

SUR CERTAINS ESPACES DE CONFIGURATION ASSOCIÉS AUX SOUS-GROUPES FINIS DE $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

PAR MOHAMAD MAASSARANI

RÉSUMÉ. — On étudie des espaces de configuration $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ liés à l'action d'un groupe fini d'homographies G de \mathbb{P}^1 ($n \in \mathbb{N}^*$). On construit une connexion plate sur cet espace à valeurs dans une algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$. On établit un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées entre $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$, l'algèbre de Lie de Malcev du groupe fondamental de cet espace et le complété pour le degré du gradué associé à cette algèbre de Lie. Ceci est obtenu grâce à la représentation de monodromie d'une connexion et une étude du groupe fondamental.

ABSTRACT (*On orbit configuration spaces associated to finite subgroups of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.*)
— We study the configuration spaces $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ related to the action of a finite group of homographies G of \mathbb{P}^1 ($n \in \mathbb{N}^*$). We construct a flat connexion on this space with values in a Lie algebra $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$. We prove the existence of an isomorphism of filtered Lie algebras between $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$ and the Lie algebra of Malcev of the fundamental group of this space. These results are obtained thanks to the monodromy representation of a connexion and a study of the fundamental group.

Texte reçu le 2 novembre 2016, modifié le 20 juillet 2017, accepté le 12 octobre 2017.

MOHAMAD MAASSARANI, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France • E-mail : Mohamad_maassarani1989@hotmail.com • Url : <https://irma.math.unistra.fr/php/home.php?qui=maassarani>

Classification mathématique par sujets (2010). — 55R80, 20F40, 35R11, 14F35, 20F36, 55P62, 32G34.

Mots clefs. — Espaces de configuration tordus, relations entre tresses, connexions de type Knizhnik-Zamolodchikov, algèbres de Lie de Malcev, 1-formalité.

Introduction

L'un des invariants associés à un espace topologique X en homotopie rationnelle est son modèle minimal. Le calcul du modèle minimal de X , plus précisément du 1-modèle minimal, permet d'obtenir l'algèbre de Lie de Malcev de $\pi_1(X)$, le groupe fondamental de X , par un processus de dualisation. Dans [10], Fulton et MacPherson calculent explicitement des modèles des espaces de configuration $\mathrm{Cf}_n(X) = \{(p_1, \dots, p_n) \in X^n | p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j\}$, pour X une variété projective complexe lisse. Ces modèles sont ensuite simplifiés dans [13], puis utilisés par Bezrukavnikov ([2]) qui obtient une présentation de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\pi_1(\mathrm{Cf}_n(S)))$ de Malcev de $\pi_1(\mathrm{Cf}_n(S))$ pour S une surface de genre supérieur à un.

Une approche alternative, motivée par [6], repose sur l'utilisation de connexions plates et d'informations sur le groupe fondamental. En utilisant cette approche, différents résultats sont obtenus :

1. calcul de l'algèbre de Lie de Malcev de $\mathrm{Cf}_n(S)$ pour S de genre $g(S) = 1$ ([3]) puis en genre $g(S) > 1$ ([9]) ; ce qui donne une autre démonstration aux présentations obtenues par Bezrukavnikov.
2. calcul de l'algèbre de Lie de Malcev d'"espaces de configuration d'orbites", au sens de [5], pour les groupes des racines de l'unité opérant sur \mathbb{C}^\times ([7]).

Dans ce papier, on considère plus généralement G un groupe fini d'homographies agissant sur la droite projective complexe \mathbb{P}^1 (vue comme variété analytique) et l'espace associé :

$$\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*) = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^1_*)^n | p_i \neq g \cdot p_j \text{ pour } i \neq j \text{ et } g \in G\},$$

dans lequel \mathbb{P}^1_* est l'ensemble des points de \mathbb{P}^1 à stabilisateur trivial pour G . En utilisant la méthode des connexions plates, on calcule une présentation de l'algèbre de Lie de Malcev de $\pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*))$ et on montre (théorème 6.8) que cette algèbre de Lie est isomorphe à la complétion pour le degré de son gradué associé qui coïncide avec une algèbre de Lie explicite $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)$ (définition 1.2). On obtient par ailleurs la 1-formalité de $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$.

Détaillons les étapes permettant d'obtenir ce résultat. Dans la première section, on définit une algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$, puis on construit une connexion plate sur $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ à valeurs dans $\mathfrak{p}_n(G)$. Cette connexion nous donne une représentation de monodromie $\rho_{\tilde{q}} : \pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{Up}_n(G)(\mathbb{C}))$, où \mathcal{G} est le foncteur qui à une algèbre de Hopf associe le groupe de ses éléments diagonaux.

On rappelle en section 2 quelques notions de topologie différentielle qui seront utilisées dans la section 3, laquelle est consacrée à l'étude du groupe fondamental d'un espace de configuration d'orbites associé à une surface munie d'une action d'un groupe fini. Dans cette section, on donne notamment une famille génératrice de $\Gamma_n := \pi_1(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*))$ et des relations entre ces éléments de Γ_n .

La quatrième section est consacrée à des rappels de notions liées aux algèbres de Lie de Malcev et aux algèbres de Hopf complètes.

Dans la section 5, on utilise le morphisme de monodromie de la section 1 pour construire un morphisme $L_{2i\pi,\rho}$ de l’algèbre de Lie de Malcev $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ de Γ_n sur \mathbb{C} dans $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$. D’autre part, on obtient grâce aux générateurs et relations de Γ_n un morphisme $\phi_{\mathbb{C}} : \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C}) \rightarrow \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, où l’espace d’arrivée est le complété pour le degré du gradué associé de $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$. En examinant la composée de $L_{2i\pi,\rho}$ avec $\phi_{\mathbb{C}}$, on conclut que les trois algèbres de Lie $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$ sont isomorphes en tant qu’algèbres de Lie filtrées.

Enfin, la dernière section, on construit des torseurs dont la composée $\phi_{\mathbb{C}} \circ L_{2i\pi,\rho}$ de la section 5 est un point complexe. Ensuite, on utilise un résultat sur l’existence de points rationnels de ces torseurs pour déduire que $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$, $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q})$ sont isomorphes comme algèbres de Lie filtrées.

Notons que la 1-formalité des espaces $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ est également une conséquence du résultat principal de [12], et dans le cas où G est un groupe de racines de l’unité, une présentation de l’algèbre d’holonomie peut également être déduite de ce résultat.

1. Connexion sur l’espace de configuration $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ et représentation de monodromie.

Dans cette section, on considère une action d’un groupe fini G sur \mathbb{P}^1 (section 1.1). On lui associe un espace de configuration $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ (section 4) et une algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$ (section 1.2). Après des rappels sur les connexions formelles (section 1.3), on définit une telle structure sur $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ associée à l’algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$ (section 1.4) et on montre sa platitude (section 1.5). On calcule alors les termes de bas degré de la représentation de monodromie associée (section 1.6).

1.1. Le groupe G opérant sur \mathbb{P}^1 .

1.1.1. *Action de G sur \mathbb{P}^1 .* — On a la suite de morphismes de groupes suivante :

$$\text{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \text{PSU}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$$

Par ailleurs, on a une action $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ par homographies et une action $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(S^2)$ par rotations. Enfin, il existe un identification $\mathbb{P}^1 \simeq S^2$ compatible aux actions. L’action de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sur S^2 commute à l’antipode. De façon analogue, l’action de $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ sur \mathbb{P}^1 commute à l’involution $z \mapsto \text{at}(z) := \frac{-1}{\bar{z}}$. Dans la suite, on fixe un sous-groupe fini G de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Le groupe G est conjugué dans $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ à un sous-groupe fini de $\text{PSU}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})$. On

sait donc que G est soit cyclique ou diédral, soit isomorphe à un des groupes d'isométries des solides platoniciens \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_5 .

1.1.2. Points fixes et stabilisateurs. — On note \mathbb{P}_*^1 l'ensemble des points de \mathbb{P}^1 à stabilisateur trivial pour G .

PROPOSITION 1.1. — Pour tout $g \in G$ et $p \in \mathbb{P}^1$, on pose $\text{Fix}(g) = \{q \in \mathbb{P}^1 \mid g \cdot q = q\}$ et on note $\text{stab}(p)$ le stabilisateur de p pour l'action de G sur \mathbb{P}^1 . Alors :

1. L'application at se restreint en une involution de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$. Pour tout $g \neq 1$, $\text{Fix}(g)$ est de la forme $\{p, \text{at}(p)\}$ avec $p \neq \text{at}(p)$.
2. Il existe un sous-ensemble fini Z de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$ satisfaisant $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1 = Z \sqcup \text{at}(Z)$ et $G \setminus \{1\} = \bigsqcup_{p \in Z} (\text{stab}(p) \setminus \{1\})$.

Démonstration. — Il suffit de montrer la proposition pour G un groupe fini de rotations de la sphère. Dans ce cadre, l'application at n'est autre que l'antipode de S^2 . Ce qui montre (1). L'existence d'un Z fini satisfaisant $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1 = Z \sqcup \text{at}(Z)$ est immédiate à partir de (1). Un tel ensemble satisfait automatiquement la dernière condition de (2). En effet, si l'intersection $\text{stab}(p) \cap \text{stab}(q)$ pour $p \neq q$ est différente de $\{1\}$, alors (1) nous mène à la contradiction $q \in \{p, \text{at}(p)\}$. Ce qui montre la proposition. \square

1.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$. — Soit n un entier strictement positif et \mathbb{k} un corps. On note $\mathcal{O}(p)$ l'orbite pour G d'un point $p \in \mathbb{P}^1$.

DÉFINITION 1.2. — On définit $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ comme la \mathbb{k} -algèbre de Lie engendrée par les éléments $X_{ij}(g)$, pour $i \neq j \in [1, n]$ et $g \in G$, les $X_i(q)$ pour $i \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$, soumis aux relations :

$$(1) \quad X_{ij}(g) = X_{ji}(g^{-1}), \text{ pour } i, j \in [1, n] \text{ distincts et } g \in G,$$

$$(2) \quad \sum_{q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} X_i(q) + \sum_{\substack{m \in [1, n] \\ m \neq i}} \sum_{g \in G} X_{im}(g) = 0, \text{ pour } i \in [1, n],$$

$$(3) \quad [X_{ij}(g), X_{kl}(g')] = 0, \text{ pour } i, j, k, l \in [1, n] \text{ distincts et } g, g' \in G,$$

$$\begin{aligned} & [X_{ij}(g), X_{kj}(g'g) + X_{ki}(g')] = [X_i(p), X_{jk}(g')] = 0, \\ & \text{pour } i, j, k \in [1, n] \text{ distincts,} \end{aligned}$$

$$(4) \quad p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1 \text{ et } g, g' \in G,$$

$$(5) \quad [X_i(p), X_j(q)] = 0,$$

$$(6) \quad \left[X_{ij}(g), X_j(p) + X_i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X_{ij}(gh) \right] = 0,$$

$$(7) \quad \left[X_j(p), X_i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X_{ij}(gh) \right] = 0,$$

pour $i, j \in [1, n]$ distincts, $g \in G$, $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$ et $q \in (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1) \setminus \mathcal{O}(p)$.

L'algèbre $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ est munie d'une graduation pour laquelle chaque générateur $X_{ij}(g)$ et $X_i(q)$ est de degré 1. On a :

$$\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k}) = \bigoplus_{k>0} \mathfrak{p}_n^k(G)(\mathbb{k}),$$

où $\mathfrak{p}_n^k(G)(\mathbb{k})$ est la composante homogène de degré k . On note $\hat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{k})$ la complétion de $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ pour le degré.

D'autre part, l'algèbre enveloppante $\text{Up}_n(G)(\mathbb{k})$ de $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$, hérite de $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ une structure d'algèbre graduée pour le degré. On note $\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{k})$ la complétion de cette algèbre enveloppante pour le degré. L'algèbre $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ étant engendrée en degré un, la complétion de $\text{Up}_n(G)(\mathbb{k})$ pour le degré et la complétion pour les puissances de l'idéal d'augmentation coïncident. Enfin, $\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{k})$ est une algèbre de Hopf complète.

Dans la suite on omettra dans les notations G ou \mathbb{k} , si le contexte est clair.

REMARQUE 1.3. — Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n et le groupe G^n agissent sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_n(G)$. Ces actions sont définies par :

$$\begin{aligned} \underline{g} \cdot X_{ij}(h) &= X_{ij}(g_i h g_j^{-1}), & \underline{g} \cdot X_i(q) &= X_i(g_i \cdot q), \\ \sigma \cdot X_{ij}(h) &= X_{\sigma(i)\sigma(j)}(h), & \sigma \cdot X_i(q) &= X_{\sigma(i)}(q), \end{aligned}$$

pour $\underline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1.3. Connexions formelles. — Dans cette sous-section, on passe en revue certaines notions sur les connexions formelles, leur platitude et les représentations de monodromie induites.

Soit X une variété analytique complexe et A une \mathbb{C} -algèbre complète unitaire graduée (connexe) : $A = \prod_{k \geq 0} A_k$ telle que $1 \in A_0$, $A_0 = \mathbb{C}$, $A_k \cdot A_l \subset A_{k+l}$ pour $k, l \in \mathbb{N}$ et que les composantes homogènes soient de dimension finie. L'algèbre A est supposée munie de la topologie produit. On note $\Omega^\bullet(X)$ l'algèbre des formes holomorphes sur X et $\Omega^\bullet(X) \hat{\otimes} A$ la complétion de l'algèbre $\Omega^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} A$ pour la filtration $\{\Omega^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{C}} A_{\geq k}\}_{k \geq 0}$ (on note $A_k = \prod_{n \geq k} A_n$). On notera \wedge le produit de $\Omega^\bullet(X) \hat{\otimes} A$. On se donne aussi une 1-forme holomorphe sur X à valeurs dans $A_{\geq 1}$ (i.e. un élément de $\Omega^1(X) \hat{\otimes} A_{\geq 1}$), qu'on notera ω .

DÉFINITION 1.4. — Le triplet (X, A, ω) comme ci-dessus est appelé connexion formelle sur X , à valeurs dans A . Cette connexion est dite plate si $(d \hat{\otimes} \text{id}_A)(\omega) - \omega \wedge \omega = 0$.

THÉORÈME 1.5. — Soit (V, A, Ω) une connexion formelle et v un point de V . Si cette connexion est plate et V est simplement connexe, alors l'équation :

$$(d\widehat{\otimes} \text{id}_A)F = \Omega \wedge F,$$

d'inconnue $F \in \Omega^0(V) \widehat{\otimes} A$, admet une unique solution dans $\Omega^0(V) \widehat{\otimes} A$, à condition initiale fixée ($F(v) = f \in A$). Si f est inversible dans A ($f \in A^\times$), alors F est à valeurs dans A^\times .

Démonstration. — Pour alléger les notations on remplacera $d\widehat{\otimes} \text{id}_A$ par d . La condition sur la forme Ω se traduit par :

$$d\Omega_k - \sum_{l+m=k} \Omega_l \wedge \Omega_m = 0, \text{ pour } k \geq 0,$$

où Ω_k désigne la composante homogène de degré k (selon A) de Ω . Notons F_k la composante homogène de F de degré k . L'existence d'une solution de l'équation $dF = \Omega \wedge F$, est équivalente à l'existence de composantes homogènes F_k tels que :

$$dF_k = \sum_{l+m=k} \Omega_l \wedge F_m, \quad F_k(v) = f_k. \quad (A)$$

On va montrer l'existence de ces composantes par récurrence. Au rang zéro, F_0 est solution de $dF_0 = 0$, comme Ω est à valeurs dans $A_{\geq 1}$, et donc F_0 est une constante. Supposons les composantes jusqu'au rang $k-1$ construites. Calculons la différentielle, qui ne dépend pas de F_k (comme $\Omega_0 = 0$), de la forme $\sum_{l+m=k} \Omega_l \wedge F_m$:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{l+m=k} \Omega_l \wedge F_m\right) &= \sum_{0 \leq m \leq k} ((d\Omega_m) \wedge F_{k-m} - \Omega_m \wedge dF_{k-m}) \\ &= \sum_{0 \leq m \leq k} (d\Omega_m) \wedge F_{k-m} \\ &\quad - \sum_{0 \leq m \leq k} \Omega_m \wedge \sum_{0 \leq l \leq k-m} \Omega_l \wedge F_{k-m-l} \\ &= \sum_{0 \leq s \leq k} \left(d\Omega_s - \sum_{l+m=s} \Omega_m \wedge \Omega_l\right) \wedge F_{k-s} = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière forme est donc fermée et donc exacte d'après le théorème de De Rham, comme V est simplement connexe (on utilise que les composantes homogènes sont de dimension finie). D'où, l'existence et l'unicité d'une solution F_k de (A) . On vérifie que F_k satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. Cela montre l'existence et l'unicité de solutions dans $\Omega^0(V) \widehat{\otimes} A$. Le début de la récurrence montre que la composante de degré 0 de F est une constante égale à la composante du même degré de la condition initiale f et donc F est inversible si et seulement si la condition initiale l'est, ce qui montre le théorème. \square

Dans la suite de cette sous-section, on se donne une connexion plate (X, A, ω) comme dans la définition 1.4. On note $r : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X .

La connexion $(\tilde{X}, A, r^*(\omega))$ est une connexion plate sur un espace simplement connexe. On est dans le cadre du théorème 1.5. Étant donné un point x_0 de \tilde{X} , l'équation $dF = r^*(\omega) \wedge F$, $F(x_0) = 1$ admet une unique solution qu'on notera $F(x, x_0)$. Comme la condition initiale est égale à 1 la solution $F(x, x_0)$ est à valeurs dans $1 + A_{\geq 1}$ (voir dernière assertion de la preuve du théorème 1.5).

Ainsi, on définit une application $\rho_{x_0} : \pi_1(X, r(x_0)) \rightarrow 1 + A_{\geq 1}$ qui à $\gamma \in \pi_1(X, r(x_0))$ associe $F(\gamma \cdot x_0, x_0)$, où γ agit via le morphisme de monodromie du revêtement.

PROPOSITION 1.6. — *Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X, r(x_0))$. On fait agir $\pi_1(X, r(x_0))$ à gauche sur \tilde{X} , via le morphisme de monodromie du revêtement. On a les égalités suivantes :*

1. $F(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = F(x, y)$.
2. $F(x, y)F(y, z) = F(x, z)$.
3. $F((\gamma_1 \gamma_2) \cdot x_0, x_0) = F(\gamma_2 \cdot x_0, x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0)$.

Démonstration. — Montrons d'abord la première égalité : tisons en arrière par γ (vu comme automorphisme du revêtement $r : \tilde{X} \rightarrow X$) l'équation satisfaite par $F(x, y \cdot \gamma)$. On obtient que $dF(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = \gamma^*(r^*(\omega))F(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y)$. Comme γ est un automorphisme de revêtement, $r \circ \gamma = r$ et donc les deux membres de (1) satisfont la même équation différentielle. D'autre part, les deux membres sont égaux pour $x = y$. L'égalité (1) est donc une conséquence de l'unicité de solutions. La deuxième égalité est vraie pour $x = y$. La différentielle, par rapport à x , du membre de gauche de (2) est : $d(F(x, y)F(y, z)) = (r^*(\omega)F(x, y))F(y, z)$. Par conséquent, les deux membres de (2) vérifient la même équation différentielle. Comme pour (1), l'unicité de la solution donne (2). Le troisième point est obtenu en utilisant les deux premiers :

$$F((\gamma_1 \gamma_2) \cdot x_0, x_0) = F((\gamma_1 \gamma_2) \cdot x_0, \gamma_1 \cdot x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0) = F(\gamma_2 \cdot x_0, x_0)F(\gamma_1 \cdot x_0, x_0),$$

ce qui montre (3) et achève donc la démonstration de la proposition. \square

Cette proposition nous permet d'affirmer que si la connexion considérée est plate alors l'application ρ_{x_0} associée induit un antimorphisme de groupe de $\pi_1(X, r(x_0))$ dans $1 + A_{\geq 1}$. On dira que ρ_{x_0} est la représentation de monodromie associée à la connexion en question en x_0 .

On termine cette sous-section par un résultat dans le cas où A est une algèbre de Hopf complète de coproduit noté Δ . On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des primitifs de A et $\mathcal{G}(A) = \{a \in A \mid \Delta(a) = a \hat{\otimes} a, a \in A^\times\}$ l'ensemble des éléments diagonaux.

THÉORÈME 1.7. — Soit (V, A, ω) une connexion formelle, où V est simplement connexe. Supposons de plus que A est une algèbre de Hopf complète, que ω est à valeurs dans $\mathcal{P}(A)$ et que la condition initiale de l'équation $(d\widehat{\otimes} \text{id}_A)F = \Omega \wedge F$ est dans $\mathcal{G}(A)$. Alors la solution F du théorème 1.5 est à valeurs dans $\mathcal{G}(A)$.

Démonstration. — On rappelle que \wedge est le produit de l'algèbre $\Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes} A$, on notera \cdot le produit de l'algèbre $\Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes} A\widehat{\otimes} A$. En utilisant la multiplicativité de Δ on obtient :

$$\begin{aligned} [(d\widehat{\otimes} \text{id}_{A\widehat{\otimes} A}) \circ (\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta)](F) &= [(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta) \circ (d\widehat{\otimes} \text{id}_{A\widehat{\otimes} A})](F) \\ &= [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta](\omega \wedge F) \\ &= [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta](\omega) \cdot [\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta](F). \end{aligned}$$

Pour $S \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes} A$ on note S^{12} l'image de S par l'application qui associe à $a\widehat{\otimes} b \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes} A$ l'élément $a\widehat{\otimes} b\widehat{\otimes} 1 \in \Omega^\bullet(V)\widehat{\otimes} A\widehat{\otimes} A$. De même, on définit S^{13} comme l'image de S par $a\widehat{\otimes} b \mapsto a\widehat{\otimes} 1\widehat{\otimes} b$.

Calculons la "différentielle" de $F^{12} \cdot F^{13}$:

$$\begin{aligned} (d\widehat{\otimes} \text{id}_{A\widehat{\otimes} A})(F^{12} \cdot F^{13}) &= [(d\widehat{\otimes} \text{id}_{A\widehat{\otimes} A})(F^{12})] \cdot F^{13} + F^{13} \cdot [(d\widehat{\otimes} \text{id}_{A\widehat{\otimes} A})(F^{12})] \\ &= (\omega \wedge F)^{12} \cdot F^{13} + F^{12} \cdot (\omega \wedge F)^{13} \\ &= \omega^{12} \cdot F^{12} \cdot F^{13} + \omega^{13} \cdot F^{12} \cdot F^{13}, \\ &= \text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta(\omega) \cdot (F^{12} \cdot F^{13}), \end{aligned}$$

car $[\Omega^0(V), \Omega^\bullet(V)] = 0$ et $\omega \in \Omega^\bullet(V) \otimes \mathcal{P}(A)$. Ces calculs montrent que $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta)(F)$ et $F^{12} \cdot F^{13}$ vérifient une même équation différentielle. Or, on suppose que la condition initiale de l'équation $(d\widehat{\otimes} \text{id}_A)F = \Omega \wedge F$ est de type groupe. Donc, $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta)(F)$ et $F^{12} \cdot F^{13}$ coïncident au point où on fixe la condition initiale. Le théorème 1.5 nous dit que $(\text{id}_{\Omega^\bullet(V)}\widehat{\otimes} \Delta)(F) = F^{12} \cdot F^{13}$. Donc, la solution F est à valeurs dans $\mathcal{G}(A)$ (F est aussi inversible). \square

Ainsi, si A est une algèbre de Hopf complète et ω est plate et à valeurs dans $\mathcal{P}(A)$, alors la représentation de monodromie associée est à valeurs dans $\mathcal{G}(A)$.

1.4. Connexion sur l'espace de configuration $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$. — On a une action de G sur \mathbb{P}^1 . En considérant cette action on définit l'espace de configuration $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1) = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}_*^1)^n | p_i \neq gp_j; i \neq j, g \in G\}$. On va construire une connexion formelle sur l'espace $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$, à valeurs dans l'algèbre $\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$.

DÉFINITION-PROPOSITION 1.8. — Il existe une unique 1-forme holomorphe sur $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$ à valeurs dans $\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$, qu'on notera ω , dont la restriction

à $U := (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})^n \cap \mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$ est donnée par :

$$(8) \quad \omega|_U = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} d \log(z_i - p) \hat{\otimes} X_i(p) + \sum_{i \neq j \in [1, n]} \sum_{g \in G} d_{z_i} \log(z_i - g \cdot z_j) \hat{\otimes} X_{ij}(g),$$

où l'on pose $d \log(z - \infty) = 0$.

Démonstration. — Pour $n \geq 2$, on fixe σ une permutation sans aucun point fixe de \mathfrak{S}_n . En utilisant la relation (2) de la définition 1.2, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \omega|_U &= \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} d \log \left(\frac{z_i - p}{z_i - z_{\sigma(i)}} \right) \hat{\otimes} X_i(p) \\ &\quad + \sum_{i \neq j \in [1, n]} \sum_{g \in G} d_{z_i} \log \left(\frac{z_i - g \cdot z_j}{z_i - z_{\sigma(i)}} \right) \hat{\otimes} X_{ij}(g). \end{aligned}$$

Or, toutes les 1-formes apparaissant dans cette écriture sont holomorphes sur $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$. Ce qui montre que $\omega|_U$ est holomorphe pour $n \geq 2$. Supposons que $n = 1$. Si $G = \{1\}$, la forme $\omega|_U$ est triviale et donc holomorphe. Sinon le cardinal de $\mathbb{P}^1 \setminus (\mathbb{P}_*^1 \cup \{\infty\})$ est supérieur ou égal à deux (voir proposition 1.1) et pour $q \in \mathbb{P}^1 \setminus (\mathbb{P}_*^1 \cup \{\infty\})$:

$$\omega|_U = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus (\mathbb{P}_*^1 \cup \{q\})} d \log \left(\frac{z_1 - p}{z_1 - q} \right) \hat{\otimes} X_1(p),$$

avec la convention $d \log(\frac{z_1 - \infty}{z_1 - q}) = -d \log(z_1 - q)$ (on utilise la relation (2) de la définition 1.2). Les formes $\log(\frac{z_1 - p}{z_1 - q})$ étant holomorphes sur \mathbb{P}_*^1 , la 1-forme $\omega|_U$ est holomorphe sur $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1) = \mathbb{P}_*^1$. Ce qui montre la proposition. \square

Notons que ω est à valeurs dans l'ensemble des primitifs de $\widehat{\mathrm{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$. Enfin, le triplet $(\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1), \widehat{\mathrm{Up}}_n(G)(\mathbb{C}), \omega)$ est une connexion formelle, au sens de la sous-section 1.3.

1.5. Platitude de la connexion. — Dans cette sous-section on montre que la connexion ω de la définition 1.8 est plate.

LEMME 1.9. — 1. Soit h un élément de G , on a l'égalité suivante entre formes méromorphes sur \mathbb{C}^3 :

$$\begin{aligned} \frac{dx \wedge dy}{(x - z)(y - h \cdot x)} &= \frac{dx \wedge dy}{(x - z)(y - hz)} - \frac{dx \wedge dy}{(x - h^{-1} \cdot y)(y - h \cdot z)} \\ &\quad + \frac{dx}{x - h^{-1} \cdot y} \wedge \omega_h(y), \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega_h(y) = \begin{cases} d_y \log(y - h \cdot \infty) & \text{si } h \cdot \infty \neq \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{P}^1$ et supposons que $h \in \text{stab}(p) \setminus \{1\}$. On a l'égalité suivante entre formes méromorphes sur \mathbb{C} :

$$\frac{dz}{z - h \cdot z} + \frac{dz}{z - h^{-1} \cdot z} = \frac{dz}{z - p} + \frac{dz}{z - \text{at}(p)},$$

où at est l'involution de la proposition 1.1 et l'on pose $\frac{1}{z-\infty} = 0$.

Démonstration. — Notons d'abord que si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, alors :

$$S \cdot \alpha - S \cdot \beta = \frac{(\alpha - \beta)\det(S)}{P_S(\alpha)P_S(\beta)}, \quad (A_S)$$

où $S \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ et $P_S(z) = cz + d$.

Montrons la première égalité. Pour y et z génériques, la fraction

$$F(x) = \frac{1}{(x-z)(y-h \cdot x)}$$

admet exactement deux pôles simples (selon x) : $x = z$ et $x = h^{-1} \cdot y$. Par conséquent :

$$F(x) = \frac{A}{(x-z)} + \frac{B}{(x-h^{-1} \cdot y)}, \quad \text{avec}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow z} (x-z)F(x) \quad \text{et} \quad B = \lim_{x \rightarrow h^{-1} \cdot y} (x-h^{-1} \cdot y)F(x).$$

On vérifie que :

$$A = \frac{1}{(z-h^{-1} \cdot y)} \quad \text{et} \quad B = -\frac{(h^{-1})'(y)}{h^{-1} \cdot y - z},$$

où $(h^{-1})'$ est la dérivée de h^{-1} . Ce qui donne l'égalité :

$$\frac{dx \wedge dy}{(x-z)(y-h \cdot x)} = \frac{dx \wedge dy}{(x-z)(y-h \cdot z)} - \frac{dx \wedge d(h^{-1} \cdot y)}{(x-h^{-1} \cdot y)(h^{-1} \cdot y - z)}. \quad (E_1)$$

D'autre part, en utilisant (A_S) pour $S = h^{-1}$, $\alpha = y$, $\beta = h \cdot z$, on obtient :

$$h^{-1} \cdot y - z = \frac{(y-h \cdot z)\det(h^{-1})}{P_{h^{-1}}(y)P_{h^{-1}}(h \cdot z)},$$

puis en appliquant $d_y \log$ aux deux membres de l'égalité, on trouve :

$$d_y \log(h^{-1} \cdot y - z) = d_y \log(y - h \cdot z) - d_y \log(P_{h^{-1}}(y)). \quad (E_2)$$

Comme

$$\frac{d(h^{-1} \cdot y)}{h^{-1} \cdot y - z} = d_y \log(h^{-1} \cdot y - z) \quad \text{et} \quad d_y \log(P_{h^{-1}}(y))$$

n'est autre que la forme $\omega_h(y)$ de l'énoncé, les équations (E_1) et (E_2) montrent (1).

Montrons (2). On a vu (proposition 1.1) que $|\text{Fix}(h)| = 2$. Posons $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et $\text{Fix}(h) = \{p, \text{at}(p)\}$. On distingue deux cas :

Si $\infty \notin \text{Fix}(h)$, on a $c \neq 0$ et $p, \text{at}(p)$ sont deux solutions distinctes de $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On en déduit que $p + \text{at}(p) = \frac{a-d}{c}$ et que $p \cdot \text{at}(p) = \frac{-b}{c}$. Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{z-p} + \frac{1}{z-\text{at}(p)} = \frac{2z - (p + \text{at}(p))}{(z-p)(z-\text{at}(p))} = \frac{2cz + d - a}{cz^2 + (d-a)z - b}.$$

En développant $\frac{1}{z-h \cdot z} + \frac{1}{z-h^{-1} \cdot z}$ avec $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, on trouve (2) pour $\infty \notin \text{Fix}(h)$.

Si $\infty \in \text{Fix}(h)$, h est de la forme $h(z) = ez + f$ avec $e \neq 1$. Un calcul immédiat donne l'égalité souhaitée. Ce qui montre le lemme. \square

Montrons la platitude de la connexion :

PROPOSITION 1.10. — *La connexion formelle $(\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1), \omega)$ est une connexion plate. La 1-forme ω vérifie : $(d \otimes \text{id}_{\widehat{\text{Up}}_n})\omega = \omega \wedge \omega = 0$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer ces égalités sur $U = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})^n \cap \text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$. Les calculs seront effectués dans $\mathcal{M}(U) \widehat{\otimes} \widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$, où $\mathcal{M}(U)$ est l'algèbre des formes méromorphes sur U . On note Xw l'élément $w \widehat{\otimes} X \in \mathcal{M}(U) \widehat{\otimes} \widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$. Pour simplifier la preuve, on utilisera la convention $\frac{1}{z-\infty} = 0$.

La relation (1) de la définition 1.2 donne :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} \frac{X_i(p) dz_i}{z_i - p} \\ &\quad + \sum_{i < j} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) [d_{z_i} \log(z_i - g \cdot z_j) + d_{z_j} \log(z_j - g^{-1} \cdot z_i)]. \end{aligned}$$

En posant $g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g}$ et en simplifiant l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\omega = \sum_{i \in [1, n]} \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} \frac{X_i(p) dz_i}{z_i - p} + \sum_{i < j} \sum_{g \in G} X_{ij}(g) d \log(f_g^{ij}),$$

où $f_g^{ij} = z_i(c_g z_j + d_g) - (a_g z_j + b_g)$. Comme $d \circ d = 0$ on en déduit que $d\omega = 0$.

Passons à l'étude du terme $\omega \wedge \omega$. On note ω^l la partie du membre de droite de (8) contenant dz_l . Alors ω est donnée par :

$$(9) \quad \omega = \sum_{l=1}^n \omega^l.$$

En utilisant les relations $[X_{ij}(g), X_{kl}(h)] = [X_i(q), X_{kl}(h)] = 0$, $X_{ij}(g) = X_{ji}(g^{-1})$ et $[x_i(q), x_k(p)] = 0$ avec $q \notin \mathcal{O}(p)$ (voir définition 1.2), on trouve

pour $i \neq k$:

$$(10) \quad \omega^i \wedge \omega^k + \omega^k \wedge \omega^i = \left(A + B + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} (E_j^1 + E_j^2 + E_j^3) \right) dz_i \wedge dz_k,$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*} \sum_{q \in \mathcal{O}(p)} \frac{[X_i(p), X_k(q)]}{(z_i - p)(z_k - q)}, & B &= \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*, g \in G} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot z_i)} \\ C &= \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*, g \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_k(p)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}, & D &= \sum_{gh \neq 1} \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_i)} \\ E_j^1 &= \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_{kj}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_j)}, & E_j^2 &= \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - h \cdot z_i)}, \\ E_j^3 &= \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{kj}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - h \cdot z_j)}. \end{aligned}$$

On va décomposer le termes B, D et E_j^2 . En appliquant (1) du lemme 1.9, on peut décomposer E_j^2 :

$$\begin{aligned} E_j^2 &= \sum_{g,h} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - hg \cdot z_j)} + \frac{-[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_j)} \\ &\quad + \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - h \cdot \infty)}. \end{aligned}$$

On note, dans l'ordre d'apparition, $E_j^{21}, E_j^{22}, E_j^{23}$ les termes de cette décomposition. En réindexant les termes de E_j^3 , on trouve :

$$E_j^3 + E_j^{21} = \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ij}(g), X_{ki}(h) + X_{kj}(hg)]}{(z_i - g \cdot z_j)(z_k - hg \cdot z_j)}.$$

De même, en réindexant les termes de E_j^{22} et en utilisant la relation (1) de la définition 1.2, on trouve :

$$E_j^{22} + E_j^1 = \sum_{g,h \in G} \frac{[X_{ik}(g), X_{jk}(h^{-1}) + X_{ji}(h^{-1}g^{-1})]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - h \cdot z_j)}.$$

Les relations (4) dans $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{C})$ impliquent que $E_j^3 + E_j^{21} = E_j^{22} + E_j^1 = 0$. Ainsi, on peut réduire l'équation (10) à :

$$(11) \quad \omega^i \wedge \omega^k + \omega^k \wedge \omega^i = \left(A + B + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23} \right) dz_i \wedge dz_k, \text{ pour } i \neq k.$$

Décomposons B . En appliquant (1) du lemme 1.9 à B , pour $z = z_i, y = z_k$ et $z = p$, on obtient :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{p,g} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot p)} + \sum_{p,g} \frac{-[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - g^{-1} \cdot z_k)(z_k - g \cdot p)} \\ &\quad + \sum_{p,h} \frac{[X_i(p), X_{ki}(g)]}{(z_i - g^{-1} z_k)(z_k - g \cdot \infty)}. \end{aligned}$$

On note comme avant B_1, B_2, B_3 les termes de cette décomposition. Pour chaque $q \in \mathcal{O}(p)$, on choisit un $g_q \in G$ tel que $g_q \cdot p = q$ et on note G_p l'ensemble des g_q . Ainsi, on peut écrire :

$$A + B_1 = \sum_p \sum_{g \in G_p} \sum_{h \in \text{stab}(p)} \frac{[X_i(p), X_k(g \cdot p) + X_{ki}(gh)]}{(z_i - p)(z_k - g \cdot p)}.$$

Ce terme est nul à cause de la relation (7) de la définition 1.2. Ce qui réduit (11) à :

(12)

$$\omega^i \wedge \omega^k + \omega^k \wedge \omega^i = \left(B_2 + B_3 + C + D + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23} \right) dz_i \wedge dz_k, \text{ pour } i \neq k.$$

Il nous reste à faire la décomposition de D . Le lemme 1.9 donne :

$$D = \sum_{gh \neq 1} (w_1(g, h) - w_2(g, h)) + \sum_{h,g} \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_k)},$$

où

$$w_1(g, h) = \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_k)}$$

et

$$w_2(g, h) = \frac{[X_{ik}(g), X_{ki}(h)]}{(z_i - h^{-1} \cdot z_k)(z_k - hg \cdot z_k)}.$$

On pose

$$D_1 = \sum_{gh \neq 1} (w_1(g, h) - w_2(g, h)) \quad \text{et} \quad D_2 = D - D_1.$$

Remarquons que la relation en degré un dans $\mathfrak{p}_n(G)$ implique que la somme

$$B_3 + D_2 + \sum_{j|j \notin \{i,k\}} E_j^{23}$$

est nulle. Donc :

$$(13) \quad \omega^i \wedge \omega^k + \omega^k \wedge \omega^i = (B_2 + C + D_1) dz_i \wedge dz_k, \text{ pour } i \neq k.$$

On va montrer que $B_2 + C + D_1$ est nulle. On peut transformer D_1 , puis utiliser la relation (1) dans $\mathfrak{p}_n(G)$ pour trouver :

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_g \sum_{h \neq 1} (w_1(g, (gh)^{-1}) - w_2(gh, g^{-1})) \\ &= \sum_g \frac{1}{z_i - g \cdot z_k} \sum_{h \neq 1} [X_{ik}(g), X_{ik}(gh)] \left(\frac{1}{z_k - h \cdot z_k} + \frac{1}{z_k - h^{-1} \cdot z_k} \right). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la proposition 1.1 et (2) du lemme 1.9, D_1 se simplifie :

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_g \frac{1}{z_i - g \cdot z_k} \sum_{q \in Z} \sum_{h \in \text{stab}(q) \setminus \{1\}} [X_{ik}(g), X_{ik}(gh)] \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{z_k - h \cdot z_k} + \frac{1}{z_k - h^{-1} \cdot z_k} \right) \\ &= \sum_g \frac{1}{z_i - g \cdot z_k} \sum_{q \in Z} \left(\frac{1}{z_k - q} + \frac{1}{z_k - \text{at}(q)} \right) \sum_{h \in \text{stab}(q) \setminus \{1\}} [X_{ik}(g), X_{ik}(gh)] \\ &= \sum_{g,p} \sum_{h \in \text{stab}(p) \setminus \{1\}} \frac{[X_{ik}(g), X_{ik}(gh)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}. \end{aligned}$$

Par une réindexation de B_2 et l'utilisation de la relation (1) dans $\mathfrak{p}_n(G)$, on trouve :

$$B_2 + C + D_1 = \sum_{g,p} \sum_{h \in \text{stab}(p)} \frac{[X_{ik}(g), X_k(p) + X_i(g \cdot p) + X_{ik}(gh)]}{(z_i - g \cdot z_k)(z_k - p)}.$$

Le numérateur de la fraction est nul en vertu de la relation (6) dans $\mathfrak{p}_n(G)$. Ce qui montre que $B_2 + C + D_1 = 0$. En injectant cette égalité dans (13), on trouve que pour tout $i \neq k$, $\omega^i \wedge \omega^k + \omega^k \wedge \omega^i = 0$. Les éléments $\omega^i \wedge \omega^i$ étant nuls par définition de \wedge et compte tenu de l'équation (9), on obtient que $\omega \wedge \omega = 0$, ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

1.6. Représentation de monodromie. — On fixe $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$ un n -uplet appartenant à $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$. On a vu que la connexion $(\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1), \widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C}), \omega)$ est plate. De plus, ω est à valeurs dans les primitifs de $\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C})$. Donc une représentation de monodromie associée à cette connexion est à valeurs dans $\mathcal{G}(\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C}))$, où \mathcal{G} désigne le groupe des éléments diagonaux.

Soit $r : \tilde{C} \longrightarrow \text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$ le revêtement universel de $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$, \tilde{q} un point de la fibre au-dessus de \underline{q} . On notera $\rho_{\tilde{q}} : \pi_1(\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1), \underline{q}) \longrightarrow \mathcal{G}(\widehat{\text{Up}}_n(G)(\mathbb{C}))$ la représentation de monodromie obtenue associée à \tilde{q} .

Pour $i \neq j \in [1, n]$ et $g \in G$ et $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$, on définit γ_{ij}^q (resp. γ_i^p) comme un lacet dans \mathbb{P}^1 , basé en q_i et qui sépare la sphère en deux disques ouverts, le premier contenant le point $g \cdot q_j$ et le deuxième contenant les points

différents de q_i et $g \cdot q_j$ (resp. différents de q_i et p) appartenant à l'ensemble $(\bigcup_{l \in [1, n]} G \cdot q_l) \cup (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1)$. On oriente ces lacets comme en figure 10. On définit alors le lacet x_{ij}^g (resp. x_i^p) de $\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$ basé en \underline{q} comme étant l'image de γ_{ij}^g (resp. γ_i^p) sous l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_*^1 \setminus \bigcup_{k|k \neq i} G \cdot q_k &\longrightarrow \text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1) \\ x &\longrightarrow (q_1, \dots, q_{i-1}, x, q_{i+1}, \dots, q_n). \end{aligned}$$

On va étudier l'image des classes des x_{ij}^g et x_i^p par cette représentation.

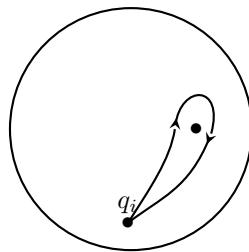


Figure 1 : Le lacet γ_{ij}^g (ou γ_i^p), dans S^2 (vue d'extérieur) ;
le point non indexé est $g \cdot q_j$ (ou p)

PROPOSITION 1.11. — Pour $1 \leq i < j \leq n$, $g \in G$, $k \in [1, n]$ et $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$, on a les égalités suivantes :

$$\rho_{\underline{q}}(x_{ij}^g) = 1 - 2i\pi X_{ij}(g) + R_{ij}(g), \quad \rho_{\underline{q}}(x_k^p) = 1 - 2i\pi X_k(p) + R_k(p),$$

où $R_{ij}(g)$ et $R_k(p)$ ne comportent que des termes de degré supérieur où égale à deux.

Démonstration. — On ne montrera l'égalité que pour x_{ij}^g , l'autre cas étant similaire. Pour calculer la monodromie, il faut s'intéresser à la solution F de l'équation $dF = r^*(\omega) \wedge F$, avec $F(\underline{q}) = 1$ (cf. section 1.3). Soit \tilde{x}_{ij}^g le chemin de \tilde{C} relevant le lacet x_{ij}^g de point de départ \underline{q} . Son point d'arrivée est $x_{ij}^g \cdot \underline{q}$.

On a $\rho_{\underline{q}}(x_{ij}^g) = F(x_{ij}^g \cdot \underline{q})$. Soit $F = F_0 + F_1 + [\deg \geq 2]$ le développement de F en composantes homogènes. On sait que $F_0 = 1$ et on a $dF_1 = r^*(\omega)$. On en

déduit :

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{q}}(x_{ij}^g) &= 1 + F_1(x_{ij}^g \cdot \tilde{q}) - F_1(\tilde{q}) + [\deg \geq 2] \\ &= 1 + \int_{\tilde{x}_{ij}^g} r^*(\omega) + [\deg \geq 2] \\ &= 1 + \int_{x_{ij}^g} \omega + [\deg \geq 2]\end{aligned}$$

Pour finir, montrons que $\int_{x_{ij}^g} \omega = -2i\pi X_{ij}(g)$. Soit

$$f_i : \mathbb{P}_*^1 \setminus \bigcup_{k|k \neq i} G \cdot q_k \longrightarrow \mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1)$$

l'application du paragraphe précédent la proposition. Comme $x_{ij}^g = f_i(\gamma_{ij}^g)$, on a :

$$\int_{x_{ij}^g} \omega = \int_{\gamma_{ij}^g} f_i^*(\omega),$$

De plus,

$$f_i^*(\omega) = \sum_{p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} \frac{dz}{z-p} \hat{\otimes} X_i(p) + \sum_{j \in ([1,n] \setminus \{i\})} \sum_{g \in G} \frac{dz}{z-g \cdot q_j} \hat{\otimes} X_{ij}(g).$$

On obtient donc en appliquant le théorème des résidus que :

$$\int_{\gamma_{ij}^g} f_i^*(\omega) = -2i\pi X_{ij}(g).$$

Ce qui achève la preuve. □

2. Rappels de topologie différentielle

Cette partie est consacrée à des rappels de topologie différentielle. La notion de méridien est introduite d'une manière adaptée dans 2.1. On termine 2.1 par une propriété de conjugaison entre méridiens. Enfin, la dernière sous-section 2.2 de cette partie rappelle des propriétés sur les stabilisateurs de certaines actions de groupes finis sur les surfaces.

Dans cette section les variétés sont sans bord sauf mention du contraire.

2.1. Groupes fondamentaux et méridiens. — Dans cette section, on définit (motivé par [11, 17]) une classe de lacets appelés méridiens et on compare les classes d'homotopie de deux méridiens.

Soit M une variété différentielle connexe orientée et N une sous-variété de M connexe orientée de codimension 2. On considère un disque $D \subset M$ transverse à N tel que $D \cap N$ est réduit à un point p . Soit $(v_3, \dots, v_{\dim M})$ une base du plan $T_p N$ tangent à N en p compatible avec l'orientation de N . On oriente D

grâce à une base (v_1, v_2) de $T_p D$ choisie de manière que $(v_1, \dots, v_{\dim M})$ soit une base de $T_p M$ compatible avec l'orientation de M .

DÉFINITION 2.1. — Soit D comme dans le paragraphe précédent muni de l'orientation ci-dessus. Un méridien m est un lacet $m : [0, 1] \rightarrow M$ qui est une paramétrisation du bord de D respectant l'orientation. On dira que m est un méridien au-dessus de p .

PROPOSITION 2.2. — Soit m_1 et m_2 deux méridiens. Il existe un chemin β de $M \setminus N$ tel que m_1 est homotope (à extrémités fixées) à $\beta m_2 \beta^{-1}$ dans $M \setminus N$. En particulier, si m_1 et m_2 ont le même point de base $* \in M \setminus N$, alors m_1 et m_2 sont conjugués dans $\pi_1(M \setminus N, *)$.

Démonstration. — D'abord, on vérifie que le lemme est vrai pour $M = \mathbb{R}^n \times D$ et $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ avec D un disque centré en zéro : il suffit de montrer que tout méridien est conjugué par un chemin à un méridien à valeurs dans $\{0\} \times D$. Soit m un méridien paramétrant le bord de D_1 comme dans la définition 2.1. On note q l'unique point d'intersection (transverse) de D_1 avec N . Notons $\pi^{(2)}$ la projection naturelle de $\mathbb{R}^n \times D$ sur $\{0\} \times D$. L'intersection de D_1 avec N étant transverse, on sait qu'il existe un voisinage V_q de q dans D_1 tel que $\pi_{|V_q}^{(2)}$ est injective. En utilisant une isotopie $I : D_1 \times [0, 1] \rightarrow D_1$ qui fixe q et qui envoie D_1 dans V_q , puis l'isotopie :

$$(1-t)x + t\pi^{(2)}(x), \quad \text{pour } x \in V_q \text{ et } t \in [0, 1],$$

on trouve que m est conjugué par un chemin à un méridien dans $\{0\} \times D$. Ceci montre le lemme dans le cas $M = \mathbb{R}^n \times D$ et $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Passons au cas général. Soit $\pi : V \rightarrow N$ un fibré en disques qui est un voisinage de N dans M et p un point de N . On peut trouver un voisinage U_p de p dans N , difféomorphe à $\mathbb{R}^{\dim N}$ et au-dessus duquel V est trivial. On a $\pi^{-1}(U_p) \simeq \mathbb{R}^{\dim N} \times D$ et U_p s'identifie à $\mathbb{R}^{\dim N} \times \{0\}$.

Tout méridien m au-dessus d'un point de U_p est conjugué par un chemin dans $M \setminus N$ à un méridien de $\pi^{-1}(U_p)$. En effet, il suffit de rétrécir le disque contenant m par une isotopie. Par conséquent, compte tenu du cas $M = \mathbb{R}^n \times D$ et $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, tous les méridiens au-dessus des points de U_p sont conjugués les uns aux autres par des chemins dans $M \setminus N$.

On a donc une relation d'équivalence \mathcal{R} sur N donnée par :

$x \mathcal{R} y \iff$ les méridiens au-dessus de x sont conjugués à ceux au-dessus de y ,
dont les classes d'équivalence sont ouvertes. Comme N est connexe, on n'a qu'une seule classe. Ceci montre la proposition. \square

COROLLAIRE 2.3. — Si γ est un chemin du point de base $*_1$ de m_1 vers celui de m_2 alors m_1 et $\gamma m_2 \gamma^{-1}$ sont conjugués dans $\pi_1(M \setminus N, *_1)$.

2.2. Groupe fini agissant sur une surface. — Soit S une surface orientée, compacte, sans bord, munie d'une action fidèle par difféomorphismes (conservant l'orientation) d'un groupe fini H . On note S_* l'ensemble des points de S à stabilisateur trivial pour l'action de H sur S . Comme H est fini et préserve l'ensemble $S \setminus S_*$ est fini (voir le dernier paragraphe de cette sous-section).

PROPOSITION 2.4. — *Soit p un point de S . Le stabilisateur $\text{stab}(p)$ de p est un sous-groupe cyclique de H . De plus, il existe un disque D_p autour de p tel que :*

1. *Le groupe $\text{stab}(p)$ agit sur D_p , cette action est équivalente à l'action par multiplication de μ_N sur \mathbb{C} , où $N = |\text{stab}(p)|$.*
2. *$D_p \cap (H \cdot q) = \text{stab}(p) \cdot q$, pour $q \in D_p$,*

Démonstration. — Soit \mathbf{m} une métrique riemannienne H -invariante sur S (on peut en obtenir en faisant la moyenne d'une métrique quelconque). Le groupe $\text{stab}(p)$ agit naturellement par isométries sur $T_p S$; on a donc un morphisme $T_p : \text{stab}(p) \rightarrow O(T_p S)$, injectif d'après la proposition 3.11 de [14]. Plus précisément, $\text{stab}(p)$ est inclus dans $SO(T_p S) \simeq S^1$ car H préserve l'orientation. Ainsi, $\text{stab}(p)$ est isomorphe à μ_N avec $N = |\text{stab}(p)|$. De plus, pour tout disque $D_r \subset T_p S$ centré en zéro de rayon r inférieur au rayon d'injectivité de l'application exponentielle $\text{Exp}_p : T_p S \rightarrow S$, l'exponentielle établit un difféomorphisme entre D_r et $D_p(r) = \text{Exp}_p(D_r)$. De plus, Exp_p vérifie :

$$\forall h \in \text{stab}(p), \quad \text{Exp}_p \circ T_p(h) = h \circ \text{Exp}_p.$$

En effet, si γ est la géodésique d'origine p et de vecteur $v \in T_p S$, alors $h \circ \gamma$ est la géodésique de vecteur $T_p(h)(v)$ d'origine $h(p) = p$. On voit donc que $\text{stab}(p)$ agit sur $D_p(r)$ et que cette action est équivalente à celle de μ_N par multiplication sur D_r . Ce qui montre (1).

Montrons que certains des disques $D_p(r)$ satisfont également l'assertion (2). Si le contraire était vrai, on aurait pour tout $k \geq 1$, existence de $q_k \in D_p(\frac{1}{k})$ et $g_k \in H \setminus \text{stab}(p)$ tels que $g_k(q_k) \in D_p(\frac{1}{k})$. Comme H est fini, on peut extraire une suite $(q_{k_i})_{i \geq 0}$ de $(q_k)_{k \geq 0}$ telle que $(g_{k_i})_{i \geq 0}$ est constante égale à un certain $g \in H \setminus \text{stab}(p)$. Comme $(q_{k_i})_{i \geq 0}$ tend vers p , en passant à la limite, on trouve la contradiction $p = g(p)$. \square

En particulier, pour p un point à stabilisateur trivial, D_p ne contient pas deux éléments d'une même orbite.

Remarquons que la première assertion de la proposition prouve que les points fixés par un élément non trivial de H sont isolés. De plus, l'ensemble des points fixes d'un élément de H est fermé. Comme H est fini et S est compact, l'ensemble $S \setminus S_*$ est fini.

3. Étude de groupes fondamentaux

La présente section a pour but de donner des générateurs de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$ et des relations entre ces générateurs, pour S et H comme dans la section 2. Pour ce faire, on définit dans la sous-section 3.1 des lacets qui engendrent $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$. Une identification de ces générateurs à des méridiens (sous-section 3.2), nous permet de décrire l'action de H^n sur les classes de conjugaison de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$ (sous-section 3.3). Enfin, dans la sous-section 3.4, on établit des relations quadratiques dans $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$.

3.1. Générateurs de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$. — Dans cette partie, on construit une famille de générateurs de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$. En particulier, on trouve une famille génératrice de l'espace de configuration d'orbites $\mathrm{Cf}_G(n, \mathbb{P}^1_*)$ introduit dans la section 1.

Fixons un point $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathrm{Cf}_H(n, S_*)$. Pour définir des lacets, on voit S comme une surface dans \mathbb{R}^3 de la manière usuelle. On oriente S en prenant la normale vers l'extérieur.

Choisissons $i \in [1, n]$ et posons $E_i = (S \setminus S_*) \cup (\cup_{j \neq i} H \cdot q_j)$. Pour $p \in E_i$, on considère un disque fermé \bar{D} contenant q_i dans son bord et p dans son intérieur tel que $\bar{D} \cap E_i = \{q_i, p\}$. On note $\gamma_i(p)$ le lacet basé en q_i paramétrant le bord de \bar{D} dans le sens inverse à celui induit par la normale. Si S est de genre $g(S) > 0$, on considère les lacets $\gamma_i^1 \cdots \gamma_i^{2g(S)}$, générateurs usuels de $\pi_1(S, q_i)$ évitant les points de E_i . On suppose que les lacets $\gamma_i(p)$ (pour $p \in E_i$) et γ_i^l (pour $l \in [1, 2g(S)]$) sont choisis de façon à ce qu'ils engendrent le groupe fondamental de $S_* \setminus (\cup_{j \neq i} H \cdot q_j)$.

DÉFINITION 3.1. — Pour $i \in [1, n]$, $j \in [i+1, n]$, $m \in [1, 2g(S)]$, $h \in H$ et $q \in S \setminus S_*$, les lacets $x_{ij}(h)$, $x_i(q)$ et x_i^m de $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ sont définis par :

- $x_{ij}(h)(t) = (q_{n-k+1}, \dots, q_{i-1}, \gamma_i(h \cdot q_j)(t), q_{i+1}, \dots, q_n)$, pour tout $t \in [0, 1]$;
- $x_i(q)(t) = (q_{n-k+1}, \dots, q_{i-1}, \gamma_i(q)(t), q_{i+1}, \dots, q_n)$, pour tout $t \in [0, 1]$;
- $x_i^m(t) = (q_{n-k+1}, \dots, q_{i-1}, \gamma_i^m(t), q_{i+1}, \dots, q_n)$, pour tout $t \in [0, 1]$;

où les $\gamma_i(p)$ et les γ_i^m ont été définis dans le paragraphe précédent.

Remarquons que ceci définit des lacets à conjugaison près dans $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$. On fixe un choix de tels lacets pour la suite. Pour montrer que les classes des lacets ainsi définis engendrent $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$, on va utiliser le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2 ([5]). — Si M est une variété sans bord munie d'une action libre d'un groupe fini H , alors, pour $n \geq 2$, la projection $p^n : \mathrm{Cf}_H(n, M) \rightarrow \mathrm{Cf}_H(n-1, M)$ sur les $n-1$ dernières composantes est une fibration localement triviale.

On peut trouver une preuve de ce théorème dans [4] (Théorème 2.1.2). Vu les hypothèses imposées sur les couples (S, H) , ce théorème s'applique aux $\text{Cf}_H(n, S_*)$.

PROPOSITION 3.3. — *Le groupe $\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*))$ est engendré par les classes des $x_{ij}(h)$ ($1 \leq i < j \leq n$ et $h \in H$), des $x_i(q)$ ($i \in [1, n]$ et $q \in S \setminus S_*$) et des x_i^m ($i \in [1, n]$ et $m \in [1, 2g(S)]$).*

Démonstration. — On va montrer la proposition par récurrence. La proposition est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n - 1$. Considérons la fibration :

$$(\text{Fib}_n, \underline{q}_n) \longrightarrow (\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q}_n) \xrightarrow{p^n} (\text{Cf}_H(n - 1, S_*), \underline{q}_{n-1}),$$

où $\underline{q}_n = (q_1, \dots, q_n)$, $\underline{q}_{n-1} = (q_2, \dots, q_n)$ et Fib_n est la fibre au-dessus de \underline{q}_{n-1} . Observons la suite exacte de cette fibration :

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \pi_1(\text{Fib}_n, \underline{q}_n) \longrightarrow \pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q}_n) \\ &\quad \longrightarrow \pi_1(\text{Cf}_H(n - 1, S_*), \underline{q}_{n-1}) \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Soit $x_{ij}(h)$, $x_i(q)$ et x_i^m les lacets de $\text{Cf}_H(n, S_*)$ définis plus haut. Les images de ces lacets par p^n sont des lacets analogues de $\text{Cf}_H(n - 1, S)$, dont on sait par hypothèse de récurrence qu'ils engendrent le groupe. Il s'ensuit que les classes des :

$$p^n(x_{ij}(h)), p^n(x_i(q)) \text{ et celles des } p^n(x_i^m),$$

pour $i \in [2, n]$, $j \in [i + 1, n]$, $h \in H$, $q \in S \setminus S_*$ et $m \in [1, 2g(S)]$, engendrent le groupe $\pi_1(\text{Cf}_H(n - 1, S_*), \underline{q}_{n-1})$.

Enfin, on sait que les $x_{1,j}(h)$, $x_1(q)$ et les x_1^m , pour $j \in [2, n]$, $h \in H$, $q \in S \setminus S_*$ et $m \in [1, 2g(S)]$, engendent le groupe fondamental de $\text{Fib}_n \simeq \{p \in S_* | p \notin H \cdot q_j, j = 2, \dots, n\}$. La proposition est alors une conséquence du résultat suivant : Si $K \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$ est une suite exacte de groupes, F_K est une famille génératrice de K et F_G est une famille de G telle que $\text{Im}(F_G \subset G \longrightarrow H)$ est génératrice de H , alors $F'_K \cup F_G$ (F'_K est l'image de F_K dans G) est une famille génératrice de G . \square

Pour $S = \mathbb{P}^1$ et $H = G$, on obtient :

PROPOSITION 3.4. — *Le groupe $\pi_1(\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1))$ est engendré par les classes des $x_{ij}(g)$ ($1 \leq i < j \leq n$ et $g \in G$) et des $x_i(q)$ ($i \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$).*

REMARQUE 3.5. — *Si le point \underline{q} utilisé ici est le même que celui de la sous-section 1.6, alors les lacets $x_{ij}(g)$ et $x_i(q)$ sont respectivement conjugués dans $\pi_1(\text{Cf}_G(n, \mathbb{P}_*^1))$ à x_{ij}^g et x_i^q de 1.6.*

3.2. Les tresses $x_{ij}(g)$ en tant que méridiens. — Dans ce paragraphe, on identifie les lacets introduits dans la sous-section 3.1 à des méridiens pour des variétés liées à $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$.

Pour $h \in H$, $k \in [1, n]$, $i, j \in [1, n]$ avec $i < j$, et $q \in S \setminus S_*$, on pose $D(i, j, h) := \{(y_1, \dots, y_n) \in S^n | y_i = hy_j\}$ et $D(k, q) := \{(y_1, \dots, y_n) \in S^n | y_k = q\}$. Pour $\alpha \in E := \{(i, j, h) | 1 \leq i < j \leq n, h \in H\} \cup ([1, n] \times (S \setminus S_*))$, on définit les deux sous-variétés de S^n :

$$M(\alpha) = S^n \setminus \left(\bigcup_{\beta \in E \setminus \{\alpha\}} D(\beta) \right) \quad \text{et} \quad N(\alpha) = D(\alpha) \cap M(\alpha).$$

$N(\alpha)$ est une sous-variété de codimension réelle deux dans $M(\alpha)$ et $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ est le complémentaire de $N(\alpha)$ dans $M(\alpha)$. De plus, $M(\alpha)$ et $N(\alpha)$ sont connexes.

Remarquons que $x_{ij}(h)$ est le bord d'un disque de $M(i, j, h)$ coupant $N(i, j, h)$ en un unique point \underline{q}' :

$$\underline{q}' = (q_1, \dots, q_{i-1}, h \cdot q_j, q_{i+1}, \dots, q_n).$$

Cette intersection est transverse. On oriente $M(i, j, h)$ et $N(i, j, h)$ d'une manière que $x_{ij}(h)$ devient un méridien au sens de la définition 2.1. On fait la même chose pour que $x_k(q)$ soit un méridien au sens de 2.1 (pour $M = M(k, q)$ et $N = N(k, q)$).

DÉFINITION 3.6. — Soit α comme ci-dessus. Un lacet m de $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ est dit méridien pour α si m satisfait la définition 2.1, pour $M = M(\alpha)$ et $N = N(\alpha)$ munies de l'orientation ci-dessus.

PROPOSITION 3.7. — Tout méridien pour (i, j, h) est conjugué par un chemin au lacet $x_{ij}(h)$ et tout méridien pour (k, q) est conjugué par un chemin à $x_k(q)$.

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence de la proposition 2.2. \square

3.3. Action de H^n sur les classes de conjugaison de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$. — Dans cette sous-section, on décrit l'action de H^n sur les classes de conjugaison des $x_{ij}(h)$ et des $x_k(q)$ de $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*))$ donnés dans la proposition 3.4.

On a vu que H^n agit naturellement sur $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ et on avait choisi un point de base \underline{q} de $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$. On considère l'ensemble des couples (\underline{h}, C) où $\underline{h} \in H^n$ et C est une classe d'homotopie d'un chemin dans $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ de point de départ \underline{q} et de point d'arrivée $\underline{h} \cdot \underline{q}$. On munit cet ensemble de la multiplication : $(\underline{h}, C) \cdot (\underline{h}', C') = (\underline{h}\underline{h}', C(\underline{h} \circ C'))$, où $C(\underline{h} \circ C')$ est le résultat de la concaténation des lacets C et $(\underline{h} \circ C')$ ($\underline{h} \circ C'$ désignant la composée du lacet C' à valeurs dans $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ avec le difféomorphisme de $\mathrm{Cf}_H(n, S_*)$ induit

par \underline{h}). On obtient ainsi le groupe $\pi_1^{\text{orb}}(\text{Cf}_H(n, S_*)/H^n, \underline{q})$ (qui est exactement le groupe fondamental de $\text{Cf}_H(n, S_*)/H^n$) qui s'insère dans la suite exacte :

$$(14) \quad 1 \longrightarrow \pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q}) \xrightarrow{\varphi} \pi_1^{\text{orb}}(\text{Cf}_H(n, S_*)/H^n, \underline{q}) \xrightarrow{\theta} H^n \longrightarrow 1.$$

où $\varphi(\gamma) = (1, \gamma)$ et $\theta(\underline{h}, C) = \underline{h}$. Toute section ensembliste σ de cette suite donne une application ensembliste :

$$(15) \quad f_\sigma : H^n \longrightarrow \text{Aut}(\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})),$$

qui à \underline{h} associe la conjugaison par $\sigma(h)$.

Pour $i \in [1, n]$, h_i désignera l'image de $h \in H$ par l'inclusion canonique de H dans H^n qui envoie H en i -ème position. La relation de conjugaison dans $\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$ sera notée \sim .

PROPOSITION 3.8. — *On a :*

(16)

$$f_\sigma(h_r)(x_{ij}(g)) \sim \begin{cases} x_{ij}(hg) & \text{si } r = i \\ x_{ij}(gh^{-1}) & \text{si } r = j, \\ x_{ij}(g) & \text{sinon} \end{cases} \quad f_\sigma(h_r)(x_k(q)) \sim \begin{cases} x_k(h \cdot q) & \text{si } r = k \\ x_k(q) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $1 \leq i < j \leq n$, $k, r \in [1, n]$, $g, h \in H$ et $q \in S \setminus S_*$.

Démonstration. — Soit σ, r, i, j, g, h comme dans l'énoncé. On sait que $\sigma(h_r) = (h_r, C_r)$ avec C_r une classe d'un chemin reliant \underline{q} à $h_r \cdot \underline{q}$. Par définition, on a :

$$(17) \quad f_\sigma(h_r)(x_{ij}(g)) = \sigma(h_r)(1, x_{ij}(g))\sigma(h_r)^{-1} = (1, C_r(h_r \circ x_{ij}(g))C_r^{-1}).$$

Le membre de droite s'identifie à $C_r(h_r \circ x_{ij}(g))C_r^{-1}$ dans $\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$. Posons $h'(r) = hg$ si $r = i$, $h'(r) = gh^{-1}$ si $r = j$ et $h'(r) = g$ sinon.

Comme H est un difféomorphisme de S conservant l'orientation et comme $h_r(N(i, j, g) = N(i, j, h'(r))$, on trouve que $h_r \circ x_{ij}(g)$ est un méridien pour $(i, j, h'(r))$. Donc, d'après le corollaire 2.3 $f_\sigma(h_r)(x_{ij}(g))$ est un conjugué de $x_{ij}(h'(r))$. Ce qui montre l'égalité de gauche. De façon similaire, on démontre l'égalité de droite. \square

Enfin, l'application f_σ induit une action de H^n sur l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$, autrement dit :

$$(18) \quad f_\sigma(\underline{h})(a) \sim f_\sigma(\underline{h})(a'), \text{ si } a \sim a'.$$

Cette action est indépendante de σ .

3.4. Relations dans $\pi_1(\text{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$. — Dans cette partie on donne des relations entre les $x_{ij}(g), x_k(q)$: une première famille générale, et une deuxième famille valable dans le cas où $S = S^2$.

Considérons l'espace $\text{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times)$ où le groupe μ_N est le groupe des racines N -ème de l'unité agissant par multiplication sur \mathbb{C} :

LEMME 3.9. — Pour $k \in [1, N - 1]$ et $j \in [1, 2]$, il existe un $x'_{12}(k)$ conjugué à $x_{12}(e^{\frac{2ik\pi}{N}})$ et $x'_j(0)$ conjugué à $x_j(0)$ dans $\pi_1(\mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times), (2, 1))$ tel que :

1. les deux lacets $\beta := x'_{12}(1)x'_{12}(2) \cdots x'_{12}(N-1)x'_1(0)$ et $x'_2(0)$ commutent à homotopie près.
2. les deux lacets $\alpha := x'_2(0)x'_{12}(1)x'_{12}(2) \cdots x'_{12}(N-1)x'_1(0)$ et $x'_{12}(1)$ commutent à homotopie près.

Démonstration. — On choisit des $x'_{12}(k)$ et les $x'_i(0)$ tels que β soit égale à $(\gamma_1, 1)$ et $x'_2(0)$ soit égale à $(2, \gamma_2)$, où γ_1, γ_2 sont représentés dans la figure 3 :

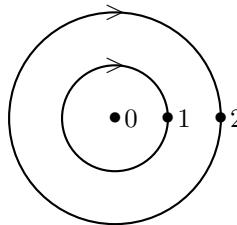


Figure 2 : Les lacets γ_1 et γ_2

Les lacets β et $x'_2(0)$ ainsi choisis commutent dans $\pi_1(\mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times), (2, 1))$. En effet, il sont à image dans $\mathrm{Im}(\gamma_1) \times \mathrm{Im}(\gamma_2) \subset \mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times)$. Ce qui montre (1). Montrons (2). Soit $H_0 : [0, 1] \times [0, 2] \longrightarrow \mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times)$ une homotopie entre $x_{12}(1)*$ et $*x_{12}(1)$, où $*$ est le lacet constant (voir figure 2).

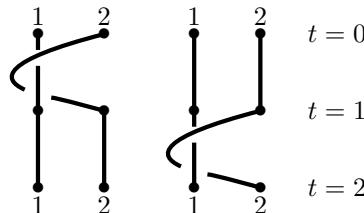


Figure 3 : Graphes en fonction du temps de $H_0(0, \cdot)$ (gauche) et de $H_0(1, \cdot)$ (droite)

L'homotopie tordue $H : [0, 1] \times [0, 2] \longrightarrow \mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}^\times)$ définie par :

$$H(s, t) = e^{-2i\pi(s+t)\mathcal{I}_{[1,2]}(s+t)} H_0(s, t),$$

où $\mathcal{I}_{[1,2]}$ est l'indicatrice de l'intervalle $[1, 2]$, est une homotopie entre $H(0, \cdot) = x_{12}(1)\alpha'$ et $H(1, \cdot) = \alpha'x_{12}(1)$, où α' est défini par $\alpha'(t) = (2e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi t})$

pour $t \in [0, 1]$. Or, α' est homotope à un lacet du même type que α . Ce qui montre (2). \square

REMARQUE 3.10. — *Les relations du lemme 3.9 ressemblent aux relations :*

$$(X_{02}x_{12}(0) \cdots x_{12}(N-1)X_{01}, x_{12}(0)) = (X_{02}x_{12}(0) \cdots x_{12}(N-1)X_{01}, X_{02}) = 1$$

de la proposition 1.1 de [7]. Ce type de relations peut aussi apparaître en genre supérieur dans beaucoup de cas où l'on a une courbe simple stable de S pour l'action de H . Par exemple, quand on fait agir le groupe μ_N sur le tore $S^1 \times S^1$, on retrouve les relations (23) et (24) dans lesquelles $x_i(g \cdot q)$ et $x_j(p)$ sont remplacés par des lacets (des x_i^m et x_j^m bien choisis) représentés par des courbes simples stables.

On emploie dans la proposition qui suit l'expression " $(a_1 | \cdots | a_r, b_1 | \cdots | b_s) \sim = 1$ " pour dire que pour $a_i, b_j \in \pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$ ($i \in [1, r], j \in [1, s]$), ils existent $a'_i \sim a_i, b'_j \sim b_j$ (i, j dans le même ensemble) tels que :

$$(a'_1 \cdots a'_r, b'_1 \cdots b'_s) = 1,$$

où $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$.

PROPOSITION 3.11. — *On a les relations suivantes dans le groupe $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$:*

$$(19) \quad (x_{ij}(g), x_{kl}(h)) \sim = (x_{il}(g), x_{jk}(h)) \sim = (x_{ik}(g), x_{jl}(h)) \sim = 1,$$

pour $1 \leq i < j < k < l \leq n$ et $g, h \in H$,

$$(x_{ij}(g), x_{ik}(gh)|x_{jk}(h)) \sim = (x_{jk}(h), x_{ij}(g)|x_{ik}(gh)) \sim$$

$$(20) \quad = (x_{ik}(gh), x_{jk}(h)|x_{ij}(g)) \sim = 1,$$

$$(21) \quad (x_i(p), x_{jk}(g)) \sim = (x_j(p), x_{ik}(g)) \sim = (x_k(p), x_{ij}(g)) \sim = 1,$$

pour $1 \leq i < j < k \leq n$, $g, h \in H$ et $p \in S \setminus S_$,*

$$(22) \quad (x_i(p), x_k(q)) \sim = 1,$$

pour $1 \leq i < k \leq n$, p et q dans $S \setminus S_$ avec $q \notin \mathcal{O}(p)$.*

(23)

$$\left(x_j(p) | x_{ij} (gh^0) | x_{ij} (gh^1) | \cdots | x_{ij} \left(gh^{|\mathrm{stab}(p)|-1} \right) | x_i(g \cdot p), x_{ij}(g) \right) \sim = 1,$$

$$(24) \quad \left(x_{ij} (gh^0) | x_{ij} (gh^1) | \cdots | x_{ij} \left(gh^{|\mathrm{stab}(p)|-1} \right) | x_i(g \cdot p), x_j(p) \right) \sim = 1,$$

pour $1 \leq i < j \leq n$, $g \in H$, $p \in S \setminus S_$ et h un générateur de $\mathrm{stab}(p)$,*

$$(25) \quad (X_{u_1^i} \cdots X_{u_r^i}) = 1,$$

pour tout $i \in [1, n]$, $S = S^2$, u_1^i, \dots, u_r^i est une énumération des éléments de $\{(k, l, g) \in [1, n]^2 \times G \mid k < l, i \in \{k, l\}\} \cup (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*)$, $X_{u_\alpha^i}$ est un conjugué de $x_{kl}(g)$ si $u_\alpha^i = (k, l, g)$ ou un conjugué de $x_i(q)$ si $u_\alpha^i = q \in (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*)$.

Démonstration. — On a vu que les $x_{ij}(g)$ et les $x_i(q)$ sont des méridiens pour certaines variétés. Donc, pour montrer la proposition, il suffit de montrer chacune des relations pour un \underline{q} arbitraire (voir corollaire 2.3).

Supposons que les composantes de \underline{q} sont concentrées dans un disque ne contenant pas deux éléments d'une même orbite pour l'action de H . Vu l'hypothèse imposée à \underline{q} , les $x_{ij}(1)$ vérifient à conjugaison près les relations de tresses pures (voir [1] pour la définition des relations de tresses pures), c'est à dire :

$$(x_{ij}(1), x_{kl}(1))^\sim = (x_{il}(1), x_{jk}(1))^\sim = (x_{ik}(1), x_{jl}(1))^\sim = 1,$$

$$\begin{aligned} (x_{ij}(1), x_{ik}(1)|x_{jk}(1))^\sim &= (x_{jk}(1), x_{ij}(1)|x_{ik}(1))^\sim \\ &= (x_{ik}(1), x_{jk}(1)|x_{ij}(1))^\sim = 1, \end{aligned}$$

dans $\pi_1(\mathrm{Cf}_H(n, S_*), \underline{q})$. Pour montrer (19) et (20), il suffit de calculer à l'aide de la proposition 3.8 l'image du premier commutateur par $f_\sigma(g_i h_k)$, l'image du deuxième et du troisième par $f_\sigma(g_i h_j)$ et celle des trois derniers par $f_\sigma(g_i h_k^{-1})$.

On va montrer la relation $(x_i(p), x_{jk}(g))^\sim = 1$ de (21), les deux autres relations de la même équation étant similaires. On commence par prendre un petit disque D autour de p , puis on choisit \underline{q} tel que q_i soit dans D et les q_r soient à l'extérieur de $H \cdot D$ ($r \neq i$). Ensuite, on choisit un $x'_{jk}(g)$ (conjugué de $x_{jk}(g)$) dont les r -ième composantes ($r \neq i$) ne coupent pas $H \cdot D$, puis un conjugué $x'_i(p)$ de $x_i(p)$ dont la i -ème composante est à image dans $D \setminus \{p\}$. Les lacets $x'_i(p)$ et $x'_{jk}(g)$ ainsi obtenus commutent.

Soit p et q dans $S \setminus S_*$ avec $q \notin \mathcal{O}(p)$. Compte tenu de l'hypothèse sur p et q , on peut trouver deux disques D_p et D_q centrés respectivement en p et q tels que $D_p \cap (H \cdot D_q) = \emptyset$. Choisissons \underline{q} de façon à ce que q_i soit dans D_p , q_k soit dans D_q et les autres composantes soient à l'extérieur de $H \cdot (D_p \cup D_q)$. Enfin, prenons des $\gamma_i(p)$, $\gamma_k(q)$ (les lacets qui permettent de définir $x_i(p)$ et $x_k(q)$), tels que $\mathrm{Im}(\gamma_i(p)) \subset D_p$ et $\mathrm{Im}(\gamma_k(q)) \subset D_q$. Les lacets $x_i(p)$ et $x_k(q)$ ainsi choisis commutent. Ce qui prouve (22).

Démontrons (23) et (24). Soit D_p un disque autour de p comme dans la proposition 2.4. Notons $w : \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} D_p$ et $w' : \mu_N \xrightarrow{\cong} \mathrm{stab}(p)$ les identifications qui établissent l'équivalence entre l'action de μ_N sur \mathbb{C} et celle de $\mathrm{stab}(p)$ sur D_p . Choisissons un \underline{q} tel que $q_i = w(2)$, $q_j = w(1)$ et $q_r \notin \bigcup_{h \in H} h \cdot D_p$, pour $r \neq i, j$. En utilisant (2) de la proposition 2.4, on voit qu'on a une inclusion :

$$w_{ij} : \mathrm{Cf}_{\mu_N}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Cf}_H(n, S_*)$$

$$(x, y) \mapsto (q_1, \dots, q_{i-1}, w(x), q_{i+1}, \dots, q_{j-1}, w(y), q_{j+1}, \dots, q_n).$$

Remarquons que $w_{ij} \circ x_{12}(\zeta)$, pour $\zeta \in \mu_N$ est un méridien pour $(i, j, w'(\zeta))$. Donc, (1) et (2) du lemme 3.9 donnent après application de w_{ij} :

$$\begin{aligned} \left(x_j(p) \Big| x_{ij}(1) \Big| x_{ij} \left(w' \left(e^{\frac{2i\pi}{N}} \right) \right) \Big| \cdots \Big| x_{ij} \left(w' \left(e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}} \right) \right) \Big| x_i(p), x_{ij}(1) \right)^{\sim} &= 1, \\ \left(x_{ij}(1) \Big| x_{ij} \left(w' \left(e^{\frac{2i\pi}{N}} \right) \right) \Big| \cdots \Big| x_{ij} \left(w' \left(e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}} \right) \right) \Big| x_i(p), x_j(p) \right)^{\sim} &= 1. \end{aligned}$$

Ce qui montre (23) et (24) pour $g = 1$. Pour obtenir (23) et (24) pour g quelconque, il suffit de calculer l'image par $f_\sigma(g_i)$ des deux dernières relations obtenues.

Pour montrer la dernière relation, observons l'ensemble :

$$\text{Fib}^{(i)} = \text{Cf}_H(n, S_*^2) \cap (\{q_1\} \times \cdots \times \{q_{i-1}\} \times S^2 \times \{q_{i+1}\} \times \cdots \times \{q_n\}).$$

C'est S_*^2 privée de l'union $E_i := \cup_{k \neq i} (H \cdot q_k)$. Donc, un lacet contractile de $\text{Fib}^{(i)}$ s'écrit comme un produit des lacets $\alpha_i(p)$, pour p parcourant E_i et $S^2 \setminus S_*^2$, $\alpha_i(p)$ est basé en q_i et fait un tour autour de p en évitant les autres points de E_i . Soit p de la forme $p = h \cdot q_j$ pour un certain $h \in H$ et un $j \in [1, n] \setminus \{i\}$. Si $j > i$, le lacet $\alpha_i(p)$ n'est qu'un conjugué de $x_{ij}(h)$. Sinon, $\alpha_i(p)$ est un méridien pour (j, i, h^{-1}) et donc il est conjugué à $x_{ji}(h^{-1})$. Ce qui montre la dernière relation. \square

4. Rappels sur l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe

On rappelle des notions reliées à l'algèbre de Lie de Malcev d'un groupe. Ce matériel provient de [16] et [15].

Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle et A une algèbre de Hopf complète sur \mathbb{k} . Par définition, A est munie d'une filtration décroissante $\{F_k A\}_{k \geq 0}$ multiplicative de sous-espaces vectoriels, telle que $F_0 A = A$, $F_1 A$ est l'idéal d'augmentation et la diagonale $\Delta : A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ est un morphisme d'algèbres filtrés. Cette filtration induit sur l'ensemble des éléments primitifs de A une filtration d'algèbre de Lie :

$$(26) \quad F_k \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A) \cap F_k A, \text{ pour } k \geq 1,$$

c'est-à-dire $[F_m \mathcal{P}(A), F_l \mathcal{P}(A)] \subset F_{m+l} \mathcal{P}(A)$, pour $m, l \geq 1$. En particulier, le k -ième terme de la filtration centrale descendante de $\mathcal{P}(A)$ est inclus dans $F_k \mathcal{P}(A)$.

De plus, on a les bijections inverses $\mathcal{G}(A) \xrightarrow[\exp]{\log} \mathcal{P}(A)$, où \log et \exp sont les séries usuelles. La multiplication sur $\mathcal{G}(A)$ est donnée par :

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(\mathfrak{h}(x, y)), \text{ pour } x, y \in \mathcal{P}(A)$$

où $\mathfrak{h}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \mathfrak{h}_{\geq 3}(x, y)$ avec $\mathfrak{h}_{\geq 3}(x, y) \in F_3 \mathcal{P}(A)$ est la série de Baker-Campbell-Hausdorff.

On considérera les complétions de deux types d'algèbres de Hopf relativement aux puissances de leur idéal d'augmentation : l'algèbre $\mathbb{k}[\Gamma]$ d'un groupe Γ ou l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On notera $\widehat{\mathbb{k}[\Gamma]}$ et $\widehat{U(\mathfrak{g})}$ ces complétés.

La \mathbb{k} -algèbre de Lie de Malcev du groupe Γ est l'algèbre de Lie $Lie(\Gamma(\mathbb{k}))$ formée des primitifs de $\widehat{\mathbb{k}[\Gamma]}$, munie de la filtration $\{F_k Lie(\Gamma(\mathbb{k}))\}_{k \geq 1}$ comme dans (26). C'est une algèbre de Lie complète :

$$Lie(\Gamma(\mathbb{k})) = \varprojlim Lie(\Gamma(\mathbb{k}))/F_k Lie(\Gamma(\mathbb{k})).$$

On note $grLie(\Gamma(\mathbb{k}))$ le gradué associé de $Lie(\Gamma(\mathbb{k}))$ pour la filtration $\{F_k Lie(\Gamma(\mathbb{k}))\}_{k \geq 1}$. L'algèbre de Lie :

$$(27) \quad grLie(\Gamma(\mathbb{k})) = \bigoplus_{k > 0} gr_k Lie(\Gamma(\mathbb{k}))$$

est engendrée par sa composante de degré un $gr_1 Lie(\Gamma(\mathbb{k}))$. Soit I l'idéal d'augmentation de $\mathbb{k}[\Gamma]$. On a la suite d'isomorphismes :

$$(28) \quad gr_1 Lie(\Gamma(\mathbb{k})) \xrightarrow{\sim} I/I^2 \xrightarrow{\sim} \Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$$

qui pour $x \in \Gamma$, identifient la classe de $\log(x)$ dans $gr_1 Lie(\Gamma(\mathbb{k}))$ à $[x] \otimes 1$ dans $\Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ où $[x]$ est la classe de x dans l'abélianisé Γ^{ab} de Γ .

5. L'isomorphisme entre $Lie(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, $\widehat{grLie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}_n}(G)(\mathbb{C})$

Dans cette section on établit l'isomorphisme entre les trois algèbres de Lie $Lie(\Gamma_n(\mathbb{C}))$, $\widehat{grLie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}_n}(G)(\mathbb{C})$. En s'appuyant sur les relations dans $\Gamma_n := \pi_1(Cf_G(n, \mathbb{P}_*^1))$ obtenues dans la section 3, on construit (sous-section 5.1) un morphisme surjectif $\phi_{\mathbb{k}}$ de $\widehat{\mathfrak{p}_n}(G)(\mathbb{k})$ dans $\widehat{grLie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$, pour \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle (ces objets sont définis dans la sous-section 1.2 et la section 4). Dans la sous-section 5.2, on utilise la représentation de monodromie de la section 1 pour obtenir un morphisme de Lie surjectif $L_{2i\pi, \rho} : Lie(\Gamma_n(\mathbb{C})) \rightarrow \widehat{\mathfrak{p}_n}(G)(\mathbb{C})$. Enfin, dans la sous-section 5.3, on utilise ces deux morphismes pour montrer l'isomorphisme annoncé.

Pour alléger les notations, on utilisera parfois (dans les démonstrations) \mathfrak{p}_n pour désigner $\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})$ et on omettra \mathbb{k} dans $Lie(\Gamma_n(\mathbb{k}))$. La classe de $x \in F_k Lie(\Gamma_n(\mathbb{k}))$ dans $grLie(\Gamma_n(\mathbb{k}))$ sera notée $[x]_k$. On notera y l'image de $y \in \Gamma$ dans $\widehat{\mathbb{k}[\Gamma]}$.

5.1. Construction d'un morphisme $\widehat{\mathfrak{p}_n}(G)(\mathbb{k}) \rightarrow \widehat{grLie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$. — Dans cette sous-section on construit le morphisme annoncé, pour \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle. On commence par démontrer que $\mathfrak{p}_n(G)$ admet une variante de la présentation de la définition 1.2 :

LEMME 5.1. — *L’algèbre de Lie $\mathfrak{t}_n(G)$ engendrée par les $X^{ij}(g)$ et $X^k(q)$, pour $1 \leq i < j \leq n$, $g \in G$, $k \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$, soumis aux relations :*

$$(29) \quad \sum_{q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1} X^i(q) + \sum_{g \in G} \left(\sum_{j|j>i} X^{ij}(g) + \sum_{j|j$$

pour $i \in [1, n]$,

$$(30) \quad [X^{ij}(g), X^{kl}(h)] = [X^{il}(g), X^{jk}(h)] = [X^{ik}(g), X^{jl}(h)] = 0,$$

pour $1 \leq i < j < k < l \leq n$ et $g, h \in G$,

$$\begin{aligned} [X^{ij}(g), X^{ik}(gh) + X^{jk}(h)] &= [X^{jk}(h), X^{ij}(g) + X^{ik}(gh)] \\ &= [X^{ik}(gh), X^{jk}(h) + X^{ij}(g)] = 0, \end{aligned}$$

$$(31) \quad [X^i(p), X^{jk}(g)] = [X^j(p), X^{ik}(g)] = [X^k(p), X^{ij}(g)] = 0,$$

pour $1 \leq i < j < k \leq n$ et $g, h \in G$,

$$(32) \quad [X^i(p), X^j(q)] = 0,$$

$$(33) \quad \left[X^{ij}(g), X^j(p) + X^i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X^{ij}(gh) \right] = 0,$$

$$(34) \quad \left[X^j(p), X^i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X^{ij}(gh) \right] = 0,$$

pour $i, j \in [1, n]$ avec $i < j$, $g \in G$, $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_^1$ et $q \in (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1) \setminus \mathcal{O}(p)$, est isomorphe à $\mathfrak{p}_n(G)$. L’isomorphisme est donné par $X^{ij}(g) \mapsto X_{ij}(g)$ (pour $i < j$ et $g \in G$) et $X^k(q) \mapsto X_k(q)$ (pour $k \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$).*

Démonstration. — On adjoint à $\mathfrak{t}_n(G)$ les éléments $X^{ji}(g)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $g \in G$ et on impose la relation :

$$(35) \quad X^{ij}(g) = X^{ji}(g^{-1}).$$

Cela ne change pas $\mathfrak{t}_n(G)$. En utilisant la nouvelle relation $X^{ij}(g) = X^{ji}(g^{-1})$, on vérifie qu’on peut transformer les relations (29) jusqu’à (33) de ce lemme en les relations (2) jusqu’à (6) de la définition 1.2 via l’identification $X^{ab}(g) \mapsto X_{ab}(g)$, $X^c(q) \mapsto X_c(q)$ (pour $a, b, c \in [1, n]$, avec $a \neq b$).

On s’intéresse à la relation (34) (satisfait pour $i < j$) qui est similaire à (7) (satisfait pour $i \neq j$). L’antisymétrie du crochet donne :

$$[X^j(p), X] + [X^i(g \cdot p), X] + \sum_{h' \in \text{stab}(p)} [X^{ij}(gh'), X] = 0,$$

pour

$$X = X^j(p) + X^i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X^{ij}(gh).$$

Or, le crochet $[X^j(p), X]$ est nul d'après (34) et $[X^{ij}(gh'), X]$ est nul d'après (33). D'où :

$$\left[X^i(g \cdot p), X^j(p) + X^i(g \cdot p) + \sum_{h \in \text{stab}(p)} X^{ij}(gh) \right] = 0.$$

En appliquant $X^{ij}(g) = X^{ji}(g^{-1})$ et en réindexant, on trouve :

$$\left[X^i(q), X^j(g^{-1} \cdot q) + \sum_{h \in \text{stab}(q)} X^{ji}(g^{-1}h') \right] = 0$$

où $q = g \cdot p$. Donc la relation (7) est aussi satisfaite dans $\mathfrak{t}_n(G)$ (via l'identification précédente). Ce qui montre le lemme. \square

PROPOSITION 5.2. — *On a un morphisme d'algèbres de Lie filtrées :*

$$\phi_{\mathbb{k}} : \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{k}) \longrightarrow \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k})),$$

donné par

$$\phi(X_{ij}(g)) = [\log(x_{ij}(g))]_1 \quad \text{et} \quad \phi(X_k(p)) = [\log(x_k(p))]_1,$$

pour $1 \leq i < j \leq n$, $k \in [1, n]$, $g \in G$ et $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$, où les complétions et les filtrations sont induites par le degré.

Démonstration. — Posons $X^{ij}(g) = [\log(x_{ij}(g))]_1$ et $X^i(p) = [\log(x_i(p))]_1$. La formule de Campbell-Baker-Hausdorff montre que pour $x, y \in \mathcal{G}(\mathbb{k}[\Gamma_n])$ et x', y' des conjugués respectifs de x et y dans $\mathcal{G}(\mathbb{k}[\Gamma_n])$, on a :

$$(36) \quad [[\log(x)]_1, [\log(y)]_1] \in [\log(x', y')]_2 + F_3\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k})).$$

En effet, $F_i\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$ contient le i -ème terme de la suite centrale descendante de $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$. En appliquant cette égalité aux relations de la proposition 3.11, on trouve que les $X^{ij}(g)$ et $X^k(q)$ ainsi définis satisfont les relations du lemme 5.1 (dans $\text{gr}_2\text{Lie}(\Gamma_n)$). Ce qui donne le morphisme de la proposition. \square

5.2. Un morphisme de $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$ dans $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$. — On va construire un morphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$.

LEMME 5.3. — *On a un isomorphisme entre $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{U}}(\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{k})$ qui fait correspondre la filtration (26) de $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{U}}(\mathfrak{p}_n(G)(\mathbb{k})))$ à la filtration induite par le degré de $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{k})$.*

PROPOSITION 5.4. — *On a un morphisme surjectif d’algèbres de Lie filtrées $L_{2i\pi,\rho} : \text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) \rightarrow \widehat{\mathfrak{p}}_n(\mathbb{C})$, vérifiant pour $i < j$ et $g \in G$, $k \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$:*

$$L_{2i\pi,\rho}(\log(x_{ij}(g))) = X_{ij}(g) + R_{ij}(g), \quad L_{2i\pi,\rho}(\log(x_k(q))) = X_k(q) + R_k(q),$$

où $R_{ij}(g)$ et $R_k(q)$ appartiennent à $F_2\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C}))$.

Démonstration. — Dans la section 1.6 on a construit un anti-morphisme $\rho_{\tilde{q}}$: $\Gamma_n \longrightarrow \mathcal{G}(\widehat{\mathbf{U}}\mathfrak{p}_n)$. On définit le morphisme $\tilde{\rho}$ opposé de $\rho_{\tilde{q}}$, par $\tilde{\rho}(x) = \rho_{\tilde{q}}(x)^{-1}$. Le morphisme ainsi obtenu s’étend en un morphisme compatible avec les structures de Hopf $f : \mathbb{C}[\Gamma_n] \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}\mathfrak{p}_n$. En considérant la complétion de $\mathbb{C}[\Gamma_n]$, on obtient un morphisme $\hat{f} : \widehat{\mathbb{C}[\Gamma_n]} \longrightarrow \widehat{\mathbf{U}}\mathfrak{p}_n$ d’algèbres de Hopf complètes. En restreignant \hat{f} aux primitifs, on trouve le morphisme d’algèbres de Lie filtrées $\text{Lie}(\tilde{\rho}) : \text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{P}(\widehat{\mathbf{U}}\mathfrak{p}_n)$, satisfaisant :

$$\log(x) \mapsto \log(\tilde{\rho}(x)),$$

pour $x \in \Gamma_n$. Comme les lacets $x_{ij}(g)$ et $x_k(q)$ sont similaires aux x_{ij}^g et aux x_i^q de la sous-section 1.6, on obtient en utilisant la proposition 1.11 :

$$\begin{aligned} \text{Lie}(\tilde{\rho})(\log(x_{ij}(g))) &= 2i\pi X_{ij}(g) + [\deg \geq 2], \\ \text{Lie}(\tilde{\rho})(\log(x_k(q))) &= 2i\pi X_k(q) + [\deg \geq 2]. \end{aligned}$$

Enfin, on a un isomorphisme canonique d’algèbres de Lie filtrées entre $\mathcal{P}(\widehat{\mathbf{U}}\mathfrak{p}_n)$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(\mathbb{C})$; le morphisme $L_{2i\pi,\rho}$ annoncé est obtenu en composant $\text{Lie}(\tilde{\rho})$ par l’automorphisme de $\widehat{\mathfrak{p}}_n(\mathbb{C})$ donné par $2i\pi X_{ij}(g) \mapsto X_{ij}(g)$, $2i\pi X_k(q) \mapsto X_k(q)$.

Montrons la surjectivité de $L_{2i\pi,\rho}$. L’espace vectoriel $\text{gr}_1 \widehat{\mathfrak{p}}_n = \mathfrak{p}_n^1$ est engendré par les $X_{ij}(g)$ ($i < j$) et les $X_k(p)$, qui appartiennent à l’image de $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}$. En effet, $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}([\log(x_{ij}(g))]_1) = X_{ij}(g)$ et $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}([\log(x_k(p))]_1) = X_k(p)$. Ainsi, $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}$ est surjectif car \mathfrak{p}_n est engendrée en degré un. Par conséquent, $L_{2i\pi,\rho}$ est surjectif. \square

5.3. L’isomorphisme sur \mathbb{C} . —

LEMME 5.5. — *L’espace $\text{gr}_1 \text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$ est engendré par les classes des $\log(x_{ij}(g))$ (pour $1 \leq i < j \leq n$ et $g \in G$) et celles des $\log(x_k(q))$ pour $k \in [1, n]$ et $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}_*^1$.*

Démonstration. — Il suffit d’appliquer (28) à Γ_n en tenant compte de la proposition 3.4. \square

PROPOSITION 5.6. — *Les morphismes $\phi_{\mathbb{k}} : \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{k}) \rightarrow \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{k}))$ et $L_{2i\pi,\rho} : \text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) \rightarrow \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{C})$ sont des isomorphismes d’algèbres de Lie filtrées (où \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle).*

Démonstration. — Posons $\theta = \phi_{\mathbb{C}} \circ L_{2i\pi,\rho}$. On a les égalités :

$$\text{gr}\theta([\log(x_{ij}(g))]_1) = [\log(x_{ij}(g))]_1 \quad \text{et} \quad \text{gr}\theta([\log(x_i(g))]_1) = [\log(x_i(g))]_1.$$

Donc, $\text{gr}\theta$ est l'identité d'après le lemme 5.5. On en déduit que $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}$ est un isomorphisme (on a vu que $\text{gr}L_{2i\pi,\rho}$ est surjectif) et donc $\text{gr}\phi_{\mathbb{C}}$ est aussi un isomorphisme. Compte tenu de la construction de $\phi_{\mathbb{C}}$, on en déduit que l'application $\text{gr}\phi_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme ce qui implique que $\text{gr}\phi_{\mathbb{k}}$ est un isomorphisme pour tout \mathbb{k} de caractéristique nulle. Ce qui prouve que les isomorphismes de la proposition sont des isomorphismes d'algèbres de Lie filtrées. \square

6. L'isomorphisme entre $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$, $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q})$

Dans cette section, on montre que les algèbres de Lie $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$, $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q})$ sont isomorphes. Pour cela, on construit un schéma $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et un schéma en groupes $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$ (sous-section 6.1) associés à des algèbres de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{h} , et on montre que $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un torseur sous $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$ (sous-section 6.2). On montre que l'isomorphisme construit en proposition 5.6 est un point complexe de $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On rappelle un résultat permettant d'établir l'existence de points rationnels dans certains torseurs (sous-section 6.2). On en déduit l'existence de l'isomorphisme annoncé (sous-section 6.3).

6.1. Les schémas $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$. — Dans cette sous-section, on construit des schémas conduisant à la définition d'un système projectif de torseurs. On considère deux \mathbb{Q} -algèbres de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{h} filtrées complètes de filtrations respectives $\{F_i \mathfrak{g}\}_{i \geq 1}$ et $\{F_i \mathfrak{h}\}_{i \geq 1}$. On suppose que $\text{gr } \mathfrak{g}$ et $\text{gr } \mathfrak{h}$ sont engendrées par leurs composantes de degré un, que ces composantes sont de dimension finie et qu'on a un isomorphisme fixé $\psi : \mathfrak{g}/F_2 \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}/F_2 \mathfrak{h}$ entre ces composantes de degré un. On pose $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}/F_i \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}/F_i \mathfrak{h}$. Ainsi, on a : $\mathfrak{g} = \varprojlim \mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{h} = \varprojlim \mathfrak{h}_i$. Pour \mathfrak{K} une algèbre de Lie et $k \geq 1$, on note $\mathcal{C}_k \mathfrak{K}$ le k -ième terme de la suite centrale descendante : $\mathcal{C}_1 \mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ et $\mathcal{C}_{k+1} \mathfrak{K} = [\mathcal{C}_k \mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$.

Enfin, un \mathbb{Q} -schéma affine est vu comme un foncteur représentable des \mathbb{Q} -anneaux dans les ensembles et on définit un \mathbb{Q} -schéma en groupes pro-unipotent comme la limite inverse d'un système projectif de \mathbb{Q} -schémas en groupes algébriques unipotents. On utilisera parfois \mathbb{Q} -groupe au lieu de \mathbb{Q} -schéma en groupes.

6.1.1. Le schéma $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. — On va définir un système projectif de \mathbb{Q} -schémas affines ; on définira $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ comme la limite inverse de ce système projectif.

LEMME 6.1. — *L'image de $F_r \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g}_i est $\mathcal{C}_r \mathfrak{g}_i$, le r -ième terme de la suite centrale descendante de \mathfrak{g}_i .*

Démonstration. — Notons $F_r \mathfrak{g}_i$ l'image de $F_r \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g}_i et montrons que $\mathcal{C}_r \mathfrak{g} = F_r \mathfrak{g}_i$. Comme la filtration $F_r \mathfrak{g}$ est décroissante et que $\mathcal{C}_i \mathfrak{g} \subset F_i \mathfrak{g}$, il suit de la définition de \mathfrak{g}_i que $\mathcal{C}_r \mathfrak{g}_i = F_r \mathfrak{g}_i = 0$, pour $r \geq i$. Ce qui montre la proposition pour $r \geq i$. Le fait que $\text{gr } \mathfrak{g}$ soit engendrée en degré un est équivalent à dire que $\mathcal{C}_r \mathfrak{g} + F_{r+1} \mathfrak{g} = F_r \mathfrak{g}$ pour $r \geq 1$. Donc, par projection on a $\mathcal{C}_r \mathfrak{g}_i + F_{r+1} \mathfrak{g}_i = F_r \mathfrak{g}_i$. Cette dernière égalité pour $r = i - 1$ donne $\mathcal{C}_{i-1} \mathfrak{g}_i = \mathcal{C}_{i-1} \mathfrak{g}_i + \mathcal{C}_i \mathfrak{g}_i = F_{i-1} \mathfrak{g}_i$ car $F_i \mathfrak{g}_i = \mathcal{C}_i \mathfrak{g}_i$. Enfin, une récurrence descendante sur $r \leq i$ montre la proposition. \square

Soit $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ le \mathbb{Q} -schéma algébrique qui à un \mathbb{Q} -anneau R associe l'ensemble $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)(R)$ des isomorphismes de $\mathfrak{g}_i \otimes R$ dans $\mathfrak{h}_i \otimes R$ dont l'abélianisé s'identifie à $\psi \otimes id_R : \mathfrak{g}_2 \otimes R \rightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes R$ via les identifications canoniques $\mathfrak{g}_i^{ab} \simeq \mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{h}_i^{ab} \simeq \mathfrak{h}_2$ (voir lemme 6.1).

PROPOSITION 6.2. — *Les schémas $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ forment naturellement un système projectif :*

$$\cdots \longrightarrow \underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2) \longrightarrow \underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1);$$

on notera $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ la limite de ce système. Pour R un \mathbb{Q} -anneau, $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(R)$ est l'ensemble des isomorphismes d'algèbres de Lie filtrées $\mathfrak{g} \widehat{\otimes} R \longrightarrow \mathfrak{h} \widehat{\otimes} R$ qui induisent l'isomorphisme $\psi \otimes id_R$.

Démonstration. — L'image des idéaux $F_k \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ (respectivement $F_k \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$) dans \mathfrak{g}_i (respectivement \mathfrak{h}_i) étant les idéaux caractéristiques $\mathcal{C}_k \mathfrak{g}_i$ (lemme 6.1), les $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ forment un système projectif comme annoncé.

Enfin, un isomorphisme filtré f de $\mathfrak{g} \widehat{\otimes} R$ dans $\mathfrak{h} \widehat{\otimes} R$ est entièrement déterminé par la donnée d'isomorphismes f_j faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \mathfrak{g}_i \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{g}_{i+1} \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{g}_{i+2} \otimes R & \longleftarrow \cdots \\ & & f_i \downarrow & & f_{i+1} \downarrow & & f_{i+2} \downarrow & \\ \cdots & \longleftarrow & \mathfrak{h}_i \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{h}_{i+1} \otimes R & \longleftarrow & \mathfrak{h}_{i+2} \otimes R & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques. La condition " f induit $\psi \otimes id_R : \mathfrak{g}_2 \otimes R \longrightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes R$ " correspond à " f_i induit $\psi \otimes id_R : \mathfrak{g}_2 \otimes R \longrightarrow \mathfrak{h}_2 \otimes R$ via les identifications canoniques $\mathfrak{g}_i^{ab} \simeq \mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{h}_i^{ab} \simeq \mathfrak{h}_2$ ". Ce qui montre la dernière assertion de la proposition et achève la démonstration. \square

6.1.2. Le schéma $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$. — On va construire le \mathbb{Q} -schéma en groupes $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$.

Soit $\underline{\text{Aut}}(\mathfrak{g}_i)$ le foncteur qui associe à un \mathbb{Q} -anneau R le groupe des automorphismes d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_i \otimes R$. C'est un \mathbb{Q} -groupe algébrique. En effet, $\underline{\text{Aut}}(\mathfrak{g}_i)$ est un sous-foncteur en groupes de $\text{GL}(\mathfrak{g}_i)$, représentable par un quotient de $\mathcal{O}(\text{GL}(\mathfrak{g}_i))$, l'anneau de coordonnées de $\text{GL}(\mathfrak{g}_i)$. On définit le \mathbb{Q} -groupe algébrique $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$ comme étant le noyau du morphisme naturel $\underline{\text{Aut}}(\mathfrak{g}_i) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_i^{ab})$.

PROPOSITION 6.3. — *Les $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$ sont des \mathbb{Q} -groupes algébriques unipotents, ils forment naturellement un système projectif :*

$$\cdots \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_2) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_1),$$

de limite $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$ pro-unipotente. Pour un anneau \mathbb{Q} -anneau R , $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})(R)$ est l'ensemble des automorphismes d'algèbre de Lie filtrée de $\mathfrak{g} \hat{\otimes} R$ induisant l'identité sur $\mathfrak{g}/F_2\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Le monomorphisme naturel $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_i)$ fournit une représentation linéaire fidèle de dimension finie de $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$, lequel est algébrique. Le drapeau $\mathcal{C}_{n_i}\mathfrak{g}_i \subset \mathcal{C}_{n_i-1}\mathfrak{g}_i \subset \cdots \subset \mathcal{C}_0\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ (n_i est la classe de nilpotence de \mathfrak{g}_i) est stable par $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$. Comme $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$ est le noyau de $\underline{\text{Aut}}(\mathfrak{g}_i) \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}_i^{ab})$, il agit trivialement sur $\mathcal{C}_k\mathfrak{g}_i/\mathcal{C}_{k+1}\mathfrak{g}_i$ pour $1 \leq k < n_i$. Ce qui montre que $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$ est unipotent.

Enfin, remarquons que $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$ n'est autre que $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ pour $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ et $\psi = id_{\mathfrak{g}_2}$. Donc, le reste de la proposition est une conséquence de la proposition 6.2 et de la définition d'un groupe pro-unipotent. \square

6.2. Torseurs et algèbres de Lie. — Dans cette partie on rappelle la notion de torseur, on montre que $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un torseur sous $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$ et on montre qu'un tel torseur a des points rationnels dans certaines conditions.

DÉFINITION 6.4. — *Un \mathbb{Q} -torseur est un \mathbb{Q} -schéma X , muni d'une action à gauche d'un \mathbb{Q} -schéma en groupes H telle que l'action de $H(\mathbb{k})$ sur $X(\mathbb{k})$ est libre et transitive quand $X(\mathbb{k})$ est non-vide. On dit que X est un torseur sous H .*

Soit $\cdots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$ un système projectif de \mathbb{Q} -schémas, $X = \varprojlim X_i$ sa limite projective et $H = \varprojlim H_i$ un \mathbb{Q} -schéma en groupes pro-unipotent.

PROPOSITION 6.5 ([8]). — *Supposons que les X_i forment un système de torseurs compatible sous les H_i et que $X(\mathbb{C})$ est non vide, alors $X(\mathbb{Q})$ est non vide.*

PROPOSITION 6.6. — *Chaque $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ est un torseur sous l'action de $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g}_i)$; leur limite inverse est $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ qui est un torseur sous l'action de $\underline{\text{Aut}}_1(\mathfrak{g})$*

Démonstration. — Immédiat. \square

En combinant les propositions 6.5 et 6.6, on obtient :

COROLLAIRE 6.7. — *Si $\underline{\text{Iso}}_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ alors \mathfrak{g} et \mathfrak{h} sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie filtrées.*

6.3. Preuve. — On va montrer :

THÉORÈME 6.8. — *Les algèbres de Lie $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$, $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q})$ sont isomorphes en tant qu’algèbres de Lie filtrées.*

Démonstration. — Le quotient $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))/F_2\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ s’identifie canoniquement à l’espace $\text{gr}_1\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q})) = \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))/F_2\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$. Notons ψ_n cette identification. Considérons le \mathbb{Q} -schéma

$$X_{\Gamma_n} = \underline{\text{Iso}}_1(\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q})), \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q})))$$

comme dans la section précédente pour $\psi = \psi_n$. L’isomorphisme $\theta = \phi_{\mathbb{C}} \circ L_{2i\pi, \rho}$ (de la proposition 5.6 et sa preuve) est un élément de $X_{\Gamma_n}(\mathbb{C})$. En effet, on a

$$\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) = \text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q})) \widehat{\otimes} \mathbb{C}, \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{C})) = \text{gr}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q})) \widehat{\otimes} \mathbb{C}$$

et on a vu que $\text{gr}\theta$ est l’identité et donc il induit ψ_n . Par conséquent, $\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ et $\widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ sont isomorphes en tant qu’algèbres de Lie filtrées d’après le corollaire 6.7. Le fait que $\phi_{\mathbb{Q}} : \widehat{\mathfrak{p}}_n(G)(\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\text{gr}}\text{Lie}(\Gamma_n(\mathbb{Q}))$ est un isomorphisme provient de la proposition 5.6. \square

Remerciements. — Je tiens à remercier Benjamin Enriquez pour sa lecture critique et ses nombreux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN – « Theory of braids », *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), p. 101–126.
- [2] R. BEZRUKAVNIKOV – « Koszul DG-algebras arising from configuration spaces », *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 2, p. 119–135.
- [3] D. CALAQUE, B. ENRIQUEZ & P. ETINGOF – « Universal KZB equations : the elliptic case », in *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser Boston, Inc., 2009, p. 165–266.
- [4] D. C. COHEN – « Monodromy of fiber-type arrangements and orbit configuration spaces », *Forum Math.* **13** (2001), no. 4, p. 505–530.
- [5] F. R. COHEN, T. KOHNO & M. A. XICOTÉNCATL – « Orbit configuration spaces associated to discrete subgroups of $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 12, p. 2289–2300.
- [6] V. G. DRINFELD – « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ », *Leningrad Math. J.* **2** (1991), no. 4, p. 829–860.
- [7] B. ENRIQUEZ – « Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators », *Selecta Math. (N.S.)* **13** (2007), no. 3, p. 391–463.
- [8] _____, « Elliptic associators », *Selecta Math. (N.S.)* **20** (2014), no. 2, p. 491–584.

- [9] ———, « Flat connections on configuration spaces and braid groups of surfaces », *Adv. Math.* **252** (2014), p. 204–226.
- [10] W. FULTON & R. MACPHERSON – « A compactification of configuration spaces », *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), no. 1, p. 183–225.
- [11] M. KERVAIRE – « Les noeuds de dimensions supérieures », *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), p. 225–271.
- [12] T. KOHNO – « On the holonomy lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces », *Nagoya Math. J.* **92** (1983), p. 21–37.
- [13] I. KŘÍŽ – « On the rational homotopy type of configuration spaces », *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), no. 2, p. 227–237.
- [14] F. PAULIN – « Groupes et géométries », 2010–2014, Cours de seconde année de mastère, p. 401.
- [15] D. QUILLEN – « On the associated graded ring of a group ring », *J. Algebra* **10** (1968), p. 411–418.
- [16] ———, « Rational homotopy theory », *Ann. of Math. (2)* **90** (1969), p. 205–295.
- [17] J. SMITH – « Complements of codimension-two submanifolds. II. Homology below the middle dimension », *Illinois J. Math.* **25** (1981), no. 3, p. 470–497.