

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SOMMES DE BIRKHOFF ITÉRÉES SUR DES EXTENSIONS FINIES D'ODOMÈTRES. CONSTRUCTION DE SOLUTIONS AUTO-SIMILAIRES À DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC DÉLAI

Jean-François Bertazzon & Vincent Delecroix

**Tome 146
Fascicule 1**

2018

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 81-140

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique
trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 146, mars 2018

Comité de rédaction

Christine BACHOC	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Kieran O'GRADY
Jean-François DAT	Emmanuel RUSS
Pascal HUBERT	Christophe SABOT
Laurent MANIVEL	

Marc HERZLICH (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),

avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
bulletin@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr>

© Société Mathématique de France 2018

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

SOMMES DE BIRKHOFF ITÉRÉES SUR DES EXTENSIONS FINIES D'ODOMÈTRES. CONSTRUCTION DE SOLUTIONS AUTO-SIMILAIRES À DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC DÉLAI

PAR JEAN-FRANÇOIS BERTAZZON & VINCENT DELECROIX

RÉSUMÉ. — Nous estimons le comportement asymptotique des sommes de Birkhoff itérées pour des systèmes dynamiques qui sont le codage d'extensions finies d'odomètres.

Si u est une suite de réels, sa première somme itérée $S^{(1)}(u)$ est la suite des sommes cumulatives des premiers termes. Puis par récurrence, nous définissons la ℓ -ème somme itérée par $S^{(\ell)}(u) = S^{(1)}(S^{(\ell-1)}(u))$.

Les systèmes dynamiques symboliques que nous étudions sont engendrés par des substitutions apériodiques et primitives particulières, que nous qualifierons de *fortement uniformes*.

Nous montrons que pour tout entier $\ell \geq 1$, il existe un polynôme d'approximation p_ℓ tel que la différence des suites $S^{(\ell)}(u) - (p_\ell(n))_{n \in \mathbb{N}}$ soient bornées, où u est l'image de l'orbite d'un point par une fonction qui ne dépend que de la première lettre.

Nous nous restreignons ensuite à des alphabets sur deux lettres $\{a, b\}$ puis nous imposons une condition combinatoire sur la substitution permettant d'estimer la croissance de ces bornes. Nous restreignons également notre étude au point fixe d'une substitution, et non plus sur l'ensemble du système dynamique symbolique.

Ces sommes itérées correctement renormalisées convergent en un certain sens et permettent de construire une fonction qui est solution d'équations intégrales du type :

$$\int_0^{\lambda x} f(t) dt = \eta(f(x) - f(0)) \quad \text{pour tout } x \geq 0$$

Texte reçu le 4 juin 2015, modifié le 4 janvier 2017, accepté le 19 juillet 2017.

JEAN-FRANÇOIS BERTAZZON, Lycée Notre Dame de Sion, 231 Rue Paradis, 13006 Marseille, France. • E-mail : jeffbertazzon@gmail.com

VINCENT DELECROIX, LaBRI, UMR 5800 Bâtiment A30 351, cours de la Libération 33405 Talence cedex, France. • E-mail : vincent.delecroix@labri.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 37B10, 45A05, 68R15.

Mots clefs. — Système dynamique symbolique, substitution, théorie ergodique, sommes de Birkhoff, odomètre, équation différentielle avec délai.

pour des paramètres entiers $\lambda \geq 2$ et $\eta \in \mathbb{Z}^*$.

ABSTRACT (*Iterated Birkhoff sums on finite odometer extensions. Construction of auto-similar solutions to differential equations with delay*). — We build bounded solutions to a linear integral equation. Our functions are built as limit of iterated Birkhoff sums over auto-similar dynamical systems.

1. Introduction

1.1. Principaux résultats. — Étant donné un espace compact K et une application continue $T : K \rightarrow K$ ergodique pour une mesure de probabilité μ alors le théorème de Birkhoff donne une asymptotique au premier ordre des sommes d'une fonction le long des orbites. Plus précisément, soit $f \in L^1_\mu(K, \mathbb{R})$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) - n \int_K f d\mu$$

est négligeable devant n lorsque n tend vers $+\infty$ pour μ -presque tout x . La somme apparaissant dans cette expression s'appelle *une somme de Birkhoff* et une question importante est d'en donner une estimation précise pour des classes particulières de systèmes dynamiques. Dans un cadre aléatoire apparaît un terme en \sqrt{n} ou $\sqrt{n \log \log(n)}$ lié au théorème central limite et la loi du logarithme itéré. Dans le cadre des rotations, le théorème de Denjoy-Koksma ([12]) montre que ces expressions sont bornées pour certains temps n indépendamment de x . Plus récemment, ces questions ont été étudiées pour les systèmes dynamiques provenant de systèmes substitutifs [1] et d'échanges d'intervalles [18], [11] et [5]. Mentionnons que lorsque la dynamique est une translation sur un groupe abélien compact et que f est suffisamment régulière, cette quantité reste uniformément bornée en n . Nous pouvons alors étudier le comportement asymptotique de la somme des différences entre les sommes de Birkhoff et l'intégrale de la fonction f :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) - n \int_K f d\mu \right).$$

Nous pouvons poursuivre ce processus et cela nous conduit à la notion de *sommes de Birkhoff itérées*.

DÉFINITION 1. — Soit $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, sa *somme de Birkhoff* $S^{(1)}(u)$ est la suite des sommes cumulatives définie par $S_0^{(1)} = 0$ et :

$$S_n^{(1)}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

La $(\ell+1)$ -ème *somme de Birkhoff itérée* est définie par récurrence par $S^{(\ell+1)} = S^{(1)}(S^{(\ell)}(u))$ soit encore $S_0^{(\ell+1)}(u) = 0$ et :

$$S_n^{(\ell+1)}(u) = S_n^1(S^{(\ell)}(u)) = \sum_{i=0}^{n-1} S_i^{(\ell)}(u) \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*.$$

Quitte à prolonger un vecteur $u = (u_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ en une suite en posant $u_i = 0$ pour $i \geq n$, nous prolongeons la notion de sommes de Birkhoff itérées à des vecteurs.

Étant donné un système dynamique $T : K \rightarrow K$ et une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, nous construisons ces sommes de Birkhoff en prenant la suite $u_n = f(T^n x)$. Dans le cadre des rotations du cercle, ces sommes itérées ont été étudiées dans [6].

Nous introduisons maintenant la classe de systèmes dynamiques que nous allons étudier qui sont des extensions finies d'odomètres. Nous renvoyons à la partie 2 pour plus de précisions. Une *substitution* σ sur un alphabet fini \mathcal{A} est un endomorphisme du monoïde libre \mathcal{A}^* formé de l'ensemble des mots finis. Une substitution est entièrement déterminée par les images des lettres de \mathcal{A} et s'étend naturellement en un endomorphisme des mots infinis. À une substitution est associée sa *matrice d'incidence* pour laquelle l'entrée en position (α, β) est le nombre d'occurrences de la lettre α dans l'image $\sigma(\beta)$ que l'on notera aussi $|\sigma(\beta)|_\alpha$.

Nous ne considérons dans notre travail que des substitutions dites *positives* (c'est-à-dire telle que $|\sigma(\beta)|_\alpha > 0$ pour toutes paires de lettres (α, β)) et *apériodiques* (c'est-à-dire telles qu'il n'existe pas un mot infini périodique u tel que $\sigma(u) = u$). À une substitution positive et apériodique, nous pouvons associer un sous-ensemble compact K_σ de $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ appelé *sous-décalage* induit par σ . Il est construit en prenant les adhérences des mots finis $\sigma^n(\alpha)$ et leurs décalages dans $\mathcal{A}^\mathbb{N}$. On parle parfois de *systèmes auto-induits* dans le sens où il admet un induit (sur un ouvert-fermé) isomorphe à lui-même.

NOTATION. — 1. Si φ est une fonction réelle définie sur l'alphabet \mathcal{A} , nous la prolongeons en une fonction définie sur \mathcal{A}^* ou $\mathcal{A}^\mathbb{N}$, encore notée φ , en associant à tout mot (fini ou infini) u la valeur $\varphi(u) = \varphi(u_0)$ où u_0 est la première lettre de u . Par exemple la *fonction caractéristique de la lettre* $\alpha \in \mathcal{A}$ notée $\chi_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et définie par :

$$\chi_\alpha(\beta) = 0 \quad \text{si } \beta \neq \alpha \quad \text{et} \quad \chi_\alpha(\alpha) = 1,$$

sera indifféremment considérée comme une fonction définie sur \mathcal{A} , \mathcal{A}^* ou $\mathcal{A}^\mathbb{N}$.

2. Pour tout mot infini u et toute fonction $\varphi : \mathcal{A}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, nous définissons la suite de réels :

$$\varphi * u = (\varphi(u_i u_{i+1} \cdots))_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{où } u = u_0 u_1 \cdots \in \mathcal{A}^\mathbb{N}.$$

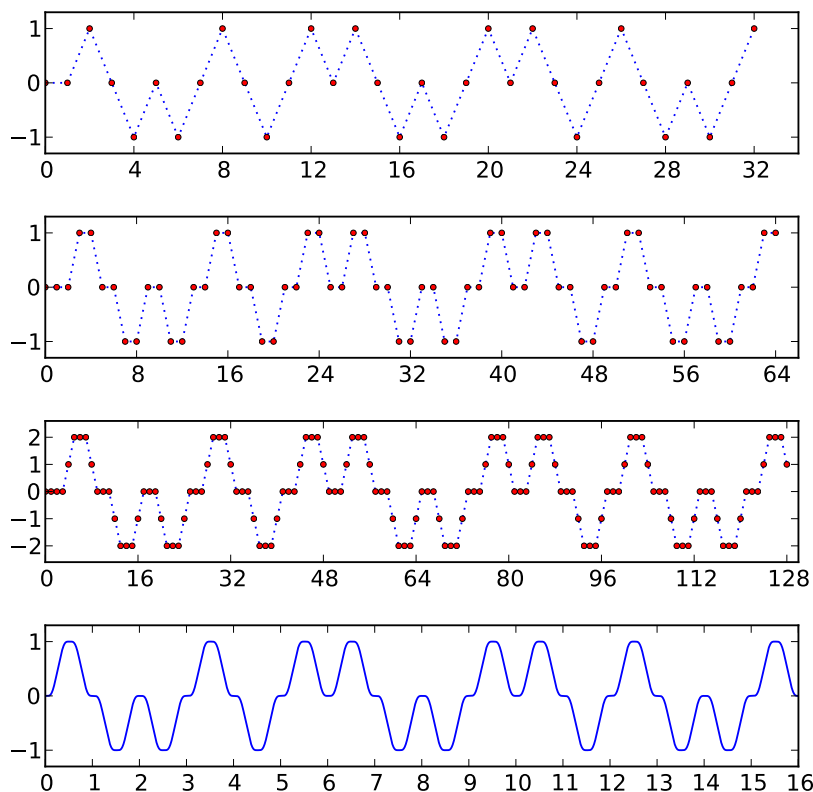


FIGURE 1.1. Les trois premières sommes $S^{(\ell)}(\varphi * u)$ et la fonction limite f_u avec u le mot de Prouet-Thue-Morse et $\varphi = \chi_a - \chi_b$.

unique suite de polynômes $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n) \right| < \infty \quad \text{où} \quad \varphi * u = (\varphi(u_i))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Sous la condition $p_{\ell+1}(n+1) - p_{\ell+1}(n) = p_\ell(n)$ pour tous les entiers $(n, \ell) \in \mathbb{N}^2$, la suite de polynômes vérifiant cette relation est unique.

Le cœur de l'article est l'étude asymptotique des quantités

$$\sup\{|S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n)|; n \in \mathbb{N}\}.$$

Notre approche nécessite plus de restrictions sur les substitutions. En plus d'être positives, apériodiques et fortement uniformes, nous imposons

1. que l'alphabet \mathcal{A} soit constitué de deux lettres,
2. que les substitutions soient «non dégénérées» (voir la condition $\delta_2 \neq 0$ dans les deux énoncés ci-dessous).

Sous ces deux conditions, nous donnons une asymptotique précise et un théorème limite pour les sommes de Birkhoff itérées.

Si σ est une substitution uniforme sur $\{a, b\}$ de longueur λ alors pour toute fonction injective $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout entier $\ell \geq 1$, nous définissons :

$$\delta_\ell = \frac{S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(b))}{\varphi(a) - \varphi(b)}.$$

Remarquons que ces expressions ne dépendent pas de la fonction injective φ choisie et que $\delta_1 = 0$ si et seulement si σ est fortement uniforme (voir lemme 10 section 2.2). Par exemple si $\varphi = \chi_a$, alors $\delta_1 = |\sigma(a)|_a - |\sigma(b)|_b$. Nous pouvons maintenant énoncer un résultat important de cet article :

THÉORÈME 4. — *Soient σ une substitution fortement uniforme sur $\{a, b\}$ de longueur λ vérifiant $\delta_2 \neq 0$. Soient u un point fixe de σ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Soit $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes du théorème 3. Alors la suite de terme général :*

$$\frac{1}{\delta_2^{\ell-1} \lambda^{(\ell-1)(\ell-2)/2}} \sup_{n \geq 0} \left| S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n) \right| \quad \text{converge lorsque } \ell \text{ tend vers } +\infty.$$

Afin de donner un sens précis à la limite des sommes de Birkhoff nous introduisons la concaténation de fonctions.

DÉFINITION 5. — Soient $\tau \in \mathbb{R}_+$, $f_a : [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f_b : [0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ un mot de longueur n sur $\{a, b\}$, nous noterons $f_u : [0, n\tau[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_u(k\tau + x) = f_{u_k}(x) \quad \text{pour } x \in [0, \tau[\text{ et } 0 \leq k \leq n-1.$$

Nous dirons que la fonction f_u est la *concaténation des fonctions f_a et f_b le long du mot u* . Cette définition se prolonge aux mots infinis u et la fonction f_u est alors définie sur le domaine \mathbb{R}_+ .

Notons que pour les mots de longueur 1, nous retrouvons bien les fonctions de départ f_a et f_b .

THÉORÈME 6. — *Soient σ une substitution vérifiant les conditions du théorème 4 et u un point fixe de σ . Fixons une fonction injective $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes du théorème 3. Alors il existe deux fonctions dérivables non-nulles f_a et f_b définies sur $[0, \lambda]$ telles que la concaténation f_u vérifie pour tout réel $x \geq 0$ de la forme $x = \frac{n}{\lambda^{m-1}}$:*

$$f_u(x) = f_u\left(\frac{n}{\lambda^{m-1}}\right) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{S_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)}(\varphi * u) - p_{m+\ell}(n\lambda^\ell)}{\delta_2^{\ell-1} \lambda^{(\ell-1)(\ell-2)/2}}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f'_u(x) = \frac{\lambda}{\delta_2} f_u(\lambda x)$.

Cette dernière équation différentielle peut s'exprimer de manière équivalente sous la forme intégrale suivante :

$$\int_0^{\lambda x} f_u(t) dt = \delta_2(f_u(x) - f_u(0)) \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Pour $\tau \in \mathbb{R}^+$ et $\nu \in \mathbb{R}^*$, nous revenons dans l'annexe B sur les équations intégrales de la forme :

$$(E_{\tau,\nu}) \quad \int_0^{\tau x} f(t) dt = \nu(f(x) - f(0)) \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Nous pouvons citer les travaux de T. Yoneda qui obtient pour chaque paramètre (τ, ν) une solution particulière de l'équation fonctionnelle (voir [16, 17]). Pour le cas $\tau = 2$ et $\nu = 1$, cette solution est la fonction de Fabius. Lorsque $\tau > 2$ est un entier, ces solutions sont distinctes de celles obtenues via le théorème 6.

1.2. Exemples. — Présentons quelques exemples de fonctions limites obtenues dans le théorème 6.

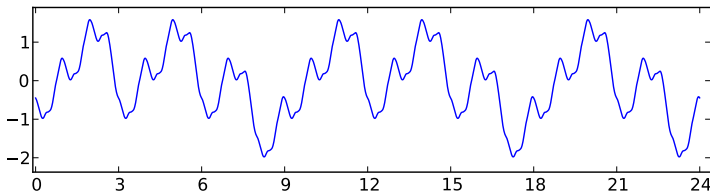


FIGURE 1.2. Graphe de la fonction f_u pour le point fixe commençant par a de la substitution $(a \mapsto aab, b \mapsto aba)$ obtenue avec notre construction pour la fonction $\varphi = \chi_a - 2\chi_b$.

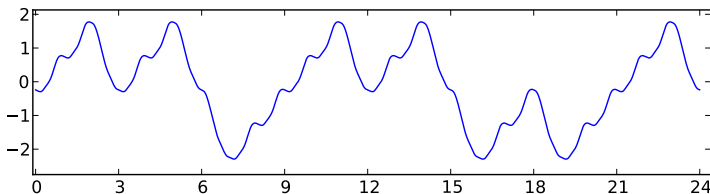


FIGURE 1.3. Graphe de la fonction f_u pour le point fixe commençant par a de la substitution $(a \mapsto aab, b \mapsto baa)$ obtenue avec notre construction avec la fonction $\varphi = \chi_a - 2\chi_b$.

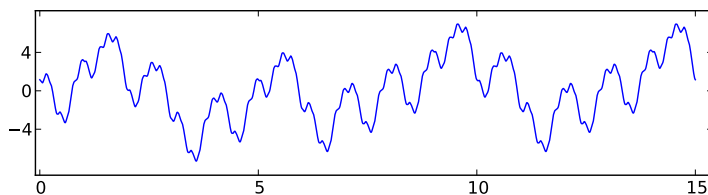


FIGURE 1.4. Graphe de la fonction f_u pour le point fixe commençant par a de la substitution $(a \mapsto abbaa, b \mapsto baaab)$ obtenue avec notre construction avec la fonction $\varphi = 2\chi_a - 3\chi_b$.

1.3. Organisation de l'article et notations. — Le premier résultat que nous obtenons sur l'approximation des sommes de Birkhoff itérées (théorème 3) est prouvé dans la section 2.5. Ces sommes sont particulièrement faciles à calculer pour des fonctions qui sont des cobords « infinis » (voir le lemme 11) et nous montrons que les fonctions qui ne dépendent que de la première coordonnée sont de cette forme.

Afin de prouver le théorème 4, nous recherchons une relation de récurrence reliant les sommes de Birkhoff itérées d'ordre $\ell + 1$ aux temps $n\lambda$ à celles d'ordre $j \leq \ell$ aux temps n . Pour cela, nous revenons sur la définition des quantités $(\delta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ et en introduisons de nouvelles notées $(\gamma_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$.

Si σ est une substitution *uniforme* de longueur λ sur $\{a, b\}$ alors pour toute fonction injective $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout entier $\ell \geq 1$, nous définissons les quantités :

$$(1) \quad \delta_\ell = \frac{S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(b))}{\varphi(a) - \varphi(b)}$$

$$\text{et } \gamma_\ell = \frac{\varphi(b)S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(a)) - \varphi(a)S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(b))}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Si $\ell \geq \lambda + 1$, alors $\delta_\ell = 0$ et nous noterons :

$$\delta = \sum_{\ell=0}^{\lambda-1} \delta_{\ell+1} X^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \delta_{\ell+1} X^\ell \quad \text{et} \quad \gamma = \sum_{\ell=0}^{\lambda-1} \gamma_{\ell+1} X^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \gamma_{\ell+1} X^\ell.$$

Rappelons que les quantités $(\delta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ ne dépendent que de la substitution σ et non pas de la fonction injective φ choisie (lemme 10 de la section 2.2).

Pour démontrer le théorème 4, nous commençons par introduire dans la section 3 un groupe \mathcal{G} construit comme produit semi-direct de l'espace des séries formelles par \mathbb{R} . Dans ce groupe, pour toute suite u de réels, les sommes de Birkhoff $(S_n^{(\ell)}(u))_{(n,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ apparaissent naturellement comme des produits dans \mathcal{G} (voir la section 3.2).

Étant données une substitution uniforme σ de longueur λ et une fonction injective $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$, nous construisons dans la section 3.5 un morphisme π_φ de l'ensemble des mots finis sur $\{a, b\}$ (muni de la concaténation) à valeurs dans \mathcal{G} . Nous construisons ensuite dans la section 3.6 (proposition 25) un endomorphisme \mathcal{L} de \mathcal{G} qui généralise l'abélianisé d'une substitution et qui vérifie $\mathcal{L} \circ \pi_\varphi = \pi_\varphi \circ \sigma$. Si $\delta_1 = 0$, cet endomorphisme permet de relier les sommes de Birkhoff d'ordre $\ell + 1$ et j pour $j \leq \ell$ aux temps n et $n\lambda$ pour tout mot u selon la formule de récurrence :

(2)

$$S_{n\lambda}^{(\ell+1)}(\varphi * \sigma(u)) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i}(\lambda) S_n^{(j+1)}(\varphi * u) \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i}(\lambda) \gamma_{i+1} \binom{n}{j+1}.$$

Dans la section 4.1, nous étudions les polynômes $(q_{j,\ell})_{(j,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ (définition 26) intervenant dans cette formule : nous estimons leur comportement asymptotique (proposition 31) et en donnons un majorant (lemme 32).

L'endomorphisme \mathcal{L} permet aussi de décrire précisément les polynômes d'approximation $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ (voir section 4.2).

La condition de non-nullité de δ_2 nous permet de décrire la croissance des sommes itérées. Pour cela nous définissons les coefficients de renormalisation $(\rho_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

DÉFINITION 7. — Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, nous définissons : $\rho_\ell = \delta_2^{\ell-1} \lambda^{(\ell-1)(\ell-2)/2}$.

Nous notons pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, $c_\ell = p_\ell(0)$ et $\tilde{c}_\ell = c_\ell / \rho_\ell$. Une difficulté importante dans ce travail est d'étudier la croissance de cette suite $(c_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ et nous montrons (proposition 38) que la suite $(\tilde{c}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge. Nous apportons alors la preuve du théorème 4 dans la section 4.4.

Nous montrons la proposition suivante dans la section 5 en étudiant le comportement asymptotique des puissances de \mathcal{L} dans la proposition 40 :

PROPOSITION 8. — *Sous les hypothèses du théorème 4, il existe une fonction $\Psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous les entiers m et n par :*

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)}(\varphi * u) = \Psi(m, n) \quad \text{où} \quad \tilde{S}_n^{(\ell)}(\varphi * u) = \frac{1}{\rho_\ell} \left(S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(u) \right).$$

De plus, la suite $(\Psi(1, n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas identiquement nulle.

La condition de non-nullité permet de s'assurer que la limite obtenue dans le théorème 4 n'est pas nulle.

Ce résultat nous permet dans la section 6 de définir correctement la fonction solution annoncée dans le théorème 6. En effet, la fonction solution f_u est définie par :

$$f_u \left(\frac{n}{\lambda^{m-1}} \right) = \Psi(m, n) \quad \text{pour tout couple d'entiers } (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

Nous vérifions également dans cette section les différentes propriétés vérifiées par cette fonction.

Nous revenons enfin dans l'annexe B sur les équations intégrales $(E_{\tau,\nu})$.

Remerciements. — Nous tenons à remercier X. Bressaud qui nous a aidé au lancement de ce projet ainsi que N. Bédaride pour ses nombreux conseils tout au long de l'écriture de cet article.

2. Quelques rappels de combinatoire et preuve du théorème 3

2.1. Mots finis, mots infinis et substitutions. — Soit \mathcal{A} un ensemble fini que l'on appelle *alphabet*. Dans la suite, nous prendrons très souvent $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Les éléments de \mathcal{A} sont appelés des *lettres*. Les lettres forment par concaténation des mots (finis) dont la *longueur* est le nombre de lettres dont ils sont constitués. Nous notons \mathcal{A}^* l'ensemble des *mots finis* sur \mathcal{A} . Il s'agit d'un monoïde pour la concaténation et ε désigne le mot vide. Un *facteur* d'un mot $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ est un mot v de la forme $v = u_i u_{i+1} \dots u_{i+k-1}$. Nous considérons également l'ensemble des *mots infinis* $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ que nous munissons de la topologie produit, ce qui en fait un espace compact. Une *substitution* sur \mathcal{A} est un endomorphisme de \mathcal{A}^* vu comme monoïde. Une substitution est *positive* si chaque image de lettre contient toutes les lettres de l'alphabet. Par exemple la substitution de Prouet-Thue-Morse $a \mapsto ab, b \mapsto ba$ est positive. Le *langage* d'une substitution positive est le plus petit sous-ensemble de \mathcal{A}^* contenant \mathcal{A} , stable par facteur et par σ . C'est aussi l'ensemble des facteurs des mots $\sigma^n(\alpha)$ où α est une lettre de l'alphabet et n un entier. Par exemple, le langage de la substitution de Prouet-Thue-Morse est :

$$\{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aab, aba, abb, baa, bab, bba, \dots\}.$$

À une substitution positive σ , nous associons également le *sous-décalage associé* noté K_σ , qui est un sous-ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ formé des mots infinis dont tous les facteurs appartiennent au langage de σ . C'est un ensemble compact et non-vide. La substitution σ agit continûment sur K_σ . Un mot est *substitutif* s'il est le point fixe d'une substitution, comme par exemple, le mot de Prouet-Thue-Morse commençant par :

abbabaabbaababbabababbaabbaabbaabbaababbababbaabbaababbababaaba...

Le *décalage* sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est l'application qui consiste à décaler l'origine T : $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est un ensemble compact et T est une application continue. L'*orbite* d'un point $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble de points $\{T^n(u); n \in \mathbb{N}\}$.

Si σ est une substitution positive, alors K_σ est invariant par T : c'est un *sous-décalage* de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il est *minimal* : pour tout mot $u \in K_\sigma$ son orbite est dense dans K_σ .

2.2. Sommes de Birkhoff itérées. — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Reprenant la définition 1, les sommes de Birkhoff itérées d'ordre $\ell \in \mathbb{N}^*$ au rang $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient la relation :

$$(3) \quad S_{n+1}^{(\ell)}(u) = S_n^{(\ell)}(u) + S_n^{(\ell-1)}(u),$$

où par convention : $S_n^{(0)}(u) = u_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Autrement dit, la double suite $(S_n^{(\ell)}(u))_{(n,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ est un triangle de Pascal généralisé, pour lequel la première colonne, constituée de 1 dans le triangle de Pascal, est remplacée par u :

$\begin{array}{c c} \ell & n \end{array}$	0	1	2	3	4	5
0	u_0	0	0	0	0	0
1	u_1	u_0	0	0	0	0
2	u_2	$u_0 + u_1$	u_0	0	0	0
3	u_3	$u_0 + u_1 + u_2$	$2u_0 + u_1$	u_0	0	0
4	u_4	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3$	$3u_0 + 2u_1 + u_2$	$3u_0 + u_1$	u_0	0
5	u_5	$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$4u_0 + 3u_1 + 2u_2 + u_3$	$6u_0 + 3u_1 + u_2$	$4u_0 + u_1$	u_0

TABLE 2.1. Premières valeurs des sommes itérées $(S_n^{(\ell)}(u))_{(n,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ pour $0 \leq n, \ell \leq 5$.

On peut montrer aisément par récurrence que pour tous les entiers $0 \leq \ell \leq n$, $S_n^{(\ell)}(u)$ s'exprime avec les coefficients $u_0, \dots, u_{n-\ell}$ selon la formule :

$$S_n^{(\ell)}(u) = \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-k-1}{\ell-1} u_k.$$

Soit σ une substitution positive, K_σ le sous-décalage associé et $\varphi : K_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Le théorème suivant est un résultat classique de théorie ergodique. Il est souvent écrit avec $\ell = 1$. L'estimation pour $\ell \geq 2$ découle directement du cas $\ell = 1$ en remarquant que les sommes au rang $\ell + 1$ sont les sommes de celles au rang ℓ . Nous renvoyons à [10] pour des détails.

PROPOSITION 9 (Unique ergodicité). — *Soient σ une substitution positive et (K_σ, T) le décalage associé. Alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur K_σ invariante par T . De plus, pour toute fonction $\varphi \in C(K_\sigma)$, pour tout entier $\ell \geq 1$, on a uniformément en $u \in K_\sigma$ lorsque n tend vers $+\infty$:*

$$S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - \binom{n}{\ell} \int_{K_\sigma} \varphi d\mu = o(n^\ell).$$

Ce résultat montre que la première échelle d'approximation de $S_n^{(\ell)}(\varphi * u)$ est $\binom{n}{\ell} \int_{K_\sigma} \varphi d\mu$. Dans cet article, pour certaines substitutions et certaines fonctions, nous montrons que les sommes de Birkhoff restent bornées quitte à soustraire un polynôme. Ce résultat est très spécifique et ne concerne pas toutes les substitutions. On trouvera une étude précise de la croissance des sommes de Birkhoff d'ordre 1 pour une substitution quelconque dans [1].

LEMME 10. — Soient σ une substitution uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Nous associons les quantités $(\delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq \lambda}$ définies en (1).

1. Les quantités $(\delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq \lambda}$ ne dépendent pas de la fonction injective φ choisie.
2. La substitution (uniforme) est fortement uniforme si et seulement si $\delta_1 = 0$.

Preuve du lemme 10. — 1. Fixons un entier $\ell \in \mathbb{N}^*$. D'après la définition 1 des sommes itérées, l'application $S^{(\ell)} : u \mapsto S^{(\ell)}(u)$ est un endomorphisme de l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Fixons maintenant une fonction φ , alors pour tous les réels x et y :

$$S_\lambda^{(\ell)}((x\varphi + y) * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}((x\varphi + y) * \sigma(b)) = x \left(S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(b)) \right)$$

Prenons maintenant une seconde fonction injective $\psi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe deux réels x_0 et y_0 tels que $\psi = x_0\varphi + y_0$. En divisant la relation précédente par $\psi(a) - \psi(b) = x_0(\varphi(a) - \varphi(b))$ avec $x = x_0$ et $y = y_0$, nous trouvons :

$$\frac{S_\lambda^{(\ell)}(\psi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}(\psi * \sigma(b))}{\psi(a) - \psi(b)} = \frac{S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(\ell)}(\varphi * \sigma(b))}{\varphi(a) - \varphi(b)}$$

La quantité δ_ℓ est donc bien indépendante de la fonction φ injective choisie.

2. Il suffit pour cela de calculer δ_1 . Nous notons $n_{\alpha, \beta} = |\sigma(\alpha)|_\beta$ pour deux lettres $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}^2$. Nous commençons par calculer les expressions suivantes :

$$S_\lambda^{(1)}(\varphi * \sigma(a)) = n_{a,a}\varphi(a) + n_{a,b}\varphi(b) \quad \text{et} \quad S_\lambda^{(1)}(\varphi * \sigma(b)) = n_{b,a}\varphi(a) + n_{b,b}\varphi(b).$$

Nous utilisons les relations $n_{a,b} = \lambda - n_{a,a}$ et $n_{b,b} = \lambda - n_{b,a}$:

$$\begin{aligned} S_\lambda^{(1)}(\varphi * \sigma(a)) - S_\lambda^{(1)}(\varphi * \sigma(b)) &= n_{a,a}\varphi(a) + n_{a,b}\varphi(b) - n_{b,a}\varphi(a) - n_{b,b}\varphi(b) \\ &= (n_{a,a} - n_{b,a}) \cdot (\varphi(a) - \varphi(b)). \end{aligned}$$

En divisant par $\varphi(a) - \varphi(b)$, nous trouvons donc $\delta_1 = n_{a,a} - n_{b,a}$. Cette quantité est nulle si et seulement s'il y a le même nombre de a dans l'image de b et de a . Donc également le même nombre de b , ce qui est la définition d'une substitution fortement uniforme. \square

2.3. Cobords infinis. — Nous fixons un décalage minimal $K \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Une fonction continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est un *cobord continu* s'il existe une fonction continue $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$. Autrement dit, si la fonction φ est dans l'image de l'opérateur $U_T - I : \psi \mapsto \psi \circ T - \psi$. Si φ est un cobord, alors la fonction ψ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$ est déterminée à une constante près. Si $\varphi = \psi \circ T - \psi$ est un cobord, alors sa n -ème somme de Birkhoff se réécrit simplement en fonction de ψ :

$$S_n^{(1)}(\varphi * u) = \psi(T^n u) - \psi(u).$$

En particulier, la suite $(S_n^{(1)}(\varphi * u))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. La réciproque est vraie, c'est le *théorème de Morse-Hedlund* : si K est minimal, une fonction continue $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ dont la somme de Birkhoff est bornée est un cobord continu.

Nous dirons que la fonction φ est un *cobord infini* s'il existe une constante ψ_0 et une suite de fonctions continues $(\psi_n)_{n \geq 1}$ telles que

$$\begin{cases} \varphi + \psi_0 = \psi_1 \circ T - \psi_1, \\ \psi_n = \psi_{n+1} \circ T - \psi_{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction φ est à une constante près dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_T - I)^n C(K)$. La suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la moyenne de ψ_n selon toute mesure T -invariante est nulle. Avec ces notations, si φ est un cobord infini, alors pour tout mot $u \in K$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} S_n^{(1)}(\varphi * u) &= \psi_1 \circ T^n(u) - \psi_1(u) - n\psi_0, \\ S_n^{(2)}(\varphi * u) &= \psi_2(T^n u) - \psi_2(u) - n\psi_1(u) - \binom{n}{2}\psi_0, \\ S_n^{(3)}(\varphi * u) &= \psi_3(T^n u) - \psi_3(u) - n\psi_2(u) - \binom{n}{2}\psi_1(u) - \binom{n}{3}\psi_0. \end{aligned}$$

Nous déduisons aisément par récurrence que pour tous les entiers $n \geq 0$ et $\ell \geq 0$,

$$(4) \quad S_n^{(\ell)}(\varphi * u) = \psi_\ell(T^n u) - \sum_{j=0}^{\ell} \binom{n}{\ell-j} \psi_j(u).$$

En particulier, en notant $p_{\ell,u}$ le polynôme prenant les valeurs $-\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{\ell-k} \psi_k(u)$ aux points n entiers, alors $S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_{\ell,u}(n) = \psi_\ell(T^n u)$ est une suite bornée. Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

LEMME 11. — Soient K un sous-décalage minimal de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $u \in K$ et $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ un cobord infini continu. Alors il existe une suite de polynômes $(p_{\ell,u})_{\ell \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout entier ℓ , la suite $(S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_{\ell,u}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Les propriétés élémentaires vérifiées par les coefficients binomiaux nous assurent que pour tous les entiers n et ℓ : $p_{\ell+1,u}(n+1) - p_{\ell+1,u}(n) = p_{\ell,u}(n)$.

2.4. Odomètres. — Nous montrons dans cette section que les sommes de Birkhoff itérées sur des odomètres sont à distance bornées d'une suite de polynômes. Fixons un entier $\lambda \geq 2$ et commençons par rappeler la structure de l'odomètre $(\mathbb{Z}_\lambda, +1)$. L'anneau \mathbb{Z}_λ est homéomorphe au produit $\{0, 1, \dots, \lambda - 1\}^\mathbb{N}$. Autrement dit, chaque élément de \mathbb{Z}_λ est une suite (a_0, a_1, a_2, \dots) . Cette suite peut être vue comme une série $\sum a_i \lambda^i$ (qui est convergente dans \mathbb{Z}_λ). Les suites finies (*i.e.* se terminant par des zéros) correspondent exactement aux entiers écrits en base λ . L'anneau \mathbb{Z}_λ admet des projections $\mathbb{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}/\lambda^n \mathbb{Z}$ qui sont des homomorphismes d'anneaux. Une définition possible de \mathbb{Z}_λ consiste à le voir comme la limite projective de ces groupes. Du point de vue des suites, ces projections correspondent à la troncation. Lorsque $\lambda = p$ est un nombre premier, il s'agit de l'anneau des entiers p -adiques habituel.

L'odomètre correspond à l'addition de 1 dans l'anneau \mathbb{Z}_λ (voir [13] chapitre 4). Notons que l'odomètre est uniquement ergodique et l'unique mesure invariante est la mesure produit des mesures uniformes sur $\{0, 1, \dots, \lambda - 1\}$.

Il est possible de voir l'anneau \mathbb{Z}_λ comme une suite de partitions périodiques de \mathbb{Z} . Plus précisément, soit $a = (a_0, a_1, \dots)$ un élément fixé de \mathbb{Z}_λ . On définit pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ et chaque entier $m \in \mathbb{Z}$ un intervalle d'entiers :

$$I_{k,m}(a) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{k-1} \lambda^{k-1} + [m \lambda^k, (m+1) \lambda^k - 1].$$

Chaque intervalle $I_{k,m}(a)$ a pour longueur λ^k et pour chaque entier k , la suite $\{I_{k,m}(a)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ forme une partition périodique de \mathbb{Z} . D'autre part, chaque bloc de niveau $k \geq 1$ est composé de λ blocs de niveau $k+1$ (voir figure 2.1) :

$$(5) \quad I_{k,m}(a) = \bigcup_{b=-a_k}^{\lambda-a_k-1} I_{k+1,m+\lambda b}(a).$$

On peut numéroter ces λ blocs de niveau $k+1$ de 0 à $\lambda-1$. Il est alors facile de voir à partir de (5) que l'élément $0 \in \mathbb{Z}$ est dans le a_k -ème bloc de génération k . Cette construction s'inverse et fournit une bijection entre \mathbb{Z}_λ et ces systèmes de partitions emboîtées (voir la figure 2.1).



FIGURE 2.1. \mathbb{Z}_2 vu comme une structure de partitions emboîtées de \mathbb{Z} . Ici il s'agit d'un point $a = (1, 1, 0, \dots)$. L'odomètre sur \mathbb{Z}_2 correspond alors au décalage de ces blocs.

L'odomètre correspond alors au décalage de ces blocs, en effet nous avons l'égalité des partitions :

$$\{I_{k,m}(a+1)\}_{m \in \mathbb{Z}} = \{I_{k,m}(a) + 1\}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Signalons que nous venons de décrire le *diagramme de Bratelli-Vershik* associé à l'odomètre. Nous renvoyons à [8] pour plus de généralités sur ces constructions et leurs liens avec les substitutions.

PROPOSITION 12. — *Soit $\varphi : \mathbb{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de moyenne nulle pour l'unique mesure invariante pour l'odomètre. Nous supposons que φ ne dépend que des k premières coordonnées. Alors il existe une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de moyennes nulles telles que*

- $\psi_0 = \varphi$,
- pour tout entier $n \geq 0$, la fonction ψ_n ne dépend que des k premières coordonnées,
- pour tout $a \in \mathbb{Z}_\lambda$, $\psi_n(a) = \psi_{n+1}(a+1) - \psi_{n+1}(a)$.

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{Z}_\lambda$ et tout entier ℓ , si nous notons $u = (\varphi(a), \varphi(a+1), \dots)$, alors la somme itérée $S^{(\ell)}(u)$ est la somme d'un polynôme de degré au plus ℓ et d'une suite périodique de période au plus λ^k .

Preuve de la proposition 12. — Comme φ ne dépend que de k coordonnées, on peut la voir comme une application de $\mathbb{Z}/\lambda^k\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $a = (a_0, a_1, \dots)$ un point de \mathbb{Z}_λ et $u = (\varphi(a), \varphi(a+1), \varphi(a+2), \dots)$. La suite u est périodique de période (au plus) λ^k . Comme f est de moyenne nulle, pour tout entier i nous avons $\sum_{j=0}^{\lambda^k-1} u_{i+j} = 0$. Ainsi, $S^{(1)}(u)$ est également périodique de période au plus k .

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$v_0 = -\frac{(k-1)u_0 + (k-2)u_1 + \dots + u_{k-2}}{k} \quad \text{et pour } n \in \mathbb{N} : \quad v_{n+1} = v_n + u_n.$$

Cette suite vérifie par construction : $v_{n+1} - v_n = u_n$. La fonction $\psi_1 : \mathbb{Z}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi_1(n) = v_{n \bmod \lambda^k}$ vérifie alors :

- pour tout $a \in \mathbb{Z}_\lambda$, $\varphi(a) = \psi_1(a+1) - \psi_1(a)$,
- ψ_1 est périodique de période au plus λ^k ,
- ψ_1 est de moyenne nulle.

On peut itérer cette construction et définir la suite de fonctions ψ_2, ψ_3, \dots . Ceci démontre la première partie de la proposition. La fonction φ est alors un cobord infini et nous pouvons lui associer naturellement une unique suite de polynômes, selon le processus décrit dans la partie 2.3 précédente. Comme chaque fonction ψ_n ne dépend que des k premières coordonnées cela prouve la seconde partie. \square

2.5. Preuve du théorème 3. — Nous montrons dans cette section que les sommes de Birkhoff itérées sur les sous-décalages de substitution fortement uniforme sont à distance bornées d'une suite de polynômes.

L'énoncé suivant est une reformulation du théorème 3 de l'introduction.

PROPOSITION 13. — Soit $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une substitution positive, apériodique et fortement uniforme de longueur λ et $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit K_σ le sous-décalage associé à σ . Alors il existe une suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

- $\psi_0 = \varphi$,
- ψ_n ne dépend que des λ^n premières coordonnées,
- $\psi_n = \psi_{n+1} \circ T - \psi_{n+1}$,

En particulier, pour tout mot infini $u \in K_\sigma$ et tout entier ℓ , la suite $S^{(\ell)}(\varphi * u)$ est la somme d'un polynôme de degré au plus ℓ et d'une suite périodique de période au plus λ^ℓ où nous rappelons que $\varphi * u = (\varphi(u), \varphi(Tu), \varphi(T^2u), \dots)$.

Preuve de la proposition 13. — La preuve de cette proposition repose sur une décomposition du sous-décalage K_σ (similaire à (5)). Cette décomposition n'est valide que sur le sous-décalage bilatère $\tilde{K}_\sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ associé à σ . Le théorème 3 ne souffre pas de cette restriction et afin de ne pas alourdir les notations, K_σ désignera encore le sous-décalage bilatère associé à σ tout au long de cette preuve.

Soit v_α le nombre d'occurrences de la lettre α dans une image $\sigma(\beta)$. Nous avons $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} v_\alpha$. Pour une lettre α , nous notons pour $0 \leq m < \lambda^k$:

$$\text{Cyl}(k, m, \alpha) = T^m \sigma^k([\alpha]) \subset K_\sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

Pour tout entier k , nous notons F^k l'ensemble des fonctions de $K_\sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dans \mathbb{R} qui sont constantes sur chaque cylindre $\text{Cyl}(k, m, \alpha)$ et F_0^k les fonctions de F^k de moyenne nulle. La proposition 13 découle alors des deux lemmes suivants.

LEMME 14. — Pour tout entier k , tout entier $m \in \{0, \dots, \lambda^k\}$ et toute lettre $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\mu(\text{Cyl}(k, m, \alpha)) = \frac{v_\alpha}{\lambda^{k+1}}.$$

D'autre part, si $\varphi \in F^k$ alors pour toute lettre $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout mot $u \in \text{Cyl}(k+1, 0, \alpha)$:

$$\frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{m=0}^{\lambda^{k+1}-1} \varphi(T^m u) = \int_{K_\sigma} \varphi d\mu,$$

où μ est l'unique mesure de probabilité sur $K_\sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ invariante par T .

LEMME 15. — Soient k un entier et $\varphi \in F_0^k$. Alors φ est un cobord et si ψ est telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$ alors ψ appartient à F^{k+1} . Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_0^k \subset (U_T - I)(F_0^{k+1}).$$

Nous montrons tout d'abord comment déduire le théorème de ces deux lemmes. Puisque $\varphi = \psi_0$ est définie sur \mathcal{A} , alors $\psi_0 \in F^0$ et le lemme 15 nous assure l'existence d'une fonction $\psi_1 \in F^1$ telle que $\psi_0 = \psi_1 \circ T - \psi_1$. Quitte

à considérer $\psi_1 - \int_{K_\sigma} \psi_1 d\mu$, nous pouvons supposer que $\psi_1 \in F_0^1$. Supposons avoir obtenu des fonctions $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ telles que

- pour tout $1 \leq i \leq n$, $\psi_i \in F_0^i$;
- pour $1 \leq i \leq n-1$, $\psi_{i+1} \circ T - \psi_{i+1} = \psi_i$.

Alors il ne nous reste plus qu'à utiliser le lemme 15 pour obtenir une fonction ψ_{n+1} de F^{n+1} telle que $\psi_{n+1} \circ T - \psi_{n+1} = \psi_n$. Le résultat suit en renommant ψ_{n+1} la fonction $\psi_{n+1} - \int_{K_\sigma} \psi_{n+1} d\mu$. \square

Pour prouver les deux lemmes ci-dessus l'ingrédient essentiel et le théorème de Mossé [14] qui nous permet de décomposer les cylindres en cylindres d'ordre supérieur (de manière similaire à (5)). Pour chaque entier $k \geq 0$, chaque cylindre se décompose dans K_σ en une réunion disjointe de $v_\alpha \times |\mathcal{A}|$ cylindres de niveau supérieur la manière suivante :

$$(6) \quad \text{Cyl}(k, m, \alpha) = \bigcup_{\sigma(\beta)=p\alpha s} \text{Cyl}(k+1, \lambda m + |p|, \beta).$$

Mettons en avant que pour certaines substitutions σ ce fait n'est pas vrai sur le sous-décalage unilatère associé à σ .

Preuve du lemme 14. — Comme la mesure μ est invariante, $\mu(\text{Cyl}(k, m, \alpha)) = \mu(\text{Cyl}(0, m, \alpha))$. Notons μ_k la mesure définie pour tout ensemble mesurable Y par :

$$\mu_k(Y) = \mu(T^k \sigma(Y)).$$

Alors d'après la décomposition (6)

- les mesures $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{\lambda-1}$ sont à supports disjoints,
- $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{\lambda-1}$ est une mesure de probabilité invariante.

De l'unique ergodicité de K_σ on en déduit que $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{\lambda-1}$. Ainsi pour tout ensemble mesurable $Y \subset K_\sigma$:

$$\mu(\sigma(Y)) = \frac{\mu(Y)}{\lambda}.$$

Ceci prouve la première partie du lemme.

Maintenant prouvons la formule pour l'intégrale de φ . Soit $u \in \text{Cyl}(k+1, 0, \alpha)$. Alors, pour toute lettre $\beta \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \{0, 1, \dots, \lambda^k - 1\}$, la suite $\{u, Tu, T^2u, \dots, T^{\lambda^{k+1}-1}u\}$ passe exactement v_β fois par le cylindre $\text{Cyl}(k, m, \beta)$. Maintenant la fonction φ appartient à F^k , alors elle est constante sur chaque

$\text{Cyl}(k, m, \beta)$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\lambda^{k+1}-1} \varphi(T^m u) &= \sum_{m=0}^{\lambda^k-1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \frac{v_\beta}{\text{Cyl}(k, m, \beta)} \int_{\text{Cyl}(k, m, \beta)} \varphi \, d\mu \\ &= \sum_{m=0}^{\lambda^k-1} \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \lambda^{k+1} \int_{\text{Cyl}(k, m, \beta)} \varphi \, d\mu \\ &= \int_{K_\sigma} \varphi \, d\mu. \end{aligned}$$

La deuxième égalité provient de la formule prouvée auparavant pour les mesures des cylindres $\text{Cyl}(k, m, \beta)$. \square

Preuve du lemme 15. — Fixons une fonction $\varphi \in F_0^k$. Prenons un mot $u \in \text{Cyl}(k+1, 0, \alpha)$ et posons pour tout entier $0 \leq m < \lambda^{k+1}$, $g(T^m u) = S_m^{(1)}(\varphi, u)$. La fonction g s'étend de manière unique en une fonction de F^{k+1} . D'après la seconde partie du lemme 14, pour tout $u \in \text{Cyl}(k+1, 0, \alpha)$ et pour tout $m \geq 0$, $g(T^m u) = S_m^{(1)}(\varphi, u)$. Et donc pour tout $u \in K_\sigma$ et tout entier m , $S_m^{(1)}(\varphi, u) = g(T^m u) - g(u)$. \square

Le théorème 3 ne se généralise pas simplement à d'autres substitutions. Les fonctions qui ne dépendent que de la première lettre et qui sont des cobords se lisent sur la matrice d'incidence de la substitution (voir [1]). Par exemple, pour les mots *sturmiens* u sur $\{a, b\}$ (qui sont des codages de rotations et dont certains sont substitutifs), il est bien connu que les fonctions $\chi_a - \mu([a])$ et $\chi_b - \mu([b])$ sont des cobords : il existe un réel α tel que :

$$\left\{ \left| S_n^{(1)}(\chi_a * u) - n\alpha \right| ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{est bornée.}$$

Cependant, il est montré dans [15] que pour tout paramètre $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \left| S_n^{(2)}(\chi_a * u) - \alpha \binom{n}{2} - \beta n \right| ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{n'est pas bornée.}$$

3. Construction d'un groupe \mathcal{G} propice aux calculs des sommes de Birkhoff itérées

3.1. Définitions. — Soit $V = \mathbb{R}[[X]]$ l'algèbre des séries formelles. Afin de définir le groupe \mathcal{G} , nous sommes amenés à étudier la multiplication par $A = 1 + X$ sur V :

$$A \cdot s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (s_\ell + s_{\ell-1}) X^\ell \quad \text{pour} \quad s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} s_\ell X^\ell \in V,$$

où par convention $s_{-1} = 0$. Les puissances entières de A sont simplement données par le binôme de Newton. Afin de définir une action de \mathbb{R} sur \mathcal{G} , nous nous intéressons également aux puissances réelles de A . Pour tout réel x , nous définissons la série entière A^x par :

$$(7) \quad A^x = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{x}{\ell} X^\ell$$

où les coefficients binomiaux sont définis par $\binom{x}{0} = 1$ et pour tout entier $\ell \geq 1$:

$$\binom{x}{\ell} = \frac{1}{\ell!} x(x-1) \cdots (x-\ell+1).$$

Pour tout réel x , nous pouvons écrire en coordonnées :

$$A^x \cdot s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{\ell} \binom{x}{i} s_{\ell-i} \right) X^\ell \quad \text{pour} \quad s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} s_\ell X^\ell \in V.$$

Il est clair que pour tous les entiers $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $A^{n+m} = A^n A^m$. De plus l'application $x \rightarrow A^x$ est polynomiale (dans le sens où il existe des polynômes $P_0, P_1, \dots \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A^x = P_0(x) + P_1(x)X + \dots$). Donc :

$$(8) \quad \text{pour tous les réels } (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : A^{x+y} = A^x A^y \text{ et en particulier } A^x A^{-x} = 1.$$

Nous reviendrons sur ce genre de raisonnement par la suite.

DÉFINITION 16. — Nous définissons le groupe \mathcal{G} comme le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes V$ avec la multiplication

$$\langle x, s \rangle \cdot \langle y, t \rangle = \langle x + y, A^y \cdot s + t \rangle \quad \text{où } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (s, t) \in V^2.$$

Le *commutateur* de deux éléments g et h de \mathcal{G} est $[g, h] = g^{-1} \cdot h^{-1} \cdot g \cdot h$.

Soulevons immédiatement quelques points de notation délicats avec ces objets. L'élément neutre du groupe \mathcal{G} est $1_{\mathcal{G}} = \langle 0, 0 \rangle$. Nous verrons également plus loin que pour tout élément $g \in \mathcal{G}$, l'application $x \rightarrow g^x$ (définie au lemme 21) de \mathbb{R} dans \mathcal{G} est polynomiale en x .

LEMME 17. — Soient $\langle x, s \rangle$ et $\langle y, t \rangle$ deux éléments de \mathcal{G} . Alors :

$$\langle x, s \rangle^{-1} = \langle -x, -A^{-x} \cdot s \rangle \quad \text{et} \quad [\langle x, s \rangle, \langle y, t \rangle] = \langle 0, (A^y - 1) \cdot s - (A^x - 1) \cdot t \rangle.$$

En particulier $\langle x, s \rangle$ et $\langle y, t \rangle$ commutent si et seulement si $(A^y - 1) \cdot s = (A^x - 1) \cdot t$.

Preuve du lemme 17. — Soient $\langle x, s \rangle$ et $\langle y, t \rangle$ deux éléments de \mathcal{G} . Alors d'après (8) :

$$\langle x, s \rangle \cdot \langle -x, -A^{-x} \cdot s \rangle = \langle 0, A^{-x} \cdot s - A^{-x} \cdot s \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 1_{\mathcal{G}}.$$

Donc $\langle x, s \rangle^{-1}$ existe et vaut $\langle -x, -A^{-x} \cdot s \rangle$. Un calcul direct nous donne pour le commutateur :

$$\begin{aligned} \langle \langle x, s \rangle, \langle y, t \rangle \rangle &= \langle -x - y, -A^{-x-y} \cdot s - A^{-y} \cdot t \rangle \cdot \langle x + y, A^y \cdot s + t \rangle \\ &= \langle 0, A^y \cdot s + t - s - A^x \cdot t \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, nous notons $V_\ell = X^\ell \cdot V$. Les groupes $(V_\ell, +)$ s'injectent naturellement dans le groupe (\mathcal{G}, \cdot) via $\text{inj} : s \mapsto \langle 0, s \rangle$. Nous noterons $\mathcal{V}_\ell = \{\langle 0, s \rangle; s \in V_\ell\}$ l'image dans \mathcal{G} de V_ℓ .

Remarquons que pour tout réel $x : A^x - 1 = \binom{x}{1}X + \binom{x}{2}X^2 + \dots$. Ainsi $(A^x - 1) \cdot V_\ell \subset V_{\ell+1}$ et donc $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{V}_0$ et $[\mathcal{G}, \mathcal{V}_\ell] \subset \mathcal{V}_{\ell+1}$. D'autre part, d'après le lemme 17 : $[\langle 1, s \rangle, \langle 0, -t \rangle] = \langle 0, X \cdot t \rangle$ pour tout $(s, t) \in V^2$. Nous venons de montrer que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$ et pour tout entier $\ell \geq 0$, $[\mathcal{G}, \mathcal{V}_\ell] = \mathcal{V}_{\ell+1}$: les groupes $(\mathcal{V}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ sont donc les éléments de la *série centrale descendante* de \mathcal{G} .

DÉFINITION 18. — Récapitulons les différents groupes introduits. Nous notons pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $V_\ell = X^\ell \cdot V$ ainsi que $\mathcal{V}_\ell = \{\langle 0, s \rangle; s \in V_\ell\}$ les sous-groupes de la série centrale descendante de \mathcal{G} . Le sous-groupe \mathcal{V}_0 est parfois simplement noté \mathcal{V} . Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, nous notons $G_\ell = V/V_\ell$ et $\mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}/\mathcal{V}_\ell$. G_ℓ s'identifie avec l'ensemble des polynômes réels de degré au plus $\ell - 1$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ un entier. Comme le groupe \mathcal{G}_ℓ est un quotient de \mathcal{G} par un élément de sa série centrale descendante, le groupe \mathcal{G}_ℓ est *nilpotent*. Il s'identifie bien sûr au groupe $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\ell$. Pour $\ell = 2$, il s'agit du groupe de Heisenberg. Le groupe \mathcal{G} est la limite projective des groupes $(\mathcal{G}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$.

Nous munissons V et V_ℓ de la topologie produit. Pour cette topologie, la multiplication par X de V dans V est continue. Ainsi la topologie produit sur \mathcal{G} en fait un groupe topologique (vu comme limite projective de groupes topologiques). L'injection $(V, +) \rightarrow (\mathcal{V}, \cdot)$ et les projections $G \rightarrow G_\ell$ et $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_\ell$ sont alors des homomorphismes continus.

Nous dirons qu'une application de $f : V \rightarrow V$ définie par $f(s) = f_0(s) + f_1(s)X + \dots + f_n(s)X^n + \dots$ est *polynomiale* si les coordonnées (f_0, f_1, \dots) de cette application sont polynomiales. C'est-à-dire que chaque composante est un polynôme ne faisant intervenir qu'un nombre fini de coordonnées. Par exemple X et A^x sont des applications polynomiales. Par extension, une application à valeurs dans \mathcal{G} est polynomiale si ses coordonnées sont des polynômes. C'est le cas de l'opération de multiplication par un élément donné. Une application polynomiale est continue.

3.2. Le groupe \mathcal{G} et les sommes de Birkhoff itérées. — Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Nous définissons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la série formelle :

$$S_n(u) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} S_n^{(\ell+1)}(u) X^\ell.$$

Reprenant la définition 1 des sommes itérées, un calcul direct donne la relation :

$$S_{n+1}(u) = (1 + X) \cdot S_n(u) + u_n = A \cdot S_n(u) + u_n.$$

L'ensemble des réels s'injecte dans le groupe \mathcal{G} via l'application $i(x) = \langle 1, x \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}$, qui n'est pas un morphisme de groupes. Alors en reprenant la relation précédente et par définition 16 du produit dans le groupe \mathcal{G} , nous avons pour toute suite de réels $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$i(u_0) \cdot i(u_1) \cdots i(u_{n-1}) = \langle n, S_n(u) \rangle = \left\langle n, \sum_{\ell=0}^{+\infty} S_n^{(\ell+1)}(u) X^\ell \right\rangle.$$

Soient \mathcal{A} un alphabet, K un sous-ensemble de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ stable par le décalage T et $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Nous définissons une application $\hat{\varphi} : K \rightarrow \mathcal{G}$ pour $u \in K$ par :

$$(9) \quad \hat{\varphi}(u) = i \circ \varphi(u) = \langle 1, \varphi(u) \rangle.$$

Alors pour tout mot $u \in K$, en considérant la suite $\varphi * u$ nous avons pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(10) \quad \hat{\varphi}(u) \cdot \hat{\varphi}(Tu) \cdots \hat{\varphi}(T^{n-1}(u)) = \langle n, S_n(\varphi * u) \rangle = \left\langle n, \sum_{\ell=0}^{+\infty} S_n^{(\ell+1)}(\varphi * u) X^\ell \right\rangle.$$

Cette relation permettra de définir la projection de l'ensemble des mots finis dans le groupe \mathcal{G} dans la section 3.5 et de relier ces différents objets avec les sommes de Birkhoff itérées.

3.3. Puissances dans \mathcal{G} . — Nous allons définir la puissance r -ème d'un élément de \mathcal{G} pour tout nombre réel r . Notons déjà que pour toute puissance entière $n \in \mathbb{N}$:

$$(11) \quad \langle 1, s \rangle^n = \langle n, (1 + A + \cdots + A^{n-1}) \cdot s \rangle \quad \text{pour toute série formelle } s \in V.$$

DÉFINITION 19. — Cela nous amène comme pour les puissances de A (relation (7)), à définir une série formelle pour tout nombre réel r par :

$$B(r) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{r}{\ell+1} X^\ell,$$

où nous rappelons pour tout réel $r \in \mathbb{R}$ et tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, $\binom{r}{\ell+1} = \frac{1}{(\ell+1)!} r(r-1) \cdots (r-\ell)$.

Pour tout réel r non nul, un calcul élémentaire assure que les séries A^r et $B(r)$ sont liées via la relation :

$$A^r = 1 + XB(r), \quad \text{que nous écrirons parfois : } B(r) = \frac{A^r - 1}{X}.$$

La fonction $r \rightarrow B(r)$ est une fonction polynomiale, donc continue. Rappelons qu'une série formelle est inversible si et seulement le terme constant est non nul. Celui de $B(r)$ vaut r et donc $B(r)$ est inversible si et seulement si $r \neq 0$.

DÉFINITION 20. — Ceci nous permet de définir la puissance r -ème d'un élément $\langle x, s \rangle$ de \mathcal{G} pour tout réel r de la manière suivante :

$$\langle x, s \rangle^r = \begin{cases} \langle rx, B(rx) B(x)^{-1} \cdot s \rangle = \left\langle rx, \frac{A^{rx} - 1}{A^x - 1} \cdot s \right\rangle & \text{si } x \neq 0, \\ \langle 0, r \cdot s \rangle & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette définition coïncide avec la définition donnée lorsque la puissance r est entière.

- LEMME 21. —
1. Pour tout élément $g \in \mathcal{G}$ et tout couple de réels (r, r') : $g^{r+r'} = g^r \cdot g^{r'}$.
 2. Soit $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{V}$, alors l'ensemble des éléments de \mathcal{G} qui commutent avec g sont les éléments de la forme g^r avec $r \in \mathbb{R}$.
 3. L'application de $\mathcal{G} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ définie par $(g, r) \rightarrow g^r$ est polynomiale donc continue.

Nous donnons la preuve de ce lemme dans l'annexe A.1.

3.4. Relations dans \mathcal{G} . —

DÉFINITION 22. — Nous définissons des éléments d et $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{G} par :

$$d = \langle 1, 0 \rangle, \quad f = f_0 = \langle 0, 1 \rangle \quad \text{et pour } i \in \mathbb{N}^*, \quad f_i = \langle 0, X^i \rangle.$$

Rappelons que A est inversible et que $A = 1 + X$. D'après le lemme 17, nous avons :

$$(12) \quad [f_i, d] = \langle 0, (A - 1) \cdot X^i \rangle = f_{i+1} \quad \text{pour tout entier } i \in \mathbb{N}.$$

De plus, pour tous les entiers i et j , les éléments f_i et f_j commutent car ils appartiennent au groupe \mathcal{V} .

LEMME 23. — Tout élément $\langle x, s \rangle$ de \mathcal{G} s'écrit sous la forme canonique :

$$\langle x, s \rangle = d^x \cdot f_0^{s_0} \cdot f_1^{s_1} \cdot f_2^{s_2} \cdots f_\ell^{s_\ell} \cdots \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} s_\ell X^\ell \in V.$$

C'est-à-dire, il existe des réels d, f_0, f_1, \dots tels que pour tout entier ℓ , la projection de $\langle x, s \rangle$ dans le groupe \mathcal{G}_ℓ est $d^x \cdot f_0^{s_0} \cdot f_1^{s_1} \cdot f_2^{s_2} \cdots f_\ell^{s_\ell}$.

Preuve du lemme 23. — Il suffit de reprendre le calcul des puissances (définition 20) et la définition 16 du produit dans \mathcal{G} . \square

Pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$, le groupe \mathcal{G}_ℓ est donc engendré par d et $f = f_0$. Pour $\ell = 2$, on obtient assez simplement la liste des relations :

$$[f, [f, d]] = 1_{\mathcal{G}} \quad \text{et} \quad [d, [f, d]] = 1_{\mathcal{G}}$$

qui sont les relations standards pour le groupe d'Heisenberg à coefficients entiers.

3.5. Projection du monoïde libre dans \mathcal{G} . — Soit $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Rappelons que nous pouvons lui associer une fonction $\hat{\varphi} : \{a, b\} \rightarrow \mathcal{G}$ selon la relation (9). À un mot fini $u = u_0 \dots u_{n-1}$ de longueur n du monoïde libre généré par a et b , nous pouvons lui associer ses sommes de Birkhoff itérées (voir la section 3.2). Nous définissons la projection π_φ d'un tel mot dans \mathcal{G} par :

$$\pi_\varphi(u) = \langle 1, \varphi(u_0) \rangle \cdot \langle 1, \varphi(u_1) \rangle \dots \langle 1, \varphi(u_{n-1}) \rangle = \hat{\varphi}(u_0) \cdot \hat{\varphi}(u_1) \cdots \hat{\varphi}(u_{n-1}).$$

L'application $\pi_\varphi : \{a, b\}^* \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme : pour tous les mots finis u et v sur l'alphabet $\{a, b\}$, $\pi_\varphi(uv) = \pi_\varphi(u) \cdot \pi_\varphi(v)$.

En reprenant le travail effectué dans la section 3.2 (relation (10)), $\pi_\varphi(u)$ peut s'exprimer à l'aide des sommes de Birkhoff itérées selon la formule :

$$(13) \quad \pi_\varphi(u) = \langle n, S_n(\varphi * u) \rangle.$$

Si u est un mot fini de longueur n , $S_n(\varphi * u)$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$ et $\pi_\varphi(u)$ peut être vu comme un élément de \mathcal{G}_n .

$bbbb$	$\langle 4, (0, 0, 0, 0) \rangle$	$bbaa$	$\langle 4, (2, 1, 0, 0) \rangle$	$baaa$	$\langle 4, (3, 3, 1, 0) \rangle$
$bbba$	$\langle 4, (1, 0, 0, 0) \rangle$	$baba$	$\langle 4, (2, 2, 1, 0) \rangle$	$abaa$	$\langle 4, (3, 4, 3, 1) \rangle$
$bbab$	$\langle 4, (1, 1, 0, 0) \rangle$	$baab$	$\langle 4, (2, 3, 1, 0) \rangle$	$aaba$	$\langle 4, (3, 5, 4, 1) \rangle$
$babb$	$\langle 4, (1, 2, 1, 0) \rangle$	$abba$	$\langle 4, (2, 3, 3, 1) \rangle$	$aaab$	$\langle 4, (3, 6, 4, 1) \rangle$
$abbb$	$\langle 4, (1, 3, 3, 1) \rangle$	$abab$	$\langle 4, (2, 4, 3, 1) \rangle$	$aaaa$	$\langle 4, (4, 6, 4, 1) \rangle$
		$aabb$	$\langle 4, (2, 5, 4, 1) \rangle$		

TABLE 3.1. Projection π_φ des mots de longueur 4 dans le groupe \mathcal{G} avec $\varphi = \chi_a$ la fonction caractéristique de la lettre a . Nous avons identifié le polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec le quadruplet (a_0, a_1, a_2, a_3) .

3.6. Endomorphismes de \mathcal{G} associés aux substitutions uniformes

LEMME 24. — Soit \mathcal{L} un endomorphisme de \mathcal{G} . Alors \mathcal{L} est continu et pour tout nombre réel r et tout élément g de \mathcal{G} , $\mathcal{L}(g^r) = \mathcal{L}(g)^r$.

Preuve du lemme 24. — Pour tout entier ℓ , les endomorphismes du groupe $\mathcal{G}_\ell \cong \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\ell$ sont continus (voir définition 18). D'autre part, comme les sous-groupes $\mathcal{V}_\ell = \{\langle 0, s \rangle; s \in V_\ell\}$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ sont les groupes de la série centrale descendante, ils sont *caractéristiques* (c'est-à-dire préservés par tout endomorphisme). Tout endomorphisme de \mathcal{G} passe donc au quotient en un endomorphisme de \mathcal{G}_ℓ . Ainsi, comme \mathcal{G} est la limite projective des groupes $(\mathcal{G}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$, les endomorphismes de \mathcal{G} sont également tous continus.

Intéressons nous maintenant aux images des puissances r -ème de $g \in \mathcal{G}$. La relation est claire si la puissance r est un nombre entier (relatif). Elle est donc aussi vérifiée pour les puissances $r \in \mathbb{Q}$. Comme l'application puissance est continue dans \mathcal{G} (lemme 21), la relation s'étend aux nombres réels $r \in \mathbb{R}$ par continuité de \mathcal{L} . \square

Reprenons la forme canonique d'un élément de \mathcal{G} donnée dans le lemme 23 :

$$\langle x, s \rangle = d^x \cdot f_0^{s_0} \cdot f_1^{s_1} \cdot f_2^{s_2} \cdots f_\ell^{s_\ell} \cdots \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } s = \sum_{\ell=0}^{+\infty} s_\ell X^\ell \in V.$$

La donnée des valeurs prises par un endomorphisme sur $\{d, f_0, f_1, \dots\}$ détermine donc cet endomorphisme sur \mathcal{G} d'après le lemme 24 précédent. Cependant un endomorphisme doit préserver les relations du groupe. La première famille de relations est que pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, $f_{i+1} = [f_i, d]$. Donc les valeurs en $\{f_i; i \in \mathbb{N}^*\}$ sont contraintes par celles en d et $f_0 = f$ et les données de \mathcal{L} en d et f déterminent \mathcal{L} sur \mathcal{G} de manière unique. Si on souhaite définir un endomorphisme sur \mathcal{G} à partir de la donnée des images de d et f , il faut alors vérifier que la deuxième famille de relations soit vérifiée : $[f_i, f_j] = 1_{\mathcal{G}}$ pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

PROPOSITION 25. — *Soient σ une substitution uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}^*$ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe un unique endomorphisme \mathcal{L} de \mathcal{G} tel que $\mathcal{L} \circ \pi_\varphi = \pi_\varphi \circ \sigma$.*
2. *Les polynômes δ et γ (voir (1)) et les éléments d et f (définition 22) sont reliés selon les relations : $\mathcal{L}(d) = \langle \lambda, \gamma \rangle$ et $\mathcal{L}(f) = \langle 0, \delta \rangle$.*
3. *De plus cet endomorphisme préserve \mathcal{V} qui est engendré par $\{f_j; j \in \mathbb{N}\}$ et plus précisément pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f_j) = \langle 0, (A^\lambda - 1)^j \cdot \delta \rangle$.*
4. *Il existe un endomorphisme L de V , ne dépendant que de σ et pas de la fonction φ injective choisie, tel qu'en notant $\text{inj} : V \rightarrow \mathcal{V}$ l'injection définie pour $s \in V$ par $\text{inj}(s) = \langle 0, s \rangle : \text{inj} \circ L = \mathcal{L} \circ \text{inj}$.*
5. *Pour tout élément $\langle x, s \rangle \in \mathcal{G}$ avec $s = s_0 + s_1 X + \cdots \in V$:*

$$\mathcal{L}(\langle x, s \rangle) = \left\langle \lambda x, \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j (A^\lambda - 1)^j \right) \cdot \delta + B(\lambda x) B(\lambda)^{-1} \cdot \gamma \right\rangle.$$

Nous prouvons ce résultat dans l'annexe A.2.

3.7. Propriétés et forme explicite des endomorphismes associés aux substitutions uniformes. — Les preuves des résultats 27 et 28 de cette section étant essentiellement techniques, nous les apportons dans l'annexe A.3.

DÉFINITION 26. — Nous définissons pour des couples d'entiers $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ des polynômes $(q_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$,

pour tout réel y par :
$$q_{j,k}(y) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_j = k \\ k_1 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} \binom{y}{k_1} \cdots \binom{y}{k_j}.$$

Nous rappelons que par convention, $\binom{y}{0} = 1$ et pour $i \geq 1$, $\binom{y}{i} = \frac{1}{i!} y \cdots (y - i + 1)$. Nous posons $q_{0,0} = 1$, $q_{0,k} = 0$ si $k > 0$ et $q_{j,0} = 0$ si $j > 0$. Pour $j > k$ deux entiers, il n'existe pas d'entiers $(k_1, \dots, k_j) \in (\mathbb{N}^*)^j$ tels que $k_1 + \dots + k_j = k$ et nous définissons donc $q_{j,k} = 0$.

Ce sont les uniques polynômes satisfaisant l'égalité de séries formelles suivantes pour tout $y \in \mathbb{R}$:

(14)
$$\begin{aligned} (A^y - 1)^j &= \left(\sum_{k \geq 1} \binom{y}{k} X^k \right)^j = \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_j = k \\ k_1 \geq 1, \dots, k_j \geq 1}} \binom{y}{k_1} \cdots \binom{y}{k_j} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q_{j,k}(y) X^k. \end{aligned}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	y	$\binom{y}{2}$	$\binom{y}{3}$	$\binom{y}{4}$	$\binom{y}{5}$
2	0	0	y^2	$y^3 - y^2$	$\frac{7y^4 - 18y^3 + 11y^2}{12}$	$\frac{3y^5 - 14y^4 + 21y^3 - 10y^2}{12}$
3	0	0	0	y^3	$\frac{3}{2}(y^4 - y^3)$	$\frac{5y^5 - 12y^4 + 7y^3}{4}$
4	0	0	0	0	y^4	$2(y^5 - y^4)$
5	0	0	0	0	0	y^5

TABLE 3.2. Les premiers polynômes $q_{j,k}(y)$ pour $0 \leq j, k \leq 5$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Il est clair que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$(15) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad q_{1,k}(y) = \binom{y}{k}, \quad q_{k,k}(y) = y^k \quad \text{et} \quad q_{k,k+1}(y) = \frac{y-1}{2}ky^k.$$

Les deux premières relations sont évidentes. Pour prouver la dernière, il faut remarquer que si des entiers strictement positifs a_1, \dots, a_k vérifient $a_1 + \dots + a_k = k + 1$, alors l'un des (a_1, \dots, a_k) vaut 2 et tous les autres valent 1. Le produit des coefficients binomiaux associés est $\binom{y}{2}\binom{y}{1} \dots \binom{y}{1} = \frac{1}{2}y(y-1)y^{k-1}$. Il suffit de compter le nombre de k -uplets vérifiant cette relation : il y en a k .

PROPOSITION 27. — Soient x et y deux réels. Pour tout entier $k \geq 0$, on a :

$$(16) \quad \binom{xy}{k} = \sum_{j=0}^k q_{j,k}(y) \binom{x}{j}.$$

Ou, de manière équivalente :

$$B(xy)B(y)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{x}{j} (A^y - 1)^{j-1}.$$

Cette proposition permet d'obtenir une forme plus explicite pour l'endomorphisme \mathcal{L} :

COROLLAIRE 28. — Soient σ une substitution uniforme de longueur λ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ injective. Soient $\mathcal{L} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ l'endomorphisme associé obtenu dans la proposition 25 et $\langle x, s \rangle$ un élément de \mathcal{G} avec $s = s_0 + s_1X + \dots \in V$. Alors,

$$\mathcal{L}(\langle x, s \rangle) = \left\langle \lambda x, \sum_{j=0}^{\infty} (A^\lambda - 1)^j \left(s_j \delta + \binom{x}{j+1} \gamma \right) \right\rangle.$$

Ainsi, en écrivant $\mathcal{L}(\langle x, s \rangle) = \langle \lambda x, t \rangle$ avec $t = t_0 + t_1X + \dots \in V$, nous avons pour tout $\ell \geq 2$ l'expression :

$$(17) \quad t_\ell = \lambda^\ell s_\ell \delta_1 + \lambda^\ell \gamma_1 \binom{x}{\ell+1} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i}(\lambda) \left(s_j \delta_{i+1} + \gamma_{i+1} \binom{x}{j+1} \right).$$

Supposons que σ est fortement uniforme de longueur λ et que u est un mot (fini ou infini) sur $\{a, b\}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les sommes itérées vérifient la relation de récurrence suivante, donnée en introduction :

$$(2) \quad S_{n\lambda}^{(\ell+1)}(\varphi * \sigma(u)) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i}(\lambda) S_n^{(j+1)}(\varphi * u) \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i}(\lambda) \gamma_{i+1} \binom{n}{j+1}.$$

Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE 29. — Soient σ une substitution fortement uniforme de longueur λ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ injective. Soient $\mathcal{L} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ l'endomorphisme associé obtenu dans la proposition 25 et $g = \langle x, s \rangle$ un élément de \mathcal{G} avec $s = s_0 + s_1X + \cdots \in V$. Fixons deux entiers j et n .

Alors si on écrit $\mathcal{L}^n(g) = \langle \lambda^n x, t \rangle$ avec $t = t_0 + t_1X + \cdots \in V$, alors la j -ème coordonnée t_j de t ne dépend que de (x, s_1, \dots, s_{j-n}) .

Si $j < n$, cette condition signifie que cette coordonnée ne dépend que de x , et est nulle si $x = 0$.

4. Preuve du théorème 4

4.1. Majoration et étude asymptotique des polynômes $(q_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$. — Il n'est pas raisonnable d'exhiber une formule explicite analogue à la relation (15) pour tous les polynômes $(q_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$. Nous en donnerons le comportement asymptotique dans la proposition 31 et nous les majorerons dans le lemme 32.

Le principal outil de cette section va être la récurrence suivante, elle sera prouvée dans l'annexe A.4.

LEMME 30. — Pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$ et tout réel y , les polynômes $(q_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{N}^2}$ vérifient la relation :

$$q_{j,k+1}(y) = \frac{jy}{k+1} q_{j-1,k}(y) + \frac{jy-k}{k+1} q_{j,k}(y).$$

Nous en déduisons le résultat suivant, dont la preuve est également apportée dans l'annexe A.4.

PROPOSITION 31. — Pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $y > 1$, on a lorsque k tend vers $+\infty$:

$$(18) \quad q_{k,k+i}(y) \underset{k}{\sim} \frac{(y-1)^i}{2^i i!} k^i y^k.$$

LEMME 32. — Soient $n \geq 1$ un entier et $y > 1$ un réel. Alors,

$$\sup\{|q_{j,k}(y)|; 1 \leq j \leq k \leq n\} \leq (2y-1)^n.$$

Preuve du lemme 32. — Fixons $y > 1$ et notons $A_n = \sup\{|q_{j,k}(y)|; 1 \leq j \leq k \leq n\}$. Nous montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 1$, $A_1 = |q_{1,1}(y)| = y \leq 2y-1$. Fixons un entier $n \geq 2$ et $j \in \{2, \dots, n\}$, alors d'après le lemme 30 :

$$\begin{aligned} |q_{j,n+1}(y)| &= \left| \frac{jy}{n+1} q_{j-1,n}(y) + \frac{jy-n}{n+1} q_{j,n}(y) \right| \leq \frac{ny}{n+1} A_n + n \frac{\lambda-1}{n+1} A_n \\ &\leq \frac{n}{n+1} (2y-1) A_n = (2y-1)(2y-1)^n = (2y-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, le résultat est aussi vrai pour $q_{n+1,n+1}(y) = y^{n+1}$ ce qui termine la preuve. \square

4.2. Approximation polynomiale des sommes itérées. — Soient σ une substitution uniforme de longueur λ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ injective. Soit $\mathcal{L} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ l'endomorphisme associé obtenu dans la proposition 25.

DÉFINITION 33. — Afin d'étudier les puissances de l'endomorphisme \mathcal{L} , nous introduisons des polynômes $(R_{m,\ell})_{(m,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\mathcal{L}^m(\langle x, 0 \rangle) = \left\langle \lambda^m x, \sum_{\ell=0}^{+\infty} R_{m,\ell+1}(x) X^\ell \right\rangle \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que la fonction puissance est polynomiale dans le groupe \mathcal{G} (lemme 21 au sens de la relation (25)). Les fonctions $(R_{m,\ell})_{(m,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ sont bien des polynômes (dépendants des paramètres γ, δ, φ et λ) d'après la définition 20 pour les puissances, le lemme 24 et le fait que $\langle x, 0 \rangle = \langle 1, 0 \rangle^x = d^x$ et donc $\mathcal{L}^i(\langle x, 0 \rangle) = (\mathcal{L}^i(d))^x$.

DÉFINITION 34. — Nous définissons pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $c_\ell = R_{\ell+1,\ell+1} \left(\frac{1}{\lambda^{\ell+1}} \right)$.

PROPOSITION 35. — Pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$, tout réel x et tout entier $m \in \mathbb{N}$ on a,

1. $R_{\ell+m,\ell}(x) = R_{\ell,\ell}(\lambda^m x)$,
2. $R_{\ell,\ell} \left(\frac{x}{\lambda^\ell} \right) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-k} c_k x^k$,
3. $\mathcal{L}(\langle 1, c \rangle) = \langle 1, c \rangle^\lambda$ en notant $c = c_0 + c_1 X + \dots \in V$.

Nous apportons la preuve de la proposition 35 dans l'annexe A.5.

Le dernier item permet de calculer les valeurs de la suite $(c_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$. Par exemple, dans le groupe \mathcal{G}_1 , c_0 est l'unique réel vérifiant :

$$\mathcal{L}(\langle 1, c_0 \rangle) = \langle 1, c_0 \rangle^\lambda = \langle \lambda, \lambda c_0 \rangle.$$

Le morphisme π_φ induit une application de $\{a, b\}^*$ dans le groupe \mathcal{G}_1 (définition 18). Si nous notons encore π_φ cette application, pour une lettre $\alpha \in \{a, b\}$ fixée :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\langle 1, c_0 \rangle) &= \mathcal{L}(\langle 1, \varphi(\alpha) \rangle) = \pi_\varphi(\sigma(\alpha)) = \langle \lambda, S_\lambda^{(1)}(\varphi * \sigma(\alpha)) \rangle \\ &= \langle \lambda, \varphi(a)|\sigma(a)|_a + \varphi(b)|\sigma(a)|_b \rangle. \end{aligned}$$

Nous trouvons donc :

$$(19) \quad c_0 = \frac{1}{\lambda} \left(\varphi(a)|\sigma(a)|_a + \varphi(b)|\sigma(b)|_a \right).$$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$a \mapsto ab, b \mapsto ba$	1/2	0	0	0	0	0
$a \mapsto aab, b \mapsto aba$	2/3	1/3	10/9	11	8567/27	718435/27
$a \mapsto aab, b \mapsto baa$	1/3	1/3	23/9	440/9	74431/27	455949

TABLE 4.1. Valeurs des premiers coefficients $(c_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ pour différentes substitutions σ associées à la fonction $\varphi = \chi_a$.

DÉFINITION 36. — Nous définissons pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ un polynôme p_ℓ pour tout réel x par :

$$p_\ell(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i \binom{x}{\ell-i} = R_{\ell,\ell} \left(\frac{x}{\lambda^\ell} \right) + c_\ell.$$

Nous posons de plus $p_0(x) = c_0$.

PROPOSITION 37. — Soient σ une substitution fortement uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}$ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Alors, pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout mot $u \in \sigma^\ell(\{a, b\}^{\mathbb{N}})$ (c'est-à-dire de la forme $\sigma^\ell(v)$), les assertions suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout réel x , $p_\ell(x+1) - p_\ell(x) = p_{\ell-1}(x)$.
2. Pour tout entier n ,

$$(S_{n+1}^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n+1)) - (S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n)) = S_{(n)}^{(\ell-1)}(\varphi * u) - p_{\ell-1}(n).$$

3. Pour tout entier n , $S_{n \cdot \lambda^\ell}^{(\ell)}(\varphi * u) = p_\ell(n \lambda^\ell) - c_\ell = R_{\ell,\ell}(n)$.
4. La suite $(S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n))_{n \geq 0}$ est bornée.

Nous retrouvons bien la relation entre les coefficients $(c_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ et les polynômes $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ annoncée dans l'introduction, à savoir $p_\ell(0) = c_\ell$. Rappelons également que la suite des polynômes $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ qui approchent les sommes itérées et qui vérifient $p_\ell(x+1) - p_\ell(x) = p_{\ell-1}(x)$ est unique. Les polynômes de la section 2 partagent ces mêmes propriétés, donc si u est un mot infini point fixe de σ , les objets de ces différentes sections sont reliées pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$ via :

$$\psi_\ell(T^n u) = S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n) \quad \text{et} \quad c_\ell = -\psi_\ell(u).$$

Preuve de la proposition 37. — Le premier point est immédiat par la définition des polynômes $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$. En effet, pour tout nombre réel x et tout entier $\ell \geq 1$:

$$p_\ell(x+1) - p_\ell(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i \binom{x+1}{\ell-i} - \sum_{i=0}^{\ell} c_i \binom{x}{\ell-i} = \sum_{i=0}^{\ell-1} c_i \binom{x}{\ell-1-i} = p_{\ell-1}(x).$$

Le deuxième point en découle immédiatement car les sommes itérées vérifient les mêmes relations de récurrence (voir la relation (3)).

Notons $u_0 u_1 \dots = \sigma^\ell(v_0 v_1 \dots)$ un mot de $\sigma^\ell(\{a, b\}^\mathbb{N})$. Nous considérons l'endomorphisme \mathcal{L} associé (proposition 25). Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{L} \circ \pi_\varphi = \pi_\varphi \circ \sigma$, nous avons :

$$\pi_\varphi(u_0 \cdots u_{n\lambda^\ell-1}) = \pi_\varphi \circ \sigma^\ell(v_0 \cdots v_{n-1}) = \mathcal{L}^\ell \circ \pi_\varphi(v_0 \cdots v_{n-1}).$$

Donc dans le groupe \mathcal{G}_ℓ :

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(u_0 \cdots u_{n\lambda^\ell-1}) &= \left\langle n\lambda^\ell, R_{\ell,1}(n) + \cdots + R_{\ell,\ell}(n)X^{\ell-1} \right\rangle \text{ par le corollaire 29} \\ &= \left\langle n\lambda^\ell, S_{n\lambda^\ell}^{(1)}(\varphi * u) + \cdots + S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)}(\varphi * u)X^{\ell-1} \right\rangle \\ &\quad \text{par la relation (13).} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc $S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)}(\varphi * u) = R_{\ell,\ell}(n) = p_\ell(n\lambda^\ell) - c_\ell$, ce qui prouve la relation de l'item 3.

Le dernier point se démontre par récurrence sur ℓ . Pour $\ell = 1$, le résultat est clair car la suite est constante aux temps $\lambda\mathbb{N}$. De plus les incréments sont en nombre fini et liés aux images de φ , donc bornés.

Supposons que la suite $(S_n^{(\ell-1)}(\varphi * u) - p_{\ell-1}(n))_{n \geq 0}$ soit bornée pour $\ell > 1$. Alors comme dans le cas $\ell = 1$, la suite $(S_n^{(\ell)}(\varphi * u) - p_\ell(n))_{n \geq 0}$ est constante aux temps $n\lambda^\ell$ par l'item 2. De plus les incréments sont en nombre fini (majoré par λ) et valent $(S_n^{(\ell-1)}(\varphi * u) - p_{\ell-1}(n))_{n \geq 0}$ par l'item 2, qui est bornée. \square

4.3. Convergence de la suite renormalisée $(\tilde{c}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$. — Soient σ une substitution fortement uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}$ sur $\{a, b\}$ et $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Nous supposons que $\delta_2 \neq 0$. Notons pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, $\rho_\ell = \delta_2^{\ell-1} \lambda^{(\ell-1)(\ell-2)/2}$ (définition 7) et $\tilde{c}_\ell = c_\ell / \rho_\ell$.

PROPOSITION 38. — *Sous ces hypothèses, la suite $(\tilde{c}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge. De plus il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ et un réel $M > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, $|\lim_{j \rightarrow +\infty} \tilde{c}_j - c_\ell| \leq M \cdot \theta^\ell$.*

Preuve de la proposition 38. — Nous notons $q_{j,k}$ pour $q_{j,k}(\lambda)$. Fixons un entier $\ell > \lambda$. Commençons par rappeler la relation du troisième item de la proposition 35 :

$$\mathcal{L}(\langle 1, c \rangle) = \langle 1, c \rangle^\lambda \quad \text{avec} \quad c = c_0 + c_1 X + \cdots \in V.$$

D'après la forme explicite de l'endomorphisme \mathcal{L} (relation (17) du corollaire 28), puisque $\binom{1}{j+1} = 0$ pour tout entier $j \geq 0$ et d'après la définition 20 des puissances dans \mathcal{G} :

$$(20) \quad \lambda c_\ell + \binom{\lambda}{2} c_{\ell-1} + \cdots + \binom{\lambda}{\ell+1} c_0 = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} c_j \delta_{i+1}$$

$$\iff \lambda c_\ell + \binom{\lambda}{2} c_{\ell-1} + \cdots + \binom{\lambda}{\ell+1} c_0 = \lambda^{\ell-1} \delta_2 c_{\ell-1} + \sum_{j=0}^{\ell-2} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \delta_{i+1} c_j.$$

Nous noterons $\|\delta\| = \max\{|\delta_i|; 1 \leq i \leq \lambda\} = \sup\{|\delta_i|; 1 \leq i\}$ car $\delta_i = 0$ pour tout entier $i \geq \lambda + 1$. La double somme se majore alors avec le lemme 32 :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{\ell-2} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \delta_i c_j \right| &\leq \|\delta\| \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell-2} |c_j| \cdot \left| \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{i=2}^{\ell-j+2} q_{j-1,\ell+1-i} \right| \\ &\leq \|\delta\| \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell-2} |c_j| \cdot \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{i=2}^{\ell-j+2} |q_{j-1,\ell+1-i}| \\ &\leq \|\delta\| \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell-2} |c_j| \cdot \ell^2 \cdot (2\lambda - 1)^{\ell-1}. \end{aligned}$$

Nous utilisons également la majoration,

$$\left| \binom{\lambda}{2} c_{\ell-1} + \cdots + \binom{\lambda}{\ell+1} c_0 \right| \leq 2^\lambda \sup_{0 \leq j \leq \ell-1} |c_j|.$$

Les coefficients (c_0, \dots, c_ℓ) vérifient donc :

$$|\lambda c_\ell - \lambda^{\ell-1} \delta_2 c_{\ell-1}| \leq \|\delta\| \cdot \ell^2 \cdot (2\lambda - 1)^{\ell-1} \sup_{0 \leq j \leq \ell-2} |c_j| + 2^\lambda \sup_{0 \leq j \leq \ell-1} |c_j|.$$

Pour $0 \leq j \leq \ell - 2$, $\binom{\ell-1}{2} - \binom{j-1}{2} \geq 2\ell - 1$ et de plus $\binom{\ell-1}{2} - \binom{\ell-2}{2} = \ell - 1$.
Donc

(21)

pour $0 \leq j \leq \ell - 2$, $|\rho_\ell| \geq \lambda^{2\ell-1} |\rho_j|$ et $\rho_\ell = \delta_2 \lambda^{\ell-1}$ et donc $|\rho_\ell| \geq \lambda^{\ell-1} |\rho_{\ell-1}|$.

En divisant la relation précédente par ρ_ℓ , nous obtenons alors :

$$|\tilde{c}_\ell - \tilde{c}_{\ell-1}| \leq \|\delta\| \binom{\ell+1}{2} \frac{(2\lambda-1)^{\ell-1}}{\lambda^{2\ell-1}} \sup_{0 \leq j \leq \ell-2} |\tilde{c}_j| + \frac{2^\lambda}{\lambda^{\ell-1}} \sup_{0 \leq j \leq \ell-1} |\tilde{c}_j|.$$

Maintenant, si θ est tel que $\frac{2\lambda-1}{\lambda^2} < \theta < 1$ alors pour ℓ assez grand :

$$|\tilde{c}_\ell - \tilde{c}_{\ell-1}| \leq \theta^\ell \sup_{1 \leq j \leq \ell-1} |\tilde{c}_j|.$$

Nous pouvons alors conclure en utilisant le lemme 39 suivant. □

LEMME 39. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle qu'il existe $\theta \in [0, 1[$ et une suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de termes positifs dont la série converge. Supposons qu'à partir d'un certain rang,

$$|u_n - u_{n-1}| \leq v_n + \theta^n \max_{0 \leq k \leq n-1} |u_k|.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons L cette limite et prenons pour v la suite nulle, alors il existe une constante M telle qu'à partir d'un certain rang, $|L - u_n| \leq M \cdot \theta^n$.

Preuve du lemme 39. — Si nous montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $|u_n - u_{n-1}|$ est le terme général d'une série convergente, ce qui montrera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Nous supposons que la majoration est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir une borne sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de remarquer que pour $n \geq 2$:

$$|u_n| \leq |u_0| \prod_{k=0}^n (1 + \theta^k) + v_n + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 + \theta^{n-i}) \leq \left(\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + \theta^k) \right) \cdot \left(|u_0| + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \right).$$

Notons U un majorant de $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et supposons que v soit la suite nulle. Alors la relation de récurrence se réécrit :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \theta^n \cdot U \quad \text{et pour tout entier } p : |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \theta^{n+k} \cdot U.$$

Par passage à la limite, il existe une constante M , $|L - u_n| \leq M \cdot \theta^n$. □

4.4. Preuve du théorème 4. — Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 4. Fixons un entier $\ell \geq \lambda + 1$ et notons $q_{j,k} = q_{j,k}(\lambda)$ et $\|\delta\| = \max\{\delta_i, 1 \leq i \leq \lambda\} = \sup\{\delta_i; i \geq 1\}$. Pour tous les entiers $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, nous noterons $S_i^{(\ell)}$ pour $S_i^{(\ell)}(\varphi * u)$, $\tilde{S}_i^{(\ell)} = S_i^{(\ell)} - p_\ell(i)$ et $\tilde{\tilde{S}}_i^{(\ell)} = \tilde{S}_i^{(\ell)} / \rho_\ell$ où les coefficients $(\rho_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ sont définis en 7. Nous noterons également pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\theta_\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\rho_\ell} |S_n^{(\ell)} - p_\ell(n)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\rho_\ell} |\tilde{S}_n^{(\ell)}| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{\tilde{S}}_n^{(\ell)}|.$$

Le but est de montrer que la suite $(\theta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge.

Rappelons la formule (2) (corollaire 28), pour tout entier n , puisque $\sigma(u) = u$:

$$(2) \quad S_{n\lambda}^{(\ell+1)} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} S_n^{(j+1)} \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \gamma_{i+1} \binom{n}{j+1}.$$

Rappelons également la formule de l'item 3 de la proposition 37 : pour tous les entiers i et m , $S_{i,\lambda^m}^{(m)} = p_m(i\lambda^m) - c_m$. Nous en déduisons que pour tous les

entiers n de la forme $i\lambda^\ell$, la relation suivante est vérifiée :

$$p_{\ell+1}(n\lambda) - c_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} (p_{j+1}(n) - c_{j+1}) \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \gamma_{i+1} \binom{n}{j+1}.$$

Et puisque cette équation est polynomiale, elle est donc vérifiée pour tous les entiers n . Nous trouvons donc :

$$\tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} + c_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \tilde{S}_n^{(j+1)} \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} c_{j+1} \delta_{i+1}.$$

Divisons alors cette relation par $\rho_{\ell+1}$, nous obtenons :

$$\tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} + \tilde{c}_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{S}_n^{(j+1)} \delta_{i+1} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{c}_{j+1} \delta_{i+1}.$$

En notant :

$$\varepsilon_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{c}_{j+1} \delta_{i+1} - \tilde{c}_{\ell+1},$$

et en remarquant que $\rho_\ell \cdot \delta_2 \cdot \lambda^{\ell-1} = \rho_{\ell+1}$, nous trouvons donc :

$$\tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} - \tilde{S}_n^{(\ell)} = \sum_{j=0}^{\ell-2} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{S}_n^{(j+1)} \delta_{i+1} + \varepsilon_{\ell+1}.$$

Avec les relations $q_{j,\ell-i} \leq (2\lambda - 1)^{\ell-2} \leq (2\lambda - 1)^{\ell-1}$ (lemme 32), $|\rho_{j+1}| \lambda^{2\ell-1} \leq \rho_{\ell+1}$ (relation (21)) et $|\tilde{S}_n^{(j+1)}| \leq \theta_{j+1}$, nous trouvons :

$$\left| \tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} - \tilde{S}_n^{(\ell)} \right| \leq \|\delta\| \cdot \ell^2 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{2\lambda - 1}{\lambda^2} \right)^{\ell-1} \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell-1} \theta_j + |\varepsilon_{\ell+1}|.$$

Pour tout entier n :

$$\left| \tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} \right| \leq \left| \tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} - \tilde{S}_n^{(\ell)} \right| + \left| \tilde{S}_n^{(\ell)} \right|.$$

Ces suites sont bornées et en prenant la borne supérieure sur n , pour un réel $K \in](2\lambda - 1)/\lambda^2, 1[$ et pour ℓ assez grand, nous avons :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} \right| \leq \theta_\ell + K^\ell \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell-1} \theta_j + \beta_{\ell+1}.$$

Soit N un entier, il s'écrit de manière unique sous la forme $N = n\lambda + k$ avec $0 \leq k < \lambda$. Alors par construction (item 2 de la proposition 37) puis en divisant

par $\rho_{\ell+1}$:

$$\begin{aligned}\bar{S}_N^{(\ell+1)} &= \sum_{i=0}^{k-1} \bar{S}_{n\lambda+i}^{(\ell)} + \bar{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)} \\ \text{donc } |\tilde{S}_N^{(\ell+1)}| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^{\ell-1}} \cdot |\tilde{S}_{n\lambda+i}^{(\ell)}| + |\tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)}| \leq \frac{1}{\lambda^{\ell-1}} \theta_\ell + |\tilde{S}_{n\lambda}^{(\ell+1)}|.\end{aligned}$$

Donc quitte à redéfinir K (avec toujours $K < 1$), à partir d'un certain rang, nous avons la relation :

$$\theta_{\ell+1} \leq \theta_\ell + K^\ell \cdot \sup_{0 \leq j \leq \ell} \theta_j + \varepsilon_{\ell+1}.$$

Afin de conclure par le lemme 39, il nous reste à vérifier que la série de terme général $|\varepsilon_\ell|$ converge.

Rappelons que d'après la proposition 38, à partir d'un certain rang, il existe deux réels θ et M tels que pour tout entier j , $|\tilde{c}_j - \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{c}_m| \leq M \cdot \theta^j$. On note $C = \sup\{\tilde{c}_j; j \in \mathbb{N}\}$. On utilise encore le lemme 32 et la relation (21) :

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{\ell+1}| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{c}_{j+1} \delta_{i+1} - \tilde{c}_{\ell+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^{\ell-2} \sum_{i=1}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{\ell+1}} \tilde{c}_{j+1} \delta_{i+1} \right| + |\tilde{c}_\ell - \tilde{c}_{\ell+1}| \\ &\leq \ell^2 \|\delta\| \frac{1}{\lambda^{\ell-1}} C + |\tilde{c}_\ell - \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{c}_m| + |\tilde{c}_{\ell+1} - \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{c}_m| \\ &\leq \ell^2 \|\delta\| \frac{1}{\lambda^{\ell-1}} C + M\theta^\ell + m\theta^{\ell+1}.\end{aligned}$$

Ce qui est le terme général d'une série convergente.

5. Preuve de la proposition 8

Rappelons que la proposition 8 nous permettra par la suite de démontrer le théorème 6.

5.1. Comportement asymptotique diagonal. — Soit σ une substitution fortement uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}^*$ sur $\{a, b\}$. Soit $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Nous notons \mathcal{L} et L les endomorphismes respectivement de \mathcal{G} et V obtenus dans la proposition 25. Nous supposons que $\delta = \delta_2 X + \cdots \in V_1 \setminus V_2$, c'est-à-dire que $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 \neq 0$. Nous noterons $q_{j,k}$ à la place de $q_{j,k}(\lambda)$.

NOTATION. — Nous avons supposé que δ_1 était nul. Donc d'après le corollaire 29, si $s = s_0 + s_1 X + \dots \in V$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $L^m(s)$ est de la forme :

$$L^m(s) = s' \quad \text{avec} \quad s' = s'_0 X^m + s'_1 X^{m+1} + \dots \in V.$$

Nous noterons pour tout entier m , $s^{(m)} = s_0^{(m)} + s_1^{(m)} X + \dots \in V$ la suite telle que $L^m(s) = X^m s^{(m)}$ soit encore $L^m(s) = X^m s_0^{(m)} + s_1^{(m)} X^{m+1} + \dots$.

$$\begin{array}{rcll} s & = & s_0^{(0)} & + s_1^{(0)} X + \dots \\ \downarrow & & \searrow & \searrow \\ L(S) & = & s_0^{(1)} X & + s_1^{(1)} X^2 + \dots \\ \vdots & & \searrow & \searrow \\ L^m(s) & = & s_0^{(m)} X^m & + s_1^{(m)} X^{m+1} + \dots \end{array}$$

PROPOSITION 40. — Avec les notations de l'introduction de cette section, pour tout entier $\ell \geq 0$, il existe une fonction $\Phi_\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et qui ne dépend que des ℓ premières coordonnées telle que pour tout $s \in V$ on ait :

$$s_\ell^{(m)} = \Phi_\ell(s) \delta_2^m \lambda^{\frac{(m+\ell)(m+\ell-1)}{2}} + o_{m \rightarrow +\infty} \left(\delta_2^m \lambda^{\frac{(m+\ell)(m+\ell-1)}{2}} \right).$$

De plus, $\Phi_\ell(X^\ell) = 1$.

Nous pouvons obtenir des expressions explicites de $s_0^{(m)}$ et $s_1^{(m)}$ pour tout entier m :

$$\begin{cases} s_0^{(m)} = s_0 \delta_2^m \lambda^{m(m-1)/2}, \\ s_1^{(m)} = \left(s_1 + \frac{s_0}{\delta_2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^{i+1}} \left(\frac{i(\lambda-1)}{2} \delta_2 + \delta_3 \right) \right) \cdot \delta_2^{m+1} \lambda^{m(m+1)/2}. \end{cases}$$

En particulier $\Phi_0(s) = s_0 \quad \text{et} \quad \Phi_1(s) = s_1 + \frac{1}{\lambda-1} \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_3 \right) s_0.$

Nous apportons la preuve de ce résultat dans l'annexe A.6.

5.2. Asymptotiques des sommes de Birkhoff et des polynômes d'approximation

COROLLAIRE 41. — Soit σ une substitution fortement uniforme de longueur $\lambda \in \mathbb{N}^*$ sur $\{a, b\}$. Soit $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective. Nous supposons que $\delta_2 \neq 0$. Soient $(R_{m,\ell})_{(m,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ les polynômes d'approximation définis

en (33) de la section 4.2. Alors pour tout mot fini $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ de longueur n et tout entier $m \geq 0$, avec la définition 7 des coefficients de renormalisation :

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{S_{n\lambda^\ell}^{(\ell+m)}(\varphi * \sigma^m(u)) - R_{\ell, \ell+m}(n)}{\delta_2^\ell \lambda^{(\ell+m-1)(\ell+m-2)/2}} &= \delta_2^{m-1} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{S_{n\lambda^\ell}^{(\ell+m)}(\varphi * \sigma^\ell(u)) - R_{\ell, \ell+m}(n)}{\rho_{m+\ell}} \\ &= \Phi_m \left(S_{n\lambda^\ell}(\varphi * \sigma^\ell(u)) - (R_{m,1}(n) + R_{m,2}(n)X + \dots) \right). \end{aligned}$$

Pour tout entier m et tout réel x ,

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{R_{\ell+m, \ell+m}(x) - R_{\ell, \ell+m}(\lambda^m x)}{\delta_2^\ell \lambda^{(\ell+m-1)(\ell+m-2)/2}} &= \delta_2^{m-1} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{R_{\ell+m, \ell+m}(x) - R_{\ell, \ell+m}(\lambda^m x)}{\rho_{m+\ell}} \\ &= \Phi_m (R_{m,1}(x) + R_{m,2}(x)X + \dots). \end{aligned}$$

Preuve du corollaire 41. — Nous notons \mathcal{L} l'endomorphisme associé obtenu dans la proposition 25. Rappelons que c'est l'unique endomorphisme vérifiant $\mathcal{L} \circ \pi_\varphi = \pi_\varphi \circ \sigma$ avec π_φ définie en (13).

Par construction, on a pour tout entier n :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^m \circ \pi_\varphi(u) = \pi_\varphi(\sigma^m(u)) = \langle n\lambda^m, S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)}(\varphi * \sigma^m(u)) \rangle, \\ \mathcal{L}^m(\langle n, 0 \rangle) = \langle n\lambda^m, R_{m,1}(n) + R_{m,2}(n)X + \dots \rangle. \end{cases}$$

Maintenant, remarquons que dans $\mathcal{G} : \langle x, s \rangle^{-1} \cdot \langle x, t \rangle = \langle 0, t - s \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $(s, t) \in V^2$. En particulier

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^m(\langle n, 0 \rangle^{-1} \pi_\varphi(u)) &= \langle n\lambda^m, R_{m,1}(n) + R_{m,2}(n)X + \dots \rangle^{-1} \cdot \langle n\lambda^\ell, S_{n\lambda^\ell}(\varphi * \sigma^\ell(u)) \rangle \\ &= \langle 0, S_{n\lambda^m}(\varphi * \sigma^m(u)) - (R_{m,1}(n) + R_{m,2}(n)X + \dots) \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit alors, d'appliquer la proposition 40 avec la série $S_{n\lambda^m}(\varphi * \sigma^m(u)) - (R_{m,1}(n) + R_{m,2}(n)X + \dots)$.

Nous montrons la seconde partie de manière similaire. Soient x un réel et (ℓ, m) deux entiers :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\ell \circ \mathcal{L}^m(\langle x, 0 \rangle) &= \langle \lambda^{\ell+m}x, R_{\ell+m,1}(x) + \dots + R_{\ell+m,j}(x)X^{j-1} + \dots \rangle \\ \mathcal{L}^\ell(\langle \lambda^m x, 0 \rangle) &= \langle \lambda^{\ell+m}x, R_{\ell,1}(\lambda^m x) + \dots + R_{\ell,j}(\lambda^m x)X^{j-1} + \dots \rangle. \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\ell(\langle 0, R_{m,1}(x) + R_{m,2}(x)X + \dots \rangle) &= \mathcal{L}^\ell \circ \mathcal{L}^m(\langle x, 0 \rangle \cdot \langle \lambda^m x, 0 \rangle^{-1}) \\ &= \langle 0, (R_{\ell+m,1}(x) - R_{\ell,1}(\lambda^m x)) + (R_{\ell+m,2}(x) - R_{\ell,2}(\lambda^m x))X + \dots \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer encore la proposition 40 pour conclure. \square

5.3. Preuve de la proposition 8. — On se donne une substitution σ fortement uniforme de longueur λ telle que $\delta_2 \neq 0$ et admettant un point fixe $u = u_0 u_1 \dots$. Soit $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante. Pour tous les entiers $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, nous noterons $S_i^{(\ell)}$ pour $S_i^{(\ell)}(\varphi * u)$ et $\tilde{S}_i^{(\ell)} = (S_i^{(\ell)} - p_\ell(i)) / \rho_\ell$.

Pour tous les entiers n, m et ℓ :

$$\begin{aligned} S_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} - p_{m+\ell}(n\lambda^\ell) &= S_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} - R_{m+\ell, m+\ell} \left(\frac{n}{\lambda^m} \right) - c_{m+\ell} \text{ d'après la définition 36} \\ &= \left(S_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} - R_{\ell, m+\ell}(n) \right) \\ &\quad + \left(R_{\ell, m+\ell}(n) - R_{m+\ell, m+\ell} \left(\frac{n}{\lambda^m} \right) \right) - c_{m+\ell}. \end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à diviser par $\rho_{m+\ell}$ (définition 7) pour obtenir $\tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)}$. Les trois termes convergent lorsque ℓ tend vers $+\infty$ d'après le corollaire 41 et la proposition 38. Nous venons de définir une fonction $\Psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\Psi(m, n) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} \quad \text{pour tout } (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Rappelant que pour tous les entiers ℓ et n , d'après l'item 3 de la proposition 37, $S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)} = p_\ell(n\lambda^\ell) - c_\ell$ donc en renormalisant par ρ_ℓ , nous obtenons $\tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(\ell)} = -\tilde{c}_\ell$. Nous venons donc de remarquer que pour tout entier n ,

$$(22) \quad \Psi(0, n) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(\ell)} = - \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{c}_\ell.$$

Le reste de la preuve consiste à vérifier que la suite $(\Psi(1, n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nulle. Fixons deux entiers n et ℓ . Le groupe $\mathcal{G}_{\ell+1}$ est caractéristique (voir définition 18), donc \mathcal{L} induit un endomorphisme sur ce groupe encore noté \mathcal{L} et on a :

$$\mathcal{L}^\ell(\pi_\varphi(u_0 \dots u_{n-1})) = \langle n\lambda^\ell, S_{n\lambda^\ell}^{(1)} + \dots + S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)} X^{\ell-1} + S_{n\lambda^\ell}^{(\ell+1)} X^\ell \rangle.$$

Mais d'après le corollaire 29, dans le groupe le groupe $\mathcal{G}_{\ell+1}$, l'action de \mathcal{L} sur un élément $\langle x, s_0 + \dots + s_\ell X^\ell \rangle$ ne dépend que de x et s_0 . Puisque :

$$\pi_\varphi(u_0 \dots u_{n-1}) = \langle n, S_n^{(1)} + \dots + S_n^{(\ell+1)} X^\ell \rangle,$$

alors $\mathcal{L}^\ell(\pi_\varphi(u_0, \dots, u_{n-1}))$ ne dépend que des coordonnées n et $S_n^{(1)}$ et

$$\mathcal{L}^\ell(\langle n, S_n^{(1)} \rangle) = \langle n\lambda^\ell, S_{n\lambda^\ell}^{(1)} + \dots + S_{n\lambda^\ell}^{(\ell)} X^{\ell-1} + S_{n\lambda^\ell}^{(\ell+1)} X^\ell \rangle.$$

Nous utilisons alors la formule du produit (définition 17), des puissances (définition 20) et le calcul explicite dans la proposition 40 (calcul de $s_0^{(m)}$) et nous obtenons d'une part :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\ell(\langle n, S_n^{(1)} \rangle) &= \mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) \cdot \mathcal{L}^\ell(\langle 0, S_n^{(1)} \rangle) \\ &= \mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) \cdot \langle 0, \delta_2^\ell \lambda^{\ell(\ell-1)/2} S_n^{(1)} X^\ell \rangle. \end{aligned}$$

Et d'autre part, puisque $\mathcal{L}\langle n/\lambda, 0 \rangle = \langle n, R_{1,1}(n/\lambda) + \cdots + R_{1,\ell+1}(n/\lambda)X^\ell \rangle$ et que \mathcal{L}^ℓ ne dépend que de n et $R_{1,1}(n/\lambda) = p_1(n) + c_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) &= \mathcal{L}^\ell(\mathcal{L}(\langle n/\lambda, 0 \rangle) \cdot \langle 0, -p_1(n) - c_1 \rangle) \\ &= \langle n/\lambda, R_{\ell+1,1}(n/\lambda) + \cdots + R_{\ell+1,\ell+1}(n/\lambda) \rangle \\ &\quad \cdot \langle 0, -\delta_2^\ell \lambda^{\ell(\ell-1)/2} (p_1(n) + c_1) X^\ell \rangle.\end{aligned}$$

Après avoir effectué le produit et en identifiant les coefficients devant X^ℓ , nous trouvons :

$$S_{n\lambda^\ell}^{(\ell+1)} = p_{\ell+1}(n\lambda^\ell) + \delta_2^\ell \lambda^{\ell(\ell-1)/2} \left(S_n^{(1)} - p_1(n) - c_1 \right).$$

Puis en renormalisant, nous trouvons :

$$\Psi(1, n) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(\ell+1)} = S_n^{(1)} - p_1(n) - c_1 = S_n^{(1)} - c_0 n.$$

Reprenant la valeur de c_0 donnée en (19) et rappelant que $|\sigma(a)|_a + |\sigma(a)|_b = |\sigma(a)| = \lambda$:

$$(23) \quad \Psi(1, n+1) - \Psi(n) = \varphi(u_n) - c_0 = \begin{cases} \frac{|\sigma(a)|_b}{\lambda} (\varphi(a) - \varphi(b)) & \text{si } u_n = a \\ \frac{|\sigma(a)|_a}{\lambda} (\varphi(a) - \varphi(b)) & \text{si } u_n = b. \end{cases}$$

La suite $(\Psi(1, n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas nulle.

6. Preuve du théorème 6

Nous nous plaçons sous les hypothèses et notations du théorème 6. On fixe une fonction $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ injective. Un réel positif x est dit λ -adique s'il existe un entier n tel que $x\lambda^n \in \mathbb{N}$. Pour tous les entiers $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, nous noterons $S_i^{(\ell)}$ pour $S_i^{(\ell)}(\varphi * u)$, $\bar{S}_i^{(\ell)} = S_i^{(\ell)} - p_\ell(i)$ et $\tilde{S}_i^{(\ell)} = \bar{S}_i^{(\ell)}/\rho_\ell$.

– *Étape 1 : quelques résultats préliminaires.* Soient n , n' et ℓ trois entiers. D'après l'item 2 de la proposition 37 :

$$\bar{S}_{n+n'}^{(\ell+1)} - \bar{S}_n^{(\ell+1)} = \sum_{k=0}^{n'-1} \bar{S}_{n_1+k}^{(\ell)}.$$

Donc en divisant par $\rho_{\ell+1} = \delta_2 \lambda^{\ell-1} \rho_\ell$ (définition 7), alors les sommes normalisées $\tilde{S}_n^{(\ell+1)}$ vérifient :

$$(24) \quad \tilde{S}_{n+n'}^{(\ell+1)} - \tilde{S}_n^{(\ell+1)} = \frac{1}{\delta_2 \lambda^{\ell-1}} \sum_{k=0}^{n'-1} \tilde{S}_{n_1+k}^{(\ell)}.$$

Rappelons que d'après le théorème 4, les sommes normalisées $|\tilde{S}_n^{(\ell)}|$ sont uniformément bornées. Nous noterons Θ la borne supérieure.

– *Étape 2 : définition de la fonction pour les réels λ -adiques.* On définit une fonction sur l'ensemble des points λ -adiques en posant (proposition 8) :

$$f\left(\frac{n}{\lambda^{m-1}}\right) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} = \Psi(m, n) \quad \text{pour tout couple d'entiers } (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

La fonction f est bien définie car :

$$\Psi(m, n) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{n\lambda^{\ell+1}}^{(m+\ell+1)} = \Psi(m+1, \lambda n).$$

D'après le théorème 4, la fonction f est bornée et nous notons $\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \text{ est un point } \lambda\}$. On a $\|f\| \leq \Theta$. Puisque Ψ n'est pas identiquement nulle, f ne l'est pas non plus. Plus précisément cette fonction n'est pas identiquement nulle sur l'ensemble \mathbb{N} car $\Psi(1, n)$ ne l'est pas (proposition 8).

– *Étape 3 : continuité uniforme et prolongement à \mathbb{R}_+ .* On vérifie que f est uniformément continue.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+1}{\lambda^{m-1}}\right) - f\left(\frac{n}{\lambda^{m-1}}\right) &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{(n+1)\lambda^\ell}^{(m+\ell)} - \tilde{S}_{n\lambda^\ell}^{(m+\ell)} \\ &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta_2 \lambda^{m+\ell-2}} \sum_{k=0}^{\lambda^\ell-1} \tilde{S}_{n\lambda^\ell+k}^{(m+\ell-1)} \quad \text{relation (24)} \end{aligned}$$

Or pour tout entier ℓ ,

$$\frac{1}{\lambda^\ell} \sum_{k=0}^{\lambda^\ell-1} |\tilde{S}_{n\lambda^\ell+k}^{(m+\ell-1)}| \leq \Theta \quad \text{et donc} \quad \lambda^{m-1} \left| f\left(\frac{n+1}{\lambda^{m-1}}\right) - f\left(\frac{n}{\lambda^{m-1}}\right) \right| \leq \frac{\lambda}{\delta_2} \Theta.$$

Soient $x = n_x \lambda^{1-m}$ et $y = n_y \lambda^{1-m}$ deux points λ -adiques avec $y < x$. Alors d'après la relation précédente :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| f\left(\frac{n_x}{\lambda^{m-1}}\right) - f\left(\frac{n_y}{\lambda^{m-1}}\right) \right| \leq \sum_{n=n_y}^{n_x-1} \left| f\left(\frac{n+1}{\lambda^{m-1}}\right) - f\left(\frac{n}{\lambda^{m-1}}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=n_y}^{n_x-1} \frac{\lambda}{\delta_2} \frac{1}{\lambda^{m-1}} \Theta = \frac{\lambda}{\delta_2} \frac{n_x - n_y}{\lambda^{m-1}} \Theta = \frac{\lambda}{\delta_2} \Theta \cdot (x - y). \end{aligned}$$

La fonction f est donc uniformément continue et on la prolonge en une fonction uniformément continue, définie sur \mathbb{R}_+ encore notée f .

– *Étape 4. Équation différentielle.* Fixons quatre entiers (n_1, n_2, m_1, m_2) tel que

$$\frac{n_1}{\lambda^{m_1-1}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{n_1}{\lambda^{m_1-1}} + \frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}} > 0.$$

Alors,

$$f\left(\frac{n_1}{\lambda^{m_1-1}} + \frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}}\right) = f\left(\frac{n_1 \lambda^{m_2} + n_2 \lambda^{m_1}}{\lambda^{m_1+m_2-1}}\right) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tilde{S}_{(n_1 \lambda^{m_2} + n_2 \lambda^{m_1}) \lambda^\ell}^{(m_1+m_2+\ell)}.$$

Pour tout entier ℓ :

$$\bar{S}_{(n_1\lambda^{m_2}+n_2\lambda^{m_1})\lambda^\ell}^{(m_1+m_2+\ell)} - \bar{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell)} = \sum_{k=0}^{n_2\lambda^{m_1+\ell}} \bar{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}+k}^{(m_1+m_2+\ell-1)}.$$

Et maintenant pour k fixé :

$$\begin{aligned} \left| \bar{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}+k}^{(m_1+m_2+\ell-1)} - \bar{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell-1)} \right| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \bar{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}+j}^{(m_1+m_2+\ell-2)} \right| \\ &\leq k \cdot \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \bar{S}_j^{(m_1+m_2+\ell-2)} \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, nous normalisons en divisant ces expressions respectivement par $\rho_{m_1+m_2+\ell}$ et $\rho_{m_1+m_2+\ell-1}$. Les deux expressions ci-dessus s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{S}_{(n_1\lambda^{m_2}+n_2\lambda^{m_1})\lambda^\ell}^{(m_1+m_2+\ell)} - \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell)} = \frac{1}{\delta_2\lambda^{m_1+m_2+\ell-2}} \sum_{k=0}^{n_2\lambda^{m_1+\ell}} \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}+k}^{(m_1+m_2+\ell-1)}, \\ \left| \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}+k}^{(m_1+m_2+\ell-1)} - \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell-1)} \right| \leq k \frac{\lambda}{|\delta_2|} \frac{1}{\lambda^{m_1+m_2+\ell-1}} \cdot \Theta. \end{cases}$$

En rassemblant ces relations, on a :

$$\begin{aligned} &\left| \tilde{S}_{(n_1\lambda^{m_2}+n_2\lambda^{m_1})\lambda^\ell}^{(m_1+m_2+\ell)} - \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell)} - \frac{\lambda}{\delta_2} \frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}} \tilde{S}_{n_1\lambda^{m_2+\ell}}^{(m_1+m_2+\ell-1)} \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{|\delta_2|} \frac{1}{\lambda^{m_1+m_2+\ell-1}} \sum_{k=0}^{n_2\lambda^{m_1+\ell}} k \frac{\lambda}{|\delta_2|} \frac{1}{\lambda^{m_1+m_2+\ell-1}} \cdot \Theta \\ &\leq \frac{\lambda^2}{\delta_2^2} \frac{1}{\lambda^{2m_1+2m_2+2\ell-2}} n_2^2 \lambda^{2m_1+2\ell} \cdot \Theta \leq \frac{\lambda^2}{\delta_2^2} \left(\frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}} \right)^2 \Theta. \end{aligned}$$

Finalement, en prenant la limite sur ℓ , on obtient :

$$\left| f\left(\frac{n_1}{\lambda^{m_1-1}} + \frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}}\right) - f\left(\frac{n_1}{\lambda^{m_1-1}}\right) - \frac{\lambda}{\delta_2} \frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}} f\left(\frac{n_1}{\lambda^{m_1-2}}\right) \right| \leq \frac{\lambda^2}{\delta_2^2} \left(\frac{n_2}{\lambda^{m_2-1}} \right)^2 \Theta.$$

Par densité des points λ -adiques, on récupère pour tout couple de réels (x, h) tels que $x > 0$ et $x + h > 0$:

$$\left| f(x+h) - f(x) - h \frac{\lambda}{\delta_2} f(\lambda x) \right| \leq \frac{\lambda^2}{\delta_2^2} h^2 \Theta.$$

Ceci prouve que f est dérivable en tout point x , et que sa dérivée vérifie $f'(x) = \frac{\lambda}{\delta_2} f(\lambda x)$.

- *Étape 5. Concaténation.* Nous allons prouver par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ que pour tout entier $k \in \{0, \dots, \lambda^\ell - 1\}$, la suite $(\tilde{S}_{n\lambda^\ell+k}^{(\ell)})_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend que deux valeurs. Plus précisément, pour tout entier $k \in \{0, \dots, \lambda^\ell - 1\}$ fixé, pour

tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\bar{S}_{n\lambda^\ell+k}^{(\ell)}$ ne dépend que de u_n . Le résultat suivra alors par passage à la limite.

Ce résultat est immédiat pour $\ell = 0$ car $\bar{S}_n^{(0)} = u_n - c_0$ ne dépend que de u_n . Supposons le résultat vrai au rang ℓ . Soit $k \in \{0, \dots, \lambda^{\ell+1} - 1\}$ fixé. Alors d'après les items 2 et 3 de la proposition 37 :

$$\bar{S}_{n\lambda^{\ell+1}+k}^{(\ell+1)} = \bar{S}_{n\lambda^{\ell+1}}^{(\ell+1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{S}_{n\lambda^{\ell+1}+i}^{(\ell)} = -c_{\ell+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{S}_{n\lambda^{\ell+1}+i}^{(\ell)}.$$

Le résultat est alors prouvé car d'après l'hypothèse de récurrence, chaque $\bar{S}_{n\lambda^{\ell+1}+i}^{(\ell)}$ ne dépend que de $u_{n\lambda} \cdots u_{(n+1)\lambda-1}$ (et de i).

Or le mot $u_{n\lambda} \cdots u_{(n+1)\lambda-1}$ est l'image par σ de u_n .

Ce résultat pourrait également être prouvé directement par le travail effectué dans la partie 2.5. En effet nous avons vu dans cette partie que les fonctions ψ_i sont constantes sur chaque ensemble $\text{Cyl}(i, m, \alpha)$. \square

Il est *a priori* très difficile de calculer les valeurs des fonctions limites f_u du théorème 6. La valeur de la fonction aux points $\lambda\mathbb{N}$ est donnée en (22) et nous ne pouvons pas la relier «simplement» à la substitution σ . Les différences de valeurs prises par la fonction entre deux points entiers sont cependant assez accessibles et données par la formule (23). On peut voir ce fait sur les figures 6.1, 6.2 et 6.3.

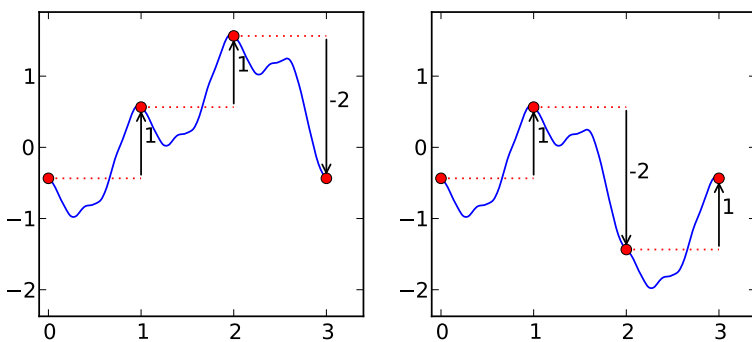


FIGURE 6.1. Les fonctions f_a et f_b pour $a \mapsto aab, b \mapsto aba$ et pour $\varphi = \chi_a - 2\chi_b$.

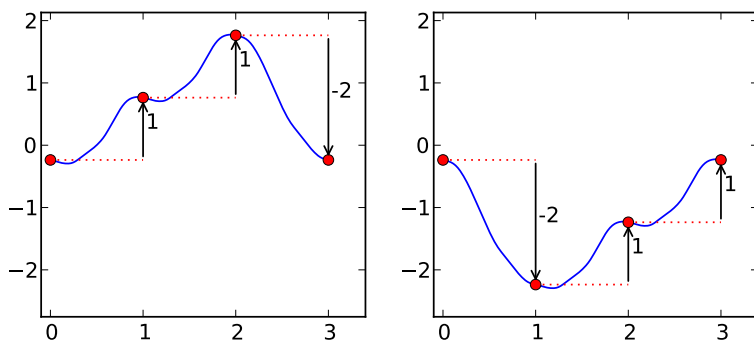


FIGURE 6.2. Les fonctions f_a et f_b pour $a \mapsto aab, b \mapsto baa$ et pour $\varphi = \chi_a - 2\chi_b$.

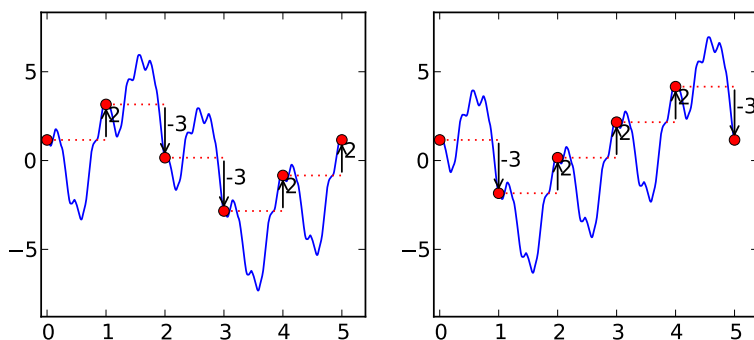


FIGURE 6.3. Les fonctions f_a et f_b pour $a \mapsto abbaa, b \mapsto baaab$ et pour $\varphi = 2\chi_a - 3\chi_b$.

Annexe A. Preuves des résultats

A.1. Preuve du lemme 21

1. Soient $(r, r') \in \mathbb{R}^2$ et $\langle x, s \rangle \in \mathcal{G}$. Nous avons d'une part :

$$\langle x, s \rangle^{r+r'} = \langle (r+r')x, B(rx + r'x)B(x)^{-1} \cdot s \rangle,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \langle x, s \rangle^r \cdot \langle x, s \rangle^{r'} &= \langle rx, B(rx)B(x)^{-1} \cdot u \rangle \langle r'x, B(r'x)B(x)^{-1} \cdot s \rangle \\ &= \left\langle (r+r')x, \left(A^{r'x}B(rx) + B(r'x) \right) B(x)^{-1} \cdot s \right\rangle. \end{aligned}$$

Il nous reste alors à prouver que pour tout couple de réels $(y, y') \in \mathbb{R}^2$:

$$B(y + y') = B(y) + A^y B(y') = B(y') + A^{y'} B(y).$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} A^{y+y'} &= A^y A^{y'} = (1 + XB(y)) \cdot (1 + XB(y')) \\ &= 1 + X \left(B(y) + B(y') + XB(y)B(y') \right) \\ &= 1 + X \left(B(y) + (I + XB(y))B(y') \right) \\ &= 1 + X \left(B(y) + A^{y'} B(y') \right). \end{aligned}$$

2. D'après le lemme 17, deux éléments $\langle x, s \rangle$ et $\langle y, t \rangle$ de \mathcal{G} commutent si et seulement si $(A^y - 1) \cdot s = (A^x - 1) \cdot t$. Cette relation peut également s'écrire $B(y) \cdot s = B(x) \cdot t$ et si $x \neq 0 : t = B(y)B(x)^{-1} \cdot s$. Autrement dit $\langle x, s \rangle^{y/x} = \langle y, t \rangle$.

3. Fixons un élément $g = \langle x, s \rangle$ de \mathcal{G} avec x non nul. Pour tout nombre réel r :

$$\begin{cases} B(rx) &= rx + \frac{rx(rx-1)}{2}X + \dots \\ B(x) &= x + \frac{x(x-1)}{2}X + \dots \\ B(x)^{-1} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \frac{x-1}{2}X + \dots \end{cases}$$

Si c_n désigne le n -ème coefficient de $B(x)$, alors ceux de $B(x)^{-1}$ que l'on note $(c'_n)_n$ se trouvent en résolvant le système triangulaire :

$$c_0 c'_0 = 1, \quad c_1 c'_0 + c_0 c'_1 = 0, \quad \dots \quad c_n c'_0 + \dots + c_k c'_{n-k} + \dots c_0 c'_n = 0, \quad \dots$$

Donc $B(rx)B(x)^{-1}$ est une série formelle de la forme :

$$(25) \quad B(rx)B(x)^{-1} = P_0(x, r) + \dots + P_\ell(x, r)X^\ell + \dots \quad \text{où } \forall \ell \in \mathbb{N}, P_\ell \in \mathbb{R}_2[X, Y].$$

Ainsi l'application $(g, r) \rightarrow g^r$ est continue (car polynomiale dans le sens de la relation (25) ci-dessus).

Il ne reste qu'à vérifier qu'elle se prolonge par la formule donnée lorsque x tend vers 0. D'après la relation (11) sur les puissances entières dans \mathcal{G} , pour tout entier n et tout réel x :

$$P_0(x, n) + P_1(x, n)X + \dots + P_\ell(x, n)X^\ell + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} n.$$

Donc,

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, P_\ell(0, n) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P_0(0, n) = n.$$

Puisque pour tout entier ℓ , $y \rightarrow P_\ell(0, y)$ est un polynôme en une variable, alors :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{R}, P_\ell(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, P_0(0, y) = y.$$

En reprenant la relation (25) avec la topologie des séries formelles :

$$B(rx)B(x)^{-1} = P_0(x, r) + \cdots + P_\ell(x, r)X^\ell + \cdots \xrightarrow{x \rightarrow 0} r.$$

L'application puissance ainsi définie est donc continue sur $\mathcal{G} \times \mathbb{R}$. Et même polynomiale au sens de (25).

A.2. Preuve de la proposition 25. — Si un tel endomorphisme existe, alors $\mathcal{L} \circ \pi_\varphi = \pi_\varphi \circ \sigma$ et l'image des générateurs $\{a, b\}$ est :

$$\mathcal{L}(\pi_\varphi(a)) = \pi_\varphi(\sigma(a)) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\pi_\varphi(b)) = \pi_\varphi(\sigma(b)).$$

Rappelons que d'après la relation (13), nous avons :

$$\begin{cases} \pi_\varphi(a) = \hat{\varphi}(a) = \langle 1, \varphi(a) \rangle, \\ \pi_\varphi(b) = \hat{\varphi}(b) = \langle 1, \varphi(b) \rangle, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \pi_\varphi(\sigma(a)) = \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle, \\ \pi_\varphi(\sigma(b)) = \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) \rangle. \end{cases}$$

Donc le morphisme \mathcal{L} recherché doit vérifier :

$$(26) \quad \mathcal{L}(\langle 1, \varphi(a) \rangle) = \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\langle 1, \varphi(b) \rangle) = \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) \rangle.$$

Nous avons vu en introduction de la section 3.6 que les endomorphismes étaient caractérisés par leur image de d et f . Nous allons utiliser cette relation (26) pour obtenir ces images.

- Un premier calcul donne :

$$\begin{aligned} \langle 1, \varphi(a) \rangle^{-1} \cdot \langle 1, \varphi(b) \rangle &= \langle 0, \varphi(b) - \varphi(a) \rangle = f^{\varphi(b) - \varphi(a)} \\ \iff f &= \left(\langle 1, \varphi(a) \rangle^{-1} \cdot \langle 1, \varphi(b) \rangle \right)^{1/(\varphi(b) - \varphi(a))}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir ce que doit être l'image par \mathcal{L} de f par le lemme 24 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \left(\mathcal{L}(\langle 1, \varphi(a) \rangle)^{-1} \cdot \mathcal{L}(\langle 1, \varphi(b) \rangle) \right)^{1/(\varphi(b) - \varphi(a))} \\ &= \left(\langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) \rangle \right)^{1/(\varphi(b) - \varphi(a))} \quad \text{d'après (26)} \\ &= \left(\langle -\lambda, -A^\lambda \cdot S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle \cdot \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) \rangle \right)^{1/(\varphi(b) - \varphi(a))} \\ &= \langle 0, S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) - S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle^{1/(\varphi(b) - \varphi(a))} \\ &= \left\langle 0, \frac{S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) - S_\lambda(\varphi * \sigma(a))}{\varphi(b) - \varphi(a)} \right\rangle \end{aligned}$$

d'après la définition 20 des puissances.

- Pour trouver l'image de d par \mathcal{L} , nous procédons avec la même méthode en exprimant $d = \langle 1, 0 \rangle$ à partir de $\langle 1, \varphi(a) \rangle$ en utilisant la relation :

$$d = \langle 1, \varphi(a) \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle^{-\varphi(a)} = \langle 1, \varphi(a) \rangle \cdot f^{-\varphi(a)}.$$

Et donc toujours par le lemme 24 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(d) &= \mathcal{L}(\langle 1, \varphi(a) \rangle) \cdot \mathcal{L}(f)^{-\varphi(a)} \\
 &= \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle \cdot \langle 0, \delta \rangle^{-\varphi(a)} \quad \text{d'après (26)} \\
 &= \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) \rangle \cdot \langle 0, -\varphi(a)\delta \rangle = \langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) - \varphi(a)\delta \rangle \\
 &= \left\langle \lambda, S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) - \varphi(a) \frac{S_\lambda(\varphi * \sigma(b)) - S(\varphi * \sigma(a))}{\varphi(b) - \varphi(a)} \right\rangle \\
 &= \left\langle \lambda, \frac{\varphi(b)S_\lambda(\varphi * \sigma(a)) - \varphi(a)S_\lambda(\varphi * \sigma(b))}{\varphi(b) - \varphi(a)} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

L'application \mathcal{L} est correctement définie si et seulement si les relations vérifiées par les générateurs (d, f_0, f_1, \dots) sont préservées par \mathcal{L} . C'est-à-dire si pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $[f_i, f_j] = 1_{\mathcal{G}}$. Nous sommes donc amenés à calculer l'image de f_j pour $j \geq 1$. En utilisant la formule obtenue dans le lemme 17 pour le commutateur de deux éléments de \mathcal{G} , nous trouvons $\mathcal{L}(f_1) = \langle 0, (A^\lambda - 1) \cdot \delta \rangle$. Nous retrouvons alors la formule donnée au troisième item par récurrence.

Il est clair que les images de f_j commutent pour $j \geq 0$ car elles appartiennent à $\mathcal{V} = \{\langle 0, s \rangle; s \in V\}$. Donc \mathcal{L} définit donc correctement un endomorphisme de \mathcal{G} . Nous venons de prouver que les trois premiers items de la proposition sont vérifiés.

Le quatrième item est évident car l'action de \mathcal{L} sur \mathcal{V} ne dépend pas de la fonction φ choisie car δ ne dépend pas de φ (lemme 10).

Il ne nous reste plus qu'à prouver la dernière partie de la proposition. En écrivant les éléments de $\langle x, s \rangle$ de \mathcal{G} avec $x \in \mathbb{R}$ et $s = s_0 + s_1 X + \dots \in V$ sous leur forme canonique (lemme 23), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\langle x, s \rangle) &= \mathcal{L}(d^x f_0^{s_0} \dots f_j^{s_j} \dots) = \mathcal{L}(d)^x \mathcal{L}(f_0)^{s_0} \dots \mathcal{L}(f_j)^{s_j} \dots \\
 &= \langle \lambda, \beta \rangle^z \prod_{j=0}^{\infty} \langle 0, (A^\lambda - 1)^j \delta \rangle^{s_j} \quad \text{d'après les items 2 et 3} \\
 &= \langle \lambda z, B(\lambda z) B(\lambda)^{-1} \beta \rangle \prod_{j=0}^{\infty} \langle 0, s_j (A^\lambda - 1)^j \cdot \delta \rangle \\
 &\quad (\text{définition 20 des puissances}) \\
 &= \langle \lambda z, B(\lambda z) B(\lambda)^{-1} \beta \rangle \cdot \left\langle 0, \sum_{j=0}^{\infty} s_j (A^\lambda - 1)^j \cdot \delta \right\rangle \\
 &= \left\langle \lambda z, \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j (A^\lambda - 1)^j \right) \cdot \delta + B(\lambda z) B(\lambda)^{-1} \cdot \beta \right\rangle.
 \end{aligned}$$

A.3. Preuves des résultats de la partie 3.7

Preuve de la proposition 27. — Nous fixons un entier m . Rappelons que nous avons d'une part :

$$A^{my} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{my}{k} X^k.$$

Et d'autre part, en écrivant $(A^y)^m$, nous avons :

$$A^{my} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=k \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} \binom{y}{k_1} \cdots \binom{y}{k_m} \right) X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} q_{j,k}(y) X^k.$$

Pour obtenir cette formule, il suffit de dénombrer pour $j \in \{0, \dots, m\}$ le nombre de m -uplets de la forme (k_1, \dots, k_m) dont j coordonnées sont nulles. Or $q_{j,k}$ est nul pour $j > k$. Donc,

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} q_{j,k}(y) = \sum_{j=0}^{\min(m,k)} \binom{m}{j} q_{j,k}(y).$$

Maintenant si $m < k$, alors pour tout entier $j > m$, $\binom{m}{j}$ s'annule et nous pouvons donc écrire :

$$\binom{my}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} q_{j,k}(y).$$

Donc l'équation polynomiale en x :

$$\binom{xy}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{x}{j} q_{j,k}(y),$$

est vérifiée pour tous les entiers : l'égalité est vérifiée pour tous les réels.

Démontrons maintenant la relation sur l'expression $B(y)^{-1}B(xy)$. Pour cela, rappelons la définition 19 de $B(xy)$ pour tout couple de réels (x, y) :

$$\begin{aligned} B(xy) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{xy}{k+1} X^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{xy}{k} X^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k q_{j,k}(y) \binom{x}{j} \right) X^{k-1} \quad \text{d'après la relation (16)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_{j,k}(y) X^{k-1} \right) \binom{x}{j}, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A^y - 1)^j}{X} \binom{x}{j} \quad \text{par (14) et car } A^y - 1 \text{ est divisible par } X. \end{aligned}$$

Et donc nous trouvons :

$$B(y)^{-1}B(xy) = \frac{X}{A^y - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{x}{j} \frac{(A^y - 1)^j}{X} = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{x}{j} (A^y - 1)^{j-1}. \quad \square$$

Preuve du corollaire 28. — La première formule est claire avec la proposition 27 et la forme de l'endomorphisme décrite à l'item 5 de la proposition 25. Nous notons $q_{j,k}$ pour $q_{j,k}(\lambda)$. Nous allons expliciter le calcul pour obtenir la relation (17) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (A^\lambda - 1)^j \left(s_j \cdot \delta + \binom{x}{j+1} \gamma \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} q_{j,k} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(s_j \cdot \delta_{i+1} + \binom{x}{j+1} \gamma_{i+1} \right) X^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_{j,k} \left(s_j \cdot \delta_{i+1} + \binom{x}{j+1} \gamma_{i+1} \right) X^{k+i}. \end{aligned}$$

Fixons un entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ et intéressons nous au coefficient de X_ℓ que nous notons t_ℓ . En rappelant que $q_{j,k}$ est nul si $j > k$:

$$\begin{aligned} t_\ell &= \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\infty} q_{j,\ell-i} \left(s_j \cdot \delta_{i+1} + \binom{x}{j+1} \gamma_{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-i} q_{j,\ell-i} \left(s_j \cdot \delta_{i+1} + \binom{x}{j+1} \gamma_{i+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-j} q_{j,\ell-i} \left(s_j \cdot \delta_{i+1} + \binom{x}{j+1} \gamma_{i+1} \right). \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc la relation (17) en isolant le cas où $j = \ell$. La relation suivante (2) s'en déduit immédiatement en simplifiant avec $\delta_1 = 0$. \square

A.4. Preuves des résultats de la section 4.1

Preuve du lemme 30. — Dérivons en X l'égalité (14) de séries formelles pour $y \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}^*$ fixés :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q_{j,k}(y) X^k = (A^y - 1)^j = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{y}{m} X^m \right)^j.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k q_{j,k}(y) X^{k-1} &= j \left(\sum_{m=1}^{+\infty} m \binom{y}{m} X^m \right) (A^y - 1)^{j-1} \\ &= j \left(\sum_{m=1}^{+\infty} m \binom{y}{m} X^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_{j-1,n}(y) X^n \right). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de X^{k-1} , nous obtenons pour tout entier $k \geq 1$:

$$(27) \quad kq_{j,k}(y) = j \sum_{m=1}^{k-1} m \binom{y}{m} q_{j-1,k-m}(y).$$

Fixons un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et notons $q_{j,k}$ pour $q_{k,k}(y)$. En écrivant pour tout entier m non nul, $\binom{y}{m+1} = \frac{y-m+1}{m} \binom{y}{m}$:

$$\begin{aligned} kq_{j,k} &= j \sum_{m=1}^{k-1} m \binom{y}{m} q_{j-1,k-m} = yj q_{j-1,k-1} + j \sum_{m=2}^{k-1} m \binom{y}{m} q_{j-1,k-m} \\ &= yj q_{j-1,k-1} + j \sum_{m=1}^{k-2} (m+1) \binom{y}{m+1} q_{j-1,k-m-1} \\ &= yj q_{j-1,k-1} + j \sum_{m=1}^{k-2} (y-m) \binom{y}{m} q_{j-1,k-m-1} \\ &= yj q_{j-1,k-1} + jy \sum_{m=1}^{k-2} \binom{y}{m} q_{j-1,k-m-1} - j \sum_{m=1}^{k-2} m \binom{y}{m} q_{j-1,k-m-1} \\ &= yj q_{j-1,k-1} + jy \sum_{m=1}^{k-2} \binom{y}{m} q_{j-1,k-m-1} - (k-1) q_{j-1,k} \\ &\quad \text{en utilisant à nouveau (27).} \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la somme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k-2} \binom{y}{m} q_{j-1,k-m-1} &= \sum_{m=1}^{k-2} \binom{y}{m} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_{j-1}=k-m-1 \\ n_1 \geq 1, \dots, n_{j-1} \geq 1}} \binom{y}{n_1} \dots \binom{y}{n_{j-1}} \\ &= \sum_{\substack{n_1+\dots+n_{j-1}+m=k-m-1 \\ n_1 \geq 1, \dots, n_{j-1} \geq 1, m \geq 1}} \binom{y}{n_1} \dots \binom{y}{n_{j-1}} \binom{y}{m} \\ &= q_{j,k-1}. \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons pour tous les entiers $k \geq 1$ et $j \geq 1$:

$$kq_{j,k} = yj q_{j-1,k-1} + jy q_{j,k-1} - (k-1) q_{j-1,k}. \quad \square$$

Preuve de la proposition 31. — Fixons un réel y . Pour tout couple d'entiers (i, k) , nous posons :

$$Q_{k,k+i}(y) = \frac{k(k+1) \dots (k+i-1)}{y^k} q_{k,k+i}(y).$$

Nous noterons $q_{j,k}$ pour $q_{j,k}(y)$ et $Q_{j,k}$ pour $Q_{j,k}(y)$. Alors, $Q_{k,k} = q_{k,k} = y^n$ et la récurrence du lemme 30 nous donne :

$$Q_{k,k+i+1} = Q_{k-1,k+i} + (k(y-1) - i)Q_{k,k+i}.$$

Nous en déduisons la formule :

$$(28) \quad Q_{k,k+i+1} = \sum_{m=0}^k (m(y-1) - i)Q_{m,m+i}.$$

Nous démontrons alors par récurrence que :

$$Q_{k,k+i} \underset{k}{\sim} \frac{(y-1)^i k^{2i}}{2^i i!}.$$

Cette formule est vraie pour $i = 0$, supposons-la vraie jusqu'au rang i . En utilisant la formule (28), nous trouvons :

$$Q_{k,k+i+1} \underset{k}{\sim} (y-1) \sum_{m=0}^k m Q_{m,m+i} \underset{k}{\sim} \frac{(y-1)^{i+1}}{2^i i!} \sum_{m=0}^k m^{2i+1} \underset{k}{\sim} \frac{(y-1)^{i+1}}{2^i i!} \frac{k^{2i+2}}{2i+2}.$$

Le résultat suit en revenant aux polynômes $q_{k,k+i}$. □

A.5. Preuve de la proposition 35. — Nous fixons un entier ℓ et nous effectuons les calculs dans $\mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}/\mathcal{V}_\ell \cong \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\ell$ où $\mathcal{V}_\ell = \{\langle 0, s \rangle; s \in V_\ell\}$ (voir définition 18). Nous avons vu que le sous-groupe \mathcal{V}_ℓ était caractéristique, donc \mathcal{L} induit un endomorphisme de \mathcal{G}_ℓ encore noté \mathcal{L} .

Pour tout élément $\langle y, s \rangle$ de \mathcal{G}_ℓ où y est un réel et $s = s_0 + \dots + s_{\ell-1} X^\ell \in G/V_\ell$, comme $\delta_1 = 0$, d'après le corollaire 29 :

$$\mathcal{L}^\ell(\langle y, s \rangle) = \mathcal{L}^\ell(\langle y, 0 \rangle) = \left\langle \lambda^\ell y, R_{\ell,1}(y) + R_{\ell,2}(y)X + \dots + R_{\ell,\ell}(y)X^{\ell-1} \right\rangle.$$

Fixons un réel x . Pour tout entier m , dans le groupe \mathcal{G}_ℓ , $\mathcal{L}^\ell(\langle \lambda^m x, 0 \rangle) = \mathcal{L}^\ell \circ \mathcal{L}^m(\langle x, 0 \rangle)$ et donc :

$$(29) \quad \begin{aligned} \left\langle \lambda^{\ell+m} x, R_{\ell,1}(\lambda^m x) + \dots + R_{\ell,\ell}(\lambda^m x)X^{\ell-1} \right\rangle \\ = \left\langle \lambda^{\ell+m} x, R_{\ell+m,1}(x) + \dots + R_{\ell+m,\ell}(x)X^{\ell-1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le premier item.

Pour tout entier n , on a dans le groupe \mathcal{G}_ℓ d'une part

$$\mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) = \left\langle n\lambda^\ell, R_{\ell,1}(n) + \dots + R_{\ell,\ell}(n)X^{\ell-1} \right\rangle.$$

Mais d'après la définition 20 des puissances, on a $\langle n, 0 \rangle = \langle 1/\lambda^\ell, 0 \rangle^{n\lambda^\ell}$ et donc d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) &= \mathcal{L}\left(\langle 1/\lambda^\ell, 0 \rangle^{n\lambda^\ell}\right) \\ &= \left(\mathcal{L}^\ell(\langle 1/\lambda^\ell, 0 \rangle)\right)^{n\lambda^\ell} \quad \text{d'après le lemme 24} \\ &= \langle 1, R_{\ell,1}(1/\lambda^\ell) + \cdots + R_{\ell,\ell}(1/\lambda^\ell)X^{\ell-1} \rangle^{n\lambda^\ell}.\end{aligned}$$

Toujours en utilisant la définition 20 pour les puissances, $\mathcal{L}^\ell(\langle n, 0 \rangle) = \langle n\lambda^\ell, s \rangle$ où :

$$\begin{aligned}s &= B(n\lambda^i)B(1)^{-1} \cdot \left(R_{\ell,1}(1/\lambda^\ell) + \cdots + R_{\ell,\ell}(1/\lambda^\ell)X^{\ell-1}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n\lambda^\ell}{k+1} X^k\right) \cdot \left(R_{\ell,1}(1/\lambda^\ell) + \cdots + R_{\ell,\ell}(1/\lambda^\ell)X^{\ell-1}\right) \\ &\quad \text{par la définition 19 et car } B(1) = 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{n\lambda^\ell}{k+1} X^k\right) \cdot \left(R_{\ell,1}(1/\lambda^\ell) + \cdots + R_{\ell,\ell}(1/\lambda^\ell)X^{\ell-1}\right) \quad \text{dans } \mathcal{G}_\ell.\end{aligned}$$

Donc pour tout $1 \leq j \leq \ell$:

$$R_{\ell,j}(n) = \sum_{k=1}^j \binom{n\lambda^\ell}{j-k+1} R_{\ell,k} \left(\frac{1}{\lambda^\ell}\right).$$

En utilisant le premier item de la proposition, nous pouvons remplacer $R_{\ell,k}(1/\lambda^\ell)$ par $R_{k,k}(1/\lambda^k)$. Le second item est alors prouvé en prenant $j = \ell$ pour tous les réels x de la forme $n\lambda^\ell$. Puisque l'équation :

$$R_{\ell,\ell}(x/\lambda^\ell) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{x}{\ell-k} c_k$$

est polynomiale, elle est donc vérifiée pour tout réel x .

Pour démontrer la dernière partie, remarquons tout d'abord que pour tout entier ℓ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\ell\left(\left\langle \frac{1}{\lambda^\ell}, 0 \right\rangle\right) &= \left\langle 1, R_{\ell,1}\left(\frac{1}{\lambda^\ell}\right) + \cdots + R_{\ell,\ell}\left(\frac{1}{\lambda^\ell}\right)X^{\ell-1} \right\rangle \\ &= \left\langle 1, R_{1,1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + R_{2,2}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)X + \cdots + R_{\ell,\ell}\left(\frac{1}{\lambda^\ell}\right)X^{\ell-1} \right\rangle \\ &= \langle 1, c_0 + c_1X + \cdots + c_{\ell-1}X^{\ell-1} \rangle.\end{aligned}$$

En rappelant que nous effectuons les calculs dans le groupe \mathcal{G}_ℓ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\langle 1, c_0 + c_1 X + \cdots + c_{\ell-1} X^{\ell-1} \rangle) &= \mathcal{L}^{\ell+1} \left(\left\langle \frac{1}{\lambda^\ell}, 0 \right\rangle \right) \\ &= \left(\mathcal{L}^{\ell+1} \left(\left\langle \frac{1}{\lambda^{\ell+1}}, 0 \right\rangle \right) \right)^\lambda \quad \text{car } \left\langle \frac{1}{\lambda^\ell}, 0 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda^{\ell+1}}, 0 \right\rangle^\lambda \\ &= \langle 1, c_0 + c_1 X + \cdots + c_{\ell-1} X^{\ell-1} \rangle^\lambda.\end{aligned}$$

A.6. Preuve de la proposition 40. — Nous prouvons le résultat général par récurrence sur ℓ . Nous commençons par étudier les suites $(s_0^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(s_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles tout est explicite. Nous notons $q_{j,k}$ pour $q_{j,k}(\lambda)$ pour tous les entiers $(j, k) \in \mathbb{N}^2$. Reprenons la forme de l'endomorphisme L donnée au corollaire 28 en simplifiant l'expression avec $\delta_1 = 0$ car la substitution est fortement uniforme. Nous trouvons pour toute série $r = r_0 + r_1 X + \cdots \in V$, en notant $L(r) = t = t_0 + t_1 X + \cdots \in V$, pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$:

$$t_i = q_{i-1, i-1} \delta_2 r_{i-1} + \left(\sum_{j=1}^2 q_{i-2, i-j} \delta_{j+1} \right) r_{i-2} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\ell} q_{i-i, i-j} \delta_{j+1} \right) r_{i-i}$$

(30)

$$\iff t_i = \lambda^{i-1} \delta_2 r_{i-1} + \left(\sum_{j=1}^2 q_{i-2, i-j} \delta_{j+1} \right) r_{i-2} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^i q_{0, i-j} \delta_{j+1} \right) r_0.$$

- Cas $\ell = 0$ et $\ell = 1$. Reprenons la relation (30) précédente. Sous les hypothèses de la proposition 40 :

$$\begin{aligned}L(s) &= s_0^{(1)} X + s_1^{(1)} X^2 + s_2^{(1)} X^3 + s_3^{(1)} X^4 + \cdots \\ &= \delta_2 s_0 X + (\delta_3 s_0 + \lambda \delta_2 s_1) X^2 + s_2^{(1)} X^3 + s_3^{(1)} X^4 + \cdots.\end{aligned}$$

Donc $s_0^{(1)} = \delta_2 s_0$ et $s_1^{(1)} = \delta_3 s_0 + \lambda \delta_2 s_1$. En appliquant à nouveau L , nous avons :

$$L^2(s) = \lambda \delta_2 s_0^{(1)} X^2 + \left(\left(\binom{\lambda}{2} \delta_2 + \lambda \delta_3 \right) s_0^{(1)} + \lambda^2 \delta_2 s_1^{(1)} \right) X^3 + s_2^{(2)} X^4 + s_3^{(2)} X^5 + \cdots$$

Nous trouvons donc $s_0^{(2)} = \lambda \delta_2^2 s_0$ et $s_1^{(2)} = \left(\binom{\lambda}{2} \delta_2 + \lambda \delta_3 \right) s_0^{(1)} + \lambda^2 \delta_2 s_1^{(1)}$. On obtient ainsi pour tout entier m , par applications successives de L , la relation de récurrence :

$$\begin{cases} s_0^{(m+1)} = \delta_2 q_{m,m} s_0^{(m)}, \\ s_1^{(m+1)} = (q_{m,m+1} \delta_2 + q_{m,m} \delta_3) s_0^{(m)} + q_{m+1,m+1} \delta_2 s_1^{(m)}. \end{cases}$$

D'après (15), pour tout entier k non nul, $q_{k,k} = q_{k,k}(\lambda) = \lambda^k$ et $q_{k,k+1} = \frac{k}{2}(\lambda - 1)\lambda^k$.

$$\begin{cases} s_0^{(m+1)} = \delta_2 \lambda^m s_0^{(m)}, \\ s_1^{(m+1)} = \left(\frac{m}{2}(\lambda - 1)\lambda^m \delta_2 + \lambda^m \delta_3\right) s_0^{(m)} + \lambda^{m+1} \delta_2 s_1^{(m)}. \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'expression exacte de $s_0^{(m)}$ pour tout entier m :

$$s_0^{(m)} = s_0 \delta_2^m \lambda^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Pour l'étude de $(s_1^{(m)})_m$, posons pour tout entier m :

$$\tilde{s}_1^{(m)} = \frac{s_1^{(m)}}{\delta_2^m \lambda^{m(m+1)/2}}.$$

En divisant la relation précédente par $\delta_2^{m+1} \lambda^{(m+1)(m+2)/2} = \rho_{m+3}/\delta_2$ où nous rappelons que $\rho_i = \delta_2^{i-1} \lambda^{(i-1)(i-2)/2}$ (voir définition 7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1^{(m+1)} &= \tilde{s}_1^{(m)} + \frac{1}{\delta_2^{m+1} \lambda^{(m+1)(m+2)/2}} \left(\frac{m}{2}(\lambda - 1)\lambda^m \delta_2 + \lambda^m \delta_3\right) s_0^{(m)} \\ &= \tilde{s}_1^{(m)} + \frac{1}{\delta_2 \lambda^{2m+1}} \left(\frac{m}{2}(\lambda - 1)\lambda^m \delta_2 + \lambda^m \delta_3\right) s_0 \\ &= \tilde{s}_1^{(m)} + \frac{1}{\lambda^{m+1}} \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{m}{2} \delta(\lambda - 1) + \delta_3\right) s_0. \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{\lambda^{i+1}} \left(\frac{i}{2} \delta_2(\lambda - 1) + \delta_3\right)$ est sommable et donc la suite $(\tilde{s}_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\Phi_1(s) = s_1 + s_0 \frac{1}{\delta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i-1} \left(\frac{i}{2} \delta_2(\lambda - 1) + \delta_3\right) = s_1 + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{1}{\delta_2} \left(\frac{1}{2} \delta_2 + \delta_3\right) s_0.$$

- *Passage de $\ell - 1$ à ℓ .* Pour le cas général, on établit d'abord une relation de récurrence qui exprime $s_\ell^{(m)}$ sous la forme d'une somme de termes qui dépendent de $s_0, \dots, s_{\ell-1}, s_\ell$. Nous utilisons ensuite les estimations asymptotiques des polynômes $q_{m,m+i}$ obtenues dans la proposition 31 pour conclure qu'elle converge. Rappelons que $s_j^{(i)}$ est le coefficient devant X^{i+j} de la série $L^i(s)$. D'après la forme explicite de L rappelée dans la relation (30) plus haut, pour l'indice $i = m + \ell + 1$, nous trouvons pour tout entier m :

$$(31) \quad s_\ell^{(m+1)} = \sum_{j=m+1}^{\ell+m-1} \sum_{i=0}^{\ell+m-j} q_{j,\ell+m-i} s_{j-m-1}^{(m)} \delta_{i+1} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{\ell-j+2} q_{j+m-1,m+\ell+1-i} \delta_i s_j^{(m)}.$$

Nous divisons la relation précédente par le coefficient $\rho_{m+\ell+2}$. Nous notons $\tilde{s}_i^{(j)} = s_i^{(j)} / \rho_{i+j+1}$.

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\ell^{(m+1)} &= \lambda^{m+\ell} \delta_2 \frac{\rho_{m+\ell+1}}{\rho_{m+\ell+2}} \tilde{s}_\ell^{(m)} + \frac{\rho_{m+\ell}}{\rho_{m+\ell+2}} \left(\sum_{j=1}^2 q_{m+\ell-2, m+\ell-j} \delta_{j+1} \right) \tilde{s}_{\ell-1}^{(m)} \\ &\quad + \cdots + \frac{\rho_{m+1}}{\rho_{m+\ell+2}} \left(\sum_{j=1}^{\ell} q_{m-1, m+\ell-j} \delta_{j+1} \right) \tilde{s}_0^{(m)}. \end{aligned}$$

Nous simplifions immédiatement la relation en remarquant que $\rho_{i+n} = \delta_2^n \lambda^{n(n+2i-3)/2} \rho_i$ pour trouver :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\ell^{(m+1)} &= \tilde{s}_\ell^{(m)} + \frac{1}{\delta_2^2 \lambda^{2(m+\ell)+1}} \left(\sum_{j=1}^2 q_{m+\ell-2, m+\ell-j} \delta_{j+1} \right) \tilde{s}_{\ell-1}^{(m)} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{\delta_2^{\ell+1} \lambda^{(\ell+1)(\ell+2m+2)/2}} \left(\sum_{j=1}^{\ell} q_{m-1, m+\ell-j} \delta_{j+1} \right) \tilde{s}_0^{(m)}. \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que la série de terme général $\tilde{s}_\ell^{(m+1)} - \tilde{s}_\ell^{(m)}$ converge. Cette série est elle-même une somme d'un nombre fini de termes. Nous allons étudier chacun de ces termes et montrer qu'ils sont sommables. Fixons $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $j \in \{1, \dots, i\}$ et étudions le comportement asymptotique de la suite

$$z_m^{(i,j)} = \frac{1}{\delta_2^{i+1} \lambda^{(i+1)(2m+2\ell-i-2)/2}} q_{m+\ell-i-1, m+\ell-j} \delta_{j+1} \tilde{s}_{\ell-i}^{(m)}.$$

D'après la proposition 31 qui donne une estimation du comportement asymptotique de la suite $q_{m+\ell-i-1, m+\ell-j}$, nous trouvons :

$$q_{m+\ell-i-1, m+\ell-j} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\lambda - 1)^{i+1-j}}{2^{i+1-j} \times (i+j-1)!} \lambda^{m+\ell-i-1} (m+\ell-i-1)^{i+j-1}.$$

Donc lorsque m tend vers l'infini :

$$q_{m+\ell-i-1, m+\ell-j} \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(\lambda^m \cdot m^{i+j-1}) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(\lambda^m \cdot m^{i+j-1}).$$

D'autre part, on a l'estimation :

$$\frac{1}{\delta_2^{i+1} \lambda^{(i+1)(2m+2\ell-i-2)/2}} \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(i+1)m}}\right).$$

Enfin, par récurrence,

$$\tilde{s}_{\ell-i}^{(m)} \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta_2^m \lambda^{(m+\ell-i)(m+\ell-i-1)/2}}\right).$$

Ces trois dernières relations permettent de donner une estimation du comportement asymptotique de $z_m^{(i,j)}$:

$$z_m^{(i,j)} \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{m^{i+j-1}}{\lambda^{im}} \frac{1}{\lambda^{(m+\ell-i)(m+\ell-i-1)/2}} \right) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{\lambda^m} \right).$$

Donc la série de terme général $z_m^{(i,j)}$ converge et la suite $\tilde{s}_\ell^{(m)}$ converge donc vers un réel $\Phi_\ell(s)$ qui est la somme de $s_\ell^{(0)}$ et d'une combinaison linéaire de $\Phi_j(s)$. Donc la fonction $\Phi_\ell(s)$ est bien linéaire en s_1, \dots, s_ℓ et le coefficient de s_ℓ est 1. Ce qui finit la preuve du résultat.

Annexe B. Généralités sur les solutions de l'équation intégrale

B.1. Contexte général. — Reprenons les équations intégrales définies dans l'introduction. Pour $\tau \in \mathbb{R}^+$ et $\nu \in \mathbb{R}^*$, nous nous intéressons aux équations intégrales suivantes :

$$(E_{\tau,\nu}) \quad \int_0^{\tau x} f(t) dt = \nu(f(x) - f(0)) \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Remarquons tout d'abord que le paramètre ν est accessoire : si f est solution de $(E_{\tau,\nu})$ alors $g(x) = f(|\nu|x)$ est solution de $(E_{\tau,1})$ ou $(E_{\tau,-1})$. Cependant, il s'avère naturel de considérer des paramètres τ et ν entiers dans notre construction. Les fonctions continues f solutions de $(E_{\tau,\nu})$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ et nous préférons parfois la formulation équivalente :

$$(E'_{\tau,\nu}) \quad f'(x) = \frac{\tau}{\nu} f(\tau x) \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Si f est solution de $(E_{\tau,\nu})$, les dérivés successives de f sont reliées aux valeurs de f via :

$$(32) \quad f^{(n)}(x) = \frac{\tau^{n(n+1)/2}}{\nu^n} f(\tau^n x) \quad \text{pour tout réel } x \geq 0 \text{ et tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

L'équation $(E_{\tau,\nu})$ ci-dessus est un cas particulier de l'équation du pantographe dont la forme générale est :

$$f'(x) = af(\tau x) + bf(x) \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \tau \in \mathbb{R}_+ \text{ pour } x \geq 0.$$

Nous renvoyons à l'introduction de [4] pour une bibliographie récente sur le sujet.

B.2. Cas $0 < \tau < 1$. — Si $0 < \tau < 1$, alors les solutions f de $(E_{\tau,\nu})$ sont développables en séries entières car d'après (32) :

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \times K \text{ pour tout réel } r > 0, \text{ tout entier } n \text{ et tout réel } x \in [-r, r],$$

où $M = \sup\{|f(x)|; x \in [-r, r]\}$ et $K = \sup\{\nu^{-n}\tau^{n(n+1)/2}; n \in \mathbb{N}\}$. Ceci implique que f est développable en série entière en 0. Il est clair que le rayon de convergence est infini, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 et les solutions sont de la forme :

$$x \mapsto \beta \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\nu^n} \tau^{n(n+1)/2} x^n.$$

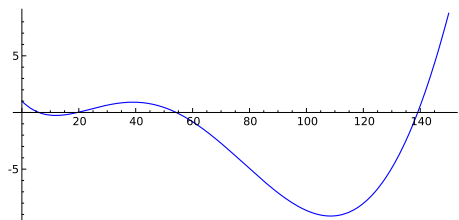


FIGURE B.1. Graphe de la solution f de $(E_{1/2,-1})$ telle que $f(0) = 1$.

B.3. Cas $\tau > 1$. — Une conséquence de la proposition suivante est que l'espace des solutions de l'équation $(E_{\tau,\nu})$ est de dimension infinie.

PROPOSITION 42. — *Soient $\tau \in]1, +\infty[$ et $f \in C^\infty([1, \tau])$ telle que pour tout entier n , on ait $f^{(n)}(1) = f^{(n)}(\tau) = 0$. Alors pour tout $\nu \in \mathbb{R}^*$, f se prolonge de manière unique en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ , non nécessairement bornée, solution de $(E_{\tau,\nu})$.*

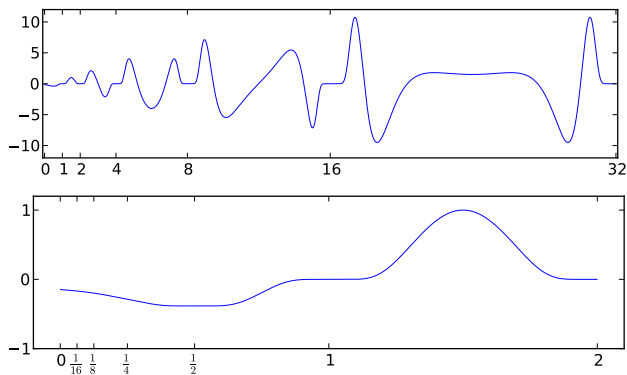


FIGURE B.2. Graphe du prolongement de la fonction $x \rightarrow e^4 \exp(-\frac{1}{(x-1)(2-x)})$ définie sur $]1, 2[$ pour $\tau = 2$ et $\nu = 1$.

Nous montrons que les solutions ne peuvent pas être périodiques et s'annulent nécessairement infiniment souvent si $\tau > 1$ et $\nu > 0$.

PROPOSITION 43. — *Soit f une solution de l'équation $(E_{\tau,\nu})$ avec $\tau \in]1, +\infty[$ et $\nu \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Si f est périodique, alors f est la fonction nulle.*
2. *Si $\nu > 0$, alors pour tout $t > \frac{\nu}{\tau(\tau-1)}$ la fonction f s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\left[\frac{t}{\nu}, \frac{t}{\nu}\tau^3\right]$.*

Si $\tau > 1$ et $\nu \neq 0$, les solutions non-nulles de $(E_{\tau,\nu})$ ne peuvent donc pas être périodiques. Nous pouvons nous demander qu'elles sont les fonctions les «plus simples» qui sont solutions. Pour cela, nous avons défini dans l'introduction (définition 5) la notion de *concaténation de fonctions*.

LEMME 44. — *Soient $f_a, f_b : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et u un mot fini ou infini sur $\{a, b\}$.*

1. *Si f_a et f_b sont continues et que $f_a(0) = f_a(\tau) = f_b(0) = f_b(\tau)$ alors f_u est continue.*
2. *Si f_u est continue et que trois des quatre mots aa , ab , ba et bb sont facteurs de u alors f_a et f_b sont continues et $f_a(0) = f_a(\tau) = f_b(0) = f_b(\tau)$. Cette condition signifie que u n'est pas de la forme $a^m b^n$, $a^m b b \dots$, $b^m a^n$ ou bien $b^m a a \dots$.*

Preuve du lemme 44. — Soient $f_a, f_b : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $u = u_0 u_1 \dots$ un mot (fini ou infini) sur l'alphabet $\{a, b\}$ et f_u la concaténation de f_a et f_b le long de u . Les conditions énoncées sur f_a et f_b sont clairement suffisantes pour la continuité de f_u .

Maintenant supposons que f_u soit continue. Si a apparaît dans u alors f_a est continue et de même pour b . De plus, pour tout $i < |u| - 1$ on a $f_{u_i}(\tau) = f_{u_{i+1}}(0)$. Ainsi si trois des quatre mots de longueur deux aa , ab , ba et bb apparaissent dans u , on en déduit que $f_a(0) = f_a(\tau) = f_b(0) = f_b(\tau)$. \square

PROPOSITION 45. — *Soient $f_a, f_b : [0, \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ tels que $f = f_u$ soit solution de $(E_{\lambda,\eta})$ avec $\eta \in \mathbb{Z}^*$ et $\lambda \geq 2$ un entier. Si f n'est pas identiquement nulle alors il existe une unique substitution uniforme σ de longueur λ telle que $\sigma(u) = u$. De plus, pour tout $x \in [0, \lambda]$:*

$$\frac{\eta}{\lambda} f'_a(x) = f'_{\sigma_a}(\lambda x) \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{\lambda} f'_b(x) = f'_{\sigma_b}(\lambda x).$$

B.4. Preuves des propositions 42, 43 et 45

Preuve de la proposition 42. — Soit f une fonction qui vérifie les hypothèses de l'énoncé. En utilisant la relation $(E'_{\tau,\nu})$, nous pouvons prolonger f sur $[\tau, \tau^2]$, puis $[\tau^2, \tau^3]$ et ainsi construire de proche en proche une fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

La condition imposée sur les dérivées garantit que la fonction est bien définie aux points $\{\tau^n; n \in \mathbb{N}\}$. Remarquons que la fonction ainsi prolongée n'est pas nécessairement bornée. Pour prolonger la fonction sur $[1/\tau, 1]$, nous utilisons la relation :

$$f(x) = f(1) - \frac{1}{\nu} \int_{\tau x}^{\tau} f(s) ds \quad \text{pour } x \in [1/\tau, 1].$$

Par construction, f est de classe C^∞ sur $[1/\tau, \tau]$. Plus généralement, si f est définie sur $[\tau^{-n}, \tau]$, elle se prolonge sur $[\tau^{-n-1}, \tau^{-n}]$ via la formule :

$$f(x) = f(\tau^{-n}) - \frac{1}{\nu} \int_{\tau x}^{\tau^{-n+1}} f(s) ds.$$

Aux points $\{\tau^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$, la fonction ainsi prolongée est bien lisse (les formules qui définissent f coïncident à gauche et à droite de ces points). Par contre, il n'est pas immédiat de voir que la fonction ainsi construite se prolonge en 0. Introduisons pour $n \geq 0$ les quantités :

$$u_n = \max_{x \in [\tau^{-n}, \tau^{-n+1}]} |f(x)| \quad \text{et} \quad v_n = \max_{x, y \in [\tau^{-n}, \tau^{-n+1}]} |f(x) - f(y)|.$$

Nous allons montrer que v_n est le terme général d'une série convergente. Par définition et l'équation fonctionnelle $(E_{\tau, \nu})$, ces suites vérifient pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} v_n &\leq \frac{1}{|\nu|} \int_{\tau^{-n+1}}^{\tau^{-n+2}} |f(s)| ds \leq \frac{1}{|\nu|} \tau^{-n+1} (\tau - 1) u_{n-1} \leq \frac{1}{|\nu|} \tau^{-n+2} u_{n-1}, \\ u_n &\leq u_{n-1} + v_n, \\ u_{n-1} &\leq u_n + v_{n-1}. \end{aligned}$$

En particulier

$$|u_n - u_{n-1}| \leq |\nu|^{-1} \tau^{-n+2} \max(u_{n-1}, u_{n-2}).$$

Nous pouvons alors conclure en utilisant le résultat du lemme 39. Remarquons enfin que cette construction définie de manière unique f sur chaque intervalle $[\tau^k, \tau^{k+1}]$ pour $k \in \mathbb{Z}$. \square

Preuve de la proposition 43. — Nous fixons pour toute cette preuve $\tau \in]1, +\infty[$.

Soient f une solution périodique et T sa plus petite période :

$$T = \inf\{t > 0; \forall x > 0, f(x) = f(x+t)\}.$$

Alors pour tout entier n :

$$n \int_0^T f(t) dt = \int_0^{nT} f(t) dt = \nu \left(f\left(\frac{nT}{\tau}\right) - f(0) \right).$$

Comme f est bornée car périodique, en passant à la limite sur n , on obtient $\int_0^T f(t) dt = 0$.

Maintenant, si x est un réel positif, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\nu} \int_0^{\tau x} f(t) dt + f(0) = \frac{1}{\nu} \int_T^{\tau x+T} f(t) dt + \frac{1}{\nu} \int_0^T f(s) ds + f(0) \\ &= \frac{1}{\nu} \int_0^{\tau x+T} f(s) ds + f(0) = f\left(x + \frac{T}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Comme $\tau > 1$, T/τ est une période inférieure à T , ce qui n'est possible que si $T = 0$.

Nous démontrons maintenant la deuxième partie de la proposition, à savoir l'annulation de f . Supposons donc que ν est strictement positif, et quitte à remplacer $f(x)$ par $f(\nu x)$, nous fixerons même sa valeur égale à 1.

L'équation $(E_{\tau,1})$ permet d'écrire pour tout couple de réels (x, y) :

$$f(y) - f(x) = \int_{\tau x}^{\tau y} f(t) dt.$$

Soit $t \geq 1/(\tau(\tau - 1))$ tel que $f(t) \neq 0$. Quitte à changer f par $-f$, nous considérerons que f est strictement positive sur $]t, +\infty[$. Supposons que f ne s'annule pas sur $[t, (\tau^3 + \varepsilon)t]$ pour $\varepsilon > 0$. L'équation $(E'_{\tau,1})$ montre que f est strictement croissante sur $[t, (\tau^2 + \varepsilon/\tau)t]$. Nous obtenons alors que pour tout réel $x \in [\tau t, (\tau + \varepsilon/\tau^2)t]$:

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x) - f(t) && \text{car } f(t) > 0 \\ &= \int_{\tau t}^{\tau x} f(s) ds && \text{par l'équation fonctionnelle} \\ &\geq \int_x^{\tau x} f(s) ds && \text{car } f \geq 0 \text{ sur } [\tau t, x] \subset [t, (\tau^2 + \varepsilon/\tau)t] \\ &> (\tau x - x)f(x) && \text{car } f \text{ croissante sur } [x, \tau x] \subset [t, (\tau^3 + \varepsilon)t]. \end{aligned}$$

Ce qui amène à une contradiction car $x \geq \tau t \geq 1/(\tau - 1)$. Ainsi f s'annule en au moins un point de l'intervalle $[t, (\tau^3 + \varepsilon)t]$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe un point de $[t, \tau^3 t]$ en lequel f s'annule. \square

Preuve de la proposition 45. — Nous avons vu dans la proposition 43 que la solution f ne peut pas être périodique. Ainsi $f_a \neq f_b$. De plus, par le lemme 44 et le fait que dans un mot non périodique au moins 3 des facteurs de longueur deux apparaissent, on obtient que $f_a(0) = f_a(\lambda) = f_b(0) = f_b(\lambda)$. Comme $f_a(0) = f_b(0)$ et $f_a \neq f_b$, nous avons également $f'_a \neq f'_b$.

D'après la relation $(E'_{\tau,\nu})$, $f'(t) = \frac{\lambda}{\eta} f(\lambda t)$. Pour tout $k \geq 0$ entier et tout $x \in [0, \lambda]$, nous avons :

$$f(\lambda^2 k + \lambda x) = \frac{\eta}{\lambda} f'(\lambda k + x) = \begin{cases} \frac{\eta}{\lambda} f'_a(x) & \text{si } u_k = a \\ \frac{\eta}{\lambda} f'_b(x) & \text{si } u_k = b. \end{cases}$$

Ainsi pour tout entier $k \geq 0$, les valeurs de f sur le segment $[\lambda^2 k, \lambda^2 k + \lambda^2]$ ne dépendent que de u_k . Or f est la concaténation de $f_{u_{\lambda k}} f_{u_{\lambda k+1}} \cdots f_{u_{\lambda(k+1)-1}}$ sur $[\lambda^2 k, \lambda^2 k + \lambda^2]$. Donc pour tout entier k , u_k détermine le mot $u_{\lambda k} u_{\lambda k+1} \cdots u_{\lambda(k+1)-1}$.

Comme f_a est distinct de f_b , et en considérant des positions k_a et k_b telles que $u_{k_a} = a$ et $u_{k_b} = b$, on déduit qu'il existe deux mots finis de longueur λ :

$$\sigma_a = u_{\lambda k_a} \cdots u_{\lambda(k_a+1)-1} \quad \text{et} \quad \sigma_b = u_{\lambda k_b} \cdots u_{\lambda(k_b+1)-1},$$

uniquement déterminés et tels que l'on retrouve bien la relation annoncée :

$$\frac{\eta}{\lambda} f'_a(x) = f_{\sigma_a}(\lambda x) \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{\lambda} f'_b(x) = f_{\sigma_b}(\lambda x).$$

Le mot u est donc point fixe de la substitution uniforme $a \mapsto \sigma_a$ et $b \mapsto \sigma_b$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ADAMCZEWSKI – “Symbolic discrepancy and self-similar dynamics”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 2201–2234.
- [2] J.-F. BERTAZZON – “Resolution of an integral equation with the Thue-Morse sequence”, *Indag. Math. (N.S.)* **23** (2012), p. 327–336.
- [3] F. BLANCHARD, F. DURAND & A. MAASS – “Constant-length substitutions and countable scrambled sets”, *Nonlinearity* **17** (2004), p. 817–833.
- [4] L. BOGACHEV, G. DERFEL, S. MOLCHANOV & J. OCKENDON – “On bounded solutions of the balanced generalized pantograph equation”, in *Topics in stochastic analysis and nonparametric estimation*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 145, Springer, New York, 2008, p. 29–49.
- [5] A. I. BUFETOV – “Limit theorems for translation flows”, *Ann. of Math.* **179** (2014), p. 431–499.
- [6] S. DE BIÈVRE & G. FORNI – “On the growth of averaged Weyl sums for rigid rotations”, *Studia Math.* **130** (1998), p. 199–212.
- [7] F. M. DEKKING – “The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **41** (1977/78), p. 221–239.
- [8] F. DURAND, B. HOST & C. SKAU – “Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups”, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), p. 953–993.
- [9] J. FABIUS – “A probabilistic example of a nowhere analytic C^∞ -function”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **5** (1966), p. 173–174.
- [10] N. P. FOGG – *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Math., vol. 1794, Springer, Berlin, 2002.
- [11] G. FORNI – “Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus”, *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 1–103.

- [12] M.-R. HERMAN – “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”, *Publ. Math. IHÉS* **49** (1979), p. 5–233.
- [13] P. KÛRKA – *Topological and symbolic dynamics*, Cours spécialisés, vol. 11, Soc. Math. France, Paris, 2003.
- [14] B. MOSSÉ – “Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques”, *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), p. 329–346.
- [15] C. G. PINNER – “On the one-sided boundedness of sums of fractional parts $(\{n\alpha + \gamma\} - \frac{1}{2})$ ”, *J. Number Theory* **81** (2000), p. 170–204.
- [16] T. YONEDA – “On the functional-differential equation of advanced type $f'(x) = af(2x)$ with $f(0) = 0$ ”, *J. Math. Anal. Appl.* **317** (2006), p. 320–330.
- [17] ———, “On the functional-differential equation of advanced type $f'(x) = af(\lambda x)$, $\lambda > 1$, with $f(0) = 0$ ”, *J. Math. Anal. Appl.* **332** (2007), p. 487–496.
- [18] A. ZORICH – “Deviation for interval exchange transformations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 1477–1499.