*Bull. Soc. Math. France*
**147** (1), 2019, p. 91-121

# UN CRITÈRE DE RÉCURRENCE POUR CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES

PAR CAROLINE BRUÈRE

RÉSUMÉ. — Soit $G$ un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, $H$ un sous-groupe algébrique de $G$, $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$ à moment exponentiel fini dont le support engendre un sous-semi-groupe Zariski-dense de $G$. Soit $X = G/H$ le quotient de $G$ par $H$. On étudie la chaîne de Markov sur $X$ de probabilité de transition $P_x = \mu * \delta_x$ pour $x \in X$. On montre que soit pour tout $x \in X$, presque toute trajectoire partant de $x$ est transiente, soit pour tout $x \in X$, presque toute trajectoire partant de $x$ est récurrente. Cette récurrence est en fait uniforme, c'est-à-dire que pour tout point $x \in X$, presque toute trajectoire partant de $x$ revient infiniment souvent dans un compact $C \subset X$ ne dépendant pas de $x$. De plus, on donne un critère de récurrence en fonction de $G$, $H$, et $\mu$.

ABSTRACT (*Recurrence criterion for homogeneous spaces*). — Let $G$ be a real connected algebraic semi-simple Lie group, and $H$ an algebraic subgroup of $G$. Let $\mu$ be a probability measure on $G$, with finite exponential moment, whose support spans a Zariski-dense subsemigroup of $G$. Let $X = G/H$ be the quotient of $G$ by $H$. We study the Markov chain on $X$ with transition probability $P_x = \mu * \delta_x$ for $x \in X$. We prove that either for every $x \in X$, almost every trajectory starting from $x$ is transient or for every $x \in X$, almost every trajectory starting from $x$ is recurrent. In fact, this recurrence is uniform over all $X$, i.e. there exists a compact set $C \subset X$ such that for each point $x \in X$, every trajectory starting in $x$ almost surely returns to $C$ infinitely often. Furthermore, we give a criterion for recurrence depending on $G$, $H$, and $\mu$.

*Texte reçu le 24 mai 2016, modifié le 19 juin 2017, accepté le 28 août 2017.*

CAROLINE BRUÈRE, Lycée Colbert, 7 impasse Colbert, 57100 Thionville • *E-mail :* `caroline.arvis@ac-nancy-metz.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 37B20, 37A30, 22E46, 22D40.

Mots clefs. — récurrence, groupe de Lie semi-simple réel, transience, chaine de Markov espace homogène.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2019/91/$ 5.00
doi:10.24033/bsmf2776

## 1. Remerciements

Merci à Yves Benoist pour son aide précieuse dans l'élaboration de cet article, à Philippe Bougerol pour sa suggestion avisée sur la partie 5, et au rapporteur pour ses conseils détaillés et constructifs.


## 2. Introduction

Un célèbre théorème de Pólya (1928) dit qu'étant donnés $d \geq 1$ un entier et $\mu$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, à moment exponentiel fini, centrée, la marche aléatoire correspondante sur $\mathbb{R}^d$ est récurrente, si et seulement si $d$ vaut 1 ou 2. Nous allons démontrer un résultat analogue dans le cas d'une marche aléatoire sur certains espaces homogènes associés à des groupes de Lie semi-simples.

Soit $G$ un groupe topologique localement compact à base dénombrable, $H$ un sous-groupe fermé de $G$, et $X = G/H$ le quotient de $G$ par $H$. Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$. La *marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$* est la chaîne de Markov sur l'espace $X$ de probabilité de transition $P_x = \mu * \delta_x$ pour $x \in X$. Notons $B = G^{\mathbb{N}^*}$, et $\beta = \mu^{\mathbb{N}^*}$ la mesure de probabilité produit sur $B$.

Définition 2.1. — On dit que la marche aléatoire sur $X$ est *récurrente* en un point $x \in X$ s'il existe un compact $C$ de $X$ tel que

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \in C\}\right) = 1.$$

On dit que la marche est *transiente* en un point $x \in X$ si pour tout compact $C$ de $X$, on a

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \notin C\}\right) = 1.$$

On dit que la marche aléatoire est récurrente (respectivement transiente) sur tout $X$ si elle l'est en tout point. On dit que la marche aléatoire sur $X$ est *uniformément récurrente sur tout $X$* s'il existe un compact $C$ de $X$ tel que pour tout $x \in X$

$$\beta\left(\{b \in B \,|\, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \in C\}\right) = 1.$$

Remarquons qu'avec ces définitions, un point $x \in X$ peut être récurrent sans que presque toute trajectoire revienne dans tout voisinage de $x$. Par exemple, dans le cas de l'action sur l'espace projectif de dimension $m-1$ d'un sous-groupe de Schottky Zariski-dense de $\mathrm{SL}(m)$, engendré par deux matrices, l'espace $\omega$-limite de presque toutes les trajectoires est un compact de Cantor ; tous les points de l'espace projectif sont récurrents selon notre définition.

Dans le cas où $\mu$ est étalée, c'est-à-dire absolument continue par rapport à la mesure de Haar, il existe des théorèmes de dichotomie, i.e. des conditions pour que les états soient tous récurrents ou tous transients, notamment le théorème de Hennion et Roynette [18], affiné par Elie dans [10], et dont une preuve plus courte est fournie par Revuz dans [20]. Ce théorème concerne une classe très large d'espaces homogènes. Cependant, la condition "$\mu$ étalée" est très restrictive. Elle ne permet par exemple pas de traiter le cas décrit ci-dessus d'une mesure à support fini engendrant un semi-groupe discret Zariski-dense dans $G$. Nous allons donner un critère de récurrence n'utilisant pas cette condition, sur une classe plus restreinte d'espaces homogènes.

Considérons pour $G$ un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, et pour $H$ un sous-groupe algébrique de $G$. Munissons $G$ d'une mesure de probabilité $\mu$, dont le support engendre un semi-groupe $\Gamma_\mu$ Zariski-dense dans $G$. Mentionnons tout d'abord les travaux sur la récurrence sur les espaces homogènes de Guivarc'h et Raja [15] et [16], de Benoist et Quint [5, 4], et [3]. Plusieurs problèmes apparaissent. Les trajectoires issues de chaque point ont-elles presque toutes le même comportement, i.e. la marche est-elle soit récurrente, soit transiente en chaque point ? Si c'est le cas, a-t-on un théorème de dichotomie, i.e. la marche est-elle soit récurrente sur tout $X$, soit transiente sur tout $X$ ? Enfin, quels critères permettent, selon $G$, $H$, et $\mu$, de dire si la marche aléatoire est transiente ou récurrente sur tout $X$ ?

Nous allons répondre par l'affirmative aux deux premières questions, dans le cadre défini plus haut, pour des mesures à moment exponentiel fini. Nous donnerons également une condition nécessaire et suffisante de récurrence. Commençons par une définition :

Définition 2.2. — Soit $G$ un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, dont on note $\kappa$ la projection de Cartan (voir la définition 6.8). Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$. On dit qu'elle est *à moment exponentiel fini* s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le moment d'ordre exponentiel $\alpha$ soit fini :

$$\int_G e^{\alpha||\kappa(g)||}\,\mathrm{d}\mu(g) < \infty.$$

On dit qu'elle est *Zariski-dense* si son support engendre un sous-semi-groupe $\Gamma_\mu$ de $G$ qui est Zariski-dense dans $G$.

Énonçons alors le théorème de dichotomie et le critère de récurrence.

Théorème 2.3. — ***(Théorème de dichotomie pour des marches aléatoires sur certains espaces homogènes)*** *Soit $G$ un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, et $H$ un sous-groupe algébrique de $G$. Notons $X$ l'espace homogène $X = G/H$. Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$ à moment exponentiel fini, et Zariski-dense. Alors la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est soit uniformément récurrente sur tout $X$, soit transiente sur tout $X$.*

Ce théorème est en fait un corollaire du théorème 2.4 suivant, qui décrit les cas où la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est récurrente, et ceux où elle est transiente sur tout $X$. Soit $N$ un sous-groupe unipotent maximal de $G$, $P$ le normalisateur de $N$, $A$ un sous-tore déployé maximal de $P$, et $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de $A$. Notons $\mathcal{P} = G/P$ la variété drapeau de $G$, $\sigma : G \times \mathcal{P} \to \mathfrak{a}$ le cocycle d'Iwasawa (cf. 3.4), et $\sigma_\mu$ sa moyenne, aussi appelée le vecteur de Lyapounov de $\mu$.

THÉORÈME 2.4. — ***(Critère de récurrence pour certains espaces homogènes)*** *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est uniformément récurrente sur tout $X$ si et seulement si $H$ contient un conjugué de $A'N$, où $A'$ est un sous-groupe de $A$ de codimension au plus 2, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}'$ contient la moyenne $\sigma_\mu$ du cocycle d'Iwasawa. Sinon, la marche est transiente sur tout $X$.*

La preuve des théorèmes sera donnée en 7. Remarquons d'abord qu'à conjugaison près, les sous-groupes algébriques $H$ de $G$ contiennent un sous-groupe cocompact de la forme $A'N'$, avec $A'$ et $N'$ des sous-groupes algébriques de $A$ et $N$ respectivement. Nous commencerons par montrer – c'est l'objet de la proposition 4.1 – que, si $N'$ est différent de $N$, la marche aléatoire est nécessairement transiente sur tout $X$. Cela permettra de se ramener à des groupes de la forme $A'N$, et à la récurrence ou transience d'un cocycle, le cocycle d'Iwasawa, sur un espace vectoriel réel. La démonstration utilisera des propriétés des opérateurs de transferts développées dans [7], et des arguments classiques de la démonstration du théorème de récurrence de Pólya (voir par exemple [23]). Un théorème de Conze et Schmidt [9, 22], qui donne la récurrence de certains cocycles si leur distribution asymptotique est normale, permettra ensuite de montrer une condition suffisante de récurrence, grâce au théorème central-limite pour le cocycle d'Iwasawa [12]. On montrera enfin que la récurrence est uniforme en montrant l'ergodicité d'un système dynamique fibré, grâce à des travaux de Guivarc'h sur l'exactitude [14].

## 3. Définitions et préliminaires

**3.1. La décomposition d'Iwasawa**. — Prenons à nouveau $G$ un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel. Notons $A$ un tore déployé maximal de $G$, $N$ un sous-groupe unipotent maximal de $G$, dont le normalisateur $P$ contient $A$, et $A_e$ la composante connexe de $A$ contenant l'identité. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée au groupe $G$, $\mathfrak{a}$ celle associée au tore $A$, et $\Sigma$ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$, sous l'action adjointe de $\mathfrak{a}$. Notons $\Sigma_+$ l'ensemble de racines positives associé au choix de $A$ et $N$, $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ la chambre de Weyl associée à $\Sigma_+$. Notons également $A_+ = \exp \mathfrak{a}_+ \subset A$.

DÉFINITION/PROPOSITION 3.1. — Il existe une écriture de $G$ sous la forme

$$G = KA_eN$$

où $K$ est un sous-groupe compact de $G$, appelée la *décomposition d'Iwasawa* de $G$. $G$ s'écrit alors également

$$G = KA_+K,$$

sa *décomposition de Cartan.*

On pourra voir [7, ch. 6] pour une preuve de l'existence de ces décompositions. La proposition suivante donne une décomposition analogue à la décomposition d'Iwasawa pour tout sous-groupe algébrique $H$ de $G$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit $H$ un sous-groupe algébrique de $G$. Il existe un sous-tore $A'$ de $A$ et un sous-groupe algébrique $N'$ de $N$ tels que, à conjugaison près, $A'N'$ soit un sous-groupe cocompact de $H$.*

*Preuve.* — $H$ est un sous-groupe de Lie algébrique de $G$ ; il a donc une décomposition de la forme

$$H = K'A''N'',$$

avec $K'$ un sous-groupe compact de $H$, $A''$ un tore déployé, et $N''$ un sous-groupe unipotent maximal normalisé par $A''$. Puisque tous les sous-groupes trigonalisables maximaux d'un groupe réductif sont conjugués [8, Thm 8.2], $A''N''$ est conjugué à un sous-groupe de $AN$. Supposons, pour simplifier, $A''N'' \subset AN$. On a alors $N'' \subset N$. D'après [8, Thm 11.6], tous les tores déployés maximaux de $AN$ sont conjugués dans $AN$. $A''$ est donc conjugué à un sous-tore $A'$ de $A$ dans $AN$ ; comme $N$ est normalisé par $AN$, les conjugués de $N''$ par des éléments de $AN$ sont des sous-groupes de $N$. Il existe donc $N' \subset N$ tel que $A''N''$ est conjugué à $A'N'$. □

Cette décomposition va permettre de définir un cocycle crucial pour l'étude des marches aléatoires sur l'espace homogène $X = G/H$.

**3.2. Le cocycle d'Iwasawa**. — Notons $\mathcal{P} = G/P$ la variété drapeau de $G$, et notons comme auparavant $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$ Zariski-dense, à moment exponentiel fini. Le fait suivant est dû à Furstenberg [11], Guivarc'h, Raugi [17], Goldsheid et Margulis [13].

PROPOSITION 3.3. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe sur $\mathcal{P}$ une unique mesure $\mu$-stationnaire, qu'on notera dorénavant $\nu$, appelée* mesure de Furstenberg. *Rappelons qu'une mesure $\nu$ est dite $\mu$-stationnaire, $\mu$-invariante, ou $\mu$-harmonique si elle vérifie la condition*

$$\nu = \mu * \nu = \int_G g_*\nu \,\mathrm{d}\mu(g).$$

On peut alors définir le cocycle d'Iwasawa, en notant $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de $A$ :

DÉFINITION 3.4. — Le *cocycle d'Iwasawa* de $G$ est l'application $\sigma : G \times \mathcal{P} \to \mathfrak{a}$ telle que pour tout $g \in G$, et pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, en notant $k$ un élément de $K$ tel que $\eta = kP$, on ait

$$gk \in K \exp(\sigma(g,\eta))N.$$

LEMME 3.5. — *Le cocycle d'Iwasawa est défini de manière unique, et c'est bien un cocycle : on a pour tous $g, g' \in G$, pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, l'égalité*

$$\sigma(gg',\eta) = \sigma(g,g'\eta) + \sigma(g',\eta)$$

On trouvera une démonstration du lemme dans [7].

DÉFINITION 3.6. — On note alors $\sigma_\mu$ la moyenne du cocycle d'Iwasawa :

$$\sigma_\mu = \int_{G\times\mathcal{P}} \sigma(g,\eta)\,\mathrm{d}\mu(g)\,\mathrm{d}\nu(\eta).$$

On appelle également *vecteur de Lyapounov de $\mu$* cette quantité $\sigma_\mu$.

**3.3. La fonction de Green**. — On va fournir dans cette partie une condition suffisante de transience dans un cadre large. Supposons plus généralement que $G$ est un groupe topologique localement compact, et $X$ un espace topologique localement compact muni d'une action continue de $G$. Soit $\mu$ une mesure de probabilité borélienne sur $G$. Soit $C$ un compact de $X$.

DÉFINITION 3.7. — Notons $G_x^n(C)$ l'espérance du nombre de fois où une trajectoire $b_n \cdots b_1 x$ revient dans $C$ jusqu'au temps $n$ :

$$G_x^n(C) = \int_{b\in B} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_C(b_k \cdots b_1 x)\,\mathrm{d}\beta(b).$$

La *fonction de Green en $x \in X$ de la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$* est l'application $G_x$ qui à un compact $C$ de $X$ associe l'espérance $G_x(C)$ du nombre de retours dans $C$ d'une trajectoire issue de $x$ :

$$G_x(C) = \lim_{n\to\infty} G_x^n(C) \in [0,\infty].$$

On peut en déduire la condition suffisante suivante de transience de la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ en un point $x \in X$ :

LEMME 3.8. — *Soit $x \in X$. Si pour tout compact $C$ de $X$, la fonction de Green $G_x(C)$ est finie, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} G_x^n(C) < \infty,$$

*alors $x$ est transient.*

*Preuve.* — Soit $x \in X$ tel que pour tout compact $C$ de $X$, la fonction de Green $G_x(C)$ soit finie. Soit $C$ un compact de $X$. Ecrivons la quantité $G_x(C)$ :

$$\begin{aligned} G_x(C) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b\in B} \mathbb{1}_C(b_k\cdots b_1 x)\,\mathrm{d}\beta(b) \\ &= \int_{b\in B} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_C(b_k\cdots b_1 x)\,\mathrm{d}\beta(b) \end{aligned}$$

Comme $G_x(C)$ est finie, on en déduit que pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_C(b_k\cdots b_1 x)$ est finie, et $x$ est bien transient. □

## 4. Une première condition suffisante de transience

On suppose de nouveau que $G$ est un groupe de Lie algébrique connexe semi-simple réel, et que $H$ est un sous-groupe algébrique de $G$.

**4.1. Un critère de transience**. — La proposition suivante va permettre de simplifier le problème, et de se ramener au cas où $H$ contient $N$.

Proposition 4.1. — *Si le sous-groupe $H$ de $G$ ne contient pas de conjugué de $N$, alors la marche aléatoire sur $X = G/H$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente sur tout $X$.*

*Preuve de la proposition 4.1.* — Raisonnons par l'absurde en supposant que $H$ ne contient pas $N$, et que la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ n'est pas transiente. Rappelons le théorème de Chevalley sur une représentation du quotient $G/H$, dont on pourra trouver une preuve par exemple dans [2, pg 38].

Proposition 4.2. — *(Chevalley) Soit $G$ un groupe algébrique réel et $H \subset G$ un sous-groupe algébrique de $G$. Alors il existe une représentation algébrique de $G$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V$ et un point $x_0 \in \mathbb{P}(V)$ tel que le stabilisateur* $\operatorname{Stab} x_0$ *de $x_0$ est égal à $H$.*

Notons $X_0$ l'ensemble des points de $X$ invariants par un conjugué de $N$. L'ensemble $X_0$ est soit $X$ tout entier, soit l'ensemble vide. On se ramène donc à montrer que $X_0$ contient au moins un élément. Soit $(V, \rho)$ une représentation (réelle) de $G$ telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{P}(V)$ vérifiant $H = \operatorname{Stab} x_0$ et telle que l'orbite $G\cdot x_0$ de $x_0$ sous l'action de $G$ engendre l'espace vectoriel $V$, donnée par la proposition 4.2. On munit $\operatorname{End}(V)$ d'une norme $||\cdot||$ invariante par l'action de $G$ à gauche et à droite. On a alors l'isomorphisme de $G$-espaces $G\cdot x_0 \simeq X$. Notons $\mathbb{P}(V)^N$ l'ensemble des points de $\mathbb{P}(V)$ fixés par l'action de $N$. Alors on peut écrire $X_0 \simeq G\cdot\mathbb{P}(V)^N \cap G\cdot x_0$. Notons $B = G^{\otimes\mathbb{N}^*}$, et $\beta = \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}$. Pour $b \in B$, notons $b_n\cdots b_1 = p_n(b) = p_n$, et $\pi$ une valeur d'adhérence de la suite $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\geq 1}$. Notons $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\in S}$ une sous-suite de $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\pi$. On a besoin des deux lemmes suivants, qui sont démontrés dans [6] :

Lemme 4.3. — *La convergence vers $\pi$ de la suite $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\in S}$ est uniforme sur les compacts de $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\operatorname{Ker}\pi)$.*

*Preuve.* — Ecrivons la décomposition de Cartan du groupe $G$ :

$$G = KA_eK.$$

Les éléments $p_n$ peuvent s'écrire sous la forme

$$p_n = k_{1n}a_nk_{2n},$$

où les $k_{i,n}$ sont dans $K$, et les $a_n$ sont dans $A_e$. Puisque $K$ est compact, on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite de $(p_n)_{n\in S}$, que les suites $(k_{in})_{n\in S}$ convergent vers des éléments $k_i$ de $K$. Il existe alors un endomorphisme $a \in \operatorname{End} V$, tel que

$$\lim_{n\to\infty, n\in S} \frac{\rho(a_n)}{||\rho(a_n)||} = a$$

et

$$\pi = \rho(k_1)a\rho(k_2).$$

Ainsi, il suffit de montrer que la convergence de $(\rho(a_n))_{n\in S}$ vers $a$ est uniforme sur tout compact de $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\operatorname{Ker}\pi)$ ; comme $A$ est un tore déployé, il existe une base orthonormée de $V$ dans laquelle les éléments de $\rho(A)$ sont diagonaux, et on a la convergence uniforme sur tout compact voulue. □

Lemme 4.4. — *Pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour toute valeur d'adhérence $\pi$ de la suite $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\geq 1}$, on a $\mathbb{P}(\operatorname{Im}\pi) \subset G \cdot \mathbb{P}(V)^N$.*

*Preuve.* — C'est en fait le [6, Lemme 4.3]. Rappelons qu'on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associée au groupe $G$, et $\Sigma$ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$, sous l'action adjointe de $\mathfrak{a}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ l'espace radiciel associé dans $\mathfrak{g}$. Notons $\Sigma_+$ l'ensemble de racines positives associé au choix de $A$ et $N$, et choisissons $\Pi \subset \Sigma_+$ un sous-ensemble de racines simples. Notons $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Sigma_+}\mathfrak{g}^\alpha$ l'algèbre de Lie de $N$, et $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ la chambre de Weyl associée à $\Sigma_+$. Choisissons une valeur d'adhérence $\pi$ de la suite $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\geq 1}$, pour un $b \in B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudions la décomposition de Cartan de $p_n$ :

$$p_n = k_{1,n} \exp X_n k_{2,n},$$

avec $X_n \in \mathfrak{a}_+$, et $k_{1,n}, k_{2,n} \in K$. Par compacité de $K$, on peut supposer que les suites $k_{1,n}$ et $k_{2,n}$ convergent vers des limites $k_{1,\infty}, k_{2,\infty}$. On se ramène donc à l'étude de la suite des $g_n = \exp X_n$. Notons $V = \oplus_{\chi\in\Sigma(\rho)}V_\chi$ la décomposition de $V$ en espaces de poids. On peut alors écrire $\rho(g_n) = (\exp \chi(X_n))_{\chi\in\Sigma(\rho)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Notons $\left(\frac{\rho(g_n)}{||\rho(g_n)||}\right)_{n\in S}$ la sous-suite de $\left(\frac{\rho(g_n)}{||\rho(g_n)||}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\pi$. Notons alors $\Sigma' \subset \Sigma(\rho)$ l'ensemble de caractères de $\Sigma(\rho)$ tels que

- pour tous $\chi, \chi' \in \Sigma'$, on ait
$$\limsup_{n\in S} |\chi(X_n) - \chi'(X_n)| < \infty,$$
- pour tous $\chi \in \Sigma'$, $\chi' \notin \Sigma'$, on ait
$$\lim_{n\in S} \chi(X_n) - \chi'(X_n) = +\infty.$$

En passant à la limite, on obtient l'inclusion
$$\operatorname{Im} \pi \subset \oplus_{\chi\in\Sigma'} V_\chi.$$
Soient maintenant $\alpha \in \Sigma_+$, et $\chi \in \Sigma'$. Considérons l'action de $\mathfrak{g}^\alpha$ sur $V_\chi$. On a l'inclusion $\mathfrak{g}^\alpha \cdot V_\chi \subset V_{\alpha+\chi}$. Mais, comme $\alpha$ est une racine positive, presque tout $b \in B$ vérifie la propriété
$$\lim_{n\to\infty} \alpha(X_n) = \infty,$$
par la loi des grands nombres et le théorème de positivité du premier exposant de Lyapounov (voir [7, Thm 10.9]). La racine $\chi + \alpha$ ne peut donc pas être un poids de $V$. On en déduit
$$\mathfrak{g}^\alpha \cdot V_\chi = \{0\},$$
ce qui prouve le résultat. □

Reprenons la démonstration de la proposition 4.1. Comme on suppose la marche aléatoire non-transiente, on peut choisir $x \in X$ tel qu'il existe un compact $C_0 \subset X$ tel que la probabilité qu'une trajectoire issue de $x$ ne passe qu'un nombre fini de fois dans $C_0$ soit strictement plus petite que 1, c'est-à-dire
$$\beta\left(\{b \in B \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : b_n \cdots b_1 x \notin C_0\}\right) < 1.$$
Choisissons donc $b \in B$ tel que la trajectoire issue de $x$ associée revienne une infinité de fois dans $C_0$. La suite des $(b_n \cdots b_1 x)_{n\geq 1}$ a donc une valeur d'adhérence, $y \in C_0 \subset X$ ; soit $(b_n \cdots b_1 x)_{n\in S}$ une sous-suite extraite convergeant vers $y$. Extrayons une sous-suite de $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\in S}$ convergeant vers $\pi$, qu'on note $\left(\frac{\rho(p_n)}{||\rho(p_n)||}\right)_{n\in S'}$. Alors on obtient
$$y = \lim_{n\to\infty, n\in S'} \frac{\rho(p_n)(x)}{||\rho(p_n)||} = \pi(x).$$
D'après le lemme 4.4, le point $y$ de $X \simeq G \cdot x_0$ est dans $G \cdot \mathbb{P}(V)^N \cap G \cdot x_0$, et donc $X_0$ est non-vide ! □

Il suffira donc d'étudier les cas où $H$ contient un conjugué de $N$.

**4.2. Simplification du problème**. — Dans le cas où $H$ contient un conjugué de $N$, le lemme 3.2 fournit un sous-tore $A'$ de $A$ tel que, à conjugaison près, $A'N$ est un sous-groupe cocompact de $H$. La récurrence d'une marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est alors liée au comportement du cocycle d'Iwasawa. Notons $\mathfrak{a}'$ l'algèbre de Lie de $A'$, et $E$ le quotient $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$. Notons

$$\overline{\sigma} : G \times \mathcal{P} \to E$$

le cocycle $p \circ \sigma$, où $p : \mathfrak{a} \to E$ est la projection canonique. Notons

$$\overline{\sigma_\mu} = p(\sigma_\mu) = \int_{G\times\mathcal{P}} \overline{\sigma}(g,\eta)\,\mathrm{d}\mu(g)\,\mathrm{d}\nu(\eta)$$

sa moyenne. Notons $\pi$ la projection canonique $\pi : X \to \mathcal{P}$. On obtient une action de $G$ sur $\mathcal{P} \times E$ via la formule

$$g \cdot (\eta, t) = (g \cdot \eta, t + \overline{\sigma}(g,\eta)),$$

pour tous $g \in G, \eta \in \mathcal{P}, t \in E$. En notant $\eta_0$ le point base de $\mathcal{P}$, on obtient que $A'N$ est inclus dans le stabilisateur de $(\eta_0, 0)$ sous l'action de $G$, et que l'application

$$\begin{cases} G/A'N \longrightarrow \mathcal{P} \times E \\ \quad g \quad\ \longmapsto g \cdot (\eta_0, 0) \end{cases}$$

est propre. Étudier la récurrence de la marche aléatoire induite par une mesure $\mu$ sur $G/H$ revient donc à étudier le cocycle $\overline{\sigma}$ sur $\mathcal{P}$. La récurrence et la transience de la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ en un point $x \in X$ s'écrivent alors de la manière suivante :

Lemme 4.5. — *La marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est récurrente en $x \in X$ si et seulement s'il existe un compact $C$ de $E$ tel que*

$$\beta\left(\{b \in B \mid \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \pi(x)) \in C\}\right) = 1.$$

*Elle est uniformément récurrente sur tout $X$ si et seulement s'il existe un réel $A > 0$ tel que*

$$\forall \eta \in \mathcal{P}, \forall t \in E, \beta(\{b \in B \mid \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : ||t + \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta)|| \leq A\}) = 1.$$

*Elle est transiente en $x \in X$ si et seulement si, pour tout compact $C$ de $E$, on a*

$$\beta\left(\{b \in B \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \pi(x)) \notin C\}\right) = 1.$$

En réécrivant le lemme 3.8, on obtient une condition suffisante de transience de la marche aléatoire utilisant le cocycle d'Iwasawa :

Lemme 4.6. — *Soit $x \in X$. Introduisons alors, pour tout compact de $C$ de $E$, la quantité $F_x(C)$ :*

$$F_x(C) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{g\in G} \mathbb{1}_C(\overline{\sigma}(g,x))\,\mathrm{d}\mu^{*k}(g)$$

*Si pour tout compact $C$ de $E$, la fonction de Green modifiée $F_x(C)$ est finie :*

$$F_x(C) < \infty$$

*alors la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente en $x$.*

On va donc à présent s'intéresser à la récurrence ou transience du cocycle $\overline{\sigma}$ sur $E$.

## 5. Une seconde condition suffisante de transience

On va supposer dans les deux prochaines parties que $H$ s'écrit sous la forme $H = A'N$. Rappelons qu'on note $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de $A$, $\mathfrak{a}'$ l'algèbre de Lie de $A'$, et $E$ le quotient $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$. Notons $d$ la dimension de $E$, $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Notons enfin à nouveau $\nu$ l'unique mesure $\mu$-invariante sur $\mathcal{P}$. Considérons la projection du cocycle d'Iwasawa $\overline{\sigma} : G \times \mathcal{P} \to E$. Ce qui suit est dans l'esprit de la démonstration du théorème de récurrence de Pólya proposée dans [23, §6, 7, 8].

**5.1. Opérateur de transfert associé à une mesure**. — Commençons par une définition.

Définition 5.1. — On dit qu'une fonction $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ est $\gamma$-Hölderienne pour $0 < \gamma \leq 1$ si on a

$$\sup_{x,x' \in \mathcal{P}} \frac{|\phi(x) - \phi(x')|}{d(x,x')^\gamma} < \infty.$$

On note alors

$$c_\gamma(\phi) = \sup_{x,x' \in \mathcal{P}} \frac{|\phi(x) - \phi(x')|}{d(x,x')^\gamma}.$$

On note $\mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P})$ l'ensemble des fonctions $\gamma$-Hölderiennes sur $\mathcal{P}$, qu'on munit de la norme $||\cdot||_\gamma$ suivante : pour $\phi \in \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P})$, on pose

$$||\phi||_\gamma = \sup_{\eta \in \mathcal{P}} |\phi(\eta)| + c_\gamma(\phi).$$

On note $||\cdot||_\gamma$ la norme d'opérateur associée. Comme $\mu$ est à moments exponentiels, il existe $\epsilon_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$ tels que pour tout $\gamma < \gamma_0$, pour tout $\theta \in E_{\mathbb{C}}^*$ vérifiant $|\Re(\theta)| < \epsilon_0$, *l'opérateur de transfert* associé à $\theta$ est défini par

$$P_\theta \begin{cases} \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \longrightarrow & \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \\ \quad \phi \quad \longmapsto & \eta \mapsto \int_{g \in G} e^{\theta \cdot \overline{\sigma}(g,\eta)} \phi(g \cdot \eta) \, \mathrm{d}\mu(g) \end{cases}.$$

Pour $\theta = 0$, on a le résultat suivant :

Proposition 5.2. — *Notons $N$ l'application linéaire*

$$N \begin{cases} \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad \phi \quad \longmapsto & \int_{\mathcal{P}} \phi(\eta)\,\mathrm{d}\nu(\eta) \end{cases}.$$

*Alors l'opérateur $P_0$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $||P_0||_\gamma \leq 1$
- $P_0\mathbb{1} = \mathbb{1}$
- $||P_{0\,|\,\mathrm{Ker}\,N}||_\gamma < 1$.

Une preuve se trouve dans [7, Prop 11.10]. Cette proposition s'étend aux opérateurs $P_\theta$, pour $\theta$ dans un voisinage de 0, par le théorème d'analyse fonctionnelle suivant, dont une preuve est fournie dans [7, Lem. 11.18], par exemple.

Proposition 5.3. — *Il existe un réel $0 < \gamma < 1$, un réel $\epsilon > 0$, un voisinage ouvert $U$ de $0$ dans $E^*_{\mathbb{C}}$, des fonctions*

$$\Lambda \begin{cases} U \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto \lambda_\theta \end{cases},$$

$$\Phi \begin{cases} U \longrightarrow \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \\ \theta \longmapsto \quad \phi_\theta \end{cases},$$

*analytiques sur $U$, et, pour tout $\theta$ dans $U$, une projection*

$$N_\theta : \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}\phi_\theta$$

*commutant avec $P_\theta$ telles que*

- $\lambda_0 = 1, \phi_0 = \mathbb{1}, N_0 = N$
- $\forall \theta \in U, P_\theta \phi_\theta = \lambda_\theta \phi_\theta$
- $\forall \theta \in U, |\lambda_\theta - 1| \leq \epsilon$
- $\forall \theta \in U, \nu(\phi_\theta) = 1$
- *Le rayon spectral de l'endomorphisme $P_{\theta\,|\,\mathrm{Ker}\,N_\theta}$ est inférieur à $1 - \epsilon$.*

On a, d'après [7, Lem. 11.19], le développement suivant de $\lambda_\theta$ :

Proposition 5.4. — *La différentielle de $\Lambda$ en $0$ est $\overline{\sigma_\mu}$, et sa différentielle seconde en $0$ est $\Phi_\mu + \overline{\sigma_\mu}^2$ pour une certaine forme bilinéaire $\Phi_\mu$ définie positive sur $E^*$.*

Enfin, le résultat suivant sur le rayon spectral des opérateurs $P_{i\theta}$ est dû à Le Page [19], Guivarc'h, et Benoist-Quint, on en trouvera une preuve dans [7, § 15.2 et Prop 17.1] :

Proposition 5.5. — *Pour tout $\theta \in E^* \setminus \{0\}$, l'opérateur $P_{i\theta}$ de $\mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P})$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.*

**5.2. Un second critère de transience**. — On peut à présent montrer la proposition suivante :

Proposition 5.6. — *Si $\sigma_\mu$ est non-nulle modulo $\mathfrak{a}'$ (i.e. si le cocycle $\overline{\sigma}$ est non-centré) ou si la dimension $d$ de $E$ est supérieure ou égale à 3, alors la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente.*

*Preuve.* — On va distinguer les deux cas.

Premier cas : $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}'$ et $d \geq 3$. — Pour $k \in \mathbb{N}$, et $\eta \in \mathcal{P}$, on note $\mu_{k,\,\eta}$ la probabilité sur $E$ image de $\mu^{*k}$ par l'application $g \mapsto \overline{\sigma}(g, \eta)$. On fixe un $v > 0$ tel que la boule $V$ de centre 0 et de rayon $v$ soit incluse dans l'ouvert $U$ donné par le théorème 5.3. Pour montrer que la marche est transiente en tout point, il suffit de montrer que la quantité

$$F_\eta(C) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{g\in G} \mathbb{1}_C(\overline{\sigma}(g,\eta))\,\mathrm{d}\mu^{*k}(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{k,\,\eta}(C)$$

est finie pour tout $\eta \in \mathcal{P}$ et tout compact $C$ de $E$, d'après le lemme 4.6. Fixons un tel $\eta$ et un tel $C$. On identifie $E$ et $\mathbb{R}^d$. Comme la fonction $\mathbb{1}_C$ est à support compact et valeurs positives, on peut trouver une fonction $\phi$ intégrable sur $\mathbb{R}^d$ majorant $\mathbb{1}_C$, de transformée de Fourier $\hat{\phi}$ positive à support compact . On obtient les inégalités :

$$\begin{aligned} F_\eta(C) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_E \phi(t)\,\mathrm{d}\mu_{k,\,\eta}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E^*} \hat{\phi}(\theta)\widehat{\mu_{k,\,\eta}}(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

On peut calculer la transformée de Fourier $\widehat{\mu_{k,\,\eta}}$ grâce aux opérateurs de transfert :

$$\widehat{\mu_{k,\,\eta}}(\theta) = \int_{t\in\mathbb{R}^d} e^{i\theta\cdot t}\,\mathrm{d}\mu_{k,\,\eta}(t) = \int_{g\in G} e^{i\theta\cdot\overline{\sigma}(g,\eta)}\,\mathrm{d}\mu^{*k}(g) = P_{i\theta}^k 1(x).$$

En divisant l'intégrale en deux parties, on obtient l'inégalité :

$$F_\eta(C) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{||\theta||\geq v} \hat{\phi}(\theta)\widehat{\mu_{k,\,\eta}}(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{||\theta||<v} \hat{\phi}(\theta)\widehat{\mu_{k,\,\eta}}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

En utilisant la proposition 5.3, on obtient, outre les fonctions $\Phi$ et $\Lambda$, deux fonctions analytiques sur $V$ :

$$\Psi \begin{cases} V \longrightarrow & \mathcal{H}^\gamma(\mathcal{P}) \\ \theta \longmapsto & \psi_\theta \in \operatorname{Ker} N_\theta \end{cases}$$

et

$$a \begin{cases} V \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto & a(\theta) \end{cases}$$

vérifiant, pour tout $\theta \in V$,

$$\mathbb{1} = a(\theta)\phi_\theta + \psi_\theta, \tag{1}$$

où on a noté $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1. On obtient l'égalité, pour tout $\theta \in V \cap E$ et tout $k$ :

$$P_{i\theta}^k 1(\eta) = a(i\theta)\lambda_{i\theta}^k \phi_{i\theta}(\eta) + P_{i\theta}^k \psi_{i\theta}(\eta).$$

Notons

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{||\theta|| \geq v, \theta \in E^*} \hat{\phi}(\theta) \widehat{\mu_{k,\eta}}(\theta) \,\mathrm{d}\theta, \\ I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{||\theta|| < v, \theta \in E^*} \hat{\phi}(\theta) P_{i\theta}^k \psi_{i\theta}(\eta) \,\mathrm{d}\theta, \\ I_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{||\theta|| < v, \theta \in E^*} \hat{\phi}(\theta) a(i\theta) \lambda_{i\theta}^k \phi_{i\theta}(\eta) \,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

On a

$$F_\eta(C) \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|$$

La première somme $|I_1|$ est majorée par une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 : en effet, d'après la proposition 5.5, le rayon spectral de $P_{i\theta}$ pour tout $||\theta|| \geq v$ est strictement inférieur à 1, et on a choisi $\hat{\phi}$ à support compact. Cette première somme est donc finie.

Etudions maintenant $|I_2|$. Comme l'application $\Psi$ est analytique, quitte à prendre une boule $V'$ plus petite, on peut la supposer bornée. D'après la proposition 5.3, le terme $P_{i\theta}^k \psi_{i\theta}(\eta)$ décroît exponentiellement quand $k$ augmente, et ce, uniformément en $\theta$. Comme $\hat{\phi}$ est bornée car à support compact, on en déduit que $|I_2|$ est finie.

Considérons à présent $|I_3|$. Les applications $a$ et $\Phi$ sont analytiques, et quitte à considérer une boule $V'$ plus petite, on peut supposer qu'elles sont bornées pour les normes appropriées. Comme $\hat{\phi}$ est bornée, il existe une constante $A$ telle que :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq A \int_{||\theta|| < v} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{i\theta}^k| \,\mathrm{d}\theta \\ &\leq A \int_{||\theta|| < v} \frac{1}{1 - |\lambda_{i\theta}|} \,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4, on a le développement suivant de la quantité $\lambda_{i\theta}$, pour $\theta \in E^*$ :

$$\lambda_{i\theta} = 1 + i\overline{\sigma_\mu}(\theta) - \frac{1}{2}(\phi_\mu(\theta) + \overline{\sigma_\mu}^2(\theta)) + o(||\theta||^2).$$

Par hypothèse, la moyenne $\overline{\sigma_\mu}$ est nulle, et on obtient le développement de $1-|\lambda_{i\theta}|$, pour $\theta \in E^*$ :

$$1-|\lambda_{i\theta}| = \frac{1}{2}\phi_\mu(\theta) + o(||\theta||^2).$$

Comme $\phi_\mu$ est une forme quadratique définie positive sur $E^*$, en choisissant $\upsilon$ assez petit, l'intégrale $\int_{||\theta||<\upsilon} \frac{1}{1-|\lambda_{i\theta}|}\,\mathrm{d}\theta$ converge pour $d \geq 3$, et donc $|I_3|$ est finie. Ainsi, $F_\eta(C)$ est fini, ce qui conclut la preuve de la transience dans le cas $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}'$.

Second cas : $\sigma_\mu \notin \mathfrak{a}'$. — La loi des grands nombres [7, Thm 3.9] donne, pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta) = \overline{\sigma_\mu}.$$

Puisque $\overline{\sigma_\mu}$ n'est pas nulle, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n\geq 1}$ quitte tout compact de $E$, ce qui conclut la preuve. □

## 6. Une condition suffisante de récurrence uniforme

Dans cette partie, nous allons montrer une condition suffisante de récurrence uniforme dans la proposition 6.7 qui permettra de conclure la preuve des théorèmes 2.3 et 2.4.

### 6.1. Récurrence presque partout. —

6.1.1. *Théorème de Schmidt-Conze.* — Un théorème de Schmidt, démontré dans [22], qui améliore un résultat de Conze, dans [9], va permettre d'obtenir une condition de récurrence du cocycle d'Iwasawa. On se place sur $(Z, \mathcal{Z}, \lambda)$, un espace borélien probabilisé, muni d'un automorphisme $T : Z \to Z$ préservant la mesure, supposée ergodique. On choisit un entier $d \geq 0$. On considère alors une application borélienne $f : Z \to \mathbb{R}^d$, et on munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $||\cdot||$. On définit les sommes de Birkhoff de $f$, pour $z \in Z$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(n,z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k z) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Définition 6.1. — On dit que $f$ est *récurrente en presque tout point de $Z$* si on a :

$$\lambda\left(\{z \in Z \mid \liminf_{n\to\infty} ||f(n,z)|| = 0\}\right) = 1.$$

On dit que $f$ *vérifie le théorème central-limite* si la suite de variables aléatoires $Z_n = \frac{f(n,\cdot)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale, éventuellement dégénérée.

Énonçons à présent le théorème de Schmidt-Conze :

Proposition 6.2. — *(Schmidt-Conze) Soit* $(Z, \mathcal{Z}, \lambda)$ *un espace borélien probabilisé, et* $T : Z \to Z$ *un automorphisme ergodique préservant la mesure. Supposons* $d \leq 2$*. Soit* $f : Z \to \mathbb{R}^d$ *une application borélienne vérifiant le théorème central-limite. Alors* $f$ *est récurrente en presque tout point de* $Z$*.*

6.1.2. *Construction d'un système dynamique inversible.* — Nous allons nous ramener à la proposition 6.2 pour montrer une condition suffisante de récurrence presque partout de la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$.

Notons $d$ la codimension de $A'$ dans $A$. On peut alors assimiler l'espace $E = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$ à $\mathbb{R}^d$. Il est naturel de vouloir considérer le système dynamique probabilisé $(B \times \mathcal{P}, \mathcal{B}^{\mathcal{P}}, T, \beta \otimes \nu)$, où $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ est la tribu borélienne de $B \times \mathcal{P}$, et où $T$ est l'application préservant la mesure $\beta \otimes \nu$ :

$$T \begin{cases} B \times \mathcal{P} \longrightarrow & B \times \mathcal{P} \\ (b, \eta) \longmapsto & (Sb, b_1 \eta) \end{cases},$$

en notant

$$S \begin{cases} B & \longrightarrow & B \\ b = (b_1, b_2, \ldots) & \longmapsto & Sb = (b_2, b_3, \ldots) \end{cases}$$

le décalage unilatère sur $B$. Ce système dynamique est ergodique, puisque la mesure $\nu$ est $\mu$-ergodique. Une construction due à Furstenberg [11] en fournit une extension inversible. Notons $\tilde{B}$ l'espace $\tilde{B} = G^{\mathbb{Z}}$, $\tilde{\beta}$ la mesure produit $\mu^{\otimes \mathbb{Z}}$, et $\tilde{\mathcal{B}}$ la tribu borélienne de $\tilde{B}$. Notons $\tilde{S}$ le décalage bilatère sur l'espace de Bernoulli bilatère $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{B}})$. Rappelons la construction suivante de Furstenberg :

Lemme 6.3. — *Pour* $\tilde{\beta}$*-presque tout* $b \in \tilde{B}$*, la suite* $((b_1 \cdots b_n)_* \nu)_{n \geq 1}$ *de mesures de probabilité sur* $\mathcal{P}$ *a une limite* $\nu_b$*. Cette limite est la mesure de Dirac en un point que l'on notera* $\xi_b$*. On a de plus l'égalité*

$$\nu = \int_{\tilde{B}} \nu_b \, \mathrm{d}\tilde{\beta}(b). \tag{2}$$

On en trouvera une démonstration dans [7]. Pour tout $b \in \tilde{B}$, on note $b_+$ la suite $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, et $b_-$ la suite $(\ldots, b_{-n}, \ldots, b_{-1}, b_0)$. Notons $\nu_{b_-} = \delta_{\xi_{b_-}}$, pour $\tilde{\beta}$-presque tout $b \in \tilde{B}$, la mesure de probabilité limite sur $\mathcal{P}$ suivante :

$$\nu_{b_-} = \lim_{n \to \infty} (b_0 \cdots b_{-n})_* \nu.$$

En particulier, pour $\tilde{\beta}$-presque tout $b \in \tilde{B}$, on a $\xi_{(Sb)_-} = b_1 \xi_{b_-}$. Le lemme suivant se déduit directement de ces considérations :

Lemme 6.4. — *L'application*

$$\rho \begin{cases} \tilde{B} \longrightarrow & B \times \mathcal{P} \\ b \longmapsto & (b_+, \xi_{b_-}) \end{cases}$$

*est un morphisme de systèmes dynamiques au sens suivant : on a* $T \circ \rho = \rho \circ \tilde{S}$, *et l'image par* $\rho$ *de la mesure* $\tilde{\beta}$ *est* $\beta \otimes \nu$.

On se ramène donc à l'étude du système dynamique $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S}, \tilde{\beta})$, dont $(B \times \mathcal{P}, \mathcal{B}^{\mathcal{P}}, T, \beta \otimes \nu)$ peut être vu comme un facteur via $\rho$.

6.1.3. *Application du théorème de Schmidt-Conze.* — Notons $\tilde{f}$ l'application borélienne suivante :

$$\tilde{f}\ \begin{cases} \tilde{B} \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ b \longmapsto \overline{\sigma}(b_1, \xi_{b_-}) \end{cases}.$$

Puisque $\overline{\sigma}$ est un cocycle, on constate immédiatement la propriété suivante, étant donnés $b \in \tilde{B}$ et $n$ un entier strictement positif :

$$\tilde{f}(n, b) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(T^k(b, \eta)) = \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \xi_{b_-}).$$

Rappelons le résultat suivant dû à Goldsheid et Guivarc'h (voir [12]) qui constitue un théorème central-limite pour le cocycle d'Iwasawa.

Proposition 6.5. — *(Théorème central-limite pour le cocycle d'Iwasawa) Avec les hypothèses et notations ci-dessus, supposons que la mesure* $\mu$ *ait un moment exponentiel fini. Alors il existe une loi normale de probabilité* $N_\mu$ *sur* $E$ *telle que pour toute fonction continue et bornée* $\psi$ *sur* $E$ *on ait la convergence, uniforme en* $\eta \in \mathcal{P}$ *:*

$$\int_{g \in G} \psi\left(\frac{\overline{\sigma}(g, \eta) - n\overline{\sigma_\mu}}{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}\mu^{*n}(g) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_E \psi \,\mathrm{d}N_\mu.$$

Munis de ces résultats, nous pouvons démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.6. — *Si* $H$ *est de la forme* $A'N$, *où* $A'$ *est un sous-groupe de* $A$ *de codimension au plus* 2, *et si l'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}'$ *de* $A'$ *contient la moyenne* $\sigma_\mu$ *du cocycle d'Iwasawa, alors pour* $\beta \otimes \nu$*-presque tout* $(b, \eta) \in B \times \mathcal{P}$ *on a*

$$\liminf_{n \to \infty} ||\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta)|| = 0.$$

*Preuve.* — On applique le théorème de Schmidt-Conze (proposition 6.2) au système dynamique $(\tilde{B}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{S}, \beta)$, muni de l'application $\tilde{f}$, qui vérifie le théorème central-limite d'après la proposition 6.5, puisque, par hypothèse, $\overline{\sigma_\mu}$ est nulle. On obtient, pour $\tilde{\beta}$-presque tout $b \in \tilde{B}$ :

$$\liminf_{n \to \infty} ||\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \xi_{b_-})|| = 0,$$

et donc, pour $\beta \otimes \nu$-presque tout $(b, \eta) \in B \times \mathcal{P}$ :

$$\liminf_{n \to \infty} ||\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta)|| = 0.$$

□

**6.2. Un critère de récurrence uniforme**. — Le lemme 6.6 ne suffit pas encore à donner la récurrence sur tout $X$ de la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$, car il ne donne cette information que pour $\nu$-presque tout $\eta$ dans $\mathcal{P}$. Nous allons donc montrer la proposition suivante.

Proposition 6.7. — *Si $H$ est de la forme $A'N$, où $A'$ est un sous-groupe de $A$ de codimension au plus 2, et si l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}'$ de $A'$ contient la moyenne $\sigma_\mu$ du cocycle d'Iwasawa, alors la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est uniformément récurrente sur tout $X$.*

D'après le lemme 4.5, il suffit de montrer que pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour tout $t \in E$, on a

$$\liminf_{n\to\infty} ||t + \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta)|| = 0,$$

c'est à dire que la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $E$. Pour ce faire, on montrera que pour $\beta\otimes\nu$-presque tout $(b, \eta) \in B\times\mathcal{P}$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n\geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ (c'est le lemme 6.10) ; on montrera également que pour tous $\eta, \eta' \in \mathcal{P}$, la suite $(\sigma(b_n \cdots b_1, \eta) - \sigma(b_n \cdots b_1, \eta'))_{n\geq 1}$ a une limite finie (c'est le lemme 6.9). L'association de ces deux résultats permettra de conclure. Commençons par définir la projection de Cartan $\kappa$ sur $G$.

Définition 6.8. — Écrivons la décomposition de Cartan du groupe $G$ : $G = K \exp \mathfrak{a}_+ K$. Pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $\kappa(g) \in \mathfrak{a}_+$ tel qu'on ait

$$g \in K \exp(\kappa(g))K.$$

L'application $\kappa : g \mapsto \kappa(g)$ est appelée la *projection de Cartan*.

Lemme 6.9. — *Pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la suite $(\sigma(b_n \cdots b_1, \eta) - \kappa(b_n \cdots b_1))_{n\geq 1}$ a une limite $\ell_{b,\eta}$. En particulier, pour tous $\eta, \eta' \in \mathcal{P}$, la différence $\sigma(b_n \cdots b_1, \eta) - \sigma(b_n \cdots b_1, \eta')$ tend vers la limite finie $\ell_{b,\eta} - \ell_{b,\eta'}$.*

*Preuve*. — Rappelons le résultat suivant (prouvé dans [7]) : Soit $(V, \rho)$ une représentation irréductible de $G$, de plus haut poids $\chi$. Notons $V_\chi$ l'espace de poids associé à $\chi$, et pour $\eta = gP \in \mathcal{P}$, notons $V_\eta$ le sous-espace $V_\eta = g \cdot V_\chi$ de $V$. Alors il existe une norme euclidienne sur $V$, notée $|| \cdot ||$, vérifiant, pour tous $g \in G, \eta \in \mathcal{P}, v \in V_\eta$ :

- $\chi(\kappa(g)) = \log ||\rho(g)||$
- $\chi(\sigma(g, \eta)) = \log \frac{||\rho(g)v||}{||v||}$.

Fixons une telle représentation, qu'on choisit de plus proximale, c'est-à-dire que l'espace de poids associé à son plus haut poids est uni-dimensionnel (cf. [7, § 8.4.4]). Montrons que la suite $(\chi(\sigma(b_n \cdots b_1, \eta) - \kappa(b_n \cdots b_1)))_{n\geq 1}$ a une limite pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour tout $\eta \in \mathcal{P}$. Un lemme classique de Furstenberg (voir par exemple [7, Prop. 4.7]) dit que pour $\beta$-presque tout $b \in B$, il existe un hyperplan $W_b \subset V$ tel que

- pour toute valeur d'adhérence $\pi$ de la suite $\left(p_n = \frac{\rho(b_n \cdots b_1)}{||\rho(b_n \cdots b_1)||}\right)_{n \geq 1}$, on a $\operatorname{Ker} \pi = W_b$,
- pout tout $v \in V$ non-nul, on a $\beta(\{b \in B \mid v \in W_b\}) = 0$.

Soit $v \in V$ non-nul, soit $b \in B$ tel que $v \notin W_b$. Alors la quantité $||\pi(v)||$, strictement positive, ne dépend pas de la valeur d'adhérence $\pi$ de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ choisie. En effet, fixons $f_b$ une forme linéaire non-nulle sur $\mathbb{R}^d$, de noyau $W_b$ et de norme 1. Les valeurs d'adhérence $\pi$ de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ s'écrivent alors $\pi : v' \mapsto f_b(v')v_\pi$ pour un certain vecteur $v_\pi$ de norme 1, puisque ces applications sont de rang 1, de norme 1 et de noyau $W_b$. La quantité $||\pi(v)||$ est donc toujours égale à $|f_b(v)|$. La suite bornée $(||p_n(v)||)_{n \geq 1}$ a une seule valeur d'adhérence, elle converge donc. La suite $\left(\log \frac{||\rho(b_n \cdots b_1)v||}{||v||} - \log ||\rho(b_n \cdots b_1)||\right)_{n \geq 1}$ converge alors. Ceci étant vrai pour toute représentation proximale de $G$, on a montré le lemme. □

Lemme 6.10. — *Soit $d \leq 2$. Pour $\beta \otimes \nu$-presque tout $(b, \eta) \in B \times \mathcal{P}$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n \geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.*

La démonstration du lemme 6.10 occupera la partie suivante. On peut enfin prouver la proposition 6.7.

*Preuve de la proposition 6.7.* — Choisissons grâce au lemme 6.10 un $\eta_0 \in \mathcal{P}$ tel que pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta_0))_{n \geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$. Alors, d'après le lemme 6.9, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la suite $(\kappa(b_n \cdots b_1))_{n \geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$. Et donc pour tout $\eta \in \mathcal{P}$, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n \geq 1}$ est dense. Ainsi, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a l'égalité :

$$\liminf_{n \to \infty} ||t + \overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta)|| = 0,$$

ce qui montre la proposition 6.7. □

**6.3. Preuve du lemme 6.10**. — On notera $\ell$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Considérons le système dynamique $\tilde{\Sigma}$ :

$$\tilde{\Sigma} = (\tilde{B} \times \mathbb{R}^d, R, \tilde{\beta} \otimes \ell),$$

avec $\tilde{B} = B^{\mathbb{Z}}$, $\tilde{\beta} = \beta^{\otimes \mathbb{Z}}$, $\tilde{S}$ le shift bilatère sur $\tilde{B}$, et $R$ l'application

$$R \begin{cases} \tilde{B} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow & \tilde{B} \times \mathbb{R}^d \\ (b, t) \longmapsto & (Sb, t + \overline{\sigma}(b_1, \xi_{b_-})) \end{cases}.$$

L'application $R$ préserve la mesure $\tilde{\beta} \otimes \ell$. Pour montrer le lemme 6.10, on commencera par remarquer que le système dynamique $\tilde{\Sigma}$ est conservatif et ergodique : c'est l'objet de la proposition 6.12. Pour montrer l'ergodicité de $\tilde{\Sigma}$, on s'intéressera, dans la partie 6.3.1, à celle d'un système dynamique auxiliaire, avec des méthodes calquant celles de Guivarc'h [14] Ces deux propriétés de conservativité et d'ergodicité impliquent, d'après la proposition 6.17, la densité des trajectoires dans l'espace $\tilde{B} \times \mathbb{R}^d$. Ce dernier résultat permettra de conclure la preuve du lemme 6.10 à la fin de la partie 6.3.2.

Définition 6.11. — Soit $(X, T, m)$ un sytème dynamique, avec $X$ un espace topologique, $m$ une mesure borélienne non-nécessairement finie, $T$ une application borélienne préservant la mesure. Le système $(X, T, m)$ est dit *conservatif* si pour tout borélien $A \subset X$ de mesure $m(A) > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$m(T^{-n}A \cap A) > 0.$$

Le système $(X, T, m)$ est dit *ergodique* si pour tout borélien $A \subset X$ tel que $T^{-1}A = A$, on ait soit $m(A) = 0$, soit $m(A^c) = 0$, où $A^c$ dénote le complémentaire de $A$ dans $X$.

Proposition 6.12. — *Supposons $d \leq 2$. Le système dynamique $\tilde{\Sigma}$ est conservatif et ergodique.*

*Preuve.* — On va se ramener, via le lemme 6.13, à l'étude de la conservativité de $\tilde{\Sigma}$ et de l'ergodicité de $\check{\Sigma}$, en notant $\check{\Sigma}$ un système dont l'extension naturelle universelle est $\tilde{\Sigma}^{-1}$. On pose

$$\check{\Sigma} = (B \times \mathbb{R}^d, V, \beta \otimes \ell).$$

La mesure produit $\beta \otimes \ell$ préserve l'application

$$V \begin{cases} B \times \mathbb{R}^d \longrightarrow & B \times \mathbb{R}^d \\ (b, t) \longmapsto & (Sb, t + \overline{\sigma}(b_1^{-1}, \xi_b)) \end{cases}.$$

Par la propriété de cocycle de $\overline{\sigma}$, pour $b \in B$, $\eta \in \mathcal{P}$, la quantité $t + \overline{\sigma}(b_1^{-1}, \eta)$ s'écrit aussi $t - \overline{\sigma}(b_1, b_1^{-1}\eta)$ ; l'extension naturelle inversible de $\check{\Sigma}$ est donc bien le système $\tilde{\Sigma}^{-1} = (\tilde{B} \times \mathbb{R}^d, R^{-1}, \tilde{\beta} \otimes \ell)$.

Lemme 6.13. — *Si un des systèmes $\tilde{\Sigma}, \check{\Sigma}$ est conservatif, alors les deux le sont. Si un des systèmes $\tilde{\Sigma}, \check{\Sigma}$ est conservatif et ergodique, alors les deux le sont.*

*Preuve.* — Voir [1, 3.1]. Le système $\tilde{\Sigma}^{-1}$ est l'extension naturelle inversible de $\check{\Sigma}$. La conservativité (resp. les conservativité et ergodicité) de $\tilde{\Sigma}$ et celle (resp. celles) de $\tilde{\Sigma}^{-1}$ sont équivalentes puisque $\tilde{\Sigma}^{-1}$ est l'inverse de $\tilde{\Sigma}$. La conservativité (resp. les conservativité et ergodicité) d'un système dynamique et celle (resp. celles) de son extension naturelle inversible sont équivalentes [1, Thm. 3.1.7]. □

Reprenons la preuve de la proposition 6.12. Le lemme 6.6 prouve la conservativité de $\tilde{\Sigma}$ pour $d \leq 2$ (cf. par exemple [21, Thm. 11.1]), donc celle de $\check{\Sigma}$.

LEMME 6.14. — *Le système $\check{\Sigma}$ est ergodique.*

La preuve du lemme 6.14 fait l'objet de la partie 6.3.1. Pour $d \leq 2$, le système $\tilde{\Sigma}$ est donc conservatif et ergodique. □

6.3.1. *Ergodicité du système dynamique $(B \times \mathbb{R}^d, \beta \otimes \ell, V)$.* — Cette sous-partie est consacrée à la preuve du lemme 6.14. Ce lemme est presque une conséquence du résultat de Guivarc'h [14, § 2.3, Cor. 3], à quelques conditions près sur l'application $V$. Nous redonnons ici les principaux éléments de sa démonstration, adaptés à notre cas. On utilise la caractérisation suivante de l'ergodicité de $(B \times \mathbb{R}^d, \beta \otimes \ell, V)$, dont la preuve sera rappelée en annexe (Proposition A.3) :

LEMME 6.15. — *(Guivarc'h) Notons $\mathrm{L}^1_0(\ell) = \{\phi \in \mathrm{L}^1(\ell) \mid \int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\ell = 0\}$. Pour toute application $\alpha = \psi \otimes \zeta$, avec $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$, on définit la suite des poussés en avant $V^n_*\alpha$ de $\alpha$ par $V^n$ en notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $(b,t) \in B \times \mathbb{R}^d$ :*

$$V^n_*\alpha(b,t) = \int_{G^n} \psi((g_n, \ldots, g_1, b_1, b_2, \ldots))\zeta(t+\overline{\sigma}(g_n \cdots g_1, \xi_b)) \,\mathrm{d}\mu^{*n}(g_1, \ldots, g_n).$$

*Si pour toute telle fonction $\alpha$ la suite des poussés en avant de $(V^n_*\alpha)_{n\geq 1}$ a une limite nulle en norme $\mathrm{L}^1$, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} ||V^n_*(\psi \otimes \zeta)||_{\mathrm{L}^1} = 0,$$

*alors le système $(B \times \mathbb{R}^d, \beta \otimes \ell, V)$ est ergodique.*

On en déduit le lemme 6.14. Soient $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$. D'après le lemme 6.15, il suffit de prouver qu'on a la limite dans $\mathrm{L}^1$ :

$$||V^n_*(\psi \otimes \zeta)||_{\mathrm{L}^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3}$$

Définissons, pour $\beta$-presque tout couple $b \in B$, la mesure borélienne $\mu^b_{n,\psi}$ sur $\mathbb{R}^d$, qui a une fonction $h$ mesurable sur $\mathbb{R}^d$ associe la valeur

$$\mu^b_{n,\psi}(h) = \int_{G^n} h(-\overline{\sigma}(g_n \cdots g_1, \xi_b))\psi((g_n, \ldots, g_1, b_1, b_2, \ldots)) \,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1, \ldots, g_n).$$

Ecrivons, pour $f : B \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables bornées, la quantité $(V_*(\psi \otimes \zeta))(f \otimes h) = \int_{B\times\mathbb{R}^d} f(b)h(t)V_*(\psi \otimes \zeta)(b,t) \,\mathrm{d}\beta \otimes \ell(b,t)$ :

$$\begin{aligned}(V_*(\psi \otimes \zeta))(f \otimes h) &= \int_{B\times\mathbb{R}^d\times G} f(b)h(t)\psi((g, b_1, b_2, \ldots)) \\ &\qquad \cdot \zeta(t + \overline{\sigma}(g, \xi_b)) \,\mathrm{d}\mu \otimes \beta \otimes \ell(g, b, t) \\ &= \int_{B\times\mathbb{R}^d} f(b)h(t)(\mu^b_{1,\psi} * \zeta(t)) \,\mathrm{d}\beta \otimes \ell\end{aligned}$$

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$(V_*^n(\psi \otimes \zeta))(f \otimes h) = \int_{B \times \mathbb{R}^d} f(b)h(t)(\mu_{n,\psi}^b * \zeta(t))\, \mathrm{d}\beta \otimes \ell$$

et, pour $\beta \otimes \ell$-presque tout $(b,t) \in \tilde{B} \times \mathbb{R}^d$,

$$(V_*^n(\psi \otimes \zeta))(b,t) = (\mu_{n,\psi}^b * \zeta)(t)$$

On obtient une majoration en norme $\mathrm{L}^1$ :

$$||V_*^n(\psi \otimes \zeta)||_{\mathrm{L}^1} \leq \int_B ||\mu_{n,\psi}^b * \zeta||_{\mathrm{L}^1(\ell)}\, \mathrm{d}\beta. \tag{4}$$

Le lemme 6.16 permet de conclure la preuve de l'ergodicité du système *Sigma*.

Lemme 6.16. — *Soient $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$ vérifiant les conditions suivantes, qu'on appellera (CEC0) :*

- *$\psi$ est à support compact ;*
- *il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\psi$ ne dépende que des $m$ premières coordonnées, i.e. pour tous $(g_1, \ldots, g_m) \in G^m$ et $b, b' \in B$, on ait*

$$\psi(g_1, \ldots, g_m, b_1, b_2, \ldots) = \psi(g_1, \ldots, g_m, b'_1, b'_2, \ldots) \ ;$$

- *$\zeta$ est à décroissance exponentielle ;*
- *la transformée de Fourier $\hat{\zeta}$ de $\zeta$ est à support compact ;*
- *$\hat{\zeta}$ est nulle sur un voisinage de $0$.*

*Alors, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, on a la convergence*

$$||\mu_{n,\psi}^b * \zeta||_{\mathrm{L}^1(\ell)} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{5}$$

*Preuve du lemme 6.14.* — Considérons le sous-ensemble de $\mathrm{L}^1(\beta) \times \mathrm{L}^1_0(\ell)$ constitué des éléments $(\psi, \zeta)$, avec $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$, vérifiant les conditions (CEC0). Le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^1(\beta)$ engendré par de telles applications $\psi$ est dense ; de même, les applications $\zeta$ de la forme voulue sont denses dans $\mathrm{L}^1_0(\ell)$. Par convergence dominée, d'après le lemme 6.16 et l'inégalité 4, pour de telles applications, on obtient la limite

$$\lim_{n\to\infty} ||V_*^n(\psi \otimes \zeta)||_{\mathrm{L}^1} = 0.$$

Alors, par continuité uniforme des opérateurs $V^n$, on a prouvé qu'on la limite (3) pour toutes $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$ ; les hypothèses du lemme 6.15 sont vérifiées, ce qui prouve le lemme 6.14. □

*Preuve du lemme 6.16.* — Considérons deux applications $\psi \in \mathrm{L}^1(\beta)$ et $\zeta \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$ vérifiant les conditions (CEC0) du lemme 6.16. Notons $C$ le support (compact) de $\psi$. Il existe un réel $R_0 > 0$ tel que l'image par $r : b \mapsto \overline{\sigma}(b_1^{-1}, \xi_b)$ de $C$ est incluse dans la boule de rayon $R_0$. Calculons, pour $b \in B$, $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
||\mu^b_{n,\psi} * \zeta||_{\mathrm{L}^1(\ell)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)| \,\mathrm{d}\ell(t) \\
&\leq \int_{\overline{B}(n(R_0+1))} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)| \,\mathrm{d}\ell(t) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{B}(n(R_0+1))} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)| \,\mathrm{d}\ell(t) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz appliquée à l'intégrale $I_1$ donne, pour une constante $c_1 > 0$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\overline{B}(n(R_0+1))} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)| \,\mathrm{d}\ell(t) \\
&\leq c_1 n^{d/2} \left( \int_{\overline{B}(n(R_0+1))} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)|^2 \,\mathrm{d}\ell(t) \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

et on obtient alors, par le théorème de Plancherel,

$$I_1 \leq c_1 n^{d/2} (\int_{(\mathbb{R}^d)^*} |\widehat{\mu^b_{n,\psi}}(s) \hat{\zeta}(s)|^2 \,\mathrm{d}s)^{1/2}.$$

Notons $m$ l'entier tel que $\psi$ ne dépend que des $m$ premières coordonnées, $p_m : B \to G^m$ la projection sur ces $m$ premières coordonnées, et $C_m = p_m(C)$. Pour $\beta$-presque tout $b \in B$, rappelons qu'on note $\xi_b$ le point limite de $\mathcal{P}$ donné par le lemme 6.3. Soit $n > m$, soit $s \in (\mathbb{R}^d)^*$. La transformée de Fourier de $\mu^b_{n+m,\psi}$ prend alors pour valeur :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu^b_{n+m,\psi}}(s) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-is(t)} \,\mathrm{d}\mu^b_{n+m,\psi}(t) \\
&= \int_{G^{n+m}} e^{is(\overline{\sigma}(g_{n+m} \cdots g_1, \xi_b))} \\
&\quad \cdot \psi(g_{n+m}, \ldots, g_1, b_0, b_1, \ldots) \,\mathrm{d}\mu^{\otimes n+m}(g_1, \ldots, g_{n+m}) \\
&= \int_{G^{n+m}} e^{is(\overline{\sigma}(g_{n+m} \cdots g_{n+1} g_n \cdots g_1, \xi_b))} \\
&\quad \cdot \psi(g_{n+m}, \ldots, g_{n+1}) \,\mathrm{d}\mu^{\otimes n+m}(g_1, \ldots, g_{n+m}) \\
&= \int_{C_m} \int_{G^n} e^{is(\overline{\sigma}(h_1 \cdots h_m g_n \cdots g_1, \xi_b))} \\
&\quad \cdot \psi(h_1, \ldots, h_m) \,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1, \ldots, g_n) \,\mathrm{d}\mu^{\otimes m}(h_1, \ldots, h_m).
\end{aligned}$$

Pour $(h_1, \dots, h_m) \in C_m$, notons $\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s}$ la fonction

$$\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s} \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi \longmapsto \psi(h_1, \dots, h_m) e^{is\overline{\sigma}(h_1 \cdots h_m, \xi)} \end{cases},$$

qui est $\gamma$-hölderienne, pour un certain $1 > \gamma > 0$ (cf. la partie 5.1). On a alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mu^b_{n+m,\psi}}(s) &= \int_{C_m} \int_{G^n} e^{is(\overline{\sigma}(g_n \cdots g_1, \xi_b))} \\ &\qquad \cdot \Psi_{(h_1,\dots,h_m),s}(g_n \cdots g_1 \xi_b) \, \mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1, \dots, g_n) \, \mathrm{d}\mu^{\otimes m}(h_1, \dots, h_m) \\ &= \int_{C_m} P^n_{is}(\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s})(\xi_b) \, \mathrm{d}\mu^{\otimes m}(h_1, \dots, h_m), \end{aligned}$$

où on a noté $P_{is}$ l'opérateur de transfert associé à $is$. On majore alors avec les normes hölderiennes (définies dans la partie 5.1) :

$$|\widehat{\mu^b_{n,\psi}}(s)| \leq ||P^n_{is}||_\gamma \sup_{(h_1,\dots,h_m) \in C_m} ||\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s}||_\gamma.$$

Comme le support $\operatorname{Supp} \hat{\zeta}$ de $\hat{\zeta}$ est un compact ne contenant pas 0, d'après la proposition 5.3, il existe un $0 < a_1 < 1$, une constante $c_2(\zeta) > 0$, tels que pour tout $s \in \operatorname{Supp} \hat{\zeta}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait l'inégalité :

$$||P^n_{is}||_\gamma \leq c_2(\zeta) a^n.$$

Le lemme 13.1 de [7] donne, pour $(h_1, \dots, h_m) \in C_m$, une constante $c_3(h_1, \dots, h_m)$ dépendant uniformément de $\kappa(h_1 \cdots h_m)$ vérifiant, pour tous $\xi, \xi' \in \mathcal{P}$,

$$||\overline{\sigma}(h_1 \cdots h_m, \xi) - \overline{\sigma}(h_1 \cdots h_m, \xi')|| \leq c_3(h_1, \dots, h_m) d(\xi, \xi').$$

Comme le support $\operatorname{Supp} \hat{\zeta}$ de $\hat{\zeta}$ est compact et ne contient pas 0, on en déduit qu'on peut majorer la constante de Hölder $c_\gamma(\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s})$, et donc la norme $||\Psi_{(h_1,\dots,h_m),s}||_\gamma$ pour $(h_1, \dots, h_m) \in C_m$ et $s \in \operatorname{Supp} \hat{\zeta}$. Il existe donc un $0 < a_1 < 1$ et une constante $A_1(\psi, \zeta)$ tels qu'on ait, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_1 \leq A_1(\psi, \zeta) n^{d/2} a_1^n. \tag{6}$$

Considérons à présent l'intégrale $I_2$. Puisque $\zeta$ est à décroissance exponentielle, il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on ait la majoration :

$$\zeta(t) \leq A e^{-|t|}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|t|\geq n(R_0+1)} |\mu^b_{n,\psi} * \zeta(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\geq n(R_0+1)} \int_{G^n} |\psi(g_n,\ldots,g_1,b_1,b_2,\ldots)| \\
&\quad \cdot |\zeta(t+\overline{\sigma}(g_n\cdots g_1,\xi_b))|\,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1,\ldots,g_n)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Puisqu'on a $\overline{\sigma_\mu} = 0$, le théorème des grandes déviations [7, Thm. 12.1(iii)] donne, pour tout $M_0 > 0$, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, l'existence de constantes $M_1(b) > 0$, $M_2(b) > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^{*n}(\{g_1,\cdots g_n \mid ||\overline{\sigma}(g_n\cdots g_1,\xi_b)|| \geq nM_0\}) \leq M_2(b)e^{-M_1(b)n}. \tag{7}$$

Fixons $M_0 = \frac{R_0+1}{2}$. Considérons alors les ensembles

$$\begin{aligned}
A^b_n &= \left\{g_1,\cdots g_n \mid ||\overline{\sigma}(g_n\cdots g_1,\xi_b)|| \geq n\frac{R_0+1}{2}\right\} \\
C^b_n &= G^n \setminus A^b_n.
\end{aligned}$$

L'inégalité (7) s'écrit alors

$$\mu^{*n}(A^b_n) \leq M_2(b)e^{-M_1(b)n}.$$

$I_2$ s'écrit à présent

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|t|\geq n(R_0+1)} \int_{A^b_n} |\psi(g_n,\ldots,g_1,b_1,b_2,\ldots)| \\
&\quad \cdot |\zeta(t+\overline{\sigma}(g_n\cdots g_1,\xi_b))|\,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1,\ldots,g_n)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{|t|\geq n(R_0+1)} \int_{C^b_n} |\psi(g_n,\ldots,g_1,b_1,b_2,\ldots)| \\
&\quad \cdot |\zeta(t+\overline{\sigma}(g_n\cdots g_1,\xi_b))|\,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(g_1,\ldots,g_n)\,\mathrm{d}t \\
&\leq A||\psi||_\infty \mu^{*n}(A^b_n) + A||\psi||_\infty e^{-n\frac{R_0+1}{2}} \\
&\leq A||\psi||_\infty (M_2(b)e^{-M_1(b)n} + e^{-n\frac{R_0+1}{2}}).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $A_2(\psi,\zeta) > 0$, une constante $0 < a_2 < 1$ telles qu'on ait, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_2 \leq A_2(\psi,\zeta)a_2^n. \tag{8}$$

En combinant les inégalités (6) et (8), on obtient, pour $\beta$-presque tout $b \in B$, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$||\mu^b_{n,\psi} * \zeta||_{\mathrm{L}^1(\ell)} \leq A_1(\psi,\zeta)n^{d/2}a_1^n + A_2(\psi,\zeta)a_2^n,$$

ce qui donne bien la limite (5), et le lemme 6.16 est démontré. □

6.3.2. *Densité dans les fibres de $\tilde{\Sigma}$.* — Revenons à la preuve du lemme 6.10. Rappelons la proposition très générale suivante, qui, dans notre cas particulier, donnera la densité des trajectoires dans les fibres.

PROPOSITION 6.17. — *Soit $X$ un espace localement compact, à base dénombrable d'ouverts, soit $m$ une mesure de Radon sur $X$, et soit $T : X \to X$ un endomorphisme inversible préservant $m$, ergodique, et conservatif. Alors pour tout ouvert $U$ de $X$ de mesure non-nulle, pour $m$-presque tout $x \in X$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe un $n \geq n_0$ tel que $T^n x \in U$.*

*Preuve.* — Soit $U$ un ouvert de $X$, $m(U) > 0$. Notons $F_U$ l'ensemble des $x \in X$ revenant infiniment souvent dans $U$ sous l'action de $T$ :

$$F_U = \left\{x \in X \mid \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}, n_k < n_{k+1} \text{ et } T^{n_k} x \in U\right\}.$$

Cet ensemble étant $T$-invariant, et $T$ étant ergodique, on a l'alternative

- $m(F_U) = 0$,
- $m(X \setminus F_U) = 0$.

Quitte à considérer les intersections de $U$ avec une suite exhaustive de compacts de $X$, on peut supposer $U$ de mesure finie. Alors la fonction $f = \mathbb{1}_U$ est intégrable et positive. Comme $T$ est conservatif, on a, $m$-presque sûrement :

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \mathbb{1}_U = \infty,$$

et donc on ne peut pas avoir $m(F_U) = 0$, ce qui prouve le résultat. □

*Preuve du lemme 6.10.* — En appliquant la proposition 6.17 au système $\tilde{\Sigma}$, on obtient le lemme 6.10. Le système $\tilde{\Sigma}$ est conservatif et ergodique d'après la proposition 6.12 ; on en déduit que pour presque tout $(b,t) \in \tilde{B} \times \mathbb{R}^d$, la suite des itérées $(R^n(b,t))_{n\geq 1}$ est dense dans $\tilde{B} \times \mathbb{R}^d$. On en déduit que pour $\tilde{\beta}$-presque tout $b \in \tilde{B}$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \xi_{b-}))_{n\geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ ; pour $\beta \otimes \nu$-presque tout $(b,\eta) \in B \times \mathcal{P}$, la suite $(\overline{\sigma}(b_n \cdots b_1, \eta))_{n\geq 1}$ est dense dans $\mathbb{R}^d$. □

## 7. Conclusion

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires à la démonstration du théorème de dichotomie 2.3 et du critère de récurrence 2.4.

*Preuve des thèoremes 2.3 et 2.4.* — Le théorème 2.3 est un corollaire du théorème 2.4. Démontrons ce dernier. On peut supposer $H$ de la forme $A'N'$, avec $A'$ et $N'$ des sous-groupes de Lie algébriques de $A$ et $N$, d'après le lemme 3.2. On a alors les possibilités suivantes :

Premier cas : $N' \subsetneq N$. On est dans le cadre de la proposition 4.1 : la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente.

Second cas : $N' = N$ et $\sigma_\mu \notin \mathfrak{a}'$. On est dans le cadre de la proposition 5.6 : la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente.

Troisième cas : $N' = N$, $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}'$. et $A'$ est de codimension au moins 3 dans $A$. On est dans le cadre de la proposition 5.6 : la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est transiente.

Dernier cas : $N' = N$, $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}'$, et $A'$ est de codimension au plus 2 dans $A$. On est dans le cadre de la proposition 6.7 : la marche aléatoire sur $X$ associée à $G$ et $\mu$ est uniformément récurrente. □

## Annexe A. Un résultat de Guivarc'h sur l'ergodicité

Nous reprenons dans cette annexe des résultats dus à Guivarc'h [14]. L'objet est de donner une preuve du lemme 6.15 : il se déduit immédiatement de la proposition A.3 ci-dessous. Rappelons quelques définitions. Soit $X$ un espace topologique muni de sa tribu borélienne et d'une mesure de probabilité $m$, $T : X \to X$ un endomorphisme préservant la mesure de $X$, et $f : X \to \mathbb{R}^d$ une application mesurable, avec $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue $\ell$. On définit alors $E = X \times \mathbb{R}^d$ l'espace fibré correspondant, muni de la mesure borélienne $m \otimes \ell$, et de l'endomorphisme préservant la mesure

$$T_f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,t) & \longmapsto & (Tx, t + f(x)) \end{array} \right. .$$

Notons $\mathcal{E}$ la tribu borélienne de $E$, et $v$ la tribu engendrée par les ensembles de la forme $U \times \mathbb{R}^d$, avec $U$ un ouvert de $X$. On appelle $v$ la *partition en verticales* de $E$.

Définition A.1. — On dit qu'une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ est *asymptotique* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $F_n : E \to \mathbb{R}$ telle qu'on ait $m \otimes \ell$-presque partout l'égalité $F = F_n \circ T_f^n$. On dit que le système $(E, T_f, m \otimes \ell)$ est *exact* si la tribu queue, donnée par $\bigcap_{n \geq 0} T_f^{-n}\mathcal{E}$, est triviale, c'est-à-diresi toutes les fonctions asymptotiques sur $E$ sont constantes $m \otimes \ell$-presque partout. On dit que le système $(E, T_f, m \otimes \ell)$ est *exact relativement à $v$* si toute fonction $F : E \to \mathbb{R}$ asymptotique ne dépend que de la première variable, c'est-à-diresi pour $m$-presque tout $x \in X$, pour $\ell$-presque tous $t, u \in \mathbb{R}^d$, on a l'égalité $F(x,t) = F(x,u) = F(x)$.

Le lemme suivant découle immédiatement de ces définitions :

Lemme A.2. — *Si l'application $T$ est ergodique sur $X$, et que l'application $T_f$ est exacte relativement à $v$, alors l'application $T_f$ est ergodique sur $E$.*

Notons $\mathrm{L}^1_0(m\otimes\ell)$ l'ensemble des applications $\mathrm{L}^1$ d'intégrale nulle sur $E$, $\mathrm{L}^1_0(\ell)$ l'ensemble des applications $\mathrm{L}^1$ d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathrm{L}^1_v(m\otimes\ell)$ l'ensemble des applications $\mathrm{L}^1$ d'intégrale nulle dans chaque fibre, c'est-à-dire

$$\alpha \in \mathrm{L}^1_v \Leftrightarrow \text{Pour } m\text{-presque tout } x \in X, \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Pour toute application $\alpha \in \mathrm{L}^1(E)$, on définit son poussé en avant par $T_f$ : c'est l'application $T_{f*}\alpha : E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall \gamma \in \mathrm{L}^\infty(E), \int_E T_{f*}\alpha(z)\gamma(z)\,\mathrm{d}(m\otimes\ell)(z) = \int_E \alpha(z)\gamma(T_f(z))\,\mathrm{d}(m\otimes\ell)(z).$$

On va montrer, grâce à une caractérisation élégante de l'exactitude relative proposée par Guivarc'h, la proposition suivante, dont se déduit immédiatement le lemme 6.15.

Proposition A.3. — *Supposons le système dynamique $(X,T,m)$ ergodique. Si pour toute application $\alpha = \psi\otimes\xi$, avec $\psi \in \mathrm{L}^1(m)$ et $\xi \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$, la suite des poussés en avant de $\alpha$ par $T_f^n$ a une limite nulle en norme $\mathrm{L}^1$, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} ||{T_f}^n{}_*(\psi\otimes\xi)||_{\mathrm{L}^1} = 0,$$

*alors le système $(E,T_f,m\otimes\ell)$ est ergodique.*

*Preuve.* — Cette proposition se déduit immédiatement des lemmes A.2, A.4, et A.5. □

Lemme A.4. — *Si pour toute application $\alpha \in \mathrm{L}^1_v(m\otimes\ell)$, la suite des poussés en avant de $\alpha$ par $T_f^n$ a une limite nulle en norme $\mathrm{L}^1$, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} ||{T_f}^n{}_*\alpha||_{\mathrm{L}^1} = 0,$$

*alors le système $(E,T_f,m\otimes\ell)$ est exact relativement à $v$.*

*Preuve.* — (cf. [14]) Soient $\alpha \in \mathrm{L}^1_v(m\otimes\ell)$ et $F$ bornée, asymptotique sur $E$. Notons $F_n$ les applications telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait $F = F_n\circ T_f^n$. Calculons :

$$\begin{aligned}\left|\int_E F(x,t)\alpha(x,t)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_E F_n(x,t)T^n_{f*}\alpha(x,t)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq ||F||_\infty ||T^n_{f*}\alpha||_{\mathrm{L}^1}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, on obtient

$$\forall\alpha \in \mathrm{L}^1_v(m\otimes\ell), \int_E F(x,t)\alpha(x,t)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit, pour tout $\xi \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$, pour tout $\psi \in \mathrm{L}^1(m)$, l'égalité

$$\int_E F(x,t)\psi(x)\xi(t)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}t = 0,$$

et on en déduit, en choisissant les fonctions $\psi$ et $\xi$ adéquates, que $F$ ne dépend pas de $t$, ce qui montre l'exactitude relativement à $v$. □

Lemme A.5. — *Les applications $\alpha$ de la forme $\alpha = \psi \otimes \xi$, avec $\psi \in \mathrm{L}^1(m)$ et $\xi \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$, forment une partie totale de $\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell)$.*

*Preuve.* — Considérons la partie $A$ de $\mathrm{L}^\infty(m \otimes \ell)$ suivante :

$$(9)\quad A = \{g \in \mathrm{L}^\infty(m \otimes \ell) \,|\, \text{Pour } m\text{-p.t. } x \in X, \\ l\text{-p.t. } t, u \in \mathbb{R}^d, g(x,t) = g(x,u) = g(x)\big\}\,.$$

Montrons que $\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell)$ est l'orthogonal de $A$. Soit $\alpha \in \mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell)$, soit $g \in A$. Calculons leur produit scalaire :

$$\begin{aligned}\int_E \alpha g \,\mathrm{d}m \otimes \ell &= \int_X \int_{\mathbb{R}^d} g(x,t)\alpha(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_X g(x) \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_X g(x)\cdot 0\,\mathrm{d}m(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

On a donc l'inclusion :

$$\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell) \subset A^\perp.$$

Considérons à présent $\alpha \in A^\perp$. En choisissant les $g$ de la forme $\mathbb{1}_{U\times\mathbb{R}^d}$, avec $U$ une partie borélienne de $X$, on obtient, pour $m$-presque tout $x \in X$, l'égalité :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

et donc $\alpha$ est bien un élément de $\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell)$. Notons $C$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell) = A^\perp$ engendré par les applications de la forme $\alpha = \psi \otimes \xi$, avec $\psi \in \mathrm{L}^1(m)$ et $\xi \in \mathrm{L}^1_0(\ell)$. Soit $g \in C^\perp \subset \mathrm{L}^\infty(m \otimes \ell)$. Alors on a

$$\forall \psi \in \mathrm{L}^1(m), \forall \xi \in \mathrm{L}^1_0(\ell), \int_E g(x,t)\psi(x)\xi(t)\,\mathrm{d}m \otimes \ell(x,t) = 0.$$

En choisissant $\xi$ comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, on obtient, pour $\ell$-presque tout $t \in \mathbb{R}^d$ :

$$\forall \psi \in \mathrm{L}^1(m), \int_X g(x,t)\psi(x)\,\mathrm{d}m(x) = c(\psi),$$

avec $c(\psi)$ une constante ne dépendant pas de $t$. En choisissant pour $\psi$ des fonctions caractéristiques, on obtient alors que $g$ ne dépend pas de la variable $t$ pour $m$-presque tout $x \in X$, c'est-à-dire$g \in A$. On obtient donc l'inclusion

$C^{\perp} \subset A$, l'inclusion réciproque étant immédiate. On obtient enfin la densité de $C$ dans $\mathrm{L}^1_v(m \otimes \ell)$. □

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. Aaronson – *An introduction to infinite ergodic theory*, no. 50, American Mathematical Society, 1997.

[2] Y. Benoist – *Réseaux des groupes de lie*, 2008.

[3] ———, « Recurrence on the space of lattices », 2014.

[4] Y. Benoist & J.-F. Quint – « Introduction to random walks on homogeneous spaces », *Japanese Journal of Mathematics* **7** (2012), no. 2, p. 135–166.

[5] ———, « Random walks on finite volume homogeneous spaces », *Inventiones mathematicae* **187** (2012), no. 1, p. 37–59.

[6] ———, « Random walks on projective spaces », (2012).

[7] ———, *Random walks on reductive groups*, 2014.

[8] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publications methématiques de l'I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–151.

[9] J.-P. Conze – « Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires », *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (1999).

[10] L. Elie – « Sur le théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes », in *Probability Measures on Groups*, Springer, 1982, p. 60–75.

[11] H. Furstenberg – « Noncommuting random products », *Transactions of the American Mathematical Society* **108** (1963), p. 377–428.

[12] I. Goldsheid & Y. Guivarc'h – « Zariski closure and the dimension of the gaussian law of the product of random matrices », *Probability Theory and Related Fields* **105** (1996), no. 1, p. 109–142.

[13] I. Goldsheid & G. Margulis – « Lyapunov indices of a product of random matrices », *Russian Mathematical Surveys* **44** (1989), p. 11–81.

[14] Y. Guivarc'h – « Propriétés ergodiques, en mesure infinie, de certains systèmes dynamiques fibrés », *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **9** (1989), p. 433–453.

[15] Y. Guivarc'h & C. Raja – « Polynomial growth, recurrence and ergodicity for random walks on locally compact groups and homogeneous spaces », *Progress in Probability* **64** (2011).

[16] ———, « Recurrence and ergodicity of random walks on linear groups and on homogeneous spaces », *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **32** (2012), no. 4, p. 1313–1349.

[17] Y. Guivarc'h & A. Raugi – « Frontière de furstenberg, propriété de contraction et théorèmes de convergence », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **69** (1985), p. 187–242.
[18] H. Hennion & B. Roynette – « Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène », *Astérisque* **74** (1980), p. 99–122.
[19] É. Le Page – « Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires », *Springer LN* (1982), no. 928, p. 258–303.
[20] D. Revuz – « Sur le théorème de dichotomie de hennion-roynette », *Annales Institut Elie Cartan* (1983), no. 7, p. 143–147.
[21] K. Schmidt – « Lectures on cocycles of ergodic transformation groups », November 1976.
[22] ———, « On joint recurrence », *C. R. Acad. Sci. Paris* **327** (1998), no. I, p. 837–842.
[23] F. Spitzer – *Principles of random walks*, Springer, 1964.