Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURES AU VOISINAGE DE LA MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

Erwann Delay

Tome 145
Fascicule 3

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 411-420

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 145, septembre 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (3), 2017, p. 411-420

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURES AU VOISINAGE DE LA MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

PAR ERWANN DELAY

RÉSUMÉ. — Nous montrons que certains opérateurs affines en la courbure de Ricci sont localement inversibles, dans des espaces de Sobolev à poids, au voisinage de la métrique euclidienne.

ABSTRACT (*Inversion of some curvature operators near the euclidiean metric*). — We show that some operators, affine relatively to the Ricci curvature, are locally invertible, in some weithted sobolev spaces, near the euclidiean metric.

1. Introduction

Sur une variété Riemannienne (M, g), considérons $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et $R(g)$ sa courbure scalaire. Parmi les (champs de) 2-tenseurs symétriques géométriques naturels que l'on peut construire, les plus simples sont ceux qui seront « affines » en la courbure de Ricci, autrement dit, de la forme

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

où κ et Λ sont des constantes. Ainsi, si $\kappa = \Lambda = 0$ on retrouve la courbure de Ricci, si $\kappa = -\frac{1}{2}$ le tenseur d'Einstein (avec constante cosmologique Λ), enfin si $\kappa = -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda = 0$ le tenseur de Schouten. Rappelons que ce tenseur est

Texte reçu le 5 mars 2015, modifié le 7 mars 2016, accepté le 26 mai 2016.

ERWANN DELAY, Labo. de Math. d'Avignon, Fac. des Sciences, Campus Jean-Henri Fabre, 301 rue Baruch de Spinoza, F-84916 Avignon, France

Classification mathématique par sujets (2010). — 53C21, 53A45, 58J05, 58J37, 35J62.

Mots clefs. — Courbure de Ricci, 2-tenseurs symétriques, EDP elliptique quasi-linéaire, espaces de Sobolev à poids.

 0037-9484/2017/411/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2742

géométriquement naturel dans le sens où pour tout difféomorphisme φ assez régulier,

$$\varphi^* \operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ein}(\varphi^* g).$$

Nous nous posons ici le problème de l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un champ de tenseurs symétriques sur M, on cherche g métrique riemannienne telle

$$\operatorname{Ein}(g) = E. \tag{1.1}$$

On doit ainsi résoudre un système quasi-linéaire particulièrement complexe. Le cas de la courbure de Ricci prescrite remonte aux années 80. DeTurck [10], en 1981, a tout d'abord montré un résultat d'existence locale au voisinage d'un point p (voir aussi [9]).

Puis il y a eu des résultats *globaux* : [11] sur le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Hamilton [14], a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard. Nous avions ensuite prouvé un résultat analogue sur l'espace hyperbolique réel [6], et complexe [8], au voisinage de la métrique canonique.

Ce type d'inversion locale de l'opérateur de Ricci a été aussi adapté à certaines variétés d'Einstein [12], [7], [5].

Notons qu'il existe aussi des résultats d'obstruction sur l'inversion de la courbure de Ricci [13], [2], [14], [4], [6].

Le but de cet article est de prouver un résultat d'existence locale sur $\mathbb{R}^n$ près de la métrique euclidienne δ. Nous travaillons pour cela dans des espaces de Sobolev à poids $H^{s,t}$ de fonctions (ou champs de tenseurs) u telles que $\langle x\rangle^t u$ est dans l'espace de Sobolev classique H^s (voir section 3 pour une définition plus précise).

THÉORÈME 1.1. — *Soient $s, t, \kappa, \Lambda \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$, $\kappa > -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda > 0$. Alors pour tout $e \in H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ proche de zéro, il existe un unique h proche de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\operatorname{Ein}(\delta + h) = \operatorname{Ein}(\delta) + e.$$

De plus l'application $e \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Hilbert correspondants.

Pour un opérateur d'ordre deux, il peut être surprenant de voir que la régularité de notre solution n'a pas deux points de plus que la donnée. On peut se convaincre que la régularité est optimale en transposant l'équation par un difféomorphisme peu régulier.

Cette inversion nous permet ensuite, en section 5 de prouver que l'image de certains opérateurs de type Riemann-Christoffel sont des sous variétés dans des espaces de Fréchet à poids.

Remerciements. — Je remercie Philippe Delanoë de m'avoir signalé en 1994 l'erreur malheureuse de [15] qui a motivée ce travail. Ce projet est en partie financé par les ANR SIMI-1-003-01 et ANR-10-BLAN 0105.

2. Définitions, notations et conventions

Pour une métrique riemannienne g, nous noterons ∇ sa connexion de Levi-Civita , par $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et par $\mathrm{Riem}(g)$ sa courbure de Riemann sectionnelle.

Soit $\mathcal{T}_p^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q. Lorsque $p = 2$ et $q = 0$, on notera $\mathcal{S}_2$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques, qui se décompose en $\mathcal{G} \oplus \mathring{\mathcal{S}}_2$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des tenseurs δ-conformes et $\mathring{\mathcal{S}}_2$ l'ensemble des tenseurs sans trace (relativement à δ). On utilisera la convention de sommation d'Einstein (les indices correspondants vont de 1 à n), et nous utiliserons g_{ij} et son inverse g^{ij} pour monter ou descendre les indices.

Le laplacien (brut) est défini par

$$\triangle = -\operatorname{Tr}_g \nabla^2 = \nabla^* \nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel L^2 de ∇. Pour u un 2-tenseur covariant symétrique, on définit sa divergence par

$$(\mathrm{div} u)_i = -\nabla^j u_{ji}.$$

Pour une 1-forme ω sur M, on définit la partie symétrique de ses dérivées covariantes :

$$(\mathcal{L}\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i),$$

(notons que $\mathcal{L}^* = \mathrm{div}$). On introduit enfin l'opérateur de Bianchi des 2-tenseurs symétriques dans les 1-formes :

$$B_g(h) = \mathrm{div}_g h + \frac{1}{2} d(\operatorname{Tr}_g h).$$

3. Espaces à poids et isomorphismes

Les espaces à poids que nous utiliserons ici ne sont pas les espaces classiques utilisés dans le contexte asymptotiquement euclidien de la relativité générale (voir [15] par exemple).Ils sont plutôt utilisés en théorie du scattering comme dans les travaux de S. Agmon [1] ou de R. Melrose [16] (voir aussi son cours [17] section 6, ou [18] p241). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $s, t \in \mathbb{R}$, on introduit les espaces à poids

$$H^{s,t}(\mathbb{R}^n) = \langle x \rangle^{-t} H^s(\mathbb{R}^n) \ , \quad \|u\|_{s,t} := \|\langle x \rangle^t u\|_s,$$

où $(H^s(\mathbb{R}^n), \|.\|_s)$ est l'espace de Sobolev classique. Ces espaces ont beaucoup de bonnes propriétés comme : $\forall s,t \in \mathbb{R}$, les applications suivantes sont continues

$$\begin{aligned} \forall s' \leq s,\ \ \forall t' \leq t, \quad H^{s,t}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow H^{s',t'}(\mathbb{R}^n), \\ \partial_{x_j} : H^{s,t}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^{s-1,t}(\mathbb{R}^n), \\ \times x_j : H^{s,t}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^{s,t-1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

La transformée de Fourier est un isomorphisme de $H^{s,t}(\mathbb{R}^n)$ sur $H^{t,s}(\mathbb{R}^n)$. Le dual de $H^{s,t}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $H^{-s,-t}(\mathbb{R}^n)$. L'injection de Sobolev classique nous donne aussi immédiatement pour $k \in \mathbb{N}$

$$s > \frac{n}{2} + k \ \Rightarrow \ \ H^{s,t}(\mathbb{R}^n) \subset \langle x\rangle^{-t} C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n),$$

où $C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions C^k sur $\mathbb{R}^n$ dont les dérivées d'ordre $\leq k$ tendent vers zéro à l'infini.

Proposition 3.1. — *Pour $s,t \in \mathbb{R}$ et $C > 0$ une constante, l'opérateur*

$$\Delta + C : H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} H^{s,t}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Par transformée de Fourier, il suffit de remarquer que

$$\times(|\xi|^2 + C) : H^{t,s+2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{t,s}(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme. □

Nous aurons aussi besoin du

Lemme 3.2. — *Soient $s > \frac{n}{2}$ et $t \geq 0$. Il existe une constante $C_{s,t}$ telle que si $u, v \in H^{s,t}$ alors $uv \in H^{s,t}$avec*

$$\|uv\|_{s,t} \leq C_{s,t} \|u\|_{s,t} \|v\|_{s,t}.$$

Démonstration. — Le résultat est connu dans le cas $t = 0$ pour une constante C_s. On a ainsi

$$\|uv\|_{s,2t} = \|\langle x\rangle^{2t} uv\|_s \leq C_s \|\langle x\rangle^t u\|_s \|\langle x\rangle^t v\|_s = C_s \|u\|_{s,t} \|v\|_{s,t}.$$

Rappelons enfin que si $t \geq 0$, l'inclusion $H^{s,2t} \subset H^{s,t}$ et continue. □

4. Preuve du théorème principal

Il est maintenant bien connu que l'équation que nous voulons résoudre (1.1) n'est pas elliptique dû à l'invariance de la courbure par difféomorphisme. Nous allons modifier cette équation en s'inspirant de la méthode de DeTurck. On y ajoute donc un terme jauge de telle sorte que le cette nouvelle équation devienne elliptique, tout en faisant en sorte que ses solutions soient encore solutions de l'équation de départ.

Tout d'abord comme

$$\operatorname{Tr}_g \operatorname{Ein}(g) = (1 + n\kappa) R(g) + n\Lambda,$$

l'équation (1.1) est équivalente à

$$\operatorname{Ric}(g) = E - \frac{\kappa \operatorname{Tr}_g E + \Lambda}{1 + n\kappa} g.$$

Pour toute métrique g, $B_g(\operatorname{Ric}(g)) = 0$ par l'identité de Bianchi. Nous définissons donc

$$\mathcal{B}_g(E) = \operatorname{div}_g E + \frac{2\kappa + 1}{2(1 + \kappa n)} d \operatorname{Tr}_g E = B_g(E) - \frac{(n-2)\kappa}{2(1 + \kappa n)} d \operatorname{Tr}_g E,$$

de sorte que l'identité de Bianchi se traduise ici par

$$\mathcal{B}_g(\operatorname{Ein}(g)) = 0.$$

Afin de construire notre nouvelle équation, rappelons quelques différentielles d'opérateurs. On a d'une part (voir [3] par exemple)

$$D \operatorname{Ric}(\delta) h = \frac{1}{2} \Delta h - \mathcal{L}_\delta B_\delta(h).$$

D'autre part, compte tenu de la différentielle de $B_g(E)$ relativement à la métrique (voir [7] par exemple), on trouve

$$D[\mathcal{B}_{(.)}(E)](\delta) h = -E B_\delta(h) + \frac{(n-2)\kappa}{2(1 + \kappa n)} d\langle E, h \rangle + T(E, h),$$

où E est identifié à l'endomorphisme de T^*M correspondant et

$$T(E, h)_j = \frac{1}{2} (\partial_k E_{jl} + \partial_l E_{kj} - \partial_j E_{kl}) h^{kl},$$

en particulier $T(E, h) = 0$ si E est proportionnel à δ. On définit, pour l'instant formellement, pour $\kappa \neq -1/n$, $\Lambda \neq 0$, h et e voisins de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$:

$$\mathcal{F}(h, e) := \operatorname{Ric}(\delta + h) - E + \frac{\kappa \operatorname{Tr}_{\delta + h} E + \Lambda}{1 + \kappa n} (\delta + h) - \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_\delta \mathcal{B}_{\delta + h}(E),$$

où $E = \operatorname{Ein}(\delta) + e = \Lambda \delta + e$.

Proposition 4.1. — *Pour $\kappa \neq -1/n$, $\Lambda \neq 0$, $s > \frac{n}{2}$ et $t \geq 0$ l'application*

$$\mathcal{F} : H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) \times H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) \longrightarrow H^{s,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2),$$

est bien définie et lisse au voisinage de zéro.

Démonstration. — La preuve de cette proposition est renvoyée en appendice, elle utilise essentiellement le fait que sous ces hypothèses, l'espace $H^{s,t}$ est une algèbre. □

Proposition 4.2. — *Soient $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$, $\Lambda > 0$ et $k > -\frac{1}{2(n-1)}$. Pour tout e assez petit dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$, il existe un unique h proche de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ tel que $\mathcal{F}(h, e) = 0$, de plus l'application $e \mapsto h$ est lisse entre les espaces de Hilbert correspondants.*

Démonstration. — On a déjà $\mathcal{F}(0, 0) = 0$, et la différentielle de $\mathcal{F}$ relativement à la première variable est

$$D_h\mathcal{F}(0, 0)h = \frac{1}{2}\Delta h + \Lambda h - \frac{\kappa\Lambda}{1 + \kappa n} \operatorname{Tr}_\delta h\, \delta - \frac{(n-2)\kappa}{2(1 + \kappa n)} \partial\partial \operatorname{Tr}_\delta h.$$

On remarque que lorsque $\kappa \neq 0$, $D_h\mathcal{F}(0, 0)$ ne préserve pas le scindage $\mathcal{G} \oplus \mathring{S}_2$. En effet dans la direction conforme $h = u\delta$ on trouve

$$D_h\mathcal{F}(0, 0)(u\delta) = \frac{1}{2(1 + \kappa n)}[(1 + 2(n-1)\kappa)\Delta u + 2\Lambda u]\delta - \frac{(n-2)n\kappa}{2(1 + \kappa n)} \mathring{\operatorname{Hess}}\, u,$$

où $\mathring{\operatorname{Hess}}\, u$ est la partie sans trace de la hessienne de u. En revanche, dans la direction $h = \mathring{h}$ de trace nulle, on a

$$D_h\mathcal{F}(0, 0)\mathring{h} = \frac{1}{2}(\Delta + 2\Lambda)\mathring{h}.$$

Quoiqu'il en soit, compte tenu de la proposition 3.1, si $\Lambda > 0$ et $\kappa > -\frac{1}{2(n-1)}$, l'opérateur $D_h\mathcal{F}(0, 0)$ est un isomorphisme de $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ dans $H^{s,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$. Le théorème des fonctions implicite permet alors de conclure. □

Proposition 4.3. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, quitte à réduire les voisinages de zéro, h est solution de*

$$\operatorname{Ein}(\delta + h) = E.$$

Démonstration. — On applique $B_{\delta+h}$ à l'équation $\mathcal{F}(h, e) = 0$, ainsi

$$B_{\delta+h}\mathcal{F}(h, e) = -\mathcal{B}_{\delta+h}(E) - \frac{1}{\Lambda} B_{\delta+h}\mathcal{L}_\delta\mathcal{B}_{\delta+h}(E) = 0.$$

On pose $\omega = \frac{1}{\Lambda}\mathcal{B}_{\delta+h}(E) \in H^{s+1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$ (voir appendice) alors

$$P_{\delta+h}\omega := B_{\delta+h}\mathcal{L}_\delta\omega + \Lambda\omega = 0.$$

Or par la proposition 3.1, on a l'isomorphisme

$$P_\delta = \frac{1}{2}(\Delta + 2\Lambda) : H^{s+1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1) \longrightarrow H^{s-1,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1),$$

ainsi l'opérateur $P_{\delta+h}$ reste injectif dans le même espace si h est assez petit dans $H^{s+2,t} \subset H^{s,0}$. On obtient finalement $\omega = 0$ □

5. Image d'opérateurs de courbures de type Riemann-Christoffel

Nous voudrions, tout comme dans [6], montrer que l'image de certain opérateurs de type Riemann-Christoffel, sont des sous variétés dans C^∞, au voisinage de la métrique euclidienne δ. Nous cherchons donc tout d'abord un tenseur $\mathcal{E}in$ qui soit 4 fois covariant, ayant les mêmes propriétés algébriques que le tenseur de Riemann et affine en la courbure, on pose donc

$$\mathcal{E}in(g) = \mathrm{Riem}(g) + g \owedge (a\,\mathrm{Ric}(g) + bR(g)g + cg),$$

où $\owedge$ est le produit de Kulkarni-Nomizu ([3] p. 47). Comme nous voulons que $\mathrm{Tr}_g\, \mathcal{E}in(g)$ soit proportionnelle à $\mathrm{Ein}(g)$, cela nous impose

$$c = \frac{1 + (n-2)a}{2(n-1)}\Lambda, \quad b = \frac{\kappa[1 + a(n-2)] - a}{2(n-1)}.$$

On a alors

$$\mathrm{Tr}_g\, \mathcal{E}in(g) = [a(n-2) + 1]\,\mathrm{Ein}(g).$$

Nous définirons la version de type Riemann-Christoffel de $\mathcal{E}in(g)$ par

$$[g^{-1}\mathcal{E}in(g)]^i_{klm} := g^{ij}\mathcal{E}in(g)_{jklm}.$$

Considérons $\mathcal{R}^1_3$, le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiants

$$\tau^i_{ilm} = 0,\ \tau^i_{klm} = -\tau^i_{kml},\ \tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk} = 0.$$

On définit l'espace de Fréchet

$$C^{\infty,t} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^{k,t},$$

munit de la famille de semi-normes $\{\|.\|_{k,t}\}_{k\in\mathbb{N}}$. On procède alors de façons similaire à [6] pour prouver que

Théorème 5.1. — *Sous les conditions du théorème 1.1, l'image de l'application*

$$\begin{array}{lcl} C^{\infty,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2) & \longrightarrow & C^{\infty,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^1_3) \\ h & \mapsto & (\delta + h)^{-1}\mathcal{E}in(\delta + h) - (\delta)^{-1}\mathcal{E}in(\delta) \end{array}$$

est une sous-variété lisse au voisinage de zéro.

6. Appendice

Nous justifions ici la proposition 4.1 par une preuve relativement formelle. Nous renvoyons le lecteur encore sceptique à [6] où une preuve similaire est particulièrement détaillée.

Rappelons que la courbure de Ricci s'exprime en coordonnées locales par

$$\mathrm{Ric}(g)_{jk} = \partial_l \Gamma^l_{jk} - \partial_k \Gamma^l_{jl} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^l_{pl} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^l_{pk},$$

où

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}).$$

Nous écrirons donc abusivement

$$\mathrm{Ric}(g) = \partial\Gamma + \Gamma\Gamma\ , \quad \Gamma = g^{-1}\partial g.$$

Ici nous avons $g = \delta + h$ avec h petit dans $H^{s+2,t}$, $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$. On a alors

$$g^{-1} = \delta^{-1} + \widetilde{h}\ , \ \ \widetilde{h} \in H^{s+2,t},$$

avec par inégalité triangulaire et par le lemme 3.2

$$\|\widetilde{h}\|_{s+2,t} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} C^k_{s+2,t}\|h\|^{k+1}_{s+2,t} = \frac{\|h\|_{s+2,t}}{1 - C_{s+2,t}\|h\|_{s+2,t}}.$$

Pour $\|h\|_{s+2,t} \leq \frac{1}{2C_{s+2,t}}$, ce qu'on suppose désormais, on a

$$\|\widetilde{h}\|_{s+2,t} \leq 2\|h\|_{s+2,t}.$$

On obtient alors, en utilisant encore le lemme 3.2, et en omettant dorénavant les constantes

$$\Gamma = (\delta^{-1} + \widetilde{h})\partial h \in H^{s+1,t}\ , \ \ \|\Gamma\|_{s+1,t} \leq \|h\|_{s+2,t},$$

et

$$\partial\Gamma \in H^{s,t}\ , \ \ \|\partial\Gamma\|_{s,t} \leq \|\Gamma\|_{s+1,t} \leq \|h\|_{s+2,t},$$

d'où, toujours par le lemme 3.2,

$$\mathrm{Ric}(g) \in H^{s,t}\ , \ \ \|\mathrm{Ric}(g)\|_{s,t} \leq \|h\|_{s+2,t}.$$

Étudions maintenant l'opérateur de Bianchi

$$\mathcal{B}_g(E) = \mathrm{div}_g\, E + \frac{2\kappa + 1}{2(1 + \kappa n)} d\,\mathrm{Tr}_g\, E,$$

que nous écrirons encore abusivement

$$\mathcal{B}_g(E) = g^{-1}(\partial E + \Gamma E) + \partial(g^{-1}E).$$

Compte tenu des calculs précédent et du fait que $E = \Lambda\delta + e$, on a

$$\mathcal{B}_g(E) = (\delta^{-1} + \widetilde{h})[\partial e + \Gamma(\Lambda\delta + e)] + \partial[\delta^{-1}e + \widetilde{h}(\Lambda\delta + e)].$$

On estime alors comme précédemment

$$\mathcal{B}_g(E) \in H^{s+1,t}\ , \ \ \|\mathcal{B}_g(E)\|_{s+1,t} \leq (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}),$$

et

$$\mathcal{L}_\delta\mathcal{B}_g(E) \in H^{s,t}\ ,\ \ \|\mathcal{L}_\delta\mathcal{B}_g(E)\|_{s,t} \leq \|\mathcal{B}_g(E)\|_{s+1,t} \leq (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}).$$

Il reste a estimer le terme d'ordre zéro :

$$Z := \frac{\kappa\,\mathrm{Tr}_{\delta+h}\,E + \Lambda}{1+\kappa n}(\delta + h) - E.$$

On écrit encore formellement, en se souvenant ici que le premier « produit » est une trace,

$$\begin{aligned}(1+n\kappa)Z &= [\kappa(\delta^{-1}+\widetilde{h})(\Lambda\delta + e) + \Lambda](\delta+h) - (1+n\kappa)(\Lambda\delta+e)\\ &= [\kappa\delta^{-1}e + \kappa\widetilde{h}(\Lambda\delta+e) + (1+n\kappa)\Lambda](\delta+h) - (1+n\kappa)(\Lambda\delta+e).\end{aligned}$$

En développant, on remarque que le terme constant est nul et que l'on peut estimer comme auparavant, pour $k \neq -1/n$,

$$Z \in H^{s,t}\ ,\ \ \|Z\|_{s,t} \leq \|Z\|_{s+2,t} \leq (\|h\|_{s+2,t} + \|e\|_{s+2,t}).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon – « Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **2** (1975), p. 151–218.

[2] A. Baldes – « Nonexistence of Riemannian metrics with prescribed Ricci tensor », in *Nonlinear problems in geometry (Mobile, Ala., 1985)*, Contemp. Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 1–8.

[3] A. L. Besse – *Einstein manifolds*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 10, Springer, Berlin, 1987.

[4] P. Delanoë – « Obstruction to prescribed positive Ricci curvature », *Pacific J. Math.* **148** (1991), p. 11–15.

[5] ______, « Local solvability of elliptic, and curvature, equations on compact manifolds », *J. reine angew. Math.* **558** (2003), p. 23–45.

[6] E. Delay – « Étude locale d'opérateurs de courbure sur l'espace hyperbolique », *J. Math. Pures Appl.* **78** (1999), p. 389–430.

[7] ______, « Studies of some curvature operators in a neighborhood of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold », *Adv. Math.* **168** (2002), p. 213–224.

[8] E. Delay & M. Herzlich – « Ricci curvature in the neighborhood of rank-one symmetric spaces », *J. Geom. Anal.* **11** (2001), p. 573–588.

[9] D. DeTurck & H. Goldschmidt – « Metrics with prescribed Ricci curvature of constant rank. I. The integrable case », *Adv. Math.* **145** (1999), p. 1–97.

[10] D. M. DeTurck – « Existence of metrics with prescribed Ricci curvature : local theory », *Invent. math.* **65** (1981/82), p. 179–207.

[11] ———, « Metrics with prescribed Ricci curvature », in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, p. 525–537.

[12] ———, « Prescribing positive Ricci curvature on compact manifolds », *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **43** (1985), p. 357–369.

[13] D. M. DeTurck & N. Koiso – « Uniqueness and nonexistence of metrics with prescribed Ricci curvature », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), p. 351–359.

[14] R. Hamilton – « The Ricci curvature equation », in *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 2, Springer, New York, 1984, p. 47–72.

[15] A. Jeune – « Solutions globales de l'équation de Ricci sur $\mathbf{R}^n$ dans les espaces de Sobolev à poids », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), p. 361–364.

[16] R. B. Melrose – « Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidian spaces », in *Spectral and scattering theory (Sanda, 1992)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 161, Dekker, New York, 1994, p. 85–130.

[17] ———, « Graduate Analysis Elliptic regularity and Scattering », Lecture 18.156, Massachusetts Institute of Technology, Spring 2008, `http://math.mit.edu/~rbm/18.156-S08/Lecture-Notes.pdf`, 3000effacer.

[18] E. Schrohe – « Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces », *Ann. Global Anal. Geom.* **10** (1992), p. 237–254.