Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR DES CORPS LOCAUX SUPÉRIEURS II

Diego Izquierdo

Tome 145
Fascicule 2

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 267-293

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 145, juin 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)
Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (2), 2017, p. 267-293

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR DES CORPS LOCAUX SUPÉRIEURS II

PAR DIEGO IZQUIERDO

RÉSUMÉ. — Soit K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse X sur un corps local supérieur k. On définit les groupes de Tate-Shafarevich d'un schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de K provenant d'un point fermé de X. On applique certains théorèmes de dualité arithmétique à l'approximation faible pour les tores sur K et à l'étude du principe local-global pour les K-torseurs sous un groupe linéaire connexe.

ABSTRACT (*Local-global principle for function fields over higher-dimensional fields II*). — Let K be the function field of a smooth projective curve X over a higher-dimensional local field k. We define Tate-Shafarevich groups of a commutative group scheme via cohomology classes locally trivial at each completion of K coming from a closed point of X. We apply some arithmetic duality theorems to the weak approximation for tori over K and to the study of the obstruction to the local-global principle for K-torsors under a connected linear algebraic group.

Ces dernières années, nous avons été témoins d'un important regain d'intérêt pour les questions de type principe local-global sur des corps autres que les corps de nombres ou les corps de fonctions de courbes sur des corps finis. Deux principales techniques ont été mises au point pour étudier ces problèmes : la méthode du patching développée par Harbater, Hartmann et Krashen et utilisée par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps complet de valuation discrète ([18]), et les méthodes cohomologiques développées par Harari, Scheiderer et Szamuely pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps p-adique ([16]). Cette dernière

Texte reçu le 12 janvier 2015, modifié le 14 septembre 2016, accepté le 14 septembre 2016.

DIEGO IZQUIERDO, Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University, 45, Rue d'Ulm - 75005 Paris - France •
E-mail : diego.izquierdo@ens.fr

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2017/267/$ 5.00
doi:10.24033/bsmf.2737

méthode a aussi permis à Colliot-Thélène et Harari d'étudier le cas des corps de fonctions de courbes sur $\mathbb{C}((t))$ ([9]). Dans [21] les théorèmes de dualité arithmétique qui avaient été obtenus précédemment dans [16] et [9] ont été généralisés aux corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs. De nouvelles difficultés, liées à la grande dimension cohomologique et à la non finitude de certains groupes de cohomologie, avaient alors été mises en évidence. Comme pour [19], le but du présent article est de présenter certains aspects du principe local-global sur de tels corps.

1. Introduction

1.1. Organisation de l'article et énoncés des théorèmes principaux. — Tout comme [19], ce texte fait suite à l'article [21] (et à sa version plus complète qui fait l'objet du chapitre 1 de [20]) où sont établis des théorèmes de dualité arithmétique pour les modules finis, les tores, les groupes de type multiplicatif et même les complexes à deux termes de tores sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur.

Commençons par rappeler le cadre de l'article [21]. On se donne un entier $d \geq 0$ et un corps d-local k, c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local, les corps 0-locaux étant par définition les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. On suppose que le corps 1-local correspondant est de caractéristique 0, le cas où il est de caractéristique positive posant de sérieuses difficultés même pour établir une dualité locale (voir le paragraphe 0.5 de [21]). Soit X une courbe projective lisse sur k. Soient $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points fermés, K son corps des fonctions et T un K-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de T, $\check{T}$ le module des cocaractères de T et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$, où $\mathbb{Z}(d)$ est le d-ième complexe motivique. On note aussi $\text{Ш}^r(T)$ (resp. $\text{Ш}^r(\tilde{T})$) est le sous-groupe de $H^r(K,T)$ (resp. $H^r(K,\tilde{T})$) constitué des éléments dont la restriction à $H^r(K_v,T)$ (resp. $H^r(K_v,\tilde{T})$) est nulle pour chaque $v \in X^{(1)}$.

Ce texte est constitué de deux parties. Dans la première, nous appliquons les théorèmes de dualité arithmétique pour les tores établis dans [21] à l'étude de l'approximation faible pour les tores (on se reportera à 2.1 pour les définitions) :

Théorème 1.1 (Théorème 2.4 et corollaires 2.6 et 2.7). — *On garde les notations ci-dessus, et pour chaque groupe topologique abélien A, on note $\overline{A}$ le quotient de A par son sous-groupe divisible maximal et A^D le groupe des morphismes continus de A dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soit $S \subseteq X^{(1)}$ une partie finie.*

(i) *On a une suite exacte :*

$$0 \to T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to \overline{\text{Ш}_S^{d+2}(\tilde{T})}^D \to \text{Ш}^1(T) \to 0,$$

où $T(K)_S^{\mathrm{adh}}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$ et $Ш_S^{d+2}(\tilde{T})$ est le sous-groupe de $H^{d+2}(K, \tilde{T})$ constitué des éléments dont la restriction à $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ est nulle pour chaque $v \in X^{(1)} \setminus S$.

(ii) *On a la suite exacte :*

$$0 \to T(K)^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to (Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $T(K)^{\mathrm{adh}}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ et $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ est le sous-groupe de $H^{d+2}(K, \tilde{T})$ constitué des éléments dont la restriction à $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ est nulle pour presque tout $v \in X^{(1)}$.

(iii) *Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$.*

(iv) *Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ est de type cofini. En particulier, lorsque $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ pour une extension finie L de K déployant T, le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ est fini.*

(v) *Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ est dénombrable.*

Remarque 1.2. — (a) La preuve de ce théorème mélange les difficultés qui avaient été rencontrées dans les articles [16] et [9] : le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ n'est pas forcément nul, et le groupe $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ n'est pas forcément fini (ni même de torsion de type cofini).

(b) Des exemples où $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ ont été exhibés dans [19] : par exemple, pour certaines courbes constantes sur $\mathbb{Q}_p((t_2)) \dots ((t_d))$ ou certaines courbes elliptiques sur $\mathbb{C}((t_0)) \dots ((t_d))$.

Dans la deuxième partie, nous utilisons le théorème de dualité arithmétique pour les complexes à deux termes de tores de [22] afin d'étudier le principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous un groupe linéaire connexe. Dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$, nous appliquons les méthodes de Borovoi ([2]) et Sansuc ([28]), ce qui permet notamment de montrer que la seule obstruction est l'obstruction de Brauer-Manin, alors que, dans les autres cas, nous suivons la méthode de Harari et Szamuely ([16]).

1.2. Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que pour sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je suis aussi très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène, Tamás Szamuely et Bruno Kahn pour leurs commentaires et leurs remarques, et à Giancarlo Lucchini Arteche pour de nombreuses discussions. Je voudrais également remercier le rapporteur pour ses commentaires. Je voudrais

finalement remercier l'École normale supérieure et l'Université Paris-Sud pour leurs excellentes conditions de travail.

1.3. Notations

Groupes abéliens. — Pour A un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), $n > 0$ un entier et l un nombre premier, on notera :

- A_{tors} la partie de torsion de A.
- ${}_nA$ la partie de n-torsion de A.
- $A^{\wedge}$ le complété profini de A.
- $A_{\wedge}$ la limite projective des A/nA.
- A_{div} le sous-groupe divisible maximal de A. En général, il ne coïncide pas avec le sous-groupe constitué des éléments divisibles de A.
- $\overline{A}$ le quotient de A par A_{div}.
- A^D le groupe des morphismes continus $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Complexes. — Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Lorsque A_0, A_1, A_2 …, A_n sont des objets de $\mathcal{A}$ munis de morphismes $A_{i+1} \to A_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$, on notera $[A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_0]$ le complexe où tous les termes en degrés strictement inférieurs à $-n$ ou strictement positifs sont nuls et où A_i est placé en degré $-i$ pour $0 \leq i \leq n$. Lorsque $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ est un morphisme de complexes, on notera $[A^\bullet \to B^\bullet]$ le cône de $f^\bullet$.

Faisceaux. — Sauf indication du contraire, tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale. Dans la suite, on fera souvent appel à des catégories dérivées de faisceaux : on entendra toujours par là la catégorie dérivée des faisceaux étales sur le schéma considéré. Pour F un faisceau sur un schéma X, on note $\text{Hom}_X(F, -)$ (ou $\text{Hom}(F, -)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) le foncteur qui à un faisceau G sur X assosie le groupe des morphismes de faisceaux de F vers G et $\underline{\text{Hom}}_X(F, -)$ (ou $\underline{\text{Hom}}(F, -)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) le foncteur qui à un faisceau G sur X associe le faisceau étale $U \mapsto \text{Hom}_U(F|_U, G|_U)$.

Corps locaux supérieurs. — Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, un corps d-local est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local. *On remarquera que cette définition est plus générale que la définition standard.* Lorsque k est un corps d-local, on notera k_0, k_1, …, k_d les corps tels que k_0 est fini ou $\mathbb{C}((t))$, $k_d = k$, et pour chaque i le corps k_i est le corps résiduel de k_{i+1}. On rappelle le théorème de dualité sur un corps d-local k : pour tout $\text{Gal}(k^s/k)$-module fini M d'ordre n premier à $\text{Car}(k_1)$, on a un accouplement parfait de groupes finis $H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, \text{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})) \to H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce théorème est énoncé et démontré dans [25] (théorème 2.17) lorsque $k_0 \neq \mathbb{C}((t))$. Il se prouve exactement de la même manière dans ce dernier cas : en effet, il suffit de procéder par récurrence à l'aide du lemme 2.18 de [25], l'initialisation étant réduite à la dualité évidente $H^r(k_{-1}, M) \times H^{-r}(k_{-1}, \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H^0(k_{-1}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour le corps « -1-local » $k_{-1} = \mathbb{C}$.

Groupes de Tate-Shafarevich. — Lorsque L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps l et M est un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(L^s/L)$-modules discrets, le r-ième groupe de Tate-Shafarevich de M est, par définition, le groupe $Ш^r(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} H^r(L_v, M))$, où $Y^{(1)}$ désigne les points de codimension 1 de Y et L_v le complété de L par rapport à la valuation discrète v pour chaque $v \in X^{(1)}$. Dans la suite, il sera aussi utile d'introduire, pour chaque partie S de $Y^{(1)}$, le groupe $Ш^r_S(L, M) = \mathrm{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)} \setminus S} H^r(L_v, M))$, ainsi que le groupe $Ш^r_\omega(L, M) = \bigcup_{S \subseteq X^{(1)}, S \text{finie}} Ш^r_S(L, M)$.

Groupe de Brauer. — Lorsque Z est un schéma, on note $\mathrm{Br}(Z)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$. Si Z est une L-variété géométriquement intègre pour un certain corps L, on note $\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z)$ le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(Z) \to \mathrm{Br}(Z \times_k k^s))/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(Z))$. Finalement, si L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps l, on notera $Б(Z)$ le groupe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} \mathrm{Br}_{\mathrm{al}}(Z \times_L L_v))$.

Cadre. — Dans toute la suite, d désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On notera $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points de codimension 1 et K son corps des fonctions. *Lorsque k_0 est fini, on supposera que le corps k_1 est de caractéristique 0* : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on notera K_v le complété de K pour la valuation v et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers. Lorsque M est un objet de la catégorie dérivée des $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules discrets, on notera $Ш^r(M)$ (resp. $Ш^r_S(M)$, resp. $Ш^r_\omega(M)$) au lieu de $Ш^r(K, M)$ (resp. $Ш^r_S(K, M)$, resp. $Ш^r_\omega(K, M)$) s'il n'y a pas d'ambigüité.

Cohomologie à support compact. — Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$. On notera aussi $\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F})$ le complexe $\mathbb{R}\Gamma(X, j_!\mathcal{F})$, dont le r-ième groupe de cohomologie est le r-ième groupe de cohomologie à support compact de $\mathcal{F}$. De même, lorsque $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux sur U, on notera $H^r_c(U, \mathcal{F}^\bullet)$ le groupe d'hypercohomologie $H^r(k, \mathbb{R}f_*j_!\mathcal{F}^\bullet) = H^r(X, j_!\mathcal{F}^\bullet)$, où f désigne le morphisme propre $X \to \mathrm{Spec}\, k$. On remarquera que, contrairement à la définition classique de la cohomologie à support compact, la définition ci-dessus ne dépend pas du choix d'une compactification lisse de U (plus précisément, nous avons choisi X comme compactification lisse de U).

Complexes de Bloch et cohomologie motivique. — Dans l'article [1], Bloch associe à chaque schéma Y séparé de type fini sur un corps E et à chaque entier naturel i un complexe noté $z^i(Y,\cdot)$. Lorsque Y est lisse, on note $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) le complexe de faisceaux $z^i(-,\cdot)[-2i]$ sur le petit site étale (resp. sur le petit site de Zariski), et pour chaque groupe abélien A, on note $A(i)$ (resp. $A(i)_{\mathrm{Zar}}$) le complexe $A\otimes\mathbb{Z}(i)$ (resp. $A\otimes\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$), qui coïncide avec le complexe $A\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(i)$ (resp. $A\otimes^{\mathbf{L}}\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) puisque chaque terme de $\mathbb{Z}(i)$ (resp. $\mathbb{Z}(i)_{\mathrm{Zar}}$) est un faisceau plat. On renvoie à la partie 0.6 de [21] pour des rappels sur les complexes de Bloch.

Quelques notations de [22] *et* [21]. — Lorsque F est un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module fini, on note $F' = \underline{\mathrm{Hom}}_K(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$. Lorsque T est un tore sur K, on note $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. cocaractères), $\tilde{T}=\hat{T}\otimes\mathbb{Z}(d)$ et $\tilde{T}_t=\hat{T}\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)$. De même, si $G=[T_1\to T_2]$ est un complexe à deux termes de tores (placés en degrés -1 et 0), on note $\tilde{G}=[\tilde{T}_2\to\tilde{T}_1]$ et $\tilde{G}_t=[\tilde{T}_{2t}\to\tilde{T}_{1t}]$.

1.4. Quelques rappels de [22] et [21].

— Dans [22] et [21], nous avons posé les fondements théoriques nécessaires pour le présent article. Nous rappelons ici les énoncés des résultats principaux.

Théorème 1.3 (Théorèmes 3.10, 3.20 et 3.22 de [21]). — *On rappelle que K est le corps des fonctions de la k-courbe X. Soit T un K-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de T, $\check{T}$ le module des cocaractères de T et $\tilde{T}=\hat{T}\otimes\mathbb{Z}(d)$.*

(i) *Les groupes $\text{Ш}^{d+2}(\tilde{T})$ et $\text{Ш}^2(T)$ sont de torsion de type cofini, et on a des accouplements parfaits de groupes finis :*

$$\text{Ш}^1(T)\times\overline{\text{Ш}^{d+2}(\tilde{T})}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\quad\text{et}\quad\text{Ш}^{d+1}(\tilde{T})\times\overline{\text{Ш}^2(T)}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) *Soit L une extension finie déployant T. Supposons que $\text{Ш}^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul. On dispose alors d'une suite exacte à 7 termes :*

$$\begin{tikzcd}
\text{Ш}^{d+3}(\tilde{T})^D \arrow[d] & 0 \arrow[l] & \\
H^0(K,T)_\wedge \arrow[r] & \mathbb{P}^0(T)_\wedge \arrow[r] & H^{d+2}(K,\tilde{T})^D \arrow[d] \\
H^{d+1}(K,\tilde{T})^D & \mathbb{P}^1(T) \arrow[l] & H^1(K,T) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(T)$ désigne un produit restreint adélique des $H^r(K_v,T)$ pour $v\in X^{(1)}$, et une suite exacte à 8 termes :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}^{d+1}(\tilde{T}) \arrow[r] & H^1(K,T)^D \arrow[d] \\
(H^0(K,T)_\wedge)^D \arrow[d] & \mathbb{P}^{d+2}(\tilde{T})_{\mathrm{tors}} \arrow[l] & H^{d+2}(K,\tilde{T}) \arrow[l] \\
H^{d+3}(K,\tilde{T}) \arrow[r] & \mathbb{P}^{d+3}(\tilde{T}) \arrow[r] & (\varprojlim_n {}_nT(K^s))^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{P}^r(\tilde{T})$ désigne un produit restreint adélique des $H^r(K_v,\tilde{T})$ pour $v \in X^{(1)}$.

Remarque 1.4. — (i) Ce théorème et la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum montrent que $\text{Ш}^2(\mathbb{G}_m)$ et $\text{Ш}^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ sont divisibles.

(ii) La nullité de $\text{Ш}^2(L,\mathbb{G}_m)$ (ainsi que celle de $\text{Ш}^2(L,\mathbb{Z})$) a été étudiée dans [19]. Elle interviendra dans certains théorèmes de la deuxième partie de cet article.

Théorème 1.5 (Théorème 1 et corollaire 2 de [22]). — *On rappelle que K est le corps des fonctions de la k-courbe X. Soit $G = [T_1 \to T_2]$ un complexe de deux K-tores placés en degrés -1 et 0. Notons $\tilde{G}$ le cône de $\tilde{T}_2 \to \tilde{T}_1$, où $\tilde{T}_1 = \hat{T}_1 \otimes \mathbb{Z}(d)$ et $\tilde{T}_2 = \hat{T}_2 \otimes \mathbb{Z}(d)$.*

(i) *On a alors un accouplement parfait :*

$$\overline{\text{Ш}^0(G)_{\mathrm{tors}}} \times \overline{\text{Ш}^{d+2}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(ii) *On suppose que le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ ou le morphisme $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif. On a alors un accouplement parfait :*

$$\overline{\text{Ш}^1(G)} \times \overline{\text{Ш}^{d+1}(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, si $\hat{T}_2 \to \hat{T}_1$ est injectif, alors $\text{Ш}^1(G)$ est de torsion de type cofini et $\text{Ш}^{d+1}(\tilde{G})$ est fini ; si $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif, alors $\text{Ш}^1(G)$ est fini et $\text{Ш}^{d+1}(\tilde{G})$ est de torsion de type cofini.

(iii) *On suppose que le morphisme $\check{T}_1 \to \check{T}_2$ est injectif. On a alors un accouplement parfait :*

$$\overline{\text{Ш}^2(G)} \times \overline{\text{Ш}^{d}(\tilde{G})_{\mathrm{tors}}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

2. Approximation faible pour les tores

On rappelle que K est le corps des fonctions de la k-courbe X. Soit T un tore sur K. Notons $\hat{T}$ (resp. $\check{T}$) son module des caractères (resp. cocaractères), et posons $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. Nous voulons ici étudier les propriétés d'approximation faible pour le tore T :

DÉFINITION 2.1. — *On dit que T vérifie* ***l'approximation faible*** *si $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$, où le groupe $T(K_v)$ est muni de la topologie v-adique pour chaque v. On dit que T vérifie* ***l'approximation faible faible*** *(resp.* ***l'approximation faible faible dénombrable****) s'il existe une partie finie (resp. dénombrable) S_0 de $X^{(1)}$ telle que, pour toute partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$.*

Nous allons voir que ces propriétés se lisent dans la « taille » du groupe $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$: plus le groupe $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est « gros », plus on s'éloigne de la propriété d'approximation faible. Pour ce faire, rappelons que l'approximation faible est vérifiée pour les tores quasi-triviaux. En effet, ces derniers étant lisses et K-rationnels, cela découle du lemme d'approximation d'Artin-Whaples (théorème XII.1.2 de [24]) et du théorème des fonctions implicites pour les valuations ultramétriques.

Fixons maintenant une partie finie S de $X^{(1)}$. On rappelle que le cup-produit induit, pour $r \in \{1,2,\dots,d+1\}$ et $v \in X^{(1)}$, un accouplement parfait de groupes finis :

$$(.,.)_v : H^r(K_v,F) \times H^{d+2-r}(K_v,F') \to H^{d+2}(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

d'après le théorème i.2.17 de [25].

LEMME 2.2. — *Soit F un $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret fini. Pour $r \in \{1,2,\dots,d+1\}$, on a une suite exacte :*

$$H^r(K,F) \to \prod_{v\in S} H^r(K_v,F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D \to Ш^{d+2-r}(F')^D \to 0,$$

où le morphisme $\prod_{v\in S} H^r(K_v,F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D$ est donné par

$$(f_v) \mapsto (f' \mapsto \sum_{v\in S}(f_v,f'_v)_v).$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.6 de [21], on a une suite exacte :

$$H^{d+2-r}(K,F') \longrightarrow \mathbb{P}^{d+2-r}(F') \longrightarrow H^r(K,F)^D \cdot$$

On en déduit la suite exacte :

$$Ш^{d+2-r}_S(F') \longrightarrow \prod_{v\in S} H^{d+2-r}(K_v,F') \longrightarrow H^r(K,F)^D \cdot$$

En dualisant, on obtient l'exactitude de :

$$H^r(K,F) \to \prod_{v\in S} H^r(K_v,F) \to Ш^{d+2-r}_S(F')^D.$$

Pour achever la preuve, il suffit de dualiser la suite :

$$0 \to Ш^{d+2-r}(F') \to Ш^{d+2-r}_S(F') \to \bigoplus_{v\in S} H^{d+2-r}(K_v,F'). \qquad \square$$

LEMME 2.3. — *Le groupe $Ш^{d+2}_S(\mathbb{Z}(d))$ coïncide avec le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et est donc de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. — Soit $n > 0$. D'après la proposition précédente, on a une suite exacte :

$$H^1(K, \mu_n) \to \prod_{v \in S} H^1(K_v, \mu_n) \to Ш_S^{d+1}(\mu_n^{\otimes d})^D \to Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d})^D \to 0.$$

Or le morphisme $H^1(K, \mu_n) \to \prod_{v \in S} H^1(K_v, \mu_n)$ est surjectif puisque $\mathbb{G}_m$ vérifie l'approximation faible et $H^1(K, \mu_n) \cong K^\times / K^{\times, n}$. Donc $Ш_S^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d})$. Comme la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum (voir par exemple le théorème 0.3 de [21]) impose les égalités $Ш^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = {}_nШ^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ et $Ш_S^{d+1}(\mu_n^{\otimes d}) = {}_nШ^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$, cela prouve que $Ш_S^{d+2}(\mathbb{Z}(d)) = Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$. □

THÉORÈME 2.4. — *Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.*

(i) *On a la suite exacte :*

$$0 \to T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $T(K)_S^{\mathrm{adh}}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in S} T(K_v)$.

(ii) *On a la suite exacte :*

$$0 \to T(K)^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to (Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $T(K)^{\mathrm{adh}}$ désigne l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$.

Démonstration. — (i) Remarquons que, si T est quasi-trivial :

- la flèche $T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in S} T(K_v)$ est surjective puisque T vérifie l'approximation faible,
- le morphisme $\prod_{v \in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D$ est nul d'après le lemme précédent et le lemme de Shapiro.
- le morphisme $(Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D$ est un isomorphisme d'après le lemme précédent et le lemme de Shapiro.

On en déduit que la suite

$$0 \to T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0$$

est exacte dès que T est quasi-trivial. Par conséquent, pour prouver la proposition, nous pouvons remplacer T par un tore de la forme $T^m \times_K T_0$, où $m > 0$ et T_0 est un tore quasi-trivial.

D'après le lemme 1.10 de [28], on peut donc supposer qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T \to 0$$

où F est un schéma en groupes fini commutatif sur K et R un tore quasi-trivial sur K. On en déduit une suite exacte de $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-modules :

$$0 \to \hat{T} \to \hat{R} \to \hat{F} \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbb{Z}(d)$, on obtient une suite exacte de complexes :

$$0 \to \tilde{T} \to \tilde{R} \to F' \to 0.$$

D'après le lemme de Shapiro et la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum (voir par exemple le théorème 0.3 de [21]), on remarque que $H^{d+1}(K, \tilde{R}) = 0$ et $H^{d+1}(K_v, \tilde{R}) = 0$ pour $v \in X^{(1)}$. On en déduit une suite exacte :

$$0 \to Ш_S^{d+1}(F') \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R}).$$

Montrons que le morphisme $Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ est surjectif. Soit n l'ordre de F. Soit $x \in Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$. Comme $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ est divisible (d'après le lemme de Shapiro, le lemme 2.3 et la remarque 1.4(i)) et $H^{d+2}(K, F')$ est d'exposant fini, il existe $x' \in Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ tel que $x = nx'$ et l'image de x' dans $H^{d+2}(K, F')$ est nulle. Par conséquent, x' provient d'un élément $y \in H^{d+2}(K, \tilde{T})$. Soit z l'image de y dans $\prod_{v \notin S} H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$. Son image dans $\prod_{v \notin S} H^{d+2}(K_v, \tilde{R})$ est bien sûr nulle, et donc z provient d'un élément de $\prod_{v \notin S} H^{d+1}(K_v, F')$, qui est de n-torsion. Donc $nz = 0$, et $ny \in Ш_S^{d+2}(\tilde{T})$. Comme ny s'envoie sur x dans $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$, on déduit que le morphisme $Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ est surjectif.

Nous disposons donc d'une suite exacte :

$$0 \to Ш_S^{d+1}(F') \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R}) \to 0.$$

En dualisant, on obtient la suite exacte :

$$0 \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \to Ш_S^{d+1}(F')^D \to 0.$$

On a donc un diagramme (D) commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & R(K) \arrow[r] \arrow[d] & T(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \prod_{v\in S} R(K_v) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} T(K_v) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^1(K_v,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \arrow[r] & Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \arrow[r] & Ш_S^{d+1}(F')^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De plus, la colonne concernant le module fini F est exacte. Comme R vérifie l'approximation faible, une simple chasse au diagramme montre que le noyau $\mathrm{Ker}(\prod_{v\in S} T(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D)$ est contenu dans l'adhérence de $T(K)$ dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. Montrons que $0 \to T(K) \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ est un complexe.

Soient $x \in T(K)$, $(x_v)_{v\in S}$ son image dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$ et y son image dans $Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$. On remarque immédiatement que l'image de y dans $Ш_S^{d+1}(F')^D$ est nulle, et donc y provient d'un élément $z \in Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D$.

Comme F est d'ordre n, la famille $(nx_v)_{v\in S}$ provient d'un élément $(r_v)_{v\in S} \in \prod_{v\in S} R(K_v)$. Par injectivité de $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$ et nullité de $\prod_{v\in S} R(K_v) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{R})^D$, on déduit que $nz = 0$. Mais $Ш_S^{d+2}(\tilde{R})$ étant de torsion de type cofini divisible, son dual est sans torsion. Donc $z = 0$ et $y = 0$.

Cela permet de conclure à l'exactitude de :

$$0 \to T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D.$$

Reste donc à montrer l'exactitude de :

$$\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0.$$

Pour ce faire, remarquons que nous disposons d'une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}),$$

d'où une suite exacte duale :

$$\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0.$$

Or une chasse au diagramme dans le diagramme commutatif à lignes exactes (D) montre que le conoyau de $T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v\in S} T(K_v)$ est de n-torsion. Par conséquent, l'image de $\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D$ est aussi de n-torsion et elle coïncide avec l'image de $\prod_{v\in S} T(K_v)^\wedge \to Ш_S^{d+2}(\tilde{T})^D$. On en déduit l'exactitude de

$$\prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш_S^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

ce qui achève la preuve.

(ii) En passant à la limite projective sur S dans la suite exacte de (i), on obtient immédiatement l'exactitude de :

$$0 \to T(K)^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})^D.$$

Pour établir les derniers termes de la suite exacte, on procède comme dans (i). En effet, on vérifie exactement de la même manière que l'on peut supposer que T s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T \to 0,$$

où F est un groupe fini et R est un tore quasi-trivial. On remarque alors que l'on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}),$$

d'où une suite exacte duale :

$$\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)^\wedge \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0.$$

Or, comme R vérifie l'approximation faible, une chasse au diagramme dans :

$$\begin{tikzcd}
R(K) \arrow[r] \arrow[d] & T(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\prod_{v\in X^{(1)}} R(K_v) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

permet de conclure que le groupe topologique $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/T(K)^{\mathrm{adh}}$ s'identifie à $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F)\right)/H^1(K,F)^{\mathrm{adh}}$, où $H^1(K,F)^{\mathrm{adh}}$ désigne l'adhérence de $H^1(K,F)$ dans $\prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v,F)$ (muni de la topologie produit). C'est donc un groupe compact et l'image de $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)$ dans $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D$ est fermée. On en déduit que cette image coïncide avec celle de $\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)^\wedge$, ce qui impose l'exactitude de :

$$\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0. \qquad \square$$

Remarque 2.5. — (i) La preuve précédente montre aussi que $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/T(K)^{\mathrm{adh}}$ est d'exposant fini. Cependant, ce groupe n'est pas forcément fini. Par exemple, prenons $K = \mathbb{Q}_p(t)$ et soit T le tore dual du tore de la proposition 3.5 de [14]. D'après la preuve de cette proposition, comme $\mathbb{Q}_p$ n'est pas dénombrable, il en est de même du groupe $Ш^3_\omega(\tilde{T})$. On en déduit que $Ш^3_\omega(\tilde{T})^D$ est infini, et comme $Ш^1(T)$ est fini, le théorème 3.3 de [14] permet de conclure que $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/T(K)^{\mathrm{adh}}$ est infini.

(ii) Pour montrer que $0 \to T(K)^{\mathrm{adh}}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to (Ш^{d+2}_S(\tilde{T}))^D$ est un complexe, nous aurions aussi pu faire appel à un argument topologique comme dans le lemme 9.5 et la remarque 9.8 de [9].

Nous pouvons récrire la suite exacte (i) du théorème sous une forme plus agréable :

Corollaire 2.6. — *Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$. On a une suite exacte :*

$$0 \to T(K)^{\mathrm{adh}}_S \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to \overline{Ш^{d+2}_S(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0.$$

Démonstration. — Le corollaire découle immédiatement du théorème et de la remarque précédents, du fait que les groupes $Ш^{d+2}_S(\tilde{T})$ et $Ш^{d+2}(\tilde{T})$ sont de torsion de type cofini, et du théorème de dualité 1.3. $\square$

Le théorème 2.4 nous permet finalement d'étudier les propriétés d'approximation faible, d'approximation faible faible et d'approximation faible faible dénombrable pour le tore T :

Corollaire 2.7 (Propriétés d'approximation faible des tores). — *Rappelons que T est un tore et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Z}(d)$.*

(i) *Le tore T vérifie l'approximation faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$.*

(ii) *Le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est de type cofini. En particulier, lorsque $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ pour une extension finie L de K déployant T, le tore T vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est fini.*

(iii) *Le tore T vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est dénombrable.*

Démonstration. — (i) Cette propriété découle immédiatement du théorème 2.4(ii).

(ii) Supposons que T vérifie l'approximation faible faible, et notons S_0 une partie finie de $X^{(1)}$ telle que, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. D'après le théorème 2.4(i), cela impose que, pour une telle partie S, on a $Ш^{d+2}_{S}(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$, d'où une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S_0} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}).$$

On en déduit que $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est de torsion de type cofini.

Réciproquement, supposons que le groupe de torsion $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est de type cofini. Montrons d'abord que $Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\mathrm{div}} = Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})_{\mathrm{div}}$. Comme $\left(\prod_{v\in X^{(1)}} T(K_v)\right)/T(K)^{\mathrm{adh}}$ est d'exposant fini, le théorème 2.4(ii) fournit une suite exacte :

$$0 \to A \to Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})^D \to Ш^{d+2}(\tilde{T})^D \to 0,$$

où A est un groupe abélien de torsion. On en déduit que :

$$Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})^D/(Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})^D)_{\mathrm{tors}} \cong Ш^{d+2}(\tilde{T})^D/(Ш^{d+2}(\tilde{T})^D)_{\mathrm{tors}},$$

et donc que $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})_{\mathrm{div}} \cong Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\mathrm{div}}$. Rappelons maintenant qu'il existe $n > 0$ tel que le groupe $\left(\prod_{v\in S} T(K_v)\right)/T(K)^{\mathrm{adh}}_S$ est de n-torsion pour toute partie finie S de $X^{(1)}$ et fixons un nombre premier l divisant n. Comme $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})$ est de type cofini et $Ш^{d+2}(\tilde{T})_{\mathrm{div}} = Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})_{\mathrm{div}}$, il existe une partie finie $S_l \subseteq X^{(1)}$ telle que $Ш^{d+2}_{\omega}(\tilde{T})\{l\} = Ш^{d+2}_{S_l}(\tilde{T})\{l\}$. On en déduit que, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas

S_l, on a $Ш^{d+2}(\tilde{T})\{l\} = Ш^{d+2}_S(\tilde{T})\{l\}$. Grâce au théorème 2.4(i), on en déduit que

$$\left(\left(\prod_{v\in S} T(K_v)\right)/T(K)_S^{\mathrm{adh}}\right)\{l\} = 0.$$

Cela prouve que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$ pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas $\bigcup_{l|n} S_l$, et donc T vérifie l'approximation faible faible.

(iii) Supposons que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable. Soit S_0 l'ensemble des places $v \in X^{(1)}$ telles qu'il existe un élément de $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ dont l'image dans $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ est non nulle. On sait que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) = \bigcup_{S\subseteq X^{(1)} \text{fini}} Ш^{d+2}_S(\tilde{T})$. Comme $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable, il existe une suite $(S_i)_{i\geq 1}$ de parties finies de $X^{(1)}$ telle que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) = \bigcup_{i\geq 1} Ш^{d+2}_{S_i}(\tilde{T})$. On en déduit que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \subseteq Ш^{d+2}_{\bigcup_{i\geq 1} S_i}(\tilde{T})$ et que $S_0 \subseteq \bigcup_{i\geq 1} S_i$. Par conséquent, S_0 est dénombrable. De plus, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant par S_0, on a $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$. Le théorème 2.4(i) impose alors que $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$, et donc T vérifie l'approximation faible faible dénombrable.

Réciproquement, supposons que T vérifie l'approximation faible faible dénombrable. Soit S_0 une partie dénombrable de $X^{(1)}$ telle que, pour chaque partie finie S de $X^{(1)}$ n'intersectant pas S_0, le groupe $T(K)$ est dense dans $\prod_{v\in S} T(K_v)$. D'après le théorème 2.4(i), cela impose que, pour une telle partie S, on a $Ш^{d+2}_S(\tilde{T}) = Ш^{d+2}(\tilde{T})$, d'où une suite exacte :

$$0 \to Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T}) \to \bigoplus_{v\in S_0} H^{d+2}(K_v, \tilde{T}).$$

On en déduit que $Ш^{d+2}_\omega(\tilde{T})$ est dénombrable.

□

REMARQUE 2.8. — (i) Il existe des tores qui ne vérifient pas l'approximation faible faible dénombrable. C'est par exemple le cas du tore de la proposition 3.5 de [14] (voir la remarque 2.5).

(ii) Je ne connais pas la réponse à la question suivante mais elle me semble intéressante : existe-t-il des tores vérifiant l'approximation faible faible dénombrable mais ne vérifiant pas l'approximation faible faible ?

3. Applications au principe local-global

3.1. Torseurs sous un tore. — Dans cette section, on suppose que $d > 0$, c'est-à-dire que k (qui est de caractéristique 0) n'est pas $\mathbb{C}((t))$. Soient T un tore sur K et Y un espace principal homogène sous T tel que $Y(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 5 de [16], on peut définir :

$$\begin{aligned} H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) &= \mathrm{Ker}(H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \\ &\to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+2}(Y_{K_v}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \end{aligned}$$

où Y_{K_v} désigne $Y \times_K K_v$, et on peut construire un morphisme

$$\rho_Y : H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On prouve alors exactement de la même manière que dans la partie 5 de [16] le théorème :

THÉORÈME 3.1. — *On rappelle que l'on a supposé que $d > 0$. Si ρ_Y est trivial, alors $Y(K) \neq \emptyset$.*

Preuve (esquisse). — Comme K est de dimension cohomologique $d+2$, la suite spectrale

$$H^p(K, H^q(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$$

induit un morphisme

$$H^{d+1}(K, H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \to H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))).$$

De plus, on montre exactement comme dans le lemme 5.2 de [16] que :

$$H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \tilde{T}_t.$$

La nullité de $H^{d+1}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d))$ et $H^{d+2}(K, \hat{T} \otimes \mathbb{Q}(d))$ permet alors de déduire des isomorphismes $H^{d+1}(K, H^1(\overline{Y}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \cong H^{d+1}(K, \tilde{T}_t) \cong H^{d+2}(K, \tilde{T})$, d'où un morphisme $H^{d+2}(K, \tilde{T}) \to H^{d+2}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/\mathrm{Im}(H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)))$. En passant aux éléments localement triviaux, on obtient un morphisme τ : $Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$.

En procédant exactement comme dans la proposition 5.3 de [16], on peut montrer que, si α est un élément de $Ш^{d+2}(\tilde{T})$, $[Y]$ désigne la classe de Y dans $Ш^1(T)$ et $PT(.,.) : Ш^1(T) \times Ш^{d+2}(\tilde{T}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ désigne l'accouplement du théorème 1.3, alors $\rho_Y(\tau(\alpha)) = PT([Y], \alpha)$ au signe près. Ainsi, grâce au théorème 1.3, on déduit que si ρ_Y est trivial, alors $[Y] = 0$ et donc $Y(K) \neq \emptyset$. □

3.2. Torseurs sous un groupe réductif

3.2.1. *Cas $d = 0$.* — Dans cette section, on suppose que $k = \mathbb{C}((t))$ (et donc que $d = 0$). Nous allons suivre de près les méthodes développées par Borovoi dans l'article [2] afin de montrer que, pour chaque K-groupe linéaire réductif connexe H, il existe un accouplement non dégénéré BM : $Ш^1(H) \times \overline{Б(H)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En fait, un tel accouplement a déjà été étudié dans la partie 10 de l'article [9] : les méthodes utilisées dans ce dernier, fondées sur les revêtements spéciaux, permettent d'établir la non-dégénérescence à gauche mais pas la non-dégénérescence à droite.

Considérons H un groupe réductif connexe sur K, et notons H^{ss} son sous-groupe dérivé et H^{sc} son revêtement universel, qui est semi-simple simplement connexe. Soit T un tore maximal de H. Notons $T^{(\mathrm{sc})}$ l'image réciproque de T par le morphisme composé $\rho : H^{\mathrm{sc}} \to H^{ss} \to H$ et $G = [T^{(\mathrm{sc})} \to T]$ le cône de $T^{(\mathrm{sc})} \to T$. Pour L une extension de K, on définit la cohomologie galoisienne abélienne de H par $H^r_{\mathrm{ab}}(L, H) = H^r(L, G)$. On rappelle que, dans la section 3 de [2], Borovoi a construit, pour chaque extension L de K, des morphismes d'abélianisation :

$$\mathrm{ab}^0_L : H(L) \to H^0_{\mathrm{ab}}(L, H)$$
$$\mathrm{ab}^1_L : H^1(L, H) \to H^1_{\mathrm{ab}}(L, H).$$

Dans la suite, nous nous intéressons au morphisme ab^1_L avec $L = K$ et avec $L = K_v$ pour un certain $v \in X^{(1)}$. Commençons par montrer qu'il est injectif.

Théorème 3.2 (Cas particulier de la conjecture de Serre II). — *Rappelons que nous avons supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Supposons de plus que H soit semisimple simplement connexe.*

(i) *Pour chaque $v \in X^{(1)}$, l'ensemble pointé $H^1(K_v, H)$ est trivial.*
(ii) *L'ensemble pointé $H^1(K, H)$ est trivial.*

Démonstration. — (i) On pourra aller voir le théorème 4.7 de [4].

(ii) D'après le théorème 10 de [23], le corps $\mathbb{C}((t))$ est C_1. En utilisant en plus le théorème 6 de [23] complété par [26], le corps K est un corps C_2 de caractéristique 0 et son extension abélienne maximale est de dimension cohomologique au plus 1. La partie (v) du théorème 1.2 de [8] permet alors de conclure. □

Corollaire 3.3. — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$.*

(i) *Pour chaque $v \in X^{(1)}$, le morphisme d'abélianisation $\mathrm{ab}^1_{K_v}$ est injectif.*
(ii) *Le morphisme d'abélianisation ab^1_K est injectif.*

Démonstration. — La preuve découle du théorème précédent par un argument de torsion. Elle est tout à fait analogue à celle du corollaire 5.4.1 de [2]. □

Quant à la surjectivité des morphismes d'abélianisation, elle découle des travaux de González-Avilés ([13]) :

Théorème 3.4. — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$.*

(i) *Pour chaque $v \in X^{(1)}$, le morphisme d'abélianisation $\mathrm{ab}^1_{K_v}$ est surjectif.*
(ii) *Le morphisme d'abélianisation ab^1_K est surjectif.*

Démonstration. — Rappelons que le corps K (resp. K_v pour $v \in X^{(1)}$) est de type de Douai (voir définition 5.2 de [13]) d'après le théorème 2.1(a) de [8], puisque K (resp. K_v) est un corps de caractéristique 0 de dimension cohomologique 2 dont l'extension abélienne maximale est de dimension cohomologique au plus 1 et l'exposant et l'indice coïncident pour les algèbres simples centrales sur des extensions finies de K (resp. K_v) (voir p. 350 de [27] ou le théorème 5.5 de [17]). Cela permet de déduire la surjectivité des morphismes d'abélianisation du théorème 5.5(i) de [13], puisque nous sommes en caractéristique 0. □

Nous allons voir que les propriétés que nous venons d'établir concernant les morphismes d'abélianisation permettent d'étudier l'obstruction au principe local-global.

Soit Y un espace principal homogène sous H tel que, pour chaque $v \in X^{(1)}$, on a $Y(K_v) \neq \emptyset$. En considérant un modèle géométriquement intègre de Y sur un ouvert non vide de X, on peut définir un accouplement de type Brauer-Manin :

$$[.,.] : Y(\mathbb{A}_K) \times \text{Б}(Y) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

et on remarque que, pour $\alpha \in \text{Б}(Y)$, la valeur de $[(P_v), \alpha]$ ne dépend pas du choix du point adélique $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_K)$. Comme on dispose d'un isomorphisme canonique $\text{Б}(Y) \to \text{Б}(H)$ (voir le lemme 5.2(iii) de [3]), cela permet de définir un accouplement :

$$\begin{aligned} \mathrm{BM} : \text{Ш}^1(H) \times \text{Б}(H) &\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([Y], \alpha) &\mapsto [(P_v), \alpha] \end{aligned}$$

où $(P_v) \in Y(\mathbb{A}_K)$ est un point adélique quelconque.

D'autre part, le noyau du morphisme $T^{(\mathrm{sc})} \to T$ étant fini, le théorème 1.5 fournit un accouplement parfait de type Poitou-Tate :

$$\mathrm{PT} : \text{Ш}^1(G) \times \overline{\text{Ш}^1(\tilde{G})} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, nous disposons d'isomorphismes permettant de comparer les deux accouplements précédents :

- d'après le corollaire 3.3 et le théorème 3.4, les morphismes d'abélianisation induisent une bijection $\mathrm{ab}^1 : \text{Ш}^1(H) \to \text{Ш}^1(G)$,
- d'après le corollaire 2.20 et le théorème 4.8 de [3], on dispose d'un isomorphisme $B : \text{Б}(H) \to \text{Ш}^1(\tilde{G})$.

Le lemme suivant montre que les accouplements de Brauer-Manin et de Poitou-Tate sont compatibles :

Proposition 3.5. — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Le diagramme :*

$$\begin{array}{lccccc}
\text{BM :} & Ш^1(H) & \times & \overline{Б(H)} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab}^1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle B} & & \Big\| \\
\text{PT :} & Ш^1(G) & \times & \overline{Ш^1(\tilde{G})} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{array}$$

est commutatif au signe près.

Avant de passer à la preuve du lemme précédent, introduisons les notations suivantes, calquées de l'article [15] :

Notation 3.6. — Lorsque Y est une variété lisse géométriquement intègre sur K et $\mathcal{Y}$ un modèle lisse géométriquement intègre de Y sur un ouvert non vide U_0 de X :

- $\pi^Y : Y \to \operatorname{Spec} K$ et $\pi^{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to U_0$ sont les morphismes structuraux,
- $\overline{Y}$ désigne $Y \times_k k^s$,
- $KD(Y) = [k^s(\overline{Y})^\times \to \operatorname{Div}(\overline{Y})] = \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^Y_*\mathbb{G}_m[1]$,
- $KD'(Y) = [k^s(\overline{Y})^\times / k^{s\times} \to \operatorname{Div}(\overline{Y})] = [\mathbb{G}_m \to \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^Y_*\mathbb{G}_m][1]$,
- $\mathcal{KD}(\mathcal{Y}) = \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^{\mathcal{Y}}_*\mathbb{G}_m[1]$,
- $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) = [\mathbb{G}_m \to \tau_{\leq 1}\mathbb{R}\pi^{\mathcal{Y}}_*\mathbb{G}_m][1]$.

Démonstration. — Soient $[Y] \in Ш^1(H)$ et $\alpha \in Б(H)$. On notera aussi α l'image réciproque de α par l'isomorphisme $Б(Y) \to Б(H)$. Soit U_0 un ouvert non vide de X tel qu'il existe :

- $\mathcal{Y}$ un modèle géométriquement intègre de Y sur U_0,
- $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^{(\mathrm{sc})}$) un groupe réductif sur un ouvert non vide de U_0 étendant H (resp. H^{sc}),
- un morphisme $\mathcal{H}^{(\mathrm{sc})} \to \mathcal{H}$ étendant $H^{\mathrm{sc}} \to H$,
- $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}$) un tore sur U_0 étendant T (resp. $T^{(\mathrm{sc})}$),
- un morphisme $\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})} \to \mathcal{T}$ étendant $T^{(\mathrm{sc})} \to T$,
- un morphisme $\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})} \to \mathcal{H}^{(\mathrm{sc})}$ étendant $T^{(\mathrm{sc})} \hookrightarrow H^{\mathrm{sc}}$,
- un morphisme $\mathcal{T} \to \mathcal{H}$ étendant $T \hookrightarrow H$,
- un morphisme $\mathcal{H} \times_{U_0} \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ étendant l'action $H \times_K Y \to Y$ de H sur Y,

et tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})} & \longrightarrow & \mathcal{T} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathcal{H}^{(\mathrm{sc})} & \longrightarrow & \mathcal{H}
\end{array}$$

est commutatif. On adopte en outre les notations suivantes :

- $\hat{\mathcal{T}}$ et $\widehat{\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}}$ désignent les modules de caractères de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}$,
- $\mathcal{G} = [\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})} \to \mathcal{T}]$ et $\tilde{\mathcal{G}} = [\hat{\mathcal{T}} \to \widehat{\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}}]$,

- U désigne un ouvert de U_0 tel que α s'étend en un élément $\alpha_U \in H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y}))$ et tel que $\mathrm{ab}^1([Y])$ s'étend en un élément de $H^1(U, \mathcal{G})$,
- $\mathcal{E}_Y$ désigne la classe du morphisme naturel $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \to \mathbb{G}_m[2]$ dans le groupe $\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y})), \mathbb{G}_m[1])$,
- $C(\mathcal{H}) = [\mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H}^{(\mathrm{sc})})][-1]$ et $C(\mathcal{T}) = [\mathcal{KD}'(\mathcal{T}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})})][-1]$,
- $\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) = \mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}), \mathbb{G}_m[1]) \oplus \mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1])$ et $H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H})) = H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y})) \oplus H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{H}))$.

On dispose d'un diagramme commutatif d'accouplements :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y})) \arrow[d] \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{H})) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{KD}'(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, \mathcal{KD}'(\mathcal{H})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(C(\mathcal{H}), \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, C(\mathcal{H})) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(C(\mathcal{T}), \mathbb{G}_m[1]) \arrow[u] \arrow[d] & \times & H^1_c(U, C(\mathcal{T})) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\mathrm{Ext}^1_U(\tilde{\mathcal{G}}, \mathbb{G}_m[1]) & \times & H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \arrow[u] \arrow[d, equal] \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
H^1(U, \mathcal{G}) \arrow[u] & \times & H^1_c(U, \tilde{\mathcal{G}}) \arrow[r] & H^3_c(U, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont induits (du haut vers le bas) par :

- le morphisme $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$ induit par le morphisme $\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ qui étend l'action de H sur Y,
- le morphisme naturel $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$ induit par les projections,
- la projection $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$,
- le morphisme naturel $C(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$,

- le morphisme naturel $C(\mathcal{H}) \to C(\mathcal{T})$,
- le morphisme $\tilde{\mathcal{G}} \to C(\mathcal{T})$ le morphisme induit par $\hat{\mathcal{T}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}}\mathbb{G}_m] \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T})[-1]$ et par $\hat{\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}} \cong [\mathbb{G}_m \to \pi_*^{\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})}}\mathbb{G}_m] \to \mathcal{KD}'(\mathcal{T}^{(\mathrm{sc})})[-1]$,
- l'accouplement $\mathcal{G} \otimes^{\mathbf{L}} \tilde{\mathcal{G}} \to \mathbb{G}_m[1]$.

De manière analogue à la proposition 3.3 de [15], on peut montrer que :

$$\mathrm{BM}([Y], (\alpha)) = \mathcal{E}_Y \cup \alpha_U.$$

De plus, l'article [3] impose que l'isomorphisme

$$H^1(K, G) \to \mathrm{Ext}^1_K(KD'(Y), \mathbb{G}_m[1])$$

envoie $\mathrm{ab}^1([Y])$ sur $-E_Y$, où E_Y désigne l'image de $\mathcal{E}_Y$ dans $\mathrm{Ext}^1_K(KD'(Y), \mathbb{G}_m[1])$ (théorème 5.5), et que les morphismes $\mathcal{KD}'(\mathcal{Y}) \oplus \mathcal{KD}'(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{Y} \times_U \mathcal{H})$, $C(\mathcal{H}) \to \mathcal{KD}'(\mathcal{H})$ et $\tilde{\mathcal{G}} \to C(\mathcal{T})$ deviennent des isomorphismes sur la fibre générique (lemmes 5.2, 4.3 et 4.2). Donc, quitte à diminuer U, on en déduit que :

$$\mathrm{PT}(\mathrm{ab}^1([Y]), B(\alpha)) = -\mathcal{E}_Y \cup \alpha_U = -\mathrm{BM}([Y], (\alpha)). \qquad \square$$

Remarque 3.7. — Pour établir la proposition 3.3 de [15], on a besoin de donner une autre construction du morphisme $\mathrm{BM}([Y], .)$ à l'aide du lemme du serpent (lemme 3.1). Dans notre situation, dans la preuve précédente, pour montrer que $\mathrm{BM}([Y], (\alpha)) = \mathcal{E}_Y \cup \alpha_U$, il convient de remarquer que la même construction marche même si le morphisme $\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v)$ n'est pas injectif et son conoyau n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: en fait, la loi de réciprocité de Weil fournit un morphisme $\mathrm{Coker}(\mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in X^{(1)}} \mathrm{Br}(K_v)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et cela nous suffit.

Théorème 3.8 (Obstruction au principe local-global). — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. L'accouplement* $\mathrm{BM} : Ш^1(H) \times \overline{Б(H)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *induit une bijection* $Ш^1(H) \cong \overline{Б(H)}^D$.

Démonstration. — Cela découle du lemme précédent, du théorème 1.5, et du fait que ab^1 est une bijection et que B est un isomorphisme. $\square$

Remarque 3.9. — Comme la cohomologie d'un groupe unipotent sur un corps de caractéristique 0 est triviale, en quotientant par le radical unipotent, on voit que le théorème précédent reste valable pour un groupe algébrique linéaire connexe quelconque.

Corollaire 3.10. — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t))$. Soit H un groupe linéaire connexe quelconque sur K. La seule obstruction au principe local-global pour les K-espaces homogènes sous H est l'obstruction de Brauer-Manin associée à $Б(H)$.*

REMARQUE 3.11. — Ce corollaire découle uniquement de la non-dégénérescence à gauche de l'accouplement BM : les résultats de l'article [9] étaient donc déjà suffisants pour l'établir.

3.2.2. *Cas $d = 1$.* — Dans cette section, on suppose que $k = \mathbb{C}((t_1))((t_2))$ (le cas où k est p-adique a été traité dans la partie 6 de [16]). Soit H un groupe réductif sur K tel que H^{sc} est quasi-déployé. On suppose de plus que :

- le groupe $Ш^2(\mathbb{Z})$ est nul,
- le groupe H est déployé sur une extension finie galoisienne L de K (ie H possède un tore maximal qui devient déployé sur L) telle que $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$.

REMARQUE 3.12. — (i) L'hypothèse $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$ implique que $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$, mais la réciproque est fausse. En effet :
  - si $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $Ш^2(\mathbb{G}_m)$ est d'exposant fini ; comme il est divisible, il est nul ;
  - pour voir que la réciproque est fausse, il suffit de choisir $K = \mathbb{C}((t_1))((t_2))(x)$ et L la clôture galoisienne d'une extension finie L' de K telle que $Ш^2(L', \mathbb{G}_m) \neq 0$ (cela est possible grâce à l'exemple 5.17 de [19]).

  De même, si $Ш^2(L, \mathbb{Z}) = 0$, alors $Ш^2(\mathbb{Z}) = 0$, mais la réciproque est fausse.

(ii) Les nullités de $Ш^2(\mathbb{Z})$ et de $Ш^2(L, \mathbb{G}_m)$ ont été étudiées dans [19].

Soit E un espace principal homogène sous H tel que $E(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 3.1, on peut construire un morphisme $\rho_E : H^3_{\mathrm{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Exactement de la même manière que dans la partie 6 de [16], on peut montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.13. — *On rappelle que l'on a supposé que X est une courbe sur $k = \mathbb{C}((t_1))((t_2))$. Si H^{sc} n'a pas de facteur E_8 et si ρ_E est le morphisme trivial, alors $E(K) \neq \emptyset$. Si H^{sc} est de type E_8 et si ρ_E est le morphisme trivial, alors E possède un zéro-cycle de degré 1.*

REMARQUE 3.14. — (i) La preuve fait appel à l'invariant de Rost. En particulier, on utilise les deux résultats suivants :
  - pour H' un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé sur un corps K' de dimension cohomologique au plus 3, si H' n'est pas de type E_8, le noyau de l'invariant de Rost $H^1(K', H') \to H^3(K', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est trivial (théorème 5.3 de [10]) ;

- pour H' un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type E_8 sur un corps K' de dimension cohomologique au plus 4, tout torseur sous H' représentant une classe du noyau de l'invariant de Rost $H^1(K',H') \to H^3(K',\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ admet un zéro-cycle de degré 1 ([5], [6], [29]).

(ii) La nullité de $Ш^2(\mathbb{Z})$ est utilisée pour établir un résultat analogue à la proposition 6.2 de [16], ou plus précisément pour montrer l'injectivité du morphisme $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$: le noyau de $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est isomorphe à $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$, qui est nul si, et seulement si, $Ш^2(\mathbb{Z})$ l'est d'après une variante du lemme 3.18 de [21].

(iii) La nullité du $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ permet de calculer la cohomologie des tores quasi-triviaux. Plus précisément, dans la partie 6 de [16], on a besoin de considérer une z-extension (suite exacte (37)) faisant intervenir un tore quasi-trivial Q. Il se trouve qu'avec le choix que nous avons fait du corps L, on peut supposer que le module des caractères de Q est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre (proposition V.3.1 de [11]). Comme $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ est nul, cela permet d'établir avec le lemme de Shapiro que $Ш^2(Q)$ et $Ш^3(\tilde{Q})$ sont nuls.

3.2.3. *Cas $d > 1$.* — Dans cette section, on suppose que $d > 1$. Soit H un groupe réductif sur K tel que H^{sc} est quasi-déployé. Soit L une extension finie galoisienne de K telle que H contient un tore maximal déployé sur L. On suppose que $Ш^4(\mathbb{Z}(2)) = 0$ et que $Ш^2(L,\mathbb{G}_m) = 0$.

Remarque 3.15. — La nullité de $Ш^2(L,\mathbb{G}_m)$ a été étudiée dans [19].

Soit E un espace principal homogène sous H tel que $E(\mathbb{A}_K) \neq \emptyset$. Comme dans la partie 3.1, on peut construire un morphisme $\rho_E : H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On peut alors montrer le théorème suivant :

Théorème 3.16. — *On rappelle que l'on a supposé que $d > 1$.*

(i) *Si ρ_E est le morphisme trivial et si H^{sc} ne contient que des facteurs de type A_n avec $n \leq 5$, B_n avec $n \leq 6$, C_n avec $n \leq 5$, D_n avec $n \leq 6$, ${}^1D_7$, E_6, E_7, F_4, G_2, alors $E(K) \neq \emptyset$.*

(ii) *Si $d = 2$, ρ_E est le morphisme trivial et H^{sc} est de type E_8, alors E possède un zéro-cycle de degré 1.*

La preuve est très similaire à celle du théorème 6.1 de [16] mais présente quelques différences que nous signalons dans la suite.

Preuve (esquisse). —
- Comme le noyau de l'invariant de Rost d'un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type A_n avec $n \leq 5$, B_n avec $n \leq 6$, C_n avec $n \leq 5$, D_n avec $n \leq 6$, ${}^1D_7$, E_6, E_7, F_4 ou G_2 est trivial (théorèmes 0.1 et

0.5 de [12]) et comme tout torseur dans le noyau de l'invariant de Rost d'un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple quasi-déployé de type E_8 sur un corps de dimension cohomologique au plus 4 a un zéro-cycle de degré 1 ([5], [6], [29]), on montre la propriété suivante exactement de la même manière que la proposition 6.2 de [16] : sous les hypothèses de (i), le noyau de $H^1(K, H^{\mathrm{sc}}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v, H^{\mathrm{sc}}))$ est trivial ; sous les hypothèses de (ii), tout torseur sous H^{sc} représentant un élément de $\mathrm{Ker}(H^1(K, H^{\mathrm{sc}}) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^1(K_v, H^{\mathrm{sc}}))$ possède un zéro-cycle de degré 1. Dans la preuve de ces résultats, l'injectivité de $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \prod_{v\in X^{(1)}} H^3(K_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ découle de la nullité de $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$.

- On considère une z-extension de H :

$$1 \to Q \to H_z \to H \to 1.$$

C'est une extension centrale de K-groupes réductifs, Q est un tore quasi-trivial dont le module des caractères est un module libre sur l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$, et le sous-groupe dérivé H_z^{ss} de H_z est H^{sc}. Comme H_z est réductif, on dispose aussi d'une suite exacte $1 \to H^{\mathrm{sc}} \to H_z \to H_z/H^{\mathrm{sc}} \to 1$ où H_z/H^{sc} est un tore. On prouve alors de la même manière que le lemme 6.4 et la proposition 6.5 de [16] le résultat suivant : le morphisme naturel d'ensembles pointés $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H)$ est un isomorphisme, et le noyau du morphisme naturel d'ensembles pointés $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H_z/H^{\mathrm{sc}})$ est trivial. Pour ce faire, il est nécessaire de montrer que $Ш^2(Q)$ est nul : cela découle immédiatement du lemme de Shapiro, du fait que $\hat{Q}$ est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre et de la nullité de $Ш^2(L, \mathbb{G}_m)$. On notera E_z un torseur sous H_z représentant l'image réciproque de E par l'isomorphisme $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H)$, et Y un torseur représentant l'image de E_z par $Ш^1(H_z) \to Ш^1(H_z/H^{\mathrm{sc}})$.

- On note T (resp. T_z) un tore maximal de H (resp. H_z). On note $T^{(\mathrm{sc})}$ (resp. $T_z^{(\mathrm{sc})}$) l'image réciproque de T (resp. T_z) dans H^{sc} (resp. H_z^{sc}). On note finalement $G = [T^{(\mathrm{sc})} \to T]$ et $G_z = [T_z^{(\mathrm{sc})} \to T_z]$. Le lemme des cinq et le lemme 6.7 de [28] fournissent un isomorphisme $H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong H^1(\overline{H}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ et donc un isomorphisme $H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_K(\check{T}/\check{T^{(\mathrm{sc})}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ d'après la proposition 6.7 de [7]. Comme $\check{T^{(\mathrm{sc})}} \to \check{T}$ est injectif, on obtient ainsi un isomorphisme :

$$\begin{aligned} H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}_K(\check{T}/\check{T^{(\mathrm{sc})}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \\ &\cong H^0\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_K([\check{T^{(\mathrm{sc})}} \to \check{T}], \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)). \end{aligned}$$

On a alors un morphisme naturel $H^0(\tilde{G}_t[-1]) \to H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))$ induit par l'accouplement $[\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} [\check{T^{(\mathrm{sc})}} \to \check{T}] \to \mathbb{Z}[1]$ construit dans la preuve du lemme 4.3 du chapitre 1 de [20]. Comme $\check{T^{(\mathrm{sc})}} \to \check{T}$ est injectif et le conoyau de $\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}$ est fini, on a $H^0(\tilde{G}_t[-1]) = \tilde{G}_t[-1]$, et on a une suite exacte :

$$H^{d+1}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]) \to H^{d+1}(K, \tilde{G}_t[-1]) \to H^{d+2}(K, \tilde{G}[-1])$$
$$\to H^{d+2}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]).$$

Montrons que $H^{d+1}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$ est nul. Pour ce faire, on dispose de la suite exacte $H^{d+1}(K, \mathrm{Ker}(\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)) \to H^{d+1}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]) \to H^{d+1}(K, \mathrm{Coker}(\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$. Le troisième terme est nul car $\mathrm{Coker}(\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}})$ est fini. Quant au premier, il est divisible et, le groupe $H^{d+1}(K', \mathbb{Q}(d))$ étant nul pour chaque corps K', un argument de restriction-corestriction montre qu'il est d'exposant fini. Il est donc nul, et *a fortiori* le groupe $H^{d+1}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1])$ l'est aussi.

On montre de même que $H^{d+2}(K, [\hat{T} \to \hat{T^{(\mathrm{sc})}}] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbb{Q}(d)[-1]) = 0$, et on obtient donc un isomorphisme :

$$H^{d+1}(K, \tilde{G}_t[-1]) \cong H^{d+2}(K, \tilde{G}[-1]),$$

qui permet de construire par composition un morphisme :

$$H^{d+2}(K, \tilde{G}[-1]) \to H^{d+1}(K, H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))).$$

En composant avec le morphisme

$$H^{d+1}(K, H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))) \to H^{d+2}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)),$$

on obtient un morphisme :

$$H^{d+1}(K, \tilde{G}) \to H^{d+2}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1))/H^{d+2}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

En passant aux éléments localement triviaux, cela induit un morphisme :

$$Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

De même, on a des morphismes :

$$Ш^{d+1}(\tilde{G_z}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E_z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)),$$
$$Ш^{d+2}((H_z/H^{\mathrm{sc}})^{\sim}) \to H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)).$$

En exploitant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Ш^{d+2}((H_z/H^{\mathrm{sc}})^{\sim}) \arrow[r] \arrow[d] & Ш^{d+1}(\tilde{G_z}) \arrow[d] & Ш^{d+1}(\tilde{G}) \arrow[l] \arrow[d] \\
H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(Y, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \arrow[r] & H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E_z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) & H^{d+2}_{\mathrm{lc}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et en utilisant le théorème 3.1, on voit qu'il suffit de montrer que le morphisme $Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to Ш^{d+1}(\tilde{G_z})$ est un isomorphisme.

Pour ce faire, on écrit le triangle distingué $\tilde{G} \to \tilde{G}_z \to \tilde{Q}[1] \to \tilde{G}[1]$. Comme Q est quasi-trivial, le lemme de Shapiro et la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum imposent que $H^{d+1}(K, \tilde{Q}) = H^{d+1}(K_v, \tilde{Q}) = 0$. De plus, en utilisant toujours le lemme de Shapiro et le fait que $\hat{Q}$ est un $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-module libre, on a $Ш^{d+2}(\tilde{Q}) = Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d))^m$ pour un certain m, qui est nul d'après le lemme 3.18 de [21] puisque $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$. Par conséquent, le morphisme $Ш^{d+1}(\tilde{G}) \to Ш^{d+1}(\tilde{G}_z)$ est bien un isomorphisme, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 3.17. — Dans le cas $d = 2$, on n'a pas besoin de supposer que $Ш^4(\mathbb{Z}(2)) = 0$. En effet, comme $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$, un argument de restriction-corestriction montre que $Ш^2(\mathbb{G}_m) = 0$, et donc, en vertu du lemme 3.18 de [21], $Ш^4(\mathbb{Z}(2))$ est automatiquement nul. En particulier, dans ce cas, il suffit de supposer que le corps L vérifie les hypothèses du corollaire 5.11 ou du corollaire 5.12 de [19].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bloch – « Algebraic cycles and higher K-theory », *Adv. in Math.* **61** (1986), p. 267–304.

[2] M. Borovoi – « Abelian Galois cohomology of reductive groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **132** (1998).

[3] M. Borovoi & J. van Hamel – « Extended Picard complexes and linear algebraic groups », *J. reine angew. Math.* **627** (2009), p. 53–82.

[4] F. Bruhat & J. Tits – « Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **34** (1987), p. 671–698.

[5] V. Chernousov – « A remark on the (mod 5)-invariant of Serre for groups of type E_8 », *Mat. Zametki* **56** (1994), p. 116–121, 157.

[6] ———, « On the kernel of the Rost invariant for E_8 modulo 3 », in *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, Dev. Math., vol. 18, Springer, New York, 2010, p. 199–214.

[7] J.-L. Colliot-Thélène – « Résolutions flasques des groupes linéaires connexes », *J. reine angew. Math.* **618** (2008), p. 77–133.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille & R. Parimala – « Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields », *Duke Math. J.* **121** (2004), p. 285–341.

[9] J.-L. Colliot-Thélène & D. Harari – « Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$ », *Proc. Lond. Math. Soc.* **110** (2015), p. 1475–1516.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala & V. Suresh – « Patching and local-global principles for homogeneous spaces over function fields of p-adic curves », *Comment. Math. Helv.* **87** (2012), p. 1011–1033.

[11] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus & K.-y. Shih – *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math., vol. 900, Springer, Berlin-New York, 1982.

[12] R. S. Garibaldi – « The Rost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank », *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), p. 684–711.

[13] C. D. González-Avilés – « Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology », *J. Algebra* **369** (2012), p. 235–255.

[14] D. Harari, C. Scheiderer & T. Szamuely – « Weak approximation for tori over p-adic function fields », *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), p. 2751–2783.

[15] D. Harari & T. Szamuely – « Local-global principles for 1-motives », *Duke Math. J.* **143** (2008), p. 531–557.

[16] ______, « Local-global questions for tori over p-adic function fields », *J. Algebraic Geom.* **25** (2016), p. 571–605.

[17] D. Harbater, J. Hartmann & D. Krashen – « Applications of patching to quadratic forms and central simple algebras », *Invent. math.* **178** (2009), p. 231–263.

[18] ______, « Local-global principles for Galois cohomology », *Comment. Math. Helv.* **89** (2014), p. 215–253.

[19] D. Izquierdo – « Principe local-global pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs I », *J. Number Theory* **157** (2015), p. 250–270.

[20] ______, « Dualité et principe local-global sur les corps de fonctions », Thèse, Université Paris-Saclay, 2016, disponible sur `http://www.math.ens.fr/~izquierd//These30_10_2016.pdf`.

[21] ______, « Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs », *Math. Z.* **284** (2016), p. 615–642.

[22] ______, « Dualité pour les groupes de type multiplicatif sur certains corps de fonctions », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **355** (2017), p. 268–271.

[23] S. Lang – « On quasi algebraic closure », *Ann. of Math.* **55** (1952), p. 373–390.

[24] ______, *Algebra*, 3e éd., Graduate Texts in Math., vol. 211, Springer, New York, 2002.

[25] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, 2e éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[26] M. Nagata – « Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure », *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.* **30** (1957), p. 237–241.

[27] R. Parimala – « Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 339–361.

[28] J.-J. Sansuc – « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. reine angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.

[29] N. Semenov – « Motivic construction of cohomological invariants », *Comment. Math. Helv.* **91** (2016), p. 163–202.