\, L_k(|n|_0, |n|_1, \ldots, |n|_{q-1}) = \lfloor \eta_k \log_q n \rfloor + v_k,\ k = 1, \ldots, m \right\},$$

où $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ est une famille de formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$. Sous des hypothèses assez générales sur le triplet $(\mathcal{L}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})$ que nous ne détaillons pas ici, Drmota et Mauduit déterminent l'ordre de grandeur du cardinal de $\mathcal{N} \cap [1, x]$, et montrent que pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $(\beta n)_{n \in \mathcal{N}}$ est équirépartie modulo 1.

Dans [3], Drmota, Mauduit et Rivat étudient la loi locale de s_q au voisinage de sa valeur moyenne le long de la suite des nombres premiers : ils obtiennent que pour tous $\varepsilon \in]0, 1/2[$, $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(k, q) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, \mathrm{s}_q(p) = k\} &= \frac{q-1}{\varphi(q-1)} \frac{\pi(x)}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 \log_q x}} \\ &\quad \cdot \left(e^{-\frac{(k-\mu_q \log_q x)^2}{2\sigma_q^2 \log_q x}} + O\left((\log x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \right) \right), \end{aligned} \tag{6}$$

où $\mu_q = \frac{q-1}{2}$ et $\sigma_q^2 = \frac{q^2-1}{12}$. Ce résultat est étendu dans [8] à toute fonction $g = \sum_{1 \leqslant k < q} a_k |\cdot|_k$ avec $(a_k)_{1 \leqslant k < q} \in \mathbb{Z}^{q-1}$. Nous obtenons dans cet article un résultat de ce type dans le cas multidimensionnel.

Théorème 2.3. — *Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$, $r \in \{1, \ldots, q-1\}$ et $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant q-1$. On a uniformément pour tous $x \geqslant 2$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{N}^r$,*

$$\begin{aligned} \operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, |p|_{k_1} = b_1, \ldots, |p|_{k_r} = b_r\} &= \delta_{\boldsymbol{k}} C_{r,q} \frac{\pi(x; \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}})}{(\log_q x)^{r/2}} e^{-\frac{1}{2} R(u_{x,\boldsymbol{b}})} \\ &\quad + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{\frac{r+1}{2}-\varepsilon}} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

avec[3]

(8)
$$\delta_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{pgcd}(k'_1, \ldots, k'_s, q-1) \textit{ où } \{k'_1, \ldots, k'_s\} = \{1, \ldots, q-1\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\},$$
$$C_{r,q} = \sqrt{\frac{q^{r+1}}{(q-r)(2\pi)^r}},$$
$$R(\boldsymbol{\alpha}) = q\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 + \frac{q}{q-r}\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\right)^2 \quad \textit{et}$$
$$u_{x,\boldsymbol{b}} = \left(\frac{\frac{1}{q}\log_q x - b_1}{\sqrt{\log_q x}}, \ldots, \frac{\frac{1}{q}\log_q x - b_r}{\sqrt{\log_q x}}\right).$$

La constante implicite dans (7) *ne dépend que de* ε*,* q *et* $k_1, \ldots, k_r$*.*

Comme l'on a
$$\{p \leqslant x \,:\, |p|_{k_1} = b_1, \ldots, |p|_{k_r} = b_r\} \subseteq \{p \leqslant x \,:\, p \equiv \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k} \bmod \delta_{\boldsymbol{k}}\},$$
le théorème 2.3 n'est intéressant que si $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}}) = 1$ et si les nombres entiers $b_1, \ldots, b_r$ sont proches de la valeur $\frac{1}{q}\log_q x$, soit

(9)
$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, b_i = \frac{1}{q}\log_q x + O\left(\sqrt{\log x}\right).$$

2.3. Nombres premiers équilibrés en base q. —

Définition 2.4. — On dit qu'un nombre entier $n \geqslant 1$ est équilibré en base q s'il satisfait

(10)
$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, q-1\}^2, \quad \big||n|_i - |n|_j\big| \leqslant 1.$$

On note $\mathcal{E}_q$ l'ensemble des nombres équilibrés en base q.

Cet ensemble est reconnaissable par un q-automate infini déterministe au sens de [11] associé à une marche aléatoire sur un réseau de dimension $q-1$. On peut montrer facilement que $\mathrm{card}\{n \leqslant x \,:\, n \in \mathcal{E}_q\}$ est de même ordre de grandeur que $\frac{x}{(\log_q x)^{(q-1)/2}}$ (par exemple de manière analogue à la proposition 4.1 de [11]).

Remarque 2.5. — Si $q \geqslant 4$, alors il n'existe pas de nombre premier p tel que $|p|_0 = \ldots = |p|_{q-1}$. En effet, si $|p|_0 = \ldots = |p|_{q-1} = k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$p \equiv s(p) \equiv \frac{q(q-1)}{2}k \mod q-1.$$
Or si $q \geqslant 5$ est impair, $\mathrm{pgcd}(\frac{q(q-1)}{2}, q-1) \geqslant \frac{q-1}{2} > 1$, et si $q \geqslant 4$ est pair, $\mathrm{pgcd}(\frac{q(q-1)}{2}, q-1) \geqslant q-1 > 1$.

3. On convient que si $r = q-1$, alors $s = 0$ et $\delta_{\boldsymbol{k}} = q-1$.

Théorème 2.6. — *Il existe une fonction $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strictement positive, 1-périodique si q est pair, 2-périodique si q est impair, non constante, tel que pour tous $\varepsilon > 0$, $x \geqslant 2$,*

$$\begin{aligned} N_q(x) &:= \operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, p \in \mathcal{E}_q\} \\ &= Q\left(\frac{\log_q x}{q}\right) \frac{x}{(\log_q x)^{(q+1)/2}} \left(1 + O\left((\log x)^{-1/2+\varepsilon}\right)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

La constante implicite dans (11) *ne dépend que de ε et q.*

Remarque 2.7. — Le théorème 1 de [8] fournit une estimation uniforme en $\beta \in \mathbb{R}$ de la somme d'exponentielles

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ g(p)=k}} \mathrm{e}(\beta p)$$

lorsque $g = \sum_{1 \leqslant k < q} a_k | \cdot |_k$ avec $(a_k)_{1 \leqslant k < q} \in \mathbb{Z}^{q-1}$ et $(a_0, ..., a_{q-1}) = 1$. En suivant la méthode développée pour établir le théorème 1 de [8], il est possible de démontrer le résultat suivant : avec les mêmes notations et hypothèses que celles du théorème 2.3 on a uniformément pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ |p|_{k_1} = b_1, \ldots, |p|_{k_r} = b_r}} \mathrm{e}(\beta p) = \frac{\delta_{\boldsymbol{k}} C_{r,q}}{(\log_q x)^{r/2}} &\left(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k} \bmod \delta_{\boldsymbol{k}}}} \mathrm{e}(\beta p) \right) \\ &\cdot e^{-\frac{1}{2} R(u_{x,\mathbf{b}})} + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{\frac{r+1}{2} - \varepsilon}} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

On peut ainsi déduire de (12) et du critère de Weyl (cf. [7] théorème 2.1 par exemple) que la suite $(\beta p)_{p \in \mathcal{E}_q}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nous omettons la démonstration de ce résultat, elle relève d'arguments similaires à ceux employés dans les preuves du corollaire 1 de [8] et du théorème 2.6 du présent article.

2.4. Cas général. — Les techniques développées dans cet article permettent d'étudier la distribution jointe de r fonctions données de la forme $g_j(p) = \sum_{1 \leqslant k < q} a_k^{(j)} |p|_k$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ avec $a_k^{(j)} \in \mathbb{Z}$. Néanmoins diverses complications arithmétiques peuvent survenir d'un cas à un autre, même en supposant que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\operatorname{pgcd}(a_k^{(j)})_{1 \leqslant k < q} = 1$ et que la famille $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est libre sur $\mathbb{Z}$:

- il peut exister des nombres entiers $m \geqslant 2$ tels que la famille $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ soit liée sur $\mathbb{Z}_m$.

- il peut exister des nombres entiers $m \geqslant 2$ tels que la famille $(\mathrm{s}_q, g_1, \dots, g_r)$ soit liée sur $\mathbb{Z}_m$ ce qui induit des restrictions dans la mesure où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{s}_q(n) \equiv n \bmod q-1$.

Par exemple pour garantir que l'ensemble des nombres premiers satisfaisant en base $q = 5$ à

$$\left\{\begin{aligned} |p|_1 + |p|_2 + |p|_3 &= k_1 \\ |p|_2 + 2|p|_4 &= k_2 \\ |p|_1 + |p|_2 + 3|p|_3 + 2|p|_4 &= k_3 \end{aligned}\right. \tag{13}$$

n'est pas vide il faut imposer les conditions $\mathrm{pgcd}(k_1 + k_2, 2) = 1$, $\mathrm{pgcd}(k_2 + k_3, 4) = 1$ et $k_1 - k_3 \equiv 0 \bmod 2$, les deux premières conditions provenant de la relation $\mathrm{s}_5(n) \equiv n \bmod 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il semble ainsi difficile d'énoncer et de démontrer des résultats tout à la fois généraux et maniables.

Le problème est encore plus complexe si l'on souhaite prendre en compte le nombre de zéros. Rappelons que la situation est déjà délicate pour $r = 1$ comme en témoignent les exemples fournis dans [10] pp. 191–193.

3. Estimation d'une somme d'exponentielles

Les démonstrations des résultats annoncés reposent sur l'estimation obtenue pour une somme d'exponentielles dans [9]. Nous reformulons ici les théorèmes 1 et 2 de [9]. Rappelons que Λ désigne la fonction de von Mangoldt.

THÉORÈME A. — *Il existe $c_0 = c_0(q) > 0$ tel que l'on a uniformément pour tous $x \geqslant 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $g = \sum_{0 \leqslant k < q} \alpha_k |\cdot|_k$ (avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$),*

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(g(n) + \beta n\right) \ll (\log x)^4 x^{1 - c_0 \|(q-1)(\alpha_1 - \alpha_0)\|^2}, \tag{14}$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(g(n) + \beta n\right) \ll (\log x)^4 x^{1 - c_0 \sigma_q(g)}, \tag{15}$$

où

$$\sigma_q(g) = \min_{t \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leqslant j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2 .$$

Signalons que la constante c_0, qui dépend de q, peut être explicitée en reprenant les démontrations des théorèmes 1 et 2 de [9].

Nous pouvons en déduire la majoration suivante.

Proposition 3.1. — *Il existe $c_1 = c_1(q) > 0$ tel que l'on a uniformément pour tous $x \geqslant 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$,*

$$\sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |p|_k + \beta p \right) \ll (\log x)^3 x^{1 - c_1 \tau_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1})}$$

avec

$$\tau_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}) = \|(q-1)\alpha_1\|^2 + \sum_{2 \leqslant k < q} \|\alpha_k - k\alpha_1\|^2 .$$

Démonstration. — Posons $g = \sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |.|_k$. D'après le théorème A nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |n|_k + \beta \right) &\ll (\log x)^4 x^{1 - \frac{c_0}{2}(\sigma_q(g) + \|(q-1)\alpha_1\|^2)}. \\ &\ll (\log x)^4 x^{1 - c_2(\sigma_q(g) + \|(q-1)\alpha_1\|^2)}, \end{aligned}$$

avec

$$c_2 = \min\left(\frac{c_0}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{q(q-1)}{8} \right)^{-1} \right).$$

Une intégration par parties standard donne

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |p|_k + \beta p \right) &\ll \frac{1}{\log x} \max_{t \leqslant x} \left| \sum_{n \leqslant t} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |n|_k + \beta \right) \right| + \sqrt{x} \\ &\ll (\log x)^3 x^{1 - c_2(\sigma_q(g) + \|(q-1)\alpha_1\|^2)} + \sqrt{x} \\ &\ll (\log x)^3 x^{1 - c_2(\sigma_q(g) + \|(q-1)\alpha_1\|^2)}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la définition de c_2. Il nous reste à remarquer que d'après le lemme 4 de [10], nous avons

$$\sigma_q(g) \geqslant \frac{1}{(q-1)((q-1)^2+1)} \sum_{2 \leqslant k < q} \|\alpha_k - k\alpha_1\|^2 .$$

Cela fournit la conclusion attendue avec $c_1 = c_2 \big((q-1)((q-1)^2+1) \big)^{-1}$. $\square$

4. Preuve du théorème 2.1

Nous introduisons l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{ (t_1, \ldots, t_{q-1}) \in \mathbb{Z}^{q-1} \,:\, \forall k \in \{1, \ldots, q-1\}, 0 \leqslant t_k < m_k \}$$

ainsi que les deux sous-ensembles

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ (t_1, \ldots, t_{q-1}) \in \mathcal{H} \,:\, \frac{m_1}{d_{\boldsymbol{m}}} \mid t_1 \text{ et } \forall k \in \{2, \ldots, q-1\}, t_k = \frac{k m_k t_1}{m_1} \bmod m_k \right\},$$

et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. Notons que la condition $\frac{m_1}{d_{\boldsymbol{m}}} \mid t_1$ entraîne que le nombre $\frac{km_k t_1}{m_1}$ est entier pour tout $k \in \{2, \dots, q-1\}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, \forall k \in \{1, \dots, q-1\}, |p|_k \equiv \ell_k \bmod m_k\} \\
&= \frac{1}{m_1 \dots m_{q-1}} \sum_{p \leqslant x} \sum_{(t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathcal{H}} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \frac{|p|_k - \ell_k}{m_k} t_k\right) \\
&= \frac{S_1}{m_1 \dots m_{q-1}} + O(S_2),
\end{aligned}$$

avec

$$S_1 = \sum_{p \leqslant x} \sum_{(t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathcal{H}_1} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} \frac{|p|_k - \ell_k}{m_k} t_k\right)$$

et

$$S_2 = \max_{(t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathcal{H}_2} \left| \sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} |p|_k \frac{t_k}{m_k}\right) \right|.$$

Commençons par traiter S_1. Pour chaque valeur de $k \in \{2, \dots, q-1\}$, la sommation sur t_k le long de $\mathcal{H}_1$ est réduite à un seul terme correspondant à l'unique nombre entier t tel que $0 \leqslant t < m_k$ et $t \equiv km_k t_1 / m_1 \bmod m_k$. En effectuant le changement de variables $t_1 = rm_1 / d_{\boldsymbol{m}}$, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{p \leqslant x} \sum_{0 \leqslant r < d_{\boldsymbol{m}}} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} (|p|_k - \ell_k) \frac{kr}{d_{\boldsymbol{m}}}\right) = \sum_{p \leqslant x} \sum_{0 \leqslant r < d_{\boldsymbol{m}}} \mathrm{e}\left(\frac{r}{d_{\boldsymbol{m}}} (\mathrm{s}_q(p) - v_{\boldsymbol{\ell}})\right) \\
&= \sum_{p \leqslant x} \sum_{0 \leqslant r < d_{\boldsymbol{m}}} \mathrm{e}\left(\frac{r}{d_{\boldsymbol{m}}} (p - v_{\boldsymbol{\ell}})\right) = d_{\boldsymbol{m}} \pi(x, v_{\boldsymbol{\ell}}, d_{\boldsymbol{m}}).
\end{aligned}$$

Pour majorer S_2 et conclure la démonstration, nous allons établir pour tout $(t_1, \dots, t_{q-1}) \in \mathcal{H}_2$ la majoration

$$\sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} |p|_k \frac{t_k}{m_k}\right) \ll (\log x)^3 x^{1 - c_1 / \|\boldsymbol{m}\|_\infty^4}. \tag{16}$$

Compte-tenu de la proposition 3.1, il suffit pour cela de montrer la minoration

$$\tau_q\left(\frac{t_1}{m_1}, \dots, \frac{t_{q-1}}{m_{q-1}}\right) \geqslant \frac{1}{\|\boldsymbol{m}\|_\infty^4}. \tag{17}$$

Soit $(t_1,\dots,t_{q-1})\in\mathcal{H}_2$. S'il existe $k\in\{2,\dots,q-1\}$ tel que $t_k\neq\frac{km_kt_1}{m_1}\bmod m_k$, alors m_1m_k ne divise pas $t_km_1-km_kt_1$ et donc

$$\begin{aligned}\tau_q\left(\frac{t_1}{m_1},\dots,\frac{t_{q-1}}{m_{q-1}}\right)&\geqslant\left\|\frac{t_k}{m_k}-k\frac{t_1}{m_1}\right\|^2\\&=\left\|\frac{t_km_1-km_kt_1}{m_1m_k}\right\|^2\geqslant\frac{1}{(m_1m_k)^2}\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{m}\|_\infty^4}.\end{aligned}$$

Supposons à présent que pour tout $2\leqslant k<q$, $t_k=km_kt_1/m_1\bmod m_k$ et que $\frac{m_1}{d_{\boldsymbol{m}}}\nmid t_1$. En particulier pour toute valeur de k, le nombre km_kt_1/m_1 est entier. Supposons par l'absurde que $\frac{m_1}{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}\mid t_1$. Il existe donc $0\leqslant s<\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)$ tel que

$$t_1=\frac{sm_1}{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}\tag{18}$$

et donc pour tout $2\leqslant k<q$, $\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)\mid skm_k$. Posons $d'_{\boldsymbol{m}}=\mathrm{pgcd}(m_1,2m_2,\dots,(q-1)m_{q-1})$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u_2,\dots,u_{q-1})\in\mathbb{Z}^{q-2}$ tels que

$$\sum_{k=2}^{q-1}u_km_k=d'_{\boldsymbol{m}}.$$

En multipliant cette égalité par s, nous obtenons que $\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)$ divise $sd'_{\boldsymbol{m}}$, et une application du lemme de Gauss permet d'en déduire que $\frac{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}{d_{\boldsymbol{m}}}$ divise s. Compte tenu de (18), cela entraîne que $m_1/d_{\boldsymbol{m}}$ divise t_1, une contradiction. Nous avons donc $\frac{m_1}{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}\nmid t_1$. Nous en déduisons la minoration

$$\begin{aligned}\tau_q\left(\frac{t_1}{m_1},\dots,\frac{t_{q-1}}{m_{q-1}}\right)&\geqslant\left\|(q-1)\frac{t_1}{m_1}\right\|^2=\left\|\frac{q-1}{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}\cdot\frac{t_1}{\frac{m_1}{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}}\right\|^2\\&\geqslant\left(\frac{\mathrm{pgcd}(q-1,m_1)}{m_1}\right)^2\geqslant\frac{1}{m_1^2}\geqslant\frac{1}{\|\boldsymbol{m}\|_\infty^2},\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité vient du fait que pour tout $(a,b,c)\in(\mathbb{Z}\setminus\{0\})^3$ tels que $(a,c)=1$ et $c\nmid b$, on a $\|ab/c\|\geqslant 1/c$. Nous avons bien établi la minoration (17) pour tout $(t_1,\dots,t_{q-1})\in\mathbb{Z}^{q-1}$.

5. Démonstration du théorème 2.3

Soit $r\in\{1,\dots,q-1\}$ et $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\{1,\dots,q-1\}^r$. Nous posons pour tout $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$,

$$S(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k},x)=\sum_{p\leqslant x}\mathrm{e}\left(\sum_{i=1}^r\alpha_i|p|_{k_i}\right)$$

et pour tous $b \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{b,d}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv b \bmod d}} \mathrm{e}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i |p|_{k_i}\right).$$

Nous commençons par le résultat suivant.

Lemme 5.1. — *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant r \leqslant q-1$, $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_r) \in \{1,\dots,q-1\}^r$ tel que $k_1 < \dots < k_r$. Il existe $c = c(q,k_1,\dots,k_r) > 0$ tel que l'on a pour tous $x \geqslant 2$, $0 < \xi < 1/2$ et $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_r) \in \mathbb{N}^r$,*

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}\{p \leqslant x \,:\, |p|_{k_1} = b_1,\dots,|p|_{k_r} = b_r\}\\ &= \delta_{\boldsymbol{k}} \int_{\left[-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times[-\xi,\xi]^{r-1}} S_{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\ &\quad + O\left((\log x)^3 x^{1-c\xi^2/4(q-1)^2}\right),\end{aligned}\tag{19}$$

où $\delta_{\boldsymbol{k}}$ est défini en (8). La constante implicite ne dépend que de q.

Démonstration. — Notons $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et commençons par remarquer que

$$\mathrm{card}\{p \leqslant x \,:\, |p|_{k_1} = b_1,\dots,|p|_{k_r} = b_r\} = \int_{\mathbb{T}^r} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}.$$

Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $k_1 > 1$

On a alors $\delta_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{pgcd}(k'_1,\dots,k'_s,q-1) = 1$. De plus d'après la proposition 3.1, on a

$$S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}) \ll (\log x)^3 x^{1-c_1\mu(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}$$

avec

$$\mu(\alpha_1,\dots,\alpha_r) = \sum_{1\leqslant j\leqslant r} \|\alpha_j\|^2.$$

On a

$$\int_{\mathbb{T}^r} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} = \int_{H_1} + \int_{H_2}$$

avec

$$H_1 = \left[-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times[-\xi,\xi]^{r-1} \quad \text{et} \quad H_2 = \mathbb{T}^r\setminus H_1.$$

Si $\boldsymbol{\alpha} \in H_2$, alors il existe $j \in \{1,\dots,r\}$ tel que $\|\alpha_j\| \geqslant \frac{\xi}{2(q-1)}$, et donc

$$\int_{H_2} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} \ll (\log x)^3 x^{1-c_1\xi^2/4(q-1)^2},$$

ce qui donne bien (19) puisque $\delta_{\boldsymbol{k}} = 1$ et donc $S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}) = S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})$.

Deuxième cas : $k_1 = 1$

Nous effectuons la décomposition

$$\int_{\mathbb{T}^r} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} = \int_{H_1} + \int_{H_2}$$

avec

$$H_1 = \bigcup_{\ell=0}^{\delta_{\boldsymbol{k}}-1}\left(\left[\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{\xi}{2(q-1)}, \frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \frac{\xi}{2(q-1)}\right] \times \prod_{j=2}^{r}\left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \xi, \frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \xi\right]\right),$$

et $H_2 = \mathbb{T}^r \setminus H_1$. Notons que dans la définition de H_1, la réunion $\bigcup_{\ell=0}^{\delta_{\boldsymbol{k}}-1}$ est disjointe puisque $\frac{\xi}{2(q-1)} < \frac{1}{2\delta_{\boldsymbol{k}}}$. Nous avons par conséquent

$$\begin{aligned}&\int_{H_1}\sum_{p\leqslant x} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\ &\quad = \sum_{\ell=0}^{d-1}\int_{\left[\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}+\frac{\xi}{2(q-1)}\right[\times\prod_{j=2}^{r}\left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}-\xi,\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}+\xi\right[} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \{0,\dots,\delta_{\boldsymbol{k}}-1\}$, on effectue dans l'intégrale

$$\int_{\left[\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}+\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times\prod_{j=2}^{r}\left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}-\xi,\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}+\xi\right]}$$

le changement de variables $\alpha_1 = \alpha_1' + \frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}$ et $\alpha_j = \alpha_j' + \frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}}$ pour tout $j \in \{2,\dots,r\}$. Cela fournit

$$\begin{aligned}&\int_{H_1} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\ &\quad = \int_{\left[-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times[-\xi,\xi]^{r-1}} \sum_{p\leqslant x}\mathrm{e}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j|p|_{k_j}\right)\\ &\qquad \cdot\sum_{\ell=0}^{\delta_{\boldsymbol{k}}-1}\mathrm{e}\left(\frac{\ell\sum_{j=1}^{r}k_j(|p|_{k_j}-b_j)}{\delta_{\boldsymbol{k}}}\right)\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

Or, compte-tenu du fait que $\delta_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{pgcd}(k_1',\dots,k_s',q-1)$ et de la relation $\mathrm{s}_q(n) \equiv n \bmod q-1$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{r}k_j|n|_{k_j} \equiv \sum_{j=1}^{r}k_j|n|_{k_j} + \sum_{i=1}^{s}k_i'|n|_{k_i'} \equiv \mathrm{s}_q(n) \equiv n \bmod \delta_{\boldsymbol{k}}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\int_{H_1} & S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\ &= \int_{\left[-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times[-\xi,\xi]^{r-1}} \sum_{p\leqslant x} \mathrm{e}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j |p|_{k_j}\right)\\ &\quad\cdot \sum_{\ell=0}^{\delta_{\boldsymbol{k}}-1} \mathrm{e}\left(\frac{\ell(p-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k})}{\delta_{\boldsymbol{k}}}\right)\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\ &= \delta_{\boldsymbol{k}} \int_{\left[-\frac{\xi}{2(q-1)},\frac{\xi}{2(q-1)}\right]\times[-\xi,\xi]^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

Il reste à majorer $\int_{H_2} S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}$. On a d'après la proposition 3.1

$$S(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k}) \ll (\log x)^3 x^{1-c_1\mu(\boldsymbol{\alpha})},$$

avec

$$\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \|(q-1)\alpha_1\|^2 + \sum_{2\leqslant j\leqslant r}\|\alpha_j - k_j\alpha_1\|^2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant s}\left\|k_j'\alpha_1\right\|^2.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe $c>0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\alpha}\in H_2$,

$$\mu(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant c\,\frac{\xi^2}{4(q-1)^2}. \tag{20}$$

Soit donc $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in H_2$. Le lemme 3 de [10] stipule que l'on a pour tous $n\geqslant 2$, $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0,\ldots,0\}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\|v_k\alpha\|^2 \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right)^{-1} \mathrm{pgcd}(v_1,\ldots,v_n)^2\,\|\mathrm{pgcd}(v_1,\ldots,v_n)\alpha\|^2.$$

Nous en déduisons que l'on a, si $s\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mu(\boldsymbol{\alpha}) &\geqslant \|(q-1)\alpha_1\|^2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant s}\left\|k_j'\alpha_1\right\|^2\\ &\geqslant c\,\|\mathrm{pgcd}(q-1,k_1',\ldots,k_s')\alpha_1\|^2 = c\,\|\delta_{\boldsymbol{k}}\alpha_1\|^2,\end{aligned}$$

avec $c\in]0,1]$ qui dépend de $k_1',\ldots,k_s'$ et $q-1$. Si $s=0$, alors $\delta_{\boldsymbol{k}}=q-1$ et on a donc encore $\mu(\boldsymbol{\alpha})\geqslant c\,\|\delta_{\boldsymbol{k}}\alpha_1\|^2$. À présent distinguons deux sous-cas. Si pour tout $\ell\in\{0,\ldots,\delta_{\boldsymbol{k}}-1\}$, on a

$$\alpha_1 \notin \left[\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{\xi}{2(q-1)}, \frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \frac{\xi}{2(q-1)}\right],$$

alors on a $\|\delta_{\boldsymbol{k}}\alpha_1\| \geqslant \frac{\delta_{\boldsymbol{k}}\xi}{2(q-1)} \geqslant \frac{\xi}{2(q-1)}$, et par conséquent $\mu(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \frac{c\xi^2}{4(q-1)^2}$. Si en revanche, il existe $\ell \in \{0,\ldots,d-1\}$ tel que

$$\alpha_1 \in \left[\frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{\xi}{2(q-1)}, \frac{\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \frac{\xi}{2(q-1)}\right],$$

alors il existe $j \in \{2,\ldots,r-1\}$ tel que

$$\alpha_j \notin \left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \xi, \frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \xi\right] \tag{21}$$

puisque $\boldsymbol{\alpha} \in H_2$. On a de plus

$$k_j\alpha_1 \in \left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{k_j\xi}{2(q-1)}, \frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \frac{k_j\xi}{2(q-1)}\right] \subseteq \left[\frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} - \frac{\xi}{2}, \frac{k_j\ell}{\delta_{\boldsymbol{k}}} + \frac{\xi}{2}\right], \tag{22}$$

car $q-1 \geqslant k_j$. Nous déduisons de (21) et (22) que $\|\alpha_j - k_j\alpha_1\| \geqslant \xi/2$, et donc $\mu(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \xi^2/4$. Nous avons bien établi (19) dans tous les cas. □

Remarquons à ce stade que pour démontrer le théorème 2.3, on peut supposer que x est suffisamment grand, quitte à augmenter la valeur des constantes implicites dans (7). On peut également supposer que $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}}) = 1$ puisque la formule (7) est triviale dans le cas contraire. Appliquons maintenant (19) avec $\xi = (\log x)^{\eta-1/2}$, où $\eta > 0$ est un nombre réel qui sera fixé ultérieurement. En posant

$$I = [-\xi, \xi] \quad \text{ et } I' = \left[-\frac{\xi}{2(q-1)}, \frac{\xi}{2(q-1)}\right],$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}\{p \leqslant x \,:\, |p|_{k_1} = b_1, \ldots, |p|_{k_r} = b_r\}\\ &\qquad = \delta_{\boldsymbol{k}} \int_{I'\times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{\frac{r+1}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir (7), il nous suffit donc d'établir pour x suffisamment grand la formule

$$\begin{aligned}\int_{I'\times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} = C_{r,q}\frac{\pi(x;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}})}{(\log_q x)^{r/2}}e^{-\frac{1}{2}R(u_{x,\boldsymbol{b}})}&\\ + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log x)^{\frac{r+1}{2}-\varepsilon}}\right)&.\end{aligned} \tag{23}$$

Pour cela nous employons une généralisation de la proposition 2.2 de [3]. Elle se démontre de la même manière mais nous donnons les détails de la preuve par souci de complétude au paragraphe 6.

Proposition 5.2. — *Soit η, ν deux nombres réels tels que $0 < 2\eta < \nu < 1/3$. On a uniformément pour tous $x \geqslant x_0(\nu, \eta)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ avec $\alpha_0 = 0$ et tel que $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty \leqslant (\log_q x)^{\eta - \frac{1}{2}}$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que* $\operatorname{pgcd}(b, d) = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv b \bmod d}} \mathrm{e}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k |p|_k\right) &= \pi(x; b, d)\, \mathrm{e}(m(\boldsymbol{\alpha}) \log_q x) \\ &\quad \cdot e^{-2\pi^2 \mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \log_q x} \left(1 + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^3 \log x)\right) \\ &\quad + O(\pi(x)\, \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\, (\log_q x)^\nu),\end{aligned} \tag{24}$$

avec

$$m(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k^2 - m(\boldsymbol{\alpha})^2 = \frac{1}{2q} \sum_{0 \leqslant k, k' < q} (\alpha_k - \alpha_{k'})^2.$$

La constante implicite dans (24) *ne dépend que de η, ν et q.*

Appliquons la Proposition 5.2 au vecteur $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = (0, \widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ avec $\widetilde{\alpha}_{k_j} = \alpha_j$, $\widetilde{\alpha}_{k'_j} = 0$ et avec les nombres entiers $d = \delta_{\boldsymbol{k}}$ et $b = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k}$. Cela donne l'estimation

$$\begin{aligned}&\int_{I' \times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}}}(x; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k})\, \mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{b}) d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \pi(x; \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}}) \int_{I' \times I^{r-1}} \mathrm{e}\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \left(\tfrac{1}{q} \log_q x - b_j\right)\right) \\ &\quad \cdot e^{-2\pi^2 Q(\boldsymbol{\alpha}) \log_q x} \left(1 + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^3 \log x)\right) \\ &\quad + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty (\log_q x)^\nu) d\boldsymbol{\alpha},\end{aligned} \tag{25}$$

avec

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^2 - \left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{r} \alpha_j\right)^2.$$

Notons que puisque $\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j\right)^2 \leqslant r \sum_{j=1}^r \alpha_j^2$, on a

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \frac{1}{q}\left(1 - \frac{r}{q}\right) \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \alpha_j^2 \geqslant \frac{1}{q^2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \alpha_j^2.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^r\setminus(I'\times I^{r-1})} e^{-2\pi^2 Q(\boldsymbol{\alpha})\log_q x} d\boldsymbol{\alpha}\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^r\,:\,|\alpha_j|\geqslant(\log x)^{\eta-1/2}/(2(q-1))\}} e^{-\frac{2\pi^2}{q^2}\log_q x\sum_{j=1}^r \alpha_j^2} d\boldsymbol{\alpha}\\
&= r\int_{|t|\geqslant(\log x)^{\eta-1/2}/(2(q-1))} e^{-\frac{2\pi^2}{q^2}t^2\log_q x}dt\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2\pi^2}{q^2}t^2\log_q x}dt\right)^{r-1}\\
&= r\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi\log_q x}}\right)^{r-1}\int_{|t|\geqslant(\log x)^{\eta-1/2}/(2(q-1))} e^{-\frac{2\pi^2}{q^2}t^2\log_q x}dt.
\end{aligned}$$

Or on a pour tout $v\geqslant 0$,

$$\int_v^{+\infty} e^{-t^2}dt\leqslant\frac{e^{-v^2}}{v+1}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^r\setminus(I'\times I^{r-1})} e^{-2\pi^2 Q(\boldsymbol{\alpha})\log_q x} d\boldsymbol{\alpha}\leqslant r\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi\log_q x}}\right)^{r}\cdot\frac{e^{-d_1(\log x)^{2\eta}}}{1+d_2(\log x)^{\eta}},$$

avec $d_1, d_2>0$ qui dépendent de q. Remarquons par ailleurs que pour tout $\gamma>0$,

$$\int_{I'\times I^{r-1}}\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^\gamma\, d\boldsymbol{\alpha}\leqslant(\log x)^{(\eta-1/2)(r+\gamma)}.$$

Il en résulte que sous l'hypothèse $\eta<\nu/2$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{I'\times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\
&= \pi(x;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}})\int_{\mathbb{R}^r}\mathrm{e}\left(\sum_{j=1}^r\alpha_j\left(\frac{\log_q x}{q}-b_j\right)\right)e^{-2\pi^2 Q(\boldsymbol{\alpha})\log_q x}d\boldsymbol{\alpha}\\
&\quad + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log_q x)^{\frac{r+1}{2}-(\nu+(r+1)\eta)}}\right).
\end{aligned}\tag{26}$$

Nous effectuons le changement de variables $\boldsymbol{\alpha}' = 2\pi\boldsymbol{\alpha}\sqrt{\log_q x}$ dans l'intégrale figurant en (26), et cela donne

$$\begin{aligned}
&\int_{I'\times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},d}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha}\\
&= \frac{\pi(x;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}})}{(\log_q x)^{r/2}(2\pi)^r}\int_{\mathbb{R}^r}\exp\left(i\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\,\frac{\frac{1}{q}\log_q x - b_j}{\sqrt{\log_q x}} - \frac{1}{2}Q(\boldsymbol{\alpha})\right)d\boldsymbol{\alpha}\\
&\quad + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log_q x)^{\frac{r+1}{2}-(\nu+(r+1)\eta)}}\right).
\end{aligned}$$

Nous employons alors le résultat suivant qui est standard et dont on pourra trouver une démonstration dans, par exemple, [16] p. 15.

Lemme 5.3. — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}Q(\boldsymbol{x}) + i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}\exp\left(-\frac{1}{2}R(\boldsymbol{u})\right),$$

où R est la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est A^{-1}.

Dans notre cas, la matrice associée à la forme quadratique Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^r$ est

$$A = \frac{1}{q^2}\begin{pmatrix} q-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \ddots & \ddots & -1\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \dots & -1 & q-1\end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A) = \frac{q-r}{q^{r+1}} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{q(q+1-r)}{q-r} & \frac{q}{q-r} & \cdots & \frac{q}{q-r}\\ \frac{q}{q-r} & \ddots & \ddots & \frac{q}{q-r}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{q}{q-r}\\ \frac{q}{q-r} & \cdots & \frac{q}{q-r} & \frac{q(q+1-r)}{q-r}\end{pmatrix}.$$

La forme quadratique R associée à A^{-1} dans la base canonique est donnée par

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{q(q+1-r)}{q-r}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 + \frac{2q}{q-r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\alpha_i\alpha_j\\
&= q\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 + \frac{q}{q-r}\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\right)^2.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\int_{I'\times I^{r-1}} S_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{k})\,\mathrm{e}(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{b})d\boldsymbol{\alpha} = C_{r,q}\frac{\pi(x;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k},\delta_{\boldsymbol{k}})}{(\log_q x)^{r/2}}e^{-\frac{1}{2}R(u_{x,\boldsymbol{b}})} + O\left(\frac{\pi(x)}{(\log_q x)^{\frac{r+1}{2}-(\nu+(r+1)\eta)}}\right).$$

Pour en déduire (23) et ainsi conclure, il suffit de poser pour $0<\varepsilon<1/2$, $\nu=\frac{4\varepsilon}{5+r}$ et $\eta=\frac{\varepsilon}{5+r}$ qui satisfont bien à $0<2\eta<\nu<1/3$. Pour achever la preuve du théorème 2.3, il reste à démontrer la proposition 5.2.

6. Démonstration de la proposition 5.2

Ce qui suit est une adaptation de la démonstration de la proposition 2.2 de [3], nous adoptons ainsi des notations similaires et omettons certains détails par moments. Nous posons

$$L=L(x)=\log_q x.$$

Pour $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^q$, nous posons

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(n)=\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_k|n|_k$$

et remarquons que pour tous $x\geqslant 2$ et $1\leqslant n\leqslant x$,

$$T_{\boldsymbol{\alpha}}(n)=\sum_{0\leqslant j\leqslant L}\alpha_{\varepsilon_j(n)}.$$

Nous munissons l'ensemble $\Omega_x=\{p\leqslant x\ :\ p\equiv b \bmod d\}$ de la probabilité uniforme et considérons la variable aléatoire $X_{\boldsymbol{\alpha}}:\Omega_x\to\mathbb{C}$ définie par

$$X_{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{T_{\boldsymbol{\alpha}}-Lm(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L}}.$$

Étant donné un nombre réel $0<\nu<1$, nous posons pour tous $x\geqslant 2$ et $1\leqslant n\leqslant x$,

$$T_{\boldsymbol{\alpha},\nu}(n)=\sum_{L^\nu\leqslant j\leqslant L-L^\nu}\alpha_{\varepsilon_j(n)}$$

Nous employons également la notation

$$L'=\operatorname{card}\{j\in\mathbb{N}\ :\ L^\nu\leqslant j\leqslant L-L^\nu\}$$

et introduisons la variable aléatoire $X_{\boldsymbol{\alpha},\nu}:\Omega_x\to\mathbb{C}$

$$X_{\boldsymbol{\alpha},\nu}=\frac{T_{\boldsymbol{\alpha},\nu}-L'm(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L'}}.$$

Nous posons également

$$\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}(e^{iX_{\boldsymbol{\alpha}}}) = \frac{1}{\pi(x;b,d)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv b \bmod d}} e^{i\frac{T_{\boldsymbol{\alpha}}(p)-Lm(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L}}},$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}(e^{iX_{\boldsymbol{\alpha},\nu}}) = \frac{1}{\pi(x;b,d)} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv b \bmod d}} e^{i\frac{T_{\boldsymbol{\alpha},\nu}(p)-L'm(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L'}}}.$$

Lemme 6.1. — *Pour tout $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^q$, on a*

$$\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty L^{\nu-1/2}).$$

Démonstration. — C'est une conséquence rapide de l'inégalité $|e^{it}-e^{is}|\leqslant |s-t|$ valable pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, et des estimations $L-L'\ll L^\nu$ et $L^{-1/2}-L'^{-1/2}\ll L^{\nu-3/2}$. □

Nous introduisons à présent une suite $(Z_j)_{L^\nu\leqslant j\leqslant L-L^\nu}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, toutes de loi uniforme sur $\{0,\dots,q-1\}$ et nous posons successivement

$$\overline{T}_{\boldsymbol{\alpha},\nu} = \sum_{L^\nu\leqslant j\leqslant L-L^\nu} \alpha_{Z_j}, \quad \overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu} = \frac{\overline{T}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}-L'm(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L'}} \quad \text{et} \quad \varphi_3(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}(e^{i\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}}).$$

Lemme 6.2. — *Il existe une constante $c_3=c_3(q)>0$ telle que l'on a uniformément pour tous $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^q$ et $1\leqslant d\leqslant L'$,*

$$\mathbb{E}(X_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^d) = \mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^d) + O\left((8qL^{\nu+1/2}\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty)^d e^{-c_3L^\nu}\right). \tag{27}$$

Démonstration. — En développant les puissances d-ièmes, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^d) &- \mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^d)\\ &= \sum_{L^\nu\leqslant j_1,\dots,j_d\leqslant L-L^\nu} \sum_{\ell_1,\dots,\ell_d\in\{0,\dots,q-1\}} \frac{\alpha_{\ell_1}-m(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L'}}\cdots\frac{\alpha_{\ell_d}-m(\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{L'}}\Delta_{j_1,\dots,j_d}^{\ell_1,\dots,\ell_d}\end{aligned} \tag{28}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta_{j_1,\dots,j_d}^{\ell_1,\dots,\ell_d} &= \mathbb{P}(\varepsilon_{j_1}=\ell_1,\dots,\varepsilon_{j_d}=\ell_d) - \mathbb{P}(Z_{j_1}=\ell_1,\dots,Z_{j_d}=\ell_d)\\ &= \frac{1}{\pi(x;b,d)}\operatorname{card}\{p\leqslant x : p\equiv b \bmod d, \varepsilon_{j_1}(p)=\ell_1,\dots,\varepsilon_{j_d}(p)=\ell_d\}\\ &\quad - \frac{1}{q^d}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.5 de [3], il existe $c_3 > 0$ tel que l'on a uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant L'$, $L^\nu \leqslant j_1 < \ldots < j_d \leqslant L - L^\nu$ et $\ell_1, \ldots, \ell_d \in \{0, \ldots, q-1\}$,

$$\Delta_{j_1,\ldots,j_d}^{\ell_1,\ldots,\ell_d} \ll (4L^\nu)^d e^{-c_3 L^\nu}.$$

En insérant cette majoration dans (28), et en utilisant l'inégalité $|\alpha_\ell - m(\boldsymbol{\alpha})| \leqslant 2\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty$ pour tout $\ell \in \{0, \ldots, q-1\}$, nous obtenons la majoration annoncée. □

Lemme 6.3. — *Soit $0 < \nu < 1$ un nombre réel. On a pour tous $x \geqslant x_0(\nu)$, $w \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^q$ tels que $|w|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty \leqslant L^{1/6}$,*

$$\mathbb{E}(e^{w\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}}) = e^{\frac{w^2}{2}\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}))}\left(1 + O\left(L^{-1/2}|w|^3\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^3\right)\right).$$

Démonstration. — On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{z\overline{T}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}}) &= \left(\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} e^{z\alpha_j}\right)^{L'} \\ &= \exp\left(L'\left(zm(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{z^2}{2}\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}) + O(|z|^3\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^3)\right)\right) \\ &= e^{L'\left(zm(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{z^2}{2}\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha})\right)}\left(1 + O\left(L|z|^3\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^3\right)\right).\end{aligned}$$

On pose alors $z = w/\sqrt{L'}$, ce qui donne bien le résultat annoncé. □

Lemme 6.4. — *Soit $0 < \nu < 1$, $0 < 2\eta < \kappa < 1/3$ et D le plus grand nombre entier pair n'excédant pas L^κ. On a pour tous $x \geqslant x_0(\nu, \eta, \kappa)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ avec $\alpha_0 = 0$ et $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty \leqslant L^\eta$,*

$$\frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^D)}{D!} \ll \|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty\, e^{-c_4 L^\kappa},$$

avec $c_4 = \frac{2\kappa - \eta}{4} > 0$.

Démonstration. — On peut supposer $\boldsymbol{\alpha} \neq (0, \ldots, 0)$. D'après la formule intégrale de Cauchy on a pour tout $w_0 > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^D)}{D!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=w_0} \mathbb{E}(e^{w\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}})\frac{dw}{w^{D+1}}.$$

Comme $\alpha_0 = 0$, on a $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \frac{1}{2q}\,\|\boldsymbol{\alpha}\|_\infty^2$, et on peut ainsi employer le lemme 6.3 avec $w = w_0 = \sqrt{D/\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha})}$. Cela donne

$$\frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^D)}{D!} = \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha})^{D/2}}{D^{D/2}2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{D}{2}e^{i\theta} - iD\theta}\left(1 + O\left(\frac{D^{3/2}}{L^{1/2}}\right)\right)d\theta,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^{D})}{D!} \ll \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha})^{D/2}}{D^{D/2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{D}{2}\cos(\theta)} d\theta \ll \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^{D} e^{D/2}}{D^{D/2}},$$

où la dernière majoration résulte du fait que $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^{2}$. Il suit

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^{D})}{D!} &\ll \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} \exp\left((D-1)\log(L^{\eta}) + \frac{D}{2} - \frac{D}{2}\log D\right) \\ &\ll \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} \exp\left(\left(\eta - \frac{\kappa}{2}\right) L^{\kappa}\log L + \frac{L^{\kappa}}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où nous déduisons la majoration requise. □

Lemme 6.5. — *Soit* $0 < 2\eta < \nu < 1/3$ *des nombres réels. Il existe* $c > 0$ *tel que l'on a uniformément pour tous* $x \geqslant x_0(\nu,\eta)$ *et* $\boldsymbol{\alpha} = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ *tel que* $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} \leqslant L^{\eta}$*,*

$$\varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi_3(\boldsymbol{\alpha}) + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} e^{-cL^{\nu}}).$$

Démonstration. — Soit κ un nombre réel tel que $0 < 2\eta < \kappa < \nu$ et D le plus grand nombre entier pair n'excédant pas L^{κ}. En utilisant le développement de Taylor

$$e^{iu} = \sum_{0 \leqslant d < D} \frac{(iu)^d}{d!} + O\left(\frac{u^D}{D!}\right)$$

(valable uniformément pour tout $u \in \mathbb{R}$) et les lemmes 6.2 et 6.4 nous obtenons :

$$\begin{aligned}|\varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) - \varphi_3(\boldsymbol{\alpha})| &\ll \max_{1 \leqslant d \leqslant D} |\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^{d}) - \mathbb{E}(X_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^{d})| + \frac{\mathbb{E}(\overline{X}_{\boldsymbol{\alpha},\nu}^{D})}{D!} \\ &\ll \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} \left((8qL^{\nu+1/2+\eta})^{L^{\kappa}} e^{-c_3 L^{\nu}} + e^{-c_4 L^{\nu}}\right) \ll \|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} e^{-c_5 L^{\nu}},\end{aligned}$$

avec $c_5 = \min(c_3/2, c_4) > 0$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de la proposition 5.2. D'après les lemmes 6.1 et 6.5 on a

$$\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi_3(\boldsymbol{\alpha}) + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} L^{\nu-1/2}).$$

Le lemme 6.3 appliqué avec $w = i$ donne alors l'estimation asymptotique

$$\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}(\boldsymbol{\alpha}))}\left(1 + O\left(L^{-1/2}\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty}^{3}\right)\right) + O(\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} L^{\nu-1/2}),$$

valable uniformément pour tout $\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\infty} \leqslant L^{\eta}$. En effectuant le changement de variables $\boldsymbol{\alpha} = 2\pi\sqrt{L'}\boldsymbol{\alpha}'$, nous obtenons l'estimation (24).

7. Démonstration du théorème 2.6

Commençons par caractériser les nombres équilibrés d'un intervalle de la forme $[q^{m-1}, q^m[$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$m = qt + r \quad (t \in \mathbb{N}, 1 \leqslant r \leqslant q).$$

Soit $n \in [q^{m-1}, q^m[$. On a l'équivalence

$$\begin{aligned} n \in \mathcal{E}_q \iff \forall k \in \{0, \ldots, q-1\}, |n|_k = t + v_k \\ \text{avec } v_0, \ldots, v_{q-1} \in \{0,1\} \text{ et } \sum_{0 \leqslant k < q} v_k = r. \end{aligned} \tag{29}$$

Si l'on pose pour tout $k \in \{0, \ldots, q-1\}$, $b_k = t + v_k$, avec les notations du théorème 2.3 la condition $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k}, \delta_{\boldsymbol{k}}) = 1$ s'écrit

$$\operatorname{pgcd}\left(\frac{q(q-1)t}{2} + \sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) = 1.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} &\operatorname{pgcd}\left(\frac{q(q-1)t}{2} + \sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{pgcd}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) & \text{si } q \text{ ou } t \text{ est pair,} \\ \operatorname{pgcd}\left(\frac{q-1}{2} + \sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous introduisons en conséquence les ensembles

$$F_{q,r,0} = \left\{(v_0, \ldots, v_{q-1}) \in \{0,1\}^q \,:\, \sum_{0 \leqslant k < q} v_k = r, \operatorname{pgcd}\left(\sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) = 1\right\},$$

$$F_{q,r,1} = \left\{(v_0, \ldots, v_{q-1}) \in \{0,1\}^q \,:\, \sum_{0 \leqslant k < q} v_k = r, \operatorname{pgcd}\left(\frac{q-1}{2} + \sum_{1 \leqslant k < q} k v_k, q-1\right) = 1\right\}.$$

Posons à présent pour $t \geqslant 0$, $1 \leqslant r \leqslant q$ et $q^{qt+r-1} \leqslant x \leqslant q^{qt+r}$,

$$V_{t,r}(x) = \operatorname{card}\{q^{qt+r-1} \leqslant p < x \,:\, p \in \mathcal{E}_q\},$$

et notons ℓ l'unique élément de $\{0,1\}$ tel que $qt \equiv \ell \bmod 2$. L'ensemble $V_{t,r}(x)$ contient au plus un nombre premier équilibré tel que

$$\operatorname{pgcd}\left(\frac{q(q-1)t}{2} + \sum_{1\leqslant k<q} kv_k, q-1\right) > 1.$$

D'après l'équivalence (29), on a pour tout $t \geqslant 1$ et $q^{qt+r-1} \leqslant x \leqslant q^{qt+r}$,

$$\begin{aligned}
&V_{t,r}(x)\\
&= \sum_{(v_0,\dots,v_{q-1})\in F_{q,r,\ell}} \sum_{\substack{q^{qt+r-1}\leqslant p<x\\ \forall k\geqslant 0, |p|_k=t+v_k}} 1 + O(1)\\
&= \sum_{(v_0,\dots,v_{q-1})\in F_{q,r,\ell}} \sum_{\substack{q^{qt+r-1}\leqslant p<x\\ \forall k\geqslant 1, |p|_k=t+v_k}} 1 + O(1)\\
&= \sum_{(v_0,\dots,v_{q-1})\in F_{q,r,\ell}} \sum_{\substack{p<x\\ \forall k\geqslant 1, |p|_k=t+v_k}} 1 - \sum_{(v_0,\dots,v_{q-1})\in F_{q,r,\ell}} \sum_{\substack{p<q^{qt+r-1}\\ \forall k\geqslant 1, |p|_k=t+v_k}} 1 + O(1).
\end{aligned}$$

On applique alors le théorème 2.3 et le théorème des nombres premiers en progression arithmétique sous la forme $\pi(x;a,m) = \frac{x}{\varphi(m)\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$. On obtient

$$V_{t,r}(x) = C_q \operatorname{card}(F_{q,r,\ell}) \cdot \frac{x-q^{qt+r-1}}{(qt)^{(q+1)/2}}\left(1+O((qt)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\right), \tag{30}$$

avec

$$C_q = \frac{q-1}{\varphi(q-1)\log q}\cdot\frac{q^{q/2}}{(2\pi)^{(q-1)/2)}}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.6. Pour $x \geqslant 1$, nous introduisons les uniques nombres entiers T et R tels que $T \geqslant 0$, $1 \leqslant R \leqslant q$ et

$$q^{qT+R-1} \leqslant x < q^{qT+R}.$$

On a

$$N_q(x) := N_q^{(1)}(x) + N_q^{(2)}(x) + N_q^{(3)}(x)$$

avec

$$N_q^{(1)}(x) = \sum_{\substack{p<q^{qT}\\ p\in\mathcal{E}_q}} 1, \quad N_q^{(2)}(x) = \sum_{\substack{q^{qT}\leqslant p<q^{qT+R-1}\\ p\in\mathcal{E}_q}} 1 \text{ et } N_q^{(3)}(x) = \sum_{\substack{q^{qT+R-1}\leqslant p\leqslant x\\ p\in\mathcal{E}_q}} 1.$$

Premier cas : q est pair. Posons $y = \frac{1}{q}\log_q x$. On a

$$T = \lfloor y\rfloor \quad \text{et} \quad R = \lfloor q\{y\}\rfloor + 1. \tag{31}$$

On peut supposer $x \geqslant q^{2q}$ et donc $T \geqslant 2$. D'après (30), on a

$$\begin{aligned} N_q^{(1)}(x) &= \sum_{0\leqslant t<T} \sum_{1\leqslant r\leqslant q} V_{t,r}(q^{qt+r}) \\ &= (q-1)C_q \sum_{1\leqslant r\leqslant q} \frac{q^{r-1}}{q^{(q+1)/2}} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \\ &\quad \cdot \sum_{1\leqslant t<T} \frac{q^{qt}}{t^{(q+1)/2}} \Big(1 + O((qt)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\Big) + O\left(\log(x)\right). \end{aligned}$$

À ce stade nous utilisons l'estimation standard suivante (cf. [4] lemme 2.3 par exemple) : pour tout nombre entier $g \geqslant 2$ et tout nombre réel $\alpha \geqslant 0$, on a uniformément pour tout nombre entier $\nu \geqslant 1$,

$$\sum_{t=1}^{\nu} \frac{g^t}{t^\alpha} = \frac{g^{\nu+1}}{(g-1)\nu^\alpha} + O\left(\frac{g^\nu}{\nu^{\alpha+1}}\right).$$

On obtient alors, compte tenu du fait que $F_{q,1,0}$ est non vide,

$$\begin{aligned} &N_q^{(1)}(x) \\ &= \frac{(q-1)C_q}{q^q-1} \cdot \frac{q^{qT}}{(qT)^{(q+1)/2}} \sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \Big(1 + O((qT)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\Big) \\ &= \frac{(q-1)C_q}{q^q-1} \cdot \frac{xq^{-q\{y\}}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}} \sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \Big(1 + O((\log x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\Big). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} &N_q^{(2)}(x) \\ &= \sum_{1\leqslant r<R} V_{T,r}(q^{qT+r}) \\ &= (q-1)C_q \cdot \frac{q^{qT}}{(qT)^{(q+1)/2}} \sum_{1\leqslant r<R} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \Big(1 + O((qT)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\Big) \\ &= (q-1)C_q \cdot \frac{xq^{-q\{y\}}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}} \sum_{1\leqslant r\leqslant \lfloor q\{y\}\rfloor} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \Big(1 + O((\log x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\Big). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
N_q^{(3)}(x) &= V_{T,R}(x)\\
&= C_q \cdot \frac{x - q^{qT+R-1}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}} \operatorname{card}(F_{q,R,0}) \left(1 + O((\log x)^{-1/2+\varepsilon})\right) + O(1)\\
&= C_q \cdot \frac{x}{(\log_q x)^{(q+1)/2}} \left(1 - q^{-\{q\{y\}\}}\right) \operatorname{card}(F_{q,\lfloor q\{y\}\rfloor+1,0})\\
&\quad \cdot \left(1 + O\left((\log x)^{-1/2+\varepsilon}\right)\right) + O(1).
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien (11) avec pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q(y) = (q-1)C_q \Bigg(&\frac{1}{q^q-1} q^{-q\{y\}} \sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) + q^{-q\{y\}}\\
&\cdot \sum_{1\leqslant r\leqslant \lfloor q\{y\}\rfloor} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0})\\
&+ (q-1)^{-1} \left(1 - q^{-\{q\{y\}\}}\right) \operatorname{card}(F_{q,\lfloor q\{y\}\rfloor+1,0}) \Bigg).
\end{aligned}$$

Le fait que $F_{q,1,0}$ est non vide entraîne que la fonction Q est strictement positive. Elle est également non constante. En effet, pour $q \geqslant 4$, on remarque que $F_{q,q,0}$ est vide et donc que pour $\frac{q-1}{q} < y < 1$, on a

$$Q(y) = q^{-qy}(q-1)C_q \left(\frac{1}{q^q-1} \sum_{1\leqslant r<q} q^{r-1} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) + \sum_{1\leqslant r<q} q^{r} \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \right).$$

Pour $q = 2$, compte-tenu du fait que $\operatorname{card}(F_{2,1,0}) = 2$ et $\operatorname{card}(F_{2,2,0}) = 1$, on constate que pour $1/2 < y < 1$,

$$Q(y) = C_2 \left(1 + \tfrac{4}{3} \cdot 2^{-2y}\right).$$

Deuxième cas : q est impair. Dans ce cas le calcul fait intervenir la parité de T, aussi introduisons-nous les uniques nombres entiers $T' \geqslant 0$ et $L \in \{0,1\}$ tels que $T = 2T' + L$. On a alors, en posant $z = \frac{1}{2q} \log_q x$,

$$T' = \lfloor z \rfloor, \quad L = \lfloor 2\{z\} \rfloor \quad \text{et} \quad R = \lfloor q\{2z\} \rfloor + 1.$$

En distinguant les cas $L=0$ et $L=1$, on obtient pour $x \geqslant q^{2q}$,

$$\begin{aligned}
N_q^{(1)}(x) &= \sum_{1\leqslant t<2T'+L}\ \sum_{1\leqslant r\leqslant q} V_{t,r}(q^{qt+r}) + O(1)\\
&= \frac{(q-1)C_q}{q^{2q}-1}\cdot\frac{xq^{-q\{2z\}}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}}\\
&\quad\cdot\left(\sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^{r-1}\operatorname{card}(F_{q,r,L}) + q^q\sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^{r-1}\operatorname{card}(F_{q,r,1-L})\right)\\
&\quad\cdot\Big(1+O((\log x)^{-1/2+\varepsilon})\Big).
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
N_q^{(2)}(x) &= \sum_{1\leqslant r<R} V_{2T'+L,r}(q^{(2T'+L+r})\\
&= (q-1)C_q\cdot\frac{xq^{-q\{2z\}}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}}\\
&\quad\cdot\sum_{1\leqslant r<R} q^{r-1}\operatorname{card}(F_{q,r,L})\Big(1+O\Big((\log x)^{-1/2+\varepsilon}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}
N_q^{(3)}(x) &= C_q\cdot\frac{x-q^{(2T'+L)q+R}}{(\log_q x)^{(q+1)/2}}\operatorname{card}(F_{q,R,L})\Big(1+O((\log x)^{-1/2+\varepsilon})\Big)+O(1)\\
&= C_q\cdot\frac{x(1-q^{-\{q\{2z\}\}})}{(\log_q x)^{(q+1)/2}}\operatorname{card}(F_{q,R,L})\Big(1+O((\log x)^{-1/2+\varepsilon})\Big)+O(1).
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien (11) avec cette fois pour $y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q(y) = (q-1)C_q &\left(\frac{q^{-q\{y\}}}{q^{2q}-1}\left(\sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^r\operatorname{card}(F_{q,r,\lfloor 2\{y/2\}\rfloor})\right.\right.\\
&\left.+q^q\sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^r\operatorname{card}(F_{q,r,1-\lfloor 2\{y/2\}\rfloor})\right)\\
&+q^{-q\{y\}}\sum_{1\leqslant r\leqslant\lfloor q\{y\}\rfloor} q^r\operatorname{card}(F_{q,r,\lfloor 2\{y/2\}\rfloor})\\
&\left.+(q-1)^{-1}(1-q^{-\{q\{y\}\}})\operatorname{card}(F_{q,\lfloor q\{y\}\rfloor+1,\lfloor 2\{y/2\}\rfloor})\right).
\end{aligned}$$

Là encore, la fonction Q est strictement positive car $F_{q,1,0}$ est non vide. Par ailleurs, comme $F_{q,q,1}$ est vide pour $q \geqslant 3$, on a pour $(q-1)/q < y < 1$,

$$Q(y) = K_q\, q^{-qy},$$

avec

$$K_q = C_q \left(\frac{1}{q^{2q}-1} \left(\sum_{1\leqslant r\leqslant q} q^r \operatorname{card}(F_{q,r,0}) + q^q \sum_{1\leqslant r<q} q^r \operatorname{card}(F_{q,r,1}) \right) + \sum_{1\leqslant r<q} q^r \operatorname{card}(F_{q,r,0}) \right) > 0.$$

En conséquence, Q n'est pas constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Drmota – « Uniform distribution and quasi-monte carlo methods », Radon Ser. Comput. Appl. Math., no. 15, ch. Subsequences of automatic sequences and uniform distribution, p. 87–104, De Gruyter, 2014.

[2] M. Drmota & C. Mauduit – « Weyl sums over integers with affine digit restrictions », *J. Number Theory* **130** (2010), no. 11, p. 2404–2427.

[3] M. Drmota, C. Mauduit & J. Rivat – « Primes with an average sum of digits », *Compositio* **145** (2009), no. 2, p. 271–292.

[4] E. Fouvry & C. Mauduit – « Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne », *J. Number Theory* **114** (2005), no. 1, p. 135–152.

[5] A. O. Gelfond – « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données », *Acta Arith.* **13** (1968), no. 1967, p. 259–265.

[6] G. Hanna – « Sur les occurrences des mots dans les nombres premiers », *Acta Arith.* **178** (2017), no. 1, p. 15–42.

[7] L. Kuipers & H. Niederreiter – *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 1974.

[8] B. Martin, C. Mauduit & J. Rivat – « Propriétés locales des chiffres des nombres premiers, *à paraître dans* », *J. Instit. Math. Jussieu.*

[9] ______, « Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales », *Acta Arith.* **165** (2014), no. 1, p. 11–45.

[10] ______, « Fonctions digitales le long des nombres premiers », *Acta. Arith.* **170** (2015), no. 2, p. 175–197.

[11] C. Mauduit – « Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis », *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), no. 7, p. 2525–2549.

[12] C. Mauduit & J. Rivat – « Prime numbers along rudin-shapiro sequences », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015), no. 10, p. 2595–2642.

[13] C. Mauduit & A. Sárközy – « On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed », *Acta Arithmetica* **81** (1997), p. 145–173.
[14] C. Müllner – « Automatic sequences fulfill the sarnak conjecture », *Duke. Math. J.* **166** (2017), no. 17, p. 3219–3290.
[15] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3e éd., Belin, 2008.
[16] A. Zee – *Quantum field theory in a nutshell*, éd. second éd., Princeton University Press, 2010.