Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

OBSTRUCTIONS DE BRAUER-MANIN ENTIÈRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES À STABILISATEURS FINIS NILPOTENTS

Cyril Demarche

Tome 145
Fascicule 2

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 225-236

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 145, juin 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
`christian.smf@cirm-math.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`bullsmf@ihp.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (2), 2017, p. 225-236

OBSTRUCTIONS DE BRAUER-MANIN ENTIÈRES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES À STABILISATEURS FINIS NILPOTENTS

PAR CYRIL DEMARCHE

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de nombres. On construit des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis nilpotents non commutatifs pour lesquels l'obstruction de Brauer-Manin est insuffisante pour expliquer le défaut d'approximation forte (resp. le défaut du principe de Hasse entier).

ABSTRACT (*Integral Brauer-Manin obstructions on homogeneous spaces with finite nilpotent stabilizers*). — Let k be a number field. We construct homogeneous spaces of $\mathrm{SL}_{n,k}$ with finite nilpotent non-abelian stabilizers for which the Brauer-Manin obstruction does not explain the failure of strong approximation (resp. the failure of the integral Hasse principle).

Texte reçu le 22 juillet 2014, modifié le 18 mai 2016, accepté le 18 mai 2016.

CYRIL DEMARCHE, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, CNRS, Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, F-75005, Paris, France - Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University, 75005 Paris, France •
E-mail : `cyril.demarche@imj-prg.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E72; 14G05, 14M17, 20G30.

Mots clefs. — Principe de Hasse, approximation forte, obstruction de Brauer-Manin, espaces homogènes.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

doi:10.24033/bsmf.2735

0. Introduction

Si k est un corps de nombres et H est un k-groupe algébrique fini, il serait très intéressant de connaître pour quels ensembles finis S de places de k l'application naturelle entre ensembles pointés de cohomologie galoisienne

$$H^1(k,H) \to \prod_{v\in S} H^1(k_v,H)$$

est surjective. Cette question (parfois appelée problème de Grunwald), motivée par exemple par le problème inverse de Galois et par celui de l'existence de corps de nombres à ramification prescrite, est intimement liée à l'étude de l'approximation faible sur l'espace homogène $\mathrm{SL}_{n,k}/H$ défini par une représentation fidèle $H \to \mathrm{SL}_{n,k}$ (voir par exemple [10]), et plus précisément à l'étude de l'obstruction de Brauer-Manin à ladite approximation faible sur cette variété. Ce problème est encore loin d'être résolu (voir par exemple [10], [5] et [12]), tout comme son analogue concernant le principe de Hasse sur des espaces homogènes à stabilisateurs géométriques finis. Les deux questions ouvertes principales concernant ce problème sont sans doute les suivantes :

- Étant donné un espace homogène X sur k du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs géométriques finis, la non-vacuité de l'ensemble de Brauer-Manin $\left(\prod_v X(k_v)\right)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ (voir [15], 5.2) implique-t-elle l'existence d'un point rationnel sur X ?
- Et si $X(k) \neq \emptyset$, l'ensemble des points rationnels $X(k)$ est-il dense (pour la topologie produit) dans l'ensemble de Brauer-Manin $\left(\prod_v X(k_v)\right)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$?

Dans cette note, on s'intéresse aux versions entières de ces questions, à savoir le principe de Hasse entier et l'approximation forte sur les espaces homogènes du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis sur un corps de nombres k.

On montre que pour de telles variétés algébriques, si les stabilisateurs sont des p-groupes constants non commutatifs et si le corps de base contient suffisamment de racines de l'unité, l'obstruction de Brauer-Manin (même en tenant compte de la partie dite « transcendante » du groupe de Brauer) ne permet pas d'expliquer le défaut d'approximation forte (théorème 2.1) ou du principe de Hasse entier (corollaire 4.1). Autrement dit, concernant l'approximation forte, pour tout p-groupe fini non commutatif H et tout morphisme injectif de groupes $H \to \mathrm{SL}_{n,k}$, l'espace homogène quotient $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$ possède des points adéliques vérifiant les conditions de Brauer-Manin qui ne peuvent être approximés pour la topologie adélique par des points rationnels de X (hors d'un ensemble fini fixé de places de k) ; concernant le principe de Hasse entier, sous les mêmes hypothèses, il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X, fidèlement plat séparé de type fini sur un anneau d'entiers de k, tel que $\mathcal{X}$ possède des points entiers localement partout vérifiant les conditions de Brauer-Manin, mais tel que $\mathcal{X}$ n'admette cependant pas de point entier global.

En particulier, cela montre combien l'arithmétique des espaces homogènes à stabilisateurs finis diffère de celle des espaces homogènes à stabilisateurs connexes ou abéliens, où au contraire l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction à l'approximation forte et au principe de Hasse entier (voir par exemple [3] ou [1]).

Ces réponses négatives à la suffisance des obstructions de Brauer-Manin entières ne permettent toutefois pas d'apporter une réponse aux questions analogues mentionnées plus haut concernant le principe de Hasse rationnel et l'approximation faible, qui demeurent donc toujours largement ouvertes.

Remerciements. — Je remercie vivement Jean-Louis Colliot-Thélène, Yonatan Harpaz et Giancarlo Lucchini Arteche pour leurs précieux commentaires et leur intérêt pour ce texte. Je remercie tout particulièrement David Harari et Gregorio Baldi de m'avoir signalé une erreur dans une version précédente de cet article. Je remercie enfin le rapporteur pour ses suggestions, notamment à propos de la proposition 1.1.

Quelques notations. — Dans tout ce texte, k est un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique fixée de k, Γ_k désigne le groupe de Galois de l'extension $\overline{k}/k$. Dans toute cette note, la cohomologie utilisée est la cohomologie étale.

Si k est un corps de nombres, on note Ω_k l'ensemble des places de k ; si $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers (par convention, $\mathcal{O}_v := k_v$ si v est une place non archimédienne) ; si S est un ensemble fini de places de k, on note $\mathcal{O}_{k,S}$ l'anneau des S-entiers de k et $\mathbf{A}_k^S$ l'anneau des adèles hors de S.

Si A est un groupe topologique, on note $A^D := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ le groupe des homomorphismes continus de A vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Si X est une k-variété, on note $\mathrm{Br}(X) := H^2(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer de X. On renvoie à [15] pour la définition de l'accouplement de Brauer-Manin $X(\mathbf{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et du sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$, ainsi qu'à la première section de [3] pour les généralités sur l'approximation forte et l'obstruction de Brauer-Manin entière.

1. Groupe de Brauer

Dans cette section, on montre le résultat simple suivant, qui généralise les résultats classiques sur la partie algébrique du groupe de Brauer dans un cas particulier. Si k est un corps et H un k-groupe algébrique, on note $\mathrm{Ext}_k^c(H, \mathbf{G}_m)$ le groupe des extensions centrales de k-groupes algébriques de H par $\mathbf{G}_m$.

PROPOSITION 1.1. — *Soit k un corps de caractéristique nulle et G un k-groupe algébrique semi-simple simplement connexe. Soit H un k-sous-groupe constant* *fini de G, $X := G/H$ l'espace homogène correspondant et $\pi : G \to X$ la projection. On définit* $\mathrm{Br}(X,G) := \ker(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(G))$.

Alors on dispose d'un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\Delta'_X : \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Br}(X,G) \cong \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)\,,$$

qui est fonctoriel en H au sens suivant : si $K \subset H$ est un sous-groupe de H, alors le morphisme canonique $f : Y := G/K \to X = G/H$ induit un diagramme naturel

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \arrow[r, "\Delta'_X"] \arrow[d] & \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{Ext}^c_k(K, \mathbf{G}_m) \arrow[r, "\Delta'_Y"] & \mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(k) \end{tikzcd}$$

qui est commutatif.

Remarque 1.2. — On dispose également du morphisme naturel

$$\Delta_X : \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Br}(X,G) \cong \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$$

qui est donné par le cobord en cohomologie étale (voir par exemple [3], p.313–314). Il est probable que les morphismes Δ_X et Δ'_X coïncident (au signe près), mais une telle comparaison n'est pas nécessaire dans ce texte.

Démonstration. — Puisque le groupe H est constant, on dispose de la suite spectrale de Hochschild-Serre relative au revêtement galoisien $\pi : G \to X$ (qui est un X-torseur sous le groupe H) :

$$E_2^{p,q} = H^p(H, H^q(G, \mathbf{G}_m)) \implies H^{p+q}(X, \mathbf{G}_m)\,.$$

Comme $\mathrm{Pic}(G) = 0$ et $k[G]^* = k^*$, cette suite spectrale induit un isomorphisme naturel

$$H^2(H, k^*) \xrightarrow{\cong} \ker(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(G)) = \mathrm{Br}(X,G)\,,$$

où l'action de H sur k^* est triviale.

Ensuite, puisque H est un groupe constant, on a un isomorphisme de groupes abéliens $H^2(H, k^*) \cong H^2_0(H, \mathbf{G}_m)$, où le second groupe est le groupe de cohomologie de Hochschild pour l'action triviale du k-groupe H sur le k-groupe $\mathbf{G}_m$.

Enfin, un résultat classique (voir par exemple [6], II.3, proposition 2.3) assure que ce dernier groupe de cohomologie de Hochschild s'identifie canoniquement au groupe $\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m)$.

On a donc construit un isomorphisme canonique $\Delta'_X : \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Br}(X,G)$, dont il est facile de vérifier la fonctorialité en H.

Enfin, l'isomorphisme $\mathrm{Br}(X,G) \cong \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est une conséquence du théorème principal de [9] et de son corollaire, qui assurent que $\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}(G)$. □

2. Obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte

Soit k un corps de nombres. On considère l'espace homogène $X := G/H$, où G est un k-groupe algébrique semi-simple simplement connexe, et H un k-sous-groupe fini *constant* nilpotent de G. Si S est un ensemble fini de places de k, on note $\pi^S : X(\mathbf{A}_k) \to X(\mathbf{A}_k^S)$ la projection des points adéliques de X vers les points adéliques hors de S dans X, et $\overline{X(k)}^S$ l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbf{A}^S)$ (muni de la topologie adélique).

Théorème 2.1. — *Soit p un nombre premier. Pour tout groupe fini* non commutatif *H d'ordre p^n, pour tout ensemble fini S_0 de places de k, si k contient les racines p^{n+1}-ièmes de l'unité, alors il existe un point adélique $x \in X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ tel que $\pi^{S_0}(x) \notin \overline{X(k)}^{S_0}$.*

Autrement dit, « l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte » sur X n'est pas la seule.

Remarque 2.2. — On ne peut pas véritablement parler a priori d'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte en général (notamment quand le groupe de Brauer de X modulo le groupe de Brauer de k est infini), c'est pourquoi l'expression est entre guillemets dans l'énoncé. Il faut donc comprendre l'énoncé « l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte sur X n'est pas la seule » au sens de la définition 2.4 de [4], c'est-à-dire au sens qui est explicité dans l'énoncé du théorème.

Démonstration. — La proposition 1.1 assure que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Delta'_X : \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)\,,$$

qui est fonctoriel en H au sens précisé dans l'énoncé de la proposition 1.1. Puisque H est nilpotent, il existe un sous-groupe central Z d'ordre p contenu dans le sous-groupe dérivé $D(H)$. On considère alors la suite exacte naturelle

$$1 \to Z \to H \to H' := H/Z \to 1\,.$$

Cette suite induit le complexe suivant

$$\mathrm{Ext}^c_k(H', \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(Z, \mathbf{G}_m)\,. \tag{1}$$

Montrons le lemme clé suivant :

Lemme 2.3. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(Z, \mathbf{G}_m)$ est le morphisme nul.*

Démonstration. — On constate d'abord que le groupe $\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \cong H^2(H, k^*)$ est un groupe abélien de p^n-torsion, car H est de cardinal p^n. En outre, la suite naturelle de morphismes de groupes

$$\mathrm{Ext}^c_k(H, \mu_{p^n}) \to \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{[p^n]} \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m)$$

est exacte, comme l'assure la proposition A.2.1.(a) de l'exposé XVII de [7]. Cela assure donc que le morphisme

$$\mathrm{Ext}^c_k(H, \mu_{p^n}) \to \mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m)$$

est surjectif.

Soit une extension centrale

$$1 \to \mathbf{G}_m \to H_1 \to H \to 1\,.$$

On sait donc qu'il existe une extension centrale

$$1 \to \mu_{p^n} \to H_2 \to H \to 1$$

et un diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu_{p^n} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H_2 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & H_1 \arrow[r] & H \arrow[r] & 1\,, \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion canonique.

Notons alors

$$1 \to \mu_{p^n} \to Z_2 \to Z \to 1$$

la suite exacte obtenue en tirant en arrière l'extension H_2 par l'inclusion $Z \to H$. Puisque Z est cyclique d'ordre p, l'extension Z_3 obtenue à partir de Z_2 en poussant en avant selon le morphisme naturel $\mu_{p^n} \to \mu_{p^{n+1}}$ est scindée sur $\overline{k}$. On obtient donc finalement un diagramme commutatif dont les lignes sont des extensions centrales de k-groupes et dont le carré de droite est cartésien :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu_{p^{n+1}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & Z_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mu_{p^{n+1}} \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H \arrow[r] & 1\,, \end{tikzcd}$$

où H_3 est obtenu en poussant en avant H_2 par le morphisme $\mu_{p^n} \to \mu_{p^{n+1}}$ et où l'extension supérieure est scindée comme extension de groupes abstraits.

On remarque alors que pour tous $g, h \in H_3(\overline{k})$ et tout $\gamma \in \Gamma_k$, ${}^\gamma[g,h] = [{}^\gamma g, {}^\gamma h]$. Or le groupe H est constant, donc pour tout $g \in H_3(\overline{k})$ et tout $\gamma \in \Gamma_k$, ${}^\gamma g$ diffère de g par un élément du centre de H_3. Par conséquent, pour tous $g, h \in H_3(\overline{k})$ et tout $\gamma \in \Gamma_k$, ${}^\gamma[g,h] = [{}^\gamma g, {}^\gamma h] = [g,h]$. Donc Γ_k agit trivialement sur les commutateurs, donc sur $D(H_3(\overline{k}))$.

Or le sous-groupe $Z_3(\overline{k})$ de $H_3(\overline{k})$ est contenu dans le sous-groupe de $H_3(\overline{k})$ engendré par $D(H_3(\overline{k}))$ et $\mu_{p^{n+1}}(\overline{k})$, donc on en déduit que l'action de Galois sur $Z_3(\overline{k})$ est triviale (on rappelle que $\mu_{p^{n+1}}(\overline{k}) \subset k^*$). Cela assure que l'extension

Z_3 est scindée comme extension de k-groupes algébriques. En particulier, cela implique que l'extension

$$1 \to \mathbf{G}_m \to Z_1 \to Z \to 1\,,$$

obtenue en tirant en arrière H_1 (et qui coïncide avec l'extension Z_3 poussée par le morphisme $\mu_{p^{n+1}} \to \mathbf{G}_m$), est scindée, donc a une classe triviale dans $\mathrm{Ext}^c_k(Z, \mathbf{G}_m)$, ce qui conclut la preuve. □

Par conséquent, la proposition 1.1 assure que le morphisme canonique $f^* : \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(k)$ induit par $f : Y = G/Z \to X = G/H$ est le morphisme nul.

On rappelle que l'on dispose des applications caractéristiques suivantes (pour tout k-schéma T) qui s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y(T) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & H^1(T,Z) \arrow[d] \\
X(T) \arrow[r] & H^1(T,H)\,.
\end{tikzcd}$$

Via ces applications horizontales (fonctorielles en T), les propriétés d'approximation sur les k-variétés X et Y se traduisent en des propriétés d'approximation au niveau de la cohomologie galoisienne des groupes Z et H, traductions que l'on utilisera régulièrement dans la suite (voir par exemple [10]).

On a en outre un diagramme commutatif dont les deux premières lignes sont des suites exactes d'ensembles pointés :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^1(k,Z) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,H) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,H') \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k,Z) \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & P^1(k,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_Z"] & P^1(k,H) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_H"] & P^1(k,H') \arrow[r] & P^2(k,Z) \\
 & (\mathrm{Br}(Y)/\mathrm{Br}(k))^D \arrow[r, "0"] & (\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k))^D, & &
\end{tikzcd}$$

où $P^1(k,H)$ désigne le produit restreint des ensembles $H^1(k_v,H)$ par rapport aux sous-ensembles $H^1(\mathcal{O}_v,H)$ et ∂_Z (resp. ∂_H) est induite par l'accouplement de Brauer-Manin sur Y (resp. X).

Raisonnons maintenant par l'absurde pour démontrer le théorème 2.1 et supposons donc que pour un certain ensemble fini de places S_0, on ait $\overline{X(k)}^{S_0} \supset \pi^{S_0}\left(X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}\right)$.

Soit $(z_v) \in P^1(k,Z)$. On considère l'image $(h_v) \in P^1(k,H)$ de (z_v). Comme le morphisme $\mathrm{Ext}^c_k(H,\mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(Z,\mathbf{G}_m)$ est nul, on a $\partial_H((h_v)) = 0$.

Puisque par hypothèse $\overline{X(k)}^{S_0} \supset \pi^{S_0}\left(X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}\right)$, on sait que pour tout ensemble fini S contenant S_0, il existe $h^S \in H^1(\mathcal{O}_{k,S}, H)$ tel que $h^S_v = h_v$ pour tout $v \in S \setminus S_0$. Considérons alors l'image h'^S de h^S dans $H^1(\mathcal{O}_{k,S}, H')$. Par construction, on a $h'^S_v = 1$ pour tout $v \in S \setminus S_0$, donc $h'^S \in H^1(\mathcal{O}_{k,S_0}, H')$ (voir par exemple le corollaire A.8 de [8]). Or l'ensemble de cohomologie étale $H^1(\mathcal{O}_{k,S_0}, H')$ est fini, donc en prenant S suffisamment grand (indépendamment de (z_v)), on peut supposer que $h'^S_v = 1$ pour presque toute place v, donc $h'^S \in Ш^1_\omega(k, H') = 1$, donc $h'^S = 1$ dans $H^1(\mathcal{O}_{k,S}, H')$ car $H^1(\mathcal{O}_{k,S}, H') \to H^1(k, H')$ a un noyau trivial par restriction-inflation. Cela implique alors que h^S (pour S assez grand) se relève en $z^S \in H^1(\mathcal{O}_{k,S}, Z)$. Puisque pour toute place v, l'application $H^1(k_v, Z) \to H^1(k_v, H)$ est injective (car le groupe H est constant et Z est central dans H), on en déduit que pour toute place $v \in S \setminus S_0$, on a $z^S_v = z_v$.

En résumé, on a montré que pour tout $(z_v) \in P^1(k, Z)$, pour tout S contenant S_0, il existe $z^S \in H^1(\mathcal{O}_{k,S}, Z)$ tel que pour tout $v \in S \setminus S_0$, on a $z^S_v = z_v$.

Ce dernier fait contredit alors la suite exacte de Poitou-Tate pour Z : en effet, on dispose d'une suite exacte (voir par exemple [13], théorème I.4.10.(c))

$$H^1(k, Z) \to P^1(k, Z) \to H^1(k, \widehat{Z})^D ,$$

qui n'est autre qu'une variante de la première colonne du diagramme précédent. Le théorème de Grunwald-Wang assure qu'il existe $\alpha \in H^1(k, \widehat{Z})$ tel que $\alpha \neq 0$ et $\alpha_v = 0$ pour tout $v \in S_0$. On note S' l'ensemble des places v telles que α_v est ramifié. Comme $Ш^1_\omega(k, \widehat{Z}) = 0$, il existe $v_0 \notin S'$ tel que $\alpha_{v_0} \neq 0$. Il existe donc $z_{v_0} \in H^1(k_{v_0}, Z)$ non orthogonal à α_{v_0}. Si $S := S_0 \cup S' \cup \{v_0\}$, en posant $z_v := 0$ pour tout $v \in S \setminus \{v_0\}$, on constate grâce à la suite de Poitou-Tate rappelée plus haut que l'élément $(z_v)_{v \in S \setminus S_0}$ n'est pas dans l'image de $H^1(\mathcal{O}_{k,S}, Z)$, ce qui contredit effectivement la propriété obtenue auparavant.

Cette contradiction assure finalement que l'hypothèse initiale est fausse, donc cela démontre le théorème 2.1. □

3. Un exemple sur le corps des nombres rationnels

Dans cette partie, on construit un contre-exemple à l'approximation forte avec conditions de Brauer-Manin, sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels (i.e. en se passant de l'hypothèse du théorème 2.1 sur la présence de racines de l'unité dans le corps de base).

Proposition 3.1. — *Soit k un corps de nombres. Si $H = Q_8$ est le groupe des quaternions d'ordre 8 de centre Z, alors le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(Z, \mathbf{G}_m)$ est le morphisme nul.*

Démonstration. — On s'inspire de la preuve du lemme 2.3 : on constate qu'il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Ext}_k^c(H, \mu_8) \to \mathrm{Ext}_k^c(Z, \mu_8)$$

est le morphisme nul. Or la donnée d'une classe dans le groupe $\mathrm{Ext}_k^c(H, \mu_8)$ correspond à la donnée d'un groupe abstrait E de cardinal 64, muni d'une action du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$ et s'insérant dans une suite exacte centrale de k-groupes

$$1 \to \mu_8 \to E \to H \to 1\,.$$

En parcourant la liste des groupes d'ordre 64 avec GAP, on trouve seulement deux groupes qui sont extensions centrales de H par un groupe cyclique d'ordre 8, en l'occurrence les groupes numérotés 44 et 126 dans la classification de GAP. Or le second de ces deux groupes est le produit direct $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times H$, donc toute action de Galois sur ce groupe compatible avec la suite exacte précédente est donnée par un cocycle galoisien à valeurs dans le module des caractères $\widehat{H}$ de H. Par conséquent, l'image d'une telle extension centrale par le morphisme $\mathrm{Ext}_k^c(H, \mu_8) \to \mathrm{Ext}_k^c(Z, \mu_8)$ correspond à l'image du cocycle par le morphisme $H^1(k, \widehat{H}) \to H^1(k, \widehat{Z})$, qui est clairement le morphisme nul.

Considérons maintenant le cas restant du groupe E numéro 44 ; ce groupe peut être défini par générateurs et relations de la façon suivante :

$$E = \langle a, b : a^{16} = b^4 = 1, [a, b] = b^2 \rangle\,.$$

Avec les notations précédentes, le sous-groupe central cyclique d'ordre 8 est le sous-groupe engendré par $a^2 b^2$. Or on a la relation suivante dans E :

$$^{\gamma}b^2 = {}^{\gamma}[a, b] = [^{\gamma}a, {}^{\gamma}b] = [a, b] = b^2\,,$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, donc l'action de Galois sur b^2 est triviale.

Or l'extension centrale de Z par μ_8 obtenue en tirant E en arrière est donnée par les générateurs suivants :

$$1 \to \mu_8 = \langle a^2 b^2 \rangle \to \langle a^2, b^2 \rangle \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \langle b^2 \rangle \to 1\,.$$

Cette suite est donc scindée comme suite de k-groupes (puisque l'action de Galois sur b^2 est triviale), donc cela assure que l'image de la classe de E par le morphisme $\mathrm{Ext}_k^c(H, \mu_8) \to \mathrm{Ext}_k^c(Z, \mu_8)$ est la classe triviale.

Finalement, on a bien montré que le morphisme $\mathrm{Ext}_k^c(H, \mu_8) \to \mathrm{Ext}_k^c(Z, \mu_8)$ était le morphisme nul, ce qui termine la preuve de la proposition. □

En reprenant la démonstration du théorème 2.1, et en y remplaçant le lemme 2.3 par la proposition 3.1, on obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit k un corps de nombres. On considère l'espace homogène $X := \mathrm{SL}_{4,k}/H$, où H le groupe Q_8 des quaternions d'ordre 8 et $H \to \mathrm{SL}_{4,k}$ est une représentation fidèle de dimension 4 sur k.*

Alors pour tout ensemble fini S_0 de places de k, il existe un point adélique $x \in X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ tel que $\pi^{S_0}(x) \notin \overline{X(k)}^{S_0}$. Autrement dit, "l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte" sur (la variété rationnelle) X n'est pas la seule.

Par exemple, on peut prendre $k = \mathbf{Q}$ dans ce théorème.

4. Obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse entier

Dans cette section, on donne des contre-exemples au principe de Hasse entier avec obstruction de Brauer-Manin, pour des espaces homogènes à stabilisateurs géométriques finis. Ces exemples utilisent de façon cruciale les énoncés des sections précédentes concernant l'approximation forte.

COROLLAIRE 4.1. — *Soit p un nombre premier, k un corps de nombres contenant les racines p^{n+1}-ièmes de l'unité, H un groupe fini* non commutatif *d'ordre p^n et S_0 un ensemble fini de places de k.*

Alors il existe un $\mathcal{O}_{k,S_0}$-schéma $\mathcal{X}$ fidèlement plat, séparé de type fini, tel que $X := \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_{k,S_0}} k \cong \mathrm{SL}_{n,k}/H$ et

$$\left(\prod_{v \in S_0} X(k_v) \times \prod_{v \notin S_0} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)\right)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \emptyset\,,$$

alors que

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_{k,S_0}) = \emptyset\,.$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse entier sur $\mathcal{X}$ n'est pas la seule.

Démonstration. — Il s'agit simplement de combiner le théorème 2.1 et le théorème 1.4 de [11]. □

REMARQUE 4.2. — On peut se demander naturellement s'il existe un tel schéma $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{O}_{k,S_0}$, qui soit lisse et muni d'une structure d'espace homogène sous un $\mathcal{O}_{k,S_0}$-schéma en groupes étendant la structure de k-espace homogène sur X.

Afin d'obtenir un exemple sur l'anneau $\mathbf{Z}$ et d'éliminer l'hypothèse sur les racines de l'unité, on peut adapter le dernier énoncé en utilisant les résultats de la section 3 (la notation $\mathbf{Z}_\infty$ désigne le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels) :

COROLLAIRE 4.3. — *Il existe un $\mathbf{Z}$-schéma $\mathcal{X}$ fidèlement plat, séparé de type fini, tel que $X := \mathcal{X} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathrm{SL}_{4,\mathbf{Q}}/Q_8$, pour la représentation fidèle naturelle $\rho : Q_8 \to \mathrm{SL}_{4,\mathbf{Q}}$, vérifiant*

$$\left(\prod_{p \leq \infty} \mathcal{X}(\mathbf{Z}_p)\right)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \emptyset\,,$$

alors que

$$\mathcal{X}(\mathbf{Z}) = \emptyset .$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse entier sur $\mathcal{X}$ n'est pas la seule.

Démonstration. — Comme précédemment, il suffit de combiner le théorème 3.2 et le théorème 1.4 de [11]. □

Remarque 4.4. — On peut vérifier que les deux exemples présentés au théorème 2.1 et au corollaire 4.1 (ainsi que ceux du théorème 3.2 et du corollaire 4.3), s'ils ne sont pas expliqués par l'obstruction de Brauer-Manin entière, le sont en revanche par ce que l'on peut appeler une obstruction de Brauer-Manin étale entière (voir [14], section 3.3 pour la définition de la version rationnelle de cette obstruction). En effet, dans le théorème 2.1 par exemple, les points adéliques de X que l'on construit, qui sont orthogonaux au groupe de Brauer et qui ne sont pas dans l'adhérence des points rationnels, proviennent en fait de points adéliques du revêtement étale naturel $G/Z \to X$ qui ne sont pas orthogonaux au groupe de Brauer de G/Z. De même, dans le corollaire 4.1, on peut faire en sorte que les points adéliques entiers de X orthogonaux au groupe de Brauer de X proviennent de points adéliques entiers sur un revêtement étale $P \to X$ de X qui ne sont pas orthogonaux au groupe de Brauer de P. Dans les deux cas, il y a donc en quelque sorte une obstruction de Brauer-Manin étale entière qui est strictement plus forte que l'obstruction de Brauer-Manin entière et qui explique ces contre-exemples : on est donc dans une situation analogue à celle de l'exemple 5.10 de [2] qui traite de formes quadratiques entières.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Borovoi & C. Demarche – "Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces", *Comment. Math. Helv.* **88** (2013), p. 1–54.

[2] J.-L. Colliot-Thélène & O. Wittenberg – "Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines", *Amer. J. Math.* **134** (2012), p. 1303–1327.

[3] J.-L. Colliot-Thélène & F. Xu – "Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms", *Compos. Math.* **145** (2009), p. 309–363.

[4] ______, "Strong approximation for the total space of certain quadratic fibrations", *Acta Arith.* **157** (2013), p. 169–199.

[5] C. Demarche – "Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis", *Math. Ann.* **346** (2010), p. 949–968.

[6] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson / North-Holland, 1970.

[7] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes (Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3)*, Documents mathématiques, Soc. Math. France, 2011, édition révisée et annotée.
[8] P. Gille & A. Pianzola – "Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings", *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), p. 780–800.
[9] S. Gille – "On the Brauer group of a semisimple algebraic group", *Adv. Math.* **220** (2009), p. 913–925.
[10] D. Harari – "Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini", *Bull. Soc. Math. France* **135** (2007), p. 549–564.
[11] Q. Liu & F. Xu – "Very strong approximation for certain algebraic varieties", *Math. Ann.* **363** (2015), p. 701–731.
[12] G. Lucchini Arteche – "Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble", *Math. Ann.* **360** (2014), p. 1021–1039.
[13] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, second éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.
[14] B. Poonen – "Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers", *Ann. of Math.* **171** (2010), p. 2157–2169.
[15] A. Skorobogatov – *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.