

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p -ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

Julien Hauseux

**Tome 145
Fascicule 1**

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 161-192

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 145, mars 2017

Comité de rédaction

Christine BACHOC	Laurent MANIVEL
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Kieran O'GRADY
Jean-François DAT	Emmanuel RUSS
Charles FAVRE	Christophe SABOT
Marc HERZLICH	Wilhelm SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN	
Pascal HUBERT (Dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency O-131, The Shopping Mall Arjun Marg, DLF Phase 1 Gurgaon 122002, Haryana Inde	AMS P.O. Box 6248 Providence RI 02940 USA www.ams.org
---	--

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)
Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p -ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

PAR JULIEN HAUSEUX

RÉSUMÉ. — Nous complétons les résultats de [10]. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur une extension finie F de \mathbb{Q}_p . Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous déterminons les extensions entre séries principales p -adiques et modulo p de $G(\mathbb{Q}_p)$ sans supposer le centre de G connexe ou le groupe dérivé de G simplement connexe. Cela fait apparaître un phénomène nouveau : il peut exister plusieurs extensions non scindées non isomorphes entre deux séries principales distinctes. Nous complétons aussi les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe. Nous déterminons enfin les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation « ordinaire » de $G(F)$ (c'est-à-dire obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation spéciale tordue par un caractère). Pour cela, nous calculons le δ -foncteur $H^{\bullet} \text{Ord}_B(F)$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton relatif à un sous-groupe de Borel sur une représentation ordinaire de $G(F)$.

ABSTRACT (*Additional results on extensions between p -adic and mod p principal series of $G(F)$*). — We complete the results of [10]. Let G be a split connected reductive group over a finite extension F of \mathbb{Q}_p . When $F = \mathbb{Q}_p$, we determine the extensions between unitary continuous p -adic and smooth mod p principal series of $G(\mathbb{Q}_p)$ without assuming the centre of G connected nor the derived group of G simply connected. This shows a new phenomenon: there may exist several non-isomorphic non-split extensions between two distinct principal series. We also complete the computations of self-extensions of a principal series in the non-generic cases when the centre of G is connected. Finally, we determine the extensions of a principal series of $G(F)$ by an “ordinary” representation of $G(F)$ (i.e., parabolically induced from a special representation twisted by a character). In order to do so, we compute Emerton’s δ -functor

Texte reçu le 24 mars 2015, modifié le 13 avril 2016 et le 30 mai 2016, accepté le 2 juin 2016.

JULIEN HAUSEUX

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Extensions, séries principales, parties ordinaires, filtration de Bruhat.

$H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}$ of derived ordinary parts with respect to a Borel subgroup on an ordinary representation of $G(F)$.

1. Introduction

Contexte. — Nous rappelons les résultats de [10]. Soient F une extension finie de \mathbb{Q}_p et G un groupe réductif connexe déployé sur F . On fixe une extension finie E de \mathbb{Q}_p .

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous avons calculé les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E en faisant les hypothèses suivantes sur G : son centre est connexe et son groupe dérivé est simplement connexe. Dans cet article, nous traitons le cas général et nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe.

Nous avons également calculé les extensions d'une série principale continue unitaire de $G(F)$ sur E par l'induite parabolique d'un caractères continu unitaire. Dans cet article, nous généralisons ces calculs pour les représentations continues unitaires « ordinaires » de $G(F)$ sur E (c'est-à-dire obtenues par induction parabolique à partir d'une représentation continue unitaire spéciale tordue par un caractère continu unitaire).

Principaux résultats. — Soient $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T , Δ les racines simples de (G, B, T) et pour tout $\alpha \in \Delta$, on note s_α la réflexion simple correspondante. On note $\varepsilon : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique et \mathcal{O}_E l'anneau des entiers de E . On calcule les Ext^1 dans les catégories abéliennes de représentations continues unitaires admissibles sur E en utilisant les extensions de Yoneda.

Nous calculons tout d'abord les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(F)$ sur E . Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, ces extensions proviennent toujours d'une extension entre caractères de $T(F)$ (voir [10, théorème 1.2]). On suppose donc $F = \mathbb{Q}_p$ et on généralise [10, théorème 1.1].

En comparaison si le groupe dérivé de G n'est pas simplement connexe, alors G n'admet pas nécessairement un « twisting element » θ (par exemple $G = \text{PGL}_2$) et si le centre de G n'est pas connexe, alors on peut avoir

$$\text{card} \{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \} > 1$$

avec $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires distincts (voir l'exemple 3.2.3).

Nous démontrons le résultat suivant (théorème 3.2.1), ainsi que son analogue modulo p (c'est-à-dire dans les catégories de représentations lisses admissibles sur le corps résiduel k_E de E).

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ , alors*

$$\begin{aligned} \dim_E \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right) \\ = \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \}. \end{aligned}$$

(ii) *Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

Sans l'hypothèse de générnicité du point (ii), le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection E -linéaire et on donne un minorant et un majorant de la dimension de son conoyau (voir le point (ii) de la remarque 3.2.2).

Lorsque le centre de G est connexe, nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale modulo p dans les cas non générniciques (théorème 3.2.4) et nous en déduisons le résultat analogue p -adique lorsque $p \neq 2$ (corollaire 3.2.6).

THÉORÈME 1.2. — *On suppose le centre de G connexe. Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ un caractère lisse.*

(i) *Si $p \neq 2$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E -linéaire*

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

(ii) *Si $p = 2$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection k_E -linéaire*

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right)$$

dont le conoyau est de dimension $\mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) = \chi \}$.

COROLLAIRES 1.3. — *On suppose le centre de G connexe et $p \neq 2$. Pour tout caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

Nous étendons enfin nos calculs aux extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$ (propositions 3.3.6 et 3.3.8).

Méthodes utilisées. — Expliquons la preuve du théorème 1.1. On suppose $F = \mathbb{Q}_p$. Soient $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires distincts et $\Delta' \subset \Delta$ le sous-ensemble des racines simples $\alpha \in \Delta$ telles que $\chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note $G_\alpha \subset G$ le centralisateur de $(\ker \alpha)^\circ \subset T$. Dans la sous-section 3.1, on montre que pour tout $\alpha \in \Delta'$ il existe une extension non scindée

$$0 \rightarrow \text{Ind}_{(B^- \cap G_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi \rightarrow \mathcal{E}_\alpha \rightarrow \text{Ind}_{(B^- \cap G_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi' \rightarrow 0.$$

Le résultat principal de la sous-section 2.2 permet alors de montrer que les classes des extensions

$$\left(\text{Ind}_{(B^- G_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha \right)_{\alpha \in \Delta'}$$

sont linéairement indépendantes dans le E -espace vectoriel du point (i), d'où une première inégalité. La seconde inégalité et le point (ii) se démontrent par réduction modulo p^k et dévissage en utilisant les calculs de parties ordinaires dérivées de [10, § 4.2] et la suite exacte dérivée de la relation d'adjonction entre les foncteurs $\text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}$ et $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ (voir la sous-section 2.1).

De même, le théorème 1.2 se démontre en se ramenant au cas de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, mais en utilisant la suite exacte complète de cinq termes.

Expliquons les preuves des proposition 3.3.6 et 3.3.8. On procède par réduction modulo p^k et dévissage comme dans [10]. En caractéristique positive, on utilise le δ -foncteur $H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton. On fixe une uniformisante ϖ_E de \mathcal{O}_E et un entier $k \geq 1$. On définit tout d'abord la filtration de Bruhat d'une représentation ordinaire de $G(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$, puis on calcule son gradué qui est un facteur direct du gradué de la filtration de Bruhat d'une série principale de $G(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$. On utilise ensuite les calculs de parties ordinaires dérivées de [10, § 4.3] pour en déduire l'expression du δ -foncteur $H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}$ sur une telle représentation (théorème 2.3.7). On explicite enfin ce calcul en degrés 0 et 1 (corollaires 2.3.8 et 2.3.9) et on conclut en utilisant la suite exacte dérivée de la relation d'adjonction entre les foncteurs $\text{Ord}_{B(F)}$ et $\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ (voir la sous-section 2.1).

Notations et conventions. — Soit F une extension finie de \mathbb{Q}_p .

On note $\varepsilon : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique (défini par $\varepsilon(x) = N_{F/\mathbb{Q}_p}(x)|N_{F/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$ pour tout $x \in F^\times$) et $\omega : F^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ sa réduction modulo p .

Soient G un groupe réductif connexe déployé sur F , $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T et N le radical unipotent de B . On note W le groupe de Weyl de (G, T) , $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$ la longueur relative à B et Δ les racines simples de (G, B, T) . Pour tout $\alpha \in \Delta$, on note $s_\alpha \in W$ la réflexion

simple correspondante et pour tout $w \in W$, on note $\dot{w} \in G(F)$ un représentant de w dans le normalisateur de $T(F)$.

Si $P \subset G$ est un sous-groupe parabolique standard (c'est-à-dire contenant B) et $L \subset P$ est le sous-groupe de Levi standard (c'est-à-dire contenant T), on note $P^- \subset G$ le sous-groupe parabolique opposé à P par rapport à L , $B_L \subset L$ (resp. $B_L^- \subset L$) le sous-groupe de Borel $B \cap L$ (resp. $B^- \cap L$) et $\Delta_L \subset \Delta$ les racines simples de (L, B_L, T) .

Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{O}_E l'anneau des entiers de E et k_E le corps résiduel de \mathcal{O}_E . On fixe une uniformisante ϖ_E de \mathcal{O}_E . On désigne par A une \mathcal{O}_E -algèbre locale artinienne de corps résiduel k_E et on note encore $\omega : F^\times \rightarrow A^\times$ l'image de ε dans A^\times .

Pour les représentations d'un groupe de Lie p -adique, on utilise la terminologie de [6, § 2] pour les représentations lisses à coefficients dans A et on renvoie à [5, § 3.1] pour les représentations continues unitaires admissibles sur des E -espaces de Banach.

Remerciements. — Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse Christophe Breuil d'avoir suivi ce travail avec attention, ainsi que pour ses remarques et ses conseils. Je remercie également Florian Herzig et le rapporteur anonyme pour de nombreux commentaires qui ont permis d'améliorer cet article.

2. Parties ordinaires dérivées

Nous commençons par faire quelques rappels sur le δ -foncteur $H^\bullet \text{Ord}_{P(F)}$. Puis, nous démontrons une compatibilité naturelle lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ entre les calculs de parties ordinaires dérivées de [10] en degré 1 et l'induction à partir d'un sous-groupe parabolique correspondant à une racine simple. Enfin, nous généralisons les résultats de [10, § 2.3] et [10, § 4.3] aux représentations ordinaires.

2.1. Préliminaires. — Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. On note N_P le radical unipotent de P et Z_L le centre de L . On fixe un sous-groupe ouvert compact $N_{P,0}$ de $N_P(F)$ et on définit des sous-monoïdes de $L(F)$ et $Z_L(F)$ en posant

$$L^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{l \in L(F) \mid lN_{P,0}l^{-1} \subset N_{P,0}\},$$

$$Z_L^+ \stackrel{\text{déf}}{=} Z_L(F) \cap L^+.$$

On rappelle tout d'abord la construction du δ -foncteur $H^\bullet \text{Ord}_{P(F)}$. Soit V une représentation lisse de $P(F)$ sur A . D'après [7, § 3], les A -modules $H^\bullet(N_{P,0}, V)$ sont naturellement munis d'une *action de Hecke* de L^+ et les A -modules

$$H^\bullet \text{Ord}_{P(F)} V \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{A[Z_L^+]}(A[Z_L(F)], H^\bullet(N_{P,0}, V))_{Z_L(F)\text{-fin}}$$

sont naturellement des représentations lisses de $L(F)$ sur A , appelées les *parties ordinaires dérivées* de V . De plus si V est une représentation lisse localement admissible de $G(F)$ sur A , alors $H^\bullet \text{Ord}_{P(F)} V$ est le *localisé en Z_L^+* de $H^\bullet(N_{P,0}, V)$: on a un isomorphisme naturel $L(F)$ -équivariant

$$H^\bullet \text{Ord}_{P(F)} V \cong A[Z_L(F)] \otimes_{A[Z_L^+]} H^\bullet(N_{P,0}, V)$$

(voir [7, lemme 3.2.1] et [7, théorème 3.4.7]).

On rappelle maintenant la construction de l'isomorphisme naturel qui fait du foncteur des parties ordinaires $\text{Ord}_{P(F)} = H^0 \text{Ord}_{P(F)}$ un quasi-inverse à gauche du foncteur d'induction parabolique $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$.

LEMME 2.1.1. — *Soit U une représentation lisse localement admissible de $L(F)$ sur A . On a une injection naturelle L^+ -équivariante*

$$U \hookrightarrow \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \right)^{N_{P,0}}$$

qui induit après localisation en Z_L^+ un isomorphisme $L(F)$ -équivariant

$$U \xrightarrow{\sim} \text{Ord}_{P(F)} \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \right).$$

Démonstration. — La projection $G(F) \twoheadrightarrow P^-(F) \backslash G(F)$ induit une immersion ouverte $N_P(F) \hookrightarrow P^-(F) \backslash G(F)$, d'où une injection naturelle $P(F)$ -équivariante (voir [6, lemme 4.1.9])

$$\mathcal{C}_c^\infty(N_P(F), U) \hookrightarrow \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U$$

qui induit un isomorphisme $L(F)$ -équivariant (voir [6, lemme 4.3.1])

$$\text{Ord}_{P(F)}(\mathcal{C}_c^\infty(N_P(F), U)) \xrightarrow{\sim} \text{Ord}_{P(F)} \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \right).$$

On déduit de [6, proposition 4.2.7] que l'injection naturelle A -linéaire

$$U \hookrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(N_P(F), U)^{N_{P,0}}$$

définie par $u \mapsto 1_{N_{P,0}} u$ avec $1_{N_{P,0}}$ la fonction caractéristique de $N_{P,0}$ sur $N_P(F)$ est L^+ -équivariante et induit après localisation en Z_L^+ un isomorphisme $L(F)$ -équivariant

$$U \xrightarrow{\sim} \text{Ord}_{P(F)}(\mathcal{C}_c^\infty(N_P(F), U)).$$

En composant ces deux injections, on obtient une injection naturelle qui vérifie bien la propriété de l'énoncé. \square

On rappelle enfin que la relation d'adjonction entre les foncteurs $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ et $\text{Ord}_{P(F)}$ induit une suite exacte de A -modules

$$(1) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{L(F)}^1(U, \text{Ord}_{P(F)} V) \rightarrow \text{Ext}_{G(F)}^1\left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U, V\right) \\ \rightarrow \text{Hom}_{L(F)}(U, H^1 \text{Ord}_{P(F)} V)$$

pour toutes représentations lisses localement admissibles U et V de $L(F)$ et $G(F)$ respectivement sur A (voir [7, § 3.7]). Le premier morphisme non trivial est induit par le foncteur exact $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$ et le morphisme naturel $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\text{Ord}_{P(F)} V) \rightarrow V$ et le second associe à la classe d'une extension

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \rightarrow 0$$

le morphisme δ de la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Ord}_{P(F)} V \rightarrow \text{Ord}_{P(F)} \mathcal{E} \rightarrow \text{Ord}_{P(F)} \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} U \right) \xrightarrow{\delta} H^1 \text{Ord}_{P(F)} V$$

composé avec l'inverse de l'isomorphisme du lemme 2.1.1.

2.2. Compatibilité avec l'induction en degré 1. — On suppose $F = \mathbb{Q}_p$ et on fixe $\alpha \in \Delta$. On note $G_\alpha \subset G$ le sous-groupe fermé engendré par T et les sous-groupes radiciels correspondant aux racines $\pm\alpha$. On note $P_\alpha \subset G$ (resp. $P_\alpha^- \subset G$) le sous-groupe parabolique BG_α (resp. B^-G_α) et $N_\alpha \subset P_\alpha$ son radical unipotent. On note $B_\alpha \subset G_\alpha$ (resp. $B_\alpha^- \subset G_\alpha$) le sous-groupe de Borel $B \cap G_\alpha$ (resp. $B^- \cap G_\alpha$) et $N_\alpha'' \subset B_\alpha$ son radical unipotent. On note enfin $Z_\alpha \subset T$ le centre de G_α .

Soient U et V des représentations lisses localement admissibles de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A . D'après le lemme 2.1.1 pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T) , on a des isomorphismes naturels $T(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants

$$(2) \quad \text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U \right) \cong U,$$

$$(3) \quad \text{Ord}_{B_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \right) \cong U.$$

Pour tout $\beta \in \Delta$, on note V^β la représentation lisse de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A dont le A -module sous-jacent est V et sur lequel $t \in T(\mathbb{Q}_p)$ agit à travers $s_\beta(t)$. D'après [10, corollaire 4.2.4 (i)] pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T) , on a des isomorphismes naturels $T(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants

$$(4) \quad H^1 \text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right) \cong \bigoplus_{\beta \in \Delta} V^\beta \otimes (\omega^{-1} \circ \beta),$$

$$(5) \quad H^1 \text{Ord}_{B_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \right) \cong V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha).$$

Le but de cette sous-section est de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2.1. — *On a un diagramme commutatif de A -modules*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right) & \rightarrow & \bigoplus_{\beta \in \Delta} \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)} (U, V^\beta \otimes (\omega^{-1} \circ \beta)) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \right) & \longrightarrow & \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)} (U, V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha)) \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont donnés par le second morphisme non trivial de la suite exacte (1) pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T) en utilisant les isomorphismes (4) et (5), l'injection verticale de gauche est induite par le foncteur $\text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et l'injection verticale de droite est l'injection naturelle correspondant à $\alpha \in \Delta$.

On a un produit semi-direct $N = N''_\alpha \ltimes N_\alpha$. On fixe un sous-groupe ouvert compact standard N_0 de $N(\mathbb{Q}_p)$ compatible avec la décomposition radicielle (voir [10, appendice A]). On note $N_{\alpha,0}$ et $N''_{\alpha,0}$ les intersections respectives de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et $N''_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ avec N_0 . D'après [10, proposition A.7], on a un produit semi-direct $N_0 = N''_{\alpha,0} \ltimes N_{\alpha,0}$. On utilise les résultats de [10, § 3.2] pour calculer la cohomologie de N_0 et l'action de Hecke de T^+ à travers ce dévissage de N_0 .

LEMME 2.2.2. — *On a une injection naturelle T^+ -équivariante*

$$H^0\left(N''_{\alpha,0}, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right) \hookrightarrow H^0\left(N_0, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)$$

dont le localisé en T^+ , à travers les isomorphismes (2) et (3), est l'identité sur U .

Démonstration. — En utilisant le lemme 2.1.1 pour le triplet (G, P_α, G_α) et l'isomorphisme de foncteurs $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \cong \text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, on voit que l'on a une injection naturelle $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ -équivariante

$$(6) \quad \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \hookrightarrow \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N_{\alpha,0}}$$

et en prenant les invariants par $N''_{\alpha,0}$, on obtient l'injection naturelle T^+ -équivariante de l'énoncé. Elle s'insère dans un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccc} \left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N''_{\alpha,0}} & \xhookrightarrow{\quad} & \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right)^{N_0} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

où les injections verticales sont données par le lemme 2.1.1 pour les triplets (G, B, T) et (G_α, B_α, T) . En utilisant ce lemme, on en déduit que l'injection construite vérifie bien la propriété de l'énoncé. \square

LEMME 2.2.3. — *On a un morphisme naturel T^+ -équivariant*

$$H^1\left(N''_{\alpha,0}, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V\right) \rightarrow H^1\left(N_0, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right)$$

dont le localisé en T^+ , à travers les isomorphismes (4) et (5), est l'injection naturelle

$$V^\alpha \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \hookrightarrow \bigoplus_{\beta \in \Delta} V^\beta \otimes (\omega^{-1} \circ \beta).$$

REMARQUE 2.2.4. — On peut montrer que le morphisme de l'énoncé est injectif.

Démonstration. — Soit $I_0 \subset \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V$ (resp. $I_0^\alpha \subset \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V$) la sous- $B(\mathbb{Q}_p)$ -représentation (resp. sous- $B_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ -représentation) constituée des fonctions à support dans l'ouvert $B^-(\mathbb{Q}_p)N(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)N_\alpha''(\mathbb{Q}_p)$). On a un diagramme commutatif de représentations lisses de $T^+ \ltimes N_{\alpha,0}''$ sur A

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V & \xhookrightarrow{\quad} & \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)^{N_{\alpha,0}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \right) / I_0^\alpha & \xhookrightarrow{\quad} & \left(\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right) / I_0 \right)^{N_{\alpha,0}} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \\ V^\alpha & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)^{N_{\alpha,0}} \end{array}$$

où le morphisme horizontal supérieur est l'injection (6) avec V au lieu de U , le morphisme horizontal du milieu est induit par le précédent, le morphisme horizontal inférieur est défini par $v \mapsto 1_{N_{\alpha,0}}v$ avec $1_{N_{\alpha,0}}$ la fonction caractéristique de $N_{\alpha,0}$ sur $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$, les morphismes verticaux supérieurs sont les applications quotients et les morphismes verticaux inférieurs sont expliqués dans [10, § 2.1]. On précise l'action de $T^+ \ltimes N_{\alpha,0}''$ sur les termes inférieurs (pour celui de droite, il faut prendre l'action de Hecke de T^+ correspondante et l'action induite de $N_{\alpha,0}''$) : $N_{\alpha,0}''$ agit trivialement sur V^α et par translation à droite sur $\mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)$; l'action de T^+ sur V^α est la restriction de celle de $T(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de $t \in T^+$ sur $f \in \mathcal{C}_c^\infty(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), V)$ est donnée par

$$(t \cdot f)(n) = (\dot{s}_\alpha t \dot{s}_\alpha^{-1}) \cdot f(t^{-1}nt)$$

pour tout $n \in N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Enfin, les localisés en T^+ des injections horizontales sont des isomorphismes (pour celle du haut cela résulte du lemme 2.1.1 et on en déduit le résultat pour celle du milieu, tandis que pour celle du bas cela résulte de [10, § 3.3]).

En appliquant le foncteur $H^1(N_{\alpha,0}'', -)$ et en utilisant le morphisme d'inflation $H^1(N_{\alpha,0}'', (-)^{N_{\alpha,0}}) \hookrightarrow H^1(N_0, -)$, on obtient un diagramme commutatif de

représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{H}^1\left(N_{\alpha,0}'', \mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} V\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathrm{H}^1\left(N_{\alpha,0}'', \left(\mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} V\right) / I_0^{\alpha}\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1\left(N_0, \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) / I_0\right) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \lrcorner \\
 \mathrm{H}^1(N_{\alpha,0}'', V^{\alpha}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(N_0, \mathcal{C}_c^{\infty}(N_{\alpha}(\mathbb{Q}_p), V))
 \end{array}$$

où les morphismes verticaux supérieurs sont encore surjectifs et le morphisme vertical inférieur droit est encore injectif (voir [10, § 2.2]) et les localisés en T^+ des morphismes horizontaux sont encore des isomorphismes. De plus, les localisés en T^+ des morphismes verticaux supérieurs sont des isomorphismes (car les localisés en T^+ de $\mathrm{H}^1(N_{\alpha,0}'', I_0^{\alpha})$ et $\mathrm{H}^1(N_0, I_0)$ sont nuls, voir [10, § 3.3]).

D'après [10, proposition 3.1.8] avec $n = 1$, $N_0 = N_{\alpha,0}''$ et V^{α} au lieu de V , on a un isomorphisme naturel T^+ -équivariant

$$(7) \quad \mathrm{H}^1(N_{\alpha,0}'', V^{\alpha}) \xrightarrow{\sim} V^{\alpha} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha).$$

L'isomorphisme (5) est la composée des localisés en T^+ de l'isomorphisme (7) et des morphismes verticaux de gauche du précédent diagramme. De plus, la composée des localisés en T^+ de l'isomorphisme (7) et du morphisme horizontal inférieur et des morphismes verticaux de droite du précédent diagramme est une injection naturelle T^+ -équivariante

$$V^{\alpha} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \hookrightarrow \mathrm{H}^1 \mathrm{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)} \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)$$

dont la composée avec l'isomorphisme (4) est l'injection de l'énoncé. On en conclut que le morphisme horizontal supérieur du précédent diagramme vérifie bien la propriété de l'énoncé. \square

Démonstration de la proposition 2.2.1. — On remarque que le morphisme vertical de gauche du diagramme de l'énoncé est bien injectif car le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ admet un quasi-inverse à gauche d'après le lemme 2.1.1 pour le triplet $(G, P_{\alpha}, G_{\alpha})$.

Soit \mathcal{E}_{α} une extension entre représentations lisses de $G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$0 \rightarrow \mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} V \rightarrow \mathcal{E}_{\alpha} \rightarrow \mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} U \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Ind}_{P_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$, on obtient une extension entre représentations lisses de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \rightarrow \mathrm{Ind}_{P_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_{\alpha} \rightarrow \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U \rightarrow 0.$$

En prenant les invariants par $N_{\alpha,0}$, on obtient une suite exacte de représentations lisses de $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ sur A

$$0 \rightarrow \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)^{N_{\alpha,0}} \rightarrow \left(\text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha \right)^{N_{\alpha,0}} \rightarrow \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U \right)^{N_{\alpha,0}}$$

et on note $I \subset (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U)^{N_{\alpha,0}}$ l'image du dernier morphisme. En utilisant le lemme 2.1.1 pour le triplet (G, P_α, G_α) , on en déduit un diagramme commutatif de représentations lisses de $T^+ \ltimes N''_{\alpha,0}$ sur A

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)^{N_{\alpha,0}} & \rightarrow & \left(\text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha \right)^{N_{\alpha,0}} & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V & \longrightarrow & \mathcal{E}_\alpha & \longrightarrow & \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \rightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. En prenant la cohomologie de $N''_{\alpha,0}$ à valeurs dans ces suites exactes courtes, on obtient un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccc} \text{H}^0 \left(N''_{\alpha,0}, I \right) & \xrightarrow{\delta'_\alpha} & \text{H}^1 \left(N''_{\alpha,0}, \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)^{N_{\alpha,0}} \right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{H}^0 \left(N''_{\alpha,0}, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} U \right) & \xrightarrow{\delta_\alpha} & \text{H}^1 \left(N''_{\alpha,0}, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} V \right). \end{array}$$

Par ailleurs, on a un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccc} \text{H}^0 \left(N_0, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U \right) & \xrightarrow{\delta} & \text{H}^1 \left(N_0, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{H}^0 \left(N''_{\alpha,0}, I \right) & \xrightarrow{\delta'_\alpha} & \text{H}^1 \left(N''_{\alpha,0}, \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V \right)^{N_{\alpha,0}} \right) \end{array}$$

où l'injection verticale de gauche est induite par l'inclusion $I \subset \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U$, le morphisme vertical de droite est l'inflation et δ est le morphisme obtenu par la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte (8).

En combinant les deux précédents diagrammes, on obtient un diagramme commutatif de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^0\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} U\right) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^1\left(N_0, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^0\left(N_{\alpha,0}'', \mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} U\right) & \xrightarrow{\delta_{\alpha}} & \mathrm{H}^1\left(N_{\alpha,0}'', \mathrm{Ind}_{B_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_{\alpha}(\mathbb{Q}_p)} V\right) \end{array}$$

où l'injection verticale de gauche est celle du lemme 2.2.2 et le morphisme vertical de droite est celui du lemme 2.2.3. En utilisant ces deux lemmes, on voit qu'à travers les isomorphismes (2), (3), (4) et (5), le localisé en T^+ de ce diagramme est un diagramme commutatif de représentations lisses de $T(\mathbb{Q}_p)$ sur A

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & \bigoplus_{\beta \in \Delta} V^{\beta} \otimes (\omega^{-1} \circ \beta) \\ \parallel & & \uparrow \\ U & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{\alpha}} & V^{\alpha} \otimes (\omega^{-1} \circ \alpha) \end{array}$$

où le morphisme vertical de droite est l'injection naturelle. Enfin, $\tilde{\delta}$ (resp. $\tilde{\delta}_{\alpha}$) est l'image de la classe de l'extension $\mathrm{Ind}_{P_{\alpha}^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_{\alpha}$ (resp. \mathcal{E}_{α}) par le morphisme horizontal supérieur (resp. inférieur) du diagramme de l'énoncé. \square

2.3. Calculs sur les représentations ordinaires. — Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on note $L_Q \subset Q$ le sous-groupe de Levi standard et $Q^- \subset L$ le sous-groupe parabolique opposé à Q par rapport à L_Q . Dans ce cas, $BQ \subset P$ est un sous-groupe parabolique standard de G , $L_Q \subset BQ$ est le sous-groupe de Levi standard, on note $W_{L_Q} \subset W$ le groupe de Weyl de (L_Q, T) et on pose

$$\widetilde{W}_{BQ} \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in W \mid w \text{ de longueur maximale dans } W_{L_Q} w\}.$$

Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset Q' \subset L$, on a $\widetilde{W}_{BQ} \subset \widetilde{W}_{BQ'}$. De plus, $1 \in \widetilde{W}_{BQ}$ si et seulement si $Q = B_L$; $s_{\alpha} \in \widetilde{W}_{BQ}$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ si et seulement si $Q = B_L$; $s_{\alpha} \in \widetilde{W}_{BQ}$ avec $\alpha \in \Delta_L$ si et seulement si $Q = Q_{\alpha}$ avec $Q_{\alpha} \subset L$ le sous-groupe parabolique standard correspondant à α .

DÉFINITION 2.3.1. — Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on définit la *représentation spéciale* relative à Q de $L(F)$ sur A

$$\mathrm{Sp}_Q \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} 1}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \mathrm{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} 1}$$

avec Q' parmi les sous-groupes de L et $\underline{1}$ la représentation triviale sur A . Lorsque $Q = B_L$, on l'appelle la *représentation de Steinberg* de $L(F)$ sur A et on la note St . Lorsque $Q = Q_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, on la note Sp_α .

REMARQUE 2.3.2. — Les représentations spéciales sont des représentations lisses admissibles de $L(F)$ sur A . Lorsque $A = k_E$, elles sont irréductibles (voir [15, théorème 2] pour St , [9, corollaire 4.3] lorsque le système de racines de L ne contient pas de facteur exceptionnel et [11, théorème 7.2] dans le cas général déployé) et deux à deux non isomorphes d'après [9, corollaire 4.4 (a)]. Dans ce cas, elles forment les constituants irréductibles de $\text{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \underline{1}$, chacune apparaissant avec multiplicité un (voir [9, corollaire 4.4 (b)]) lorsque le système de racines de L ne contient pas de facteur exceptionnel et [11, théorème 7.3] dans le cas général déployé).

Soit σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A . On note $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique standard correspondant et on pose

$$\widetilde{W}_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{W}_{BQ} - \bigcup_{Q \subsetneq Q' \subset L} \widetilde{W}_{BQ'}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L . Par convention, \widetilde{w}_σ désigne toujours un élément de \widetilde{W}_σ .

Soit $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$ un caractère lisse. On rappelle que la restriction à $T(F)$ identifie les caractères de $L(F)$ avec les caractères de $T(F)$ triviaux sur $\text{im } \alpha^\vee$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$ (voir [1, proposition 3.3]).

DÉFINITION 2.3.3. — On appelle *représentation ordinaire* de $G(F)$ sur A une représentation de la forme $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$.

On commence par définir la *filtration de Bruhat* de $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$. On note d la dimension de N et pour tout $w \in W$, on note $N_w \subset N$ le sous-groupe fermé $N \cap \dot{w}^{-1}N\dot{w}$.

PROPOSITION 2.3.4. — *Il existe une filtration $(I_r^\sigma)_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ de $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$ par des sous- $B(F)$ -représentations et pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on a une suite exacte courte de représentations lisses de $B(F)$ sur A*

$$0 \rightarrow I_{r-1}^\sigma \rightarrow I_r^\sigma \rightarrow \bigoplus_{\ell(\widetilde{w}_\sigma)=r} \mathcal{C}_c^\infty(N_{\widetilde{w}_\sigma}(F), \chi) \rightarrow 0.$$

Cette terminologie, empruntée à [14], est justifiée par le fait suivant : lorsque $A = k_E$, les représentations ordinaires irréductibles sont exactement les sous-quotients irréductibles de séries principales.

Démonstration. — D'après [10, § 2.3], il existe pour tout sous-groupe parabolique standard $Q' \subset L$ une filtration $(I_r^{BQ'})_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ de $\text{Ind}_{(BQ')^-(F)}^{G(F)} \chi$ et pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on a une suite exacte courte de représentations lisses de $B(F)$ sur A

$$(9) \quad 0 \rightarrow I_{r-1}^{BQ'} \rightarrow I_r^{BQ'} \rightarrow \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_{BQ'})=r} \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_{BQ'}}(F), \chi) \rightarrow 0.$$

De plus pour tous sous-groupes paraboliques standards $Q'_1 \subset Q'_2 \subset L$, l'injection $G(F)$ -équivariante

$$(10) \quad \text{Ind}_{(BQ'_2)^-(F)}^{G(F)} \chi \hookrightarrow \text{Ind}_{(BQ'_1)^-(F)}^{G(F)} \chi$$

est stricte par rapport aux filtrations $(I_r^{BQ'_1})_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ et $(I_r^{BQ'_2})_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$: pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on a un diagramme commutatif de représentations lisses de $B(F)$ sur A

$$(11) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_{r-1}^{BQ'_1} & \longrightarrow & I_r^{BQ'_1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_{BQ'_1})=r} \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_{BQ'_1}}(F), \chi) & & \\ & & 0 & \longrightarrow & I_{r-1}^{BQ'_2} & \longrightarrow & I_r^{BQ'_2} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_{BQ'_2})=r} \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_{BQ'_2}}(F), \chi) & & 0 \end{array}$$

où les injections verticales de gauche et du milieu sont induites par l'injection (10) et l'injection verticale de droite est l'injection naturelle correspondant à l'inclusion $\tilde{W}_{BQ'_2} \subset \tilde{W}_{BQ'_1}$. Enfin, on a un isomorphisme $G(F)$ -équivariant

$$(12) \quad \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi) \cong \frac{\text{Ind}_{(BQ)^-(F)}^{G(F)} \chi}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \text{Ind}_{(BQ')^-(F)}^{G(F)} \chi}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L , qui résulte de l'exactitude de la torsion par χ et du foncteur $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}$, ainsi que de l'isomorphisme $L(F)$ -équivariant $(\text{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \underline{1}) \otimes \chi \cong \text{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \chi$. Soit $(I_r^\sigma)_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ l'image de la filtration $(I_r^{BQ})_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ de $\text{Ind}_{(BQ)^-(F)}^{G(F)} \chi$ dans le quotient $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$. Un résultat de [3] (qui se démontre de la même façon que [2, V.16 lemme 23]) montre

Ces résultats, énoncés pour les caractères de la forme $\eta \circ \det$ avec $\eta : F^\times \rightarrow A^\times$ un caractère lisse et dét : $G \rightarrow \text{GL}_1$ un caractère algébrique, sont encore vrais pour un caractère lisse $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$ quelconque.

que $I_{r-1}^{BQ} \cap (\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} I_r^{BQ'}) = \sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} I_{r-1}^{BQ'}$ pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$, donc l'isomorphisme (12) induit un isomorphisme $B(F)$ -équivariant

$$(13) \quad I_r^\sigma / I_{r-1}^\sigma \cong \frac{I_r^{BQ} / I_{r-1}^{BQ}}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} (I_r^{BQ'} / I_{r-1}^{BQ'})}.$$

En utilisant le diagramme (11) avec $Q_1 = Q$ et $Q_2 = Q'$ pour tout sous-groupe parabolique $Q \subsetneq Q' \subset L$, on déduit de l'isomorphisme (13) que la filtration $(I_r^\sigma)_{r \in \llbracket -1, d \rrbracket}$ vérifie bien la propriété de l'énoncé. \square

REMARQUE 2.3.5. — Cette filtration est déjà définie et étudiée dans [15] pour les représentations spéciales de $G(F)$ (c'est-à-dire lorsque $P = G$).

Soit N_0 un sous-groupe ouvert compact de $N(F)$. On montre que la filtration de Bruhat de $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$ induit une filtration des A -modules $H^\bullet(N_0, \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi))$.

PROPOSITION 2.3.6. — *Pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on a des suites exactes courtes de représentations lisses de T^+ sur A*

$$0 \rightarrow H^\bullet(N_0, I_{r-1}^\sigma) \rightarrow H^\bullet(N_0, I_r^\sigma) \rightarrow \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_\sigma)=r} H^\bullet(N_0, \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_\sigma}(F), \chi)) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — On reprend les notations de la preuve de la proposition 2.3.4 et on fixe $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$. On a des diagrammes commutatifs de représentations lisses de T^+ sur A

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^\bullet(N_0, I_{r-1}^{BQ}) & \rightarrow H^\bullet(N_0, I_r^{BQ}) & \rightarrow & \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_{BQ})=r} & H^\bullet(N_0, \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_{BQ}}(F), \chi)) & \rightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H^\bullet(N_0, I_{r-1}^\sigma) & \rightarrow H^\bullet(N_0, I_r^\sigma) & \longrightarrow & \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_\sigma)=r} & H^\bullet(N_0, \mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_\sigma}(F), \chi)) & \rightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes supérieures sont exactes d'après [10, § 2.3] (voir la note de bas de page 2). La surjectivité des morphismes verticaux de droite est immédiate, ce qui permet de montrer que le dernier morphisme non trivial de chaque ligne inférieure est surjectif. Par la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de la proposition 2.3.4, on en conclut que les lignes inférieures sont exactes. \square

On calcule maintenant les parties ordinaires dérivées d'une représentation ordinaire de $G(F)$ sur A . Pour tout $w \in W$, on note α_w le caractère algébrique de la représentation adjointe de T sur $\det_F \text{Lie}(N_{w_0 w})$ avec $w_0 \in W$ l'élément de longueur maximale. On a $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_{s_\alpha} = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

THÉORÈME 2.3.7. — Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A , $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$ un caractère lisse et $n \in \mathbb{N}$. On suppose $A = k_E$ ou $n \leq 1$. Alors on a un isomorphisme $T(F)$ -équivariant

$$H^n \text{Ord}_{B(F)} \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi) \right) \cong \bigoplus_{[F:\mathbb{Q}_p] \cdot \ell(\tilde{w}_\sigma) = n} \tilde{w}_\sigma^{-1}(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha_{\tilde{w}_\sigma}).$$

Démonstration. — D'après [7, théorème 3.4.7], les termes des suites exactes de la proposition 2.3.6 sont réunions de sous- A -modules de type fini stables par T^+ . En utilisant [7, lemme 3.2.1], on en déduit des suites exactes courtes de représentations lisses de $T(F)$ sur A

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}(I_{r-1}^\sigma) \rightarrow H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}(I_r^\sigma) \\ \rightarrow \bigoplus_{\ell(\tilde{w}_\sigma) = r} H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}(\mathcal{C}_c^\infty(N_{\tilde{w}_\sigma}(F), \chi)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour tout $r \in \llbracket 0, d \rrbracket$. On conclut en utilisant [10, théorème 4.2.2]. \square

On explicite enfin ce calcul en degrés 0 et 1.

COROLLAIRE 2.3.8. — Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A et $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$ un caractère lisse. On a un isomorphisme $T(F)$ -équivariant

$$\text{Ord}_{B(F)} \left(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi) \right) \cong \begin{cases} \chi & \text{si } \sigma = \text{St}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique correspondant à σ . On utilise le théorème 2.3.7 avec $n = 0$. La somme directe de l'isomorphisme est nulle sauf si $1 \in \widetilde{W}_\sigma$, auquel cas $1 \in \widetilde{W}_{BQ}$ (car $\widetilde{W}_\sigma \subset \widetilde{W}_{BQ}$) donc $Q = B_L$ d'où $\sigma = \text{St}$ et on obtient ainsi l'isomorphisme de l'énoncé car 1 est l'unique élément de longueur 0 de $\widetilde{W}_{\text{St}}$. \square

COROLLAIRE 2.3.9. — Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A et $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$ un caractère lisse.

(i) Si $F = \mathbb{Q}_p$, alors on a un isomorphisme $T(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant

$$\begin{aligned} H^1 \text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)} \left(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\sigma \otimes \chi) \right) \\ \cong \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) & \text{si } \sigma = \text{St}, \\ \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) & \text{si } \sigma = \text{Sp}_\alpha \text{ avec } \alpha \in \Delta_L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, alors $H^1 \text{Ord}_{B(F)}(\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)) = 0$.

Démonstration. — Soit $Q \subset L$ le sous-groupe parabolique correspondant à σ . On utilise le théorème 2.3.7 avec $n = 1$. La somme directe de l’isomorphisme est nulle sauf si $F = \mathbb{Q}_p$ et s’il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $s_\alpha \in \widetilde{W}_\sigma$. Dans ce cas $s_\alpha \in \widetilde{W}_{BQ}$ (car $\widetilde{W}_\sigma \subset \widetilde{W}_{BQ}$) et ou bien $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ donc $Q = B_L$ d’où $\sigma = \text{St}$, ou bien $\alpha \in \Delta_L$ donc $Q = Q_\alpha$ d’où $\sigma = \text{Sp}_\alpha$. On obtient les isomorphismes de l’énoncé car d’une part les éléments de longueur 1 de $\widetilde{W}_{\text{St}}$ sont exactement les s_α avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$ et d’autre part si $\alpha \in \Delta_L$, alors s_α est l’unique élément de longueur 1 de $\widetilde{W}_{\text{Sp}_\alpha}$ et $s_\alpha(\chi) = \chi$. \square

3. Extensions entre induites

Nous montrons l’existence de certaines extensions entre séries principales d’un groupe réductif de rang semi-simple 1. Nous calculons ensuite les extensions entre certaines induites de $G(F)$ dans la catégorie des représentations continues unitaires admissibles de $G(F)$ sur E (en utilisant les résultats pour les groupes réductifs de rang semi-simple 1). Nos démonstrations prouvent également les résultats analogues modulo p (c’est-à-dire dans la catégorie des représentations lisses admissibles de $G(F)$ sur k_E).

3.1. Groupes réductifs de rang semi-simple 1. — On suppose $F = \mathbb{Q}_p$ et on fixe $\alpha \in \Delta$. On reprend les notations de la sous-section 2.2. On commence par donner une description explicite de G_α .

LEMME 3.1.1. — *On a un isomorphisme $G_\alpha \cong T' \times G'_\alpha$ avec $T' \subset T$ un sous-tore et $G'_\alpha \in \{\text{SL}_2, \text{GL}_2, \text{PGL}_2\}$.*

Démonstration. — On note Z_α° la composante neutre de Z_α et G_α^{der} le groupe dérivé de G_α . On utilise la suite exacte courte naturelle (voir [12, Partie II, § 1.18])

$$1 \rightarrow Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}} \rightarrow Z_\alpha^\circ \times G_\alpha^{\text{der}} \rightarrow G_\alpha \rightarrow 1.$$

Comme G_α^{der} est semi-simple de rang 1, il est isomorphe à PGL_2 ou SL_2 . Si $G_\alpha^{\text{der}} = \text{PGL}_2$, alors $Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}} = 1$, d’où $G_\alpha \cong Z_\alpha^\circ \times \text{PGL}_2$. On suppose $G_\alpha^{\text{der}} = \text{SL}_2$, donc $Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}}$ est isomorphe à 1 ou μ_2 . Si $Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}} = 1$, alors $G_\alpha \cong Z_\alpha^\circ \times \text{SL}_2$. Sinon $Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}} = \mu_2$ et comme Z_α° est un tore, il existe un sous-tore $T' \subset Z_\alpha^\circ$ et un isomorphisme $Z_\alpha^\circ \cong T' \times \text{GL}_1$ à travers lequel l’inclusion $Z_\alpha^\circ \cap G_\alpha^{\text{der}} \subset Z_\alpha^\circ$ s’identifie à la composée $\mu_2 \hookrightarrow \text{GL}_1 \hookrightarrow T' \times \text{GL}_1$, d’où un isomorphisme $G_\alpha \cong T' \times (\text{GL}_1 \times \text{SL}_2)/\mu_2 \cong T' \times \text{GL}_2$. \square

On déduit du lemme 3.1.1 le résultat suivant, où l’on identifie certains caractères « irréguliers ».

LEMME 3.1.2. — *Soient χ et η des caractères de $T(\mathbb{Q}_p)$ et \mathbb{Q}_p^\times respectivement à valeurs dans le groupe des unités d’un anneau quelconque. Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\eta \circ \alpha) \neq \chi$,*

alors $\chi \circ \alpha^\vee \neq \eta$. La réciproque est vraie sauf dans le cas suivant : $G'_\alpha = \mathrm{SL}_2$ et $\chi \circ \alpha^\vee = \epsilon \eta$ avec $\epsilon : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \{\pm 1\}$ un morphisme de groupes non trivial.

REMARQUE 3.1.3. — Il n'existe pas de caractère irrégulier modulo 2 : si $p = 2$ et $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ est un caractère lisse, alors $s_\alpha(\chi) = \chi$ si et seulement si $\chi \circ \alpha^\vee = 1$.

À présent, on prouve l'existence d'extensions non scindées entre certaines séries principales continues unitaires de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur E . Le résultat analogue modulo p se démontre de façon analogue. Le caractère de $Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ en indice des Ext^1 signifie que l'on se restreint aux catégories de représentations sur lesquelles $Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ agit à travers ce caractère.

LEMME 3.1.4. — Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire. Si $\chi \circ \alpha^\vee \neq \epsilon^{-1}$, alors l'injection E -linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \chi) \\ \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi) \end{aligned}$$

induite par le foncteur $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas surjective.

Démonstration. — On suppose $\chi \circ \alpha^\vee \neq \epsilon^{-1}$. En utilisant le lemme 3.1.1 et en notant χ' et χ'_α les restrictions de χ à $T'(\mathbb{Q}_p)$ et $(T \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)$ respectivement, on voit que le produit tensoriel avec χ' sur E induit des isomorphismes E -linéaires

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{(T \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p), \chi|_{(Z_\alpha \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}}^1(s_\alpha(\chi'_\alpha) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \chi'_\alpha) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \chi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{G'_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{(Z_\alpha \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}}^1(\mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G'_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi'_\alpha) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G'_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi'_\alpha) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi) \end{aligned}$$

compatibles avec les injections E -linéaires induites par les foncteurs $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et $\mathrm{Ind}_{(B_\alpha^- \cap G'_\alpha)(\mathbb{Q}_p)}^{G'_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, donc il suffit de montrer le résultat lorsque $G_\alpha = G'_\alpha$.

On suppose $G_\alpha = \mathrm{GL}_2$ et on note $T_2 \subset \mathrm{GL}_2$ le sous-groupe des matrices diagonales, $B_2^- \subset \mathrm{GL}_2$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures et Z_2 le centre de GL_2 . On a $s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ d'après le lemme 3.1.2, donc $\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(s_\alpha(\chi) \cdot (\epsilon^{-1} \circ \alpha), \chi) = 0$ d'après [10, proposition 5.1.6]. De plus [7, conjecture 3.7.2] est vraie (voir [8]), ce qui permet en procédant par réduction modulo ϖ_E^k et dévissage comme dans la preuve de [5, proposition B.2]

(i)] (mais en se restreignant aux représentations à caractère central, voir [14, § 7.1]) de montrer l'existence d'une extension non scindée à caractère central

$$0 \rightarrow \text{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \text{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \rightarrow 0.$$

On suppose $G_\alpha = \text{SL}_2$ et on prolonge arbitrairement χ en un caractère continu unitaire de $T_2(\mathbb{Q}_p)$. Par ce qui précède, il existe une extension non scindée à caractère central \mathcal{E}_2 entre les séries principales de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes. Par restriction, on obtient une extension à caractère central de $\text{Ind}_{(B_2^- \cap \text{SL}_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ par $\text{Ind}_{(B_2^- \cap \text{SL}_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$, qui n'est pas induite à partir d'une extension de $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ par χ car ses parties ordinaires, dont la restriction à $(T_2 \cap \text{SL}_2)(\mathbb{Q}_p)$ est naturellement isomorphe aux parties ordinaires de \mathcal{E}_2 , sont de dimension 1 sur E .

On suppose $G_\alpha = \text{PGL}_2$ et on identifie χ à un caractère de $T_2(\mathbb{Q}_p)$ trivial sur $Z_2(\mathbb{Q}_p)$. On a $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ d'après le lemme 3.1.2, donc $\text{Ext}_{(T_2/Z_2)(\mathbb{Q}_p)}^1(s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \chi) = 0$ d'après [10, proposition 5.1.6]. Par ce qui précède, il existe une extension non scindée à caractère central \mathcal{E}_2 entre les séries principales de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondantes. Par inflation, on obtient une extension non scindée de $\text{Ind}_{(B_2^-/Z_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)} s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ par $\text{Ind}_{(B_2^-/Z_2)(\mathbb{Q}_p)}^{\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$. \square

On prouve également l'existence d'une auto-extension supplémentaire d'une série principale lisse réductible de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E lorsque $p = 2$.

LEMME 3.1.5. — Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ un caractère lisse. Si $\chi \circ \alpha^\vee = 1$ et $p = 2$, alors l'injection k_E -linéaire

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(\chi, \chi) \hookrightarrow \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

induite par le foncteur $\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas surjective.

Démonstration. — En supposant seulement $\chi \circ \alpha^\vee = 1$ et en procédant comme dans la preuve du lemme 3.1.4 (c'est-à-dire en se ramenant au cas $G_\alpha = \text{GL}_2$, puis en utilisant [7, proposition 4.3.13 (2)] mais en se restreignant aux représentations à caractère central), on montre que

$$(14) \quad \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha), \chi\right) \neq 0.$$

On suppose $\chi \circ \alpha^\vee = 1$ et $p = 2$. En procédant comme dans la preuve de [7, proposition 4.3.15 (4)], on voit que le foncteur $\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et l'injection k_E -linéaire

$\chi \hookrightarrow \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi$ induisent un isomorphisme k_E -linéaire

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(\chi, \chi) \oplus \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \chi\right) \\ \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (14) avec $\omega^{-1} \circ \alpha = 1$, on obtient le résultat. \square

Enfin, on prouve un dernier résultat sur certaines auto-extensions modulo p de longueur 2. On calcule les Ext^2 dans les catégories de représentations lisses localement admissibles sur k_E sur lesquelles $Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ agit à travers le caractère en indice.

LEMME 3.1.6. — *On suppose Z_α connexe et $p \neq 2$. Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ un caractère lisse. Si $\chi \circ \alpha^\vee = \omega^{-1}$, alors le morphisme k_E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^2(\chi, \chi) \rightarrow \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^2\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

induit par le foncteur $\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas injectif.

Démonstration. — Comme Z_α est connexe, on déduit du lemme 3.1.1 que G_α est le produit direct d'un tore et de GL_2 ou PGL_2 . On en déduit un morphisme $\text{GL}_2 \rightarrow G_\alpha$ qui induit un isomorphisme entre la catégorie des représentations lisses localement admissibles de $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E ayant pour caractère central $\chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et la catégorie des représentations lisses localement admissibles de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E ayant pour caractère central la composée du morphisme induit $Z_2(\mathbb{Q}_p) \rightarrow Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et de $\chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, d'où une suite exacte de k_E -espaces vectoriels

(15)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1(\chi, \chi) \rightarrow \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \\ \rightarrow \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi, s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)) \rightarrow \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^2(\chi, \chi) \\ \rightarrow \text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^2\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \end{aligned}$$

où le premier morphisme non trivial et le dernier morphisme sont induits par le foncteur $\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ (voir [14, § 7.1]).

On suppose $\chi \circ \alpha^\vee = \omega^{-1}$. Comme $p \neq 2$ on a $\chi \circ \alpha^\vee \neq 1$, donc $\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi$ est irréductible d'après [4, théorème 30 (1) (a)]. De plus, le premier morphisme non trivial de la suite exacte (15) est un isomorphisme d'après [7, proposition 4.3.15 (3)] (pour tenir compte du caractère central, on utilise [13, proposition 8.1]). Ainsi, le dernier morphisme de la suite exacte (15) n'est pas injectif. \square

REMARQUE 3.1.7. — Le résultat est en fait vrai sans supposer Z_α connexe : pour $G_\alpha = \mathrm{GL}_2$ le noyau du dernier morphisme de la suite exacte (15) est engendré par le produit de Yoneda de $\mathrm{val}_p \circ \alpha$ et $\mathrm{log}_p \circ \alpha$ vues comme des extensions à travers l'isomorphisme $\mathrm{Ext}_{T_2(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_2(\mathbb{Q}_p)}}^1(\chi, \chi) \cong H^1((T_2/Z_2)(\mathbb{Q}_p), 1)$ (voir [7, appendice A]) et les restrictions à $(T_2 \cap \mathrm{SL}_2)(\mathbb{Q}_p)$ de ces dernières sont linéairement indépendantes ; on peut en déduire que leur produit de Yoneda est non nul et dans le noyau du dernier morphisme de la suite exacte (15) avec $G_\alpha = \mathrm{SL}_2$.

3.2. Extensions entre séries principales. — On détermine les extensions entre séries principales de $G(F)$. Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, ces extensions proviennent toujours d'une extension entre caractères de $T(F)$ (voir [10, théorème 1.2]). On suppose donc $F = \mathbb{Q}_p$.

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

- (i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ , alors*

$$\begin{aligned} \dim_E \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right) \\ = \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \}. \end{aligned}$$

- (ii) *Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

REMARQUE 3.2.2. — (i) Lorsque le centre de G est connexe, la dimension du point (i) du théorème est au plus 1 (par une adaptation de [10, lemme 5.1.3]). En général, cette dimension peut être arbitrairement grande (voir l'exemple 3.2.3 ci-dessous).

- (ii) Sans l'hypothèse de généricité du point (ii), on montre que le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection E -linéaire dont le conoyau est de dimension comprise entre

$$\begin{aligned} \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) = \chi \text{ et } \chi \circ \alpha^\vee \neq \varepsilon^{-1} \} \\ \text{et } \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) = \chi \}. \end{aligned}$$

On s'attend à ce que la minoration soit une égalité. On le prouve lorsque le centre de G est connexe et $p \neq 2$ (voir le corollaire 3.2.6 ci-dessous), auquel cas le minorant est nul d'après le lemme 3.1.2. De même pour son analogue modulo p , sauf dans certains cas exceptionnels et lorsque $p = 2$ (voir la remarque 3.2.5 ci-dessous).

EXEMPLE 3.2.3. — Avec $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathrm{GL}_{2n}$ l'intersection des sous-groupes diagonaux par blocs GL_2^n et $\mathrm{GL}_2^k \times \mathrm{SL}_4 \times \mathrm{GL}_2^{n-2-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, $T \subset B$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ le caractère continu unitaire défini par

$$\chi(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_{2n})) = (-1)^{\mathrm{val}_p(t_1 t_3 \dots t_{2n-1})} \varepsilon^{-1}(t_1^{2n-1} t_2^{2n-2} \dots t_{2n-1}),$$

on a $\mathrm{card} \Delta = n$ et $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ est distinct de χ et indépendant de $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. — Soient $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow A^\times$ des caractères lisses. En utilisant les isomorphismes (2) et (4), la suite exacte (1) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi$ devient

$$(16) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi', \chi) \rightarrow \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \\ \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)).$$

De même pour tout $\alpha \in \Delta$, en utilisant les isomorphismes (3) et (5), la suite exacte (1) pour le triplet (G_α, B_α, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi$ devient

$$(17) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi', \chi) \rightarrow \mathrm{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \\ \rightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)).$$

On suppose $A = k_E$ et on prouve la version modulo p du théorème. On pose

$$\Delta' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)\}, \\ \Delta'' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \Delta' \mid \chi \circ \alpha^\vee = \omega^{-1}\}.$$

En utilisant la suite exacte (16), on voit que le conoyau du premier morphisme non trivial est de dimension au plus $\mathrm{card} \Delta'$. Pour tout $\alpha \in \Delta' - \Delta''$, le premier morphisme non trivial de la suite exacte (17) n'est pas surjectif d'après l'analogue modulo p du lemme 3.1.4, donc il existe une extension

$$0 \rightarrow \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi \rightarrow \mathcal{E}_\alpha \rightarrow \mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi' \rightarrow 0$$

dont la classe a une image non nulle par le second morphisme non trivial de cette suite exacte. En utilisant la proposition 2.2.1 avec $U = \chi'$ et $V = \chi$, on en déduit que les images des classes des extensions $(\mathrm{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta' - \Delta''}$ par le second morphisme non trivial de la suite exacte (16) sont non nulles et appartiennent à des facteurs directs distincts, donc le conoyau du premier morphisme non trivial de la suite exacte (16) est de dimension au moins $\mathrm{card}(\Delta' - \Delta'')$. Si $\chi' \neq \chi$, alors $\Delta'' = \emptyset$ d'après le lemme 3.1.2 et le premier terme non trivial de la suite exacte (16) est nul d'après [10, proposition 5.1.4 (i)], donc on obtient

le point (i) modulo p . Si $\chi' = \chi$, alors on obtient les bornes du point (ii) de la remarque 3.2.2 modulo p . En particulier, on en déduit le point (ii) modulo p .

On prouve maintenant le théorème. Soient $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Pour $k \geq 1$ entier, les suites exactes (16) et (17) et le diagramme de la proposition 2.2.1 avec $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$ et les réductions modulo ϖ_E^k des caractères χ et χ' forment des systèmes projectifs. On passe à la limite projective puis on tensorise par E sur \mathcal{O}_E en utilisant [6, lemme 4.1.3] et [10, proposition B.2]. On utilise [10, proposition 5.1.6] au lieu de [10, proposition 5.1.4 (i)]. Le reste de la démonstration est identique à la version modulo p . \square

On détermine toutes les auto-extensions d'une série principale de $G(\mathbb{Q}_p)$ modulo p lorsque le centre de G est connexe et on en déduit le résultat analogue p -adique lorsque $p \neq 2$.

THÉORÈME 3.2.4. — *On suppose le centre de G connexe. Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ un caractère lisse.*

(i) *Si $p \neq 2$, alors le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

(ii) *Si $p = 2$, alors le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection k_E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \hookrightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

dont le conoyau est de dimension $\text{card}\{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) = \chi\}$.

Démonstration. — La suite exacte (16) avec $A = k_E$ et $\chi' = \chi$ se complète en une suite exacte de k_E -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} (18) \quad 0 &\rightarrow \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \rightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}\left(\chi, R^1\text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)\right) \rightarrow \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^2(\chi, \chi) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^2\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \end{aligned}$$

dont le premier morphisme non trivial et le dernier morphisme sont induits par le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et où $R^\bullet\text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}$ désigne les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\text{Ord}_{B(\mathbb{Q}_p)}$ dans la catégorie des représentations lisses localement admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E (voir la suite exacte [7, (3.7.5)]). En utilisant [7, remarque 3.7.3] et l'isomorphisme (4), on voit que le troisième terme non trivial de cette suite exacte est de dimension au plus $\text{card } \Delta'$ avec

$$\Delta' \stackrel{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha) = \chi\}.$$

Si $p = 2$, alors en utilisant le lemme 3.1.5 (voir aussi la remarque 3.1.3) et en procédant comme dans la preuve de la version modulo p du théorème 3.2.1, on obtient le point (ii).

On suppose $p \neq 2$ et on montre le point (i). Comme Z est connexe, il existe des sous-tores $(T_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de T tels que l'on a un isomorphisme $T \cong Z \times \prod_{\alpha \in \Delta} T_\alpha$ à travers lequel $Z_\beta \cong Z \times \prod_{\alpha \in \Delta - \{\beta\}} T_\alpha$ pour tout $\beta \in \Delta$ (il suffit de prendre les images de copoids fondamentaux $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, voir [5, proposition 2.1.1]). Pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$, la composée des morphismes naturels k_E -linéaires

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^\bullet(\chi, \chi) \rightarrow \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^\bullet(\chi, \chi) \rightarrow \mathrm{Ext}_{T_\beta(\mathbb{Q}_p)}^\bullet(\chi, \chi)$$

est un isomorphisme si $\alpha = \beta$ (car $T \cong T_\alpha \times Z_\alpha$) et elle est nulle sinon (car $T_\beta \subset Z_\alpha$). Ainsi, le morphisme naturel k_E -linéaire

$$(19) \quad \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p), \chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}}^\bullet(\chi, \chi) \rightarrow \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^\bullet(\chi, \chi)$$

est injectif. Pour tout $\alpha \in \Delta'$, les lemmes 3.1.2 et 3.1.6 montrent qu'il existe une auto-extension non triviale \mathcal{E}_α de longueur 2 de χ sur laquelle $Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ agit à travers $\chi|_{Z_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et telle que $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \mathcal{E}_\alpha$ est une auto-extension triviale de longueur 2 de $\mathrm{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi$. Les images par le morphisme (19) des classes des auto-extensions $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta'}$ engendrent donc un sous- k_E -espace vectoriel de dimension $\mathrm{card} \Delta'$ qui est par construction dans le noyau du dernier morphisme de la suite exacte (18), donc le premier morphisme non trivial de la suite exacte (18) est un isomorphisme. \square

REMARQUE 3.2.5. — (i) En général (sans supposer le centre de G connexe) si $p \neq 2$, alors en posant

$$\Delta'' \stackrel{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta' \mid \chi \circ \alpha^\vee = \omega^{-1}\},$$

on peut construire des auto-extensions $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta''}$ comme dans la preuve (voir la remarque 3.1.7) et montrer que les images par le morphisme (19) de leurs classes engendrent un sous- k_E -espace vectoriel de dimension $\mathrm{card} \Delta'' - \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Hom}(Z''/Z''^\circ, \mu_p)$ avec $Z'' \subset T$ le sous-groupe $\bigcap_{\alpha \in \Delta''} \ker \alpha$ et μ_p le groupe des racines p -ièmes de l'unité, donc on s'attend à ce que le conoyau de l'injection k_E -linéaire induite par le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ soit de dimension

$$\mathrm{card}(\Delta' - \Delta'') + \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Hom}(Z''/Z''^\circ, \mu_p).$$

(ii) Le point (ii) est encore vrai sans supposer le centre de G connexe (cette hypothèse n'est pas utilisée dans la preuve).

COROLLAIRE 3.2.6. — *On suppose le centre de G connexe et $p \neq 2$. Pour tout caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

Démonstration. — Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire. Le foncteur exact $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ admet un quasi-inverse à gauche (voir [6, corollaire 4.3.5]), donc il induit une injection E -linéaire

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \hookrightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right).$$

En utilisant l'inégalité de [10, proposition B.2] et le fait que $p \neq 2$ d'où

$$\dim_{k_E} \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\bar{\chi}, \bar{\chi}) = \dim_E \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi)$$

avec $\bar{\chi} : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ la réduction modulo ϖ_E de χ (voir [10, proposition 5.1.4 (ii)] et [10, proposition 5.1.6]), on déduit du point (i) du théorème 3.2.4 que cette injection est un isomorphisme. \square

REMARQUE 3.2.7. — On s'attend à ce que le résultat soit encore vrai lorsque $p = 2$.

3.3. Variante pour les représentations ordinaires. — Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique standard et $L \subset P$ le sous-groupe de Levi standard. On reprend les notations de la sous-section 2.3.

DÉFINITION 3.3.1. — Pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subset L$, on définit la *représentation spéciale* relative à Q de $L(F)$ sur E

$$\widehat{\text{Sp}}_Q \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \widehat{1}}{\sum_{Q \subsetneq Q' \subset L} \text{Ind}_{Q'^-(F)}^{L(F)} \widehat{1}}$$

avec Q' parmi les sous-groupes paraboliques de L et $\widehat{1}$ la représentation triviale sur E . Lorsque $Q = B_L$, on l'appelle la *représentation de Steinberg* de $L(F)$ sur E et on la note $\widehat{\text{St}}$. Lorsque $Q = Q_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, on la note $\widehat{\text{Sp}}_\alpha$.

PROPOSITION 3.3.2. — *Les représentations spéciales sont des représentations continues unitaires admissibles de $L(F)$ sur E topologiquement irréductibles et deux à deux non isomorphes. Elles forment les constituants irréductibles de $\text{Ind}_{B_L^-(F)}^{L(F)} \widehat{1}$, chacune apparaissant avec multiplicité un.*

Cette proposition est une conséquence directe du résultat analogue modulo p (voir la remarque 2.3.2) et du lemme suivant avec $k = 1$.

LEMME 3.3.3. — Soit $Q \subset L$ un sous-groupe parabolique standard. Il existe une boule $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \subset \widehat{\mathrm{Sp}}_Q$ stable par $L(F)$ telle que pour tout entier $k \geq 1$, $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ est isomorphe à la représentation spéciale relative à Q de $L(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$.

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r \mathcal{O}_E \subset \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$ la boule stable par $L(F)$ constituée des fonctions à valeurs dans $\varpi_E^r \mathcal{O}_E$. On note $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ l'image de $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q$. C'est une boule de $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q$ stable par $L(F)$ et on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \sum_{\substack{Q \subsetneq Q' \subset L \\ Q \subsetneq Q' \subset L}} \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \rightarrow \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \rightarrow \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \rightarrow 0$$

(l'injectivité du premier morphisme non trivial est immédiate, la surjectivité du second morphisme non trivial résulte de la définition de $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ et l'exactitude au milieu se déduit du sous-lemme ci-dessous avec $r = 0$).

Soit $k \geq 1$ entier. La composition avec la projection $\mathcal{O}_E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$ induit une application

$$\sum_{\substack{Q \subsetneq Q' \subset L \\ Q \subsetneq Q' \subset L}} \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \twoheadrightarrow \sum_{\substack{Q \subsetneq Q' \subset L \\ Q \subsetneq Q' \subset L}} \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$$

(où la première somme est calculée dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ et la seconde dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$) qui coïncide avec la réduction modulo ϖ_E^k (cela résulte du sous-lemme ci-dessous avec $r = k$). On en déduit que la réduction modulo ϖ_E^k (c'est-à-dire l'image par le foncteur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E \otimes_{\mathcal{O}_E} (-)$) de la suite exacte précédente est la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \sum_{\substack{Q \subsetneq Q' \subset L \\ Q \subsetneq Q' \subset L}} \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E \rightarrow \mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E \rightarrow \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0 \rightarrow 0$$

(l'injectivité du premier morphisme non trivial résulte du fait que $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ est un \mathcal{O}_E -module sans torsion donc plat). Ainsi, $\widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0/\varpi_E^k \widehat{\mathrm{Sp}}_Q^0$ est isomorphe à la représentation spéciale relative à Q de $L(F)$ sur $\mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$. \square

SOUS-LEMME. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $Q \subsetneq Q_1, \dots, Q_n \subset L$ des sous-groupes paraboliques standards. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité suivante dans $\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$:

$$\mathrm{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r \mathcal{O}_E \cap \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} E = \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^r \mathcal{O}_E.$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial. On suppose $n > 0$ et le lemme vrai pour $n - 1$. En multipliant par ϖ_E^{-r} , on se

ramène au cas $r = 0$. Il suffit de montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante dans $\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} E$:

$$\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E \cap \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E \subset \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E.$$

On procède par récurrence sur l . Le cas $l = 0$ est trivial. On suppose $l > 0$ et l'inclusion vraie pour $l - 1$. Soit $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \prod_{k=1}^n \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E$ tel que $\sum_{k=1}^n f_k \in \text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\bar{f}_k \in \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E$ la composée de f_k avec la projection $\varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E \rightarrow \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E / \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E \cong k_E$. On a donc l'égalité $\sum_{k=1}^n \bar{f}_k = 0$ dans $\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$. Comme $\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$ est de longueur fini sans multiplicité dans la catégorie des représentations lisses de $L(F)$ sur k_E (voir la remarque 2.3.2), on a l'égalité suivante dans $\text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} k_E$:

$$\text{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \sum_{k=1}^{n-1} \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\text{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E \right).$$

Ainsi, $\bar{f}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{f}'_k$ avec $\bar{f}'_k \in \text{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} k_E \cap \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} k_E$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On choisit un relèvement $f'_k \in \text{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E \cap \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{-l} \mathcal{O}_E$ de \bar{f}'_k pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On obtient $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} f'_k + f'_n$ avec $f'_n \in \text{Ind}_{Q_n^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$, donc $\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) + f'_n \in \text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$ par hypothèse, d'où $\sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) \in \text{Ind}_{Q^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$. Par hypothèse de récurrence avec $n-1$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1} (f_k + f'_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f''_k$ avec $f''_k \in \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \varpi_E^{1-l} \mathcal{O}_E$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et par hypothèse de récurrence avec $l-1$, on en conclut que $\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^{n-1} f''_k + f'_n \in \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{Q_k^-(F)}^{L(F)} \mathcal{O}_E$. \square

DÉFINITION 3.3.4. — Une *représentation ordinaire* de $G(F)$ sur E est une représentation de la forme $\text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)} (\sigma \otimes \chi)$ avec σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur E et $\chi : L(F) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.

REMARQUE 3.3.5. — Si [5, conjecture 3.1.2] est vraie, alors les représentations ordinaires topologiquement irréductibles sont exactement les sous-quotients irréductibles de séries principales (cela se déduit du résultat analogue modulo p).

On détermine les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$. On traite séparément les cas $F = \mathbb{Q}_p$ et $F \neq \mathbb{Q}_p$.

PROPOSITION 3.3.6. — *On suppose $F = \mathbb{Q}_p$. Soient σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur E et $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un autre caractère continu unitaire, alors

$$\mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\sigma \otimes \chi) \right) \neq 0$$

si et seulement si ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{St}}$ et $\chi' = \chi$, ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{St}}$ et $\chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta - \Delta_L$, ou bien $\sigma = \widehat{\mathrm{Sp}}_\alpha$ et $\chi' = \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha)$ avec $\alpha \in \Delta_L$.

(ii) Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ , alors

$$\begin{aligned} \dim_E \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi) \right) \\ = \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta - \Delta_L \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \}. \end{aligned}$$

(iii) Pour tout $\alpha \in \Delta_L$, on a

$$\dim_E \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha), \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{\mathrm{Sp}}_\alpha \otimes \chi) \right) = 1.$$

(iv) Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta_L$, alors le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \rightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi)$ induisent un isomorphisme E -linéaire

$$\mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi) \right).$$

REMARQUE 3.3.7. — Sans l'hypothèse de générnicité dans le point (iv), on montre que le foncteur $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ et la projection $\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \rightarrow \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{\mathrm{St}} \otimes \chi)$ induisent une injection E -linéaire dont le conoyau est de dimension comprise entre

$$\begin{aligned} \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta - \Delta_L \mid s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) = \chi \text{ et } \chi \circ \alpha^\vee \neq \varepsilon^{-1} \} \\ \text{et } \mathrm{card} \{ \alpha \in \Delta - \Delta_L \mid s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) = \chi \}. \end{aligned}$$

On s'attend à ce que la minoration soit une égalité (on peut déduire cela du point (i) du théorème 3.2.4 lorsque le centre de G est connexe et $p \neq 2$, auquel cas le minorant est nul d'après le lemme 3.1.2). De même pour son analogue modulo p , sauf dans certains cas exceptionnels et lorsque $p = 2$.

Démonstration. — Soient σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur A et $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \rightarrow A^\times$, $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow A^\times$ des caractères lisses. En utilisant le corollaire 2.3.8 et le point (i) du corollaire 2.3.9, on déduit de la suite exacte (1) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\sigma \otimes \chi)$ que :

– si $\sigma \neq \mathrm{St}$ et $\sigma \neq \mathrm{Sp}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta_L$, alors

$$(20) \quad \mathrm{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\sigma \otimes \chi) \right) = 0;$$

– si $\sigma = \text{St}$, alors on a une suite exacte de A -modules

$$(21) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi', \chi) \rightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{St} \otimes \chi)\right) \\ \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Delta - \Delta_L} \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha));$$

– si $\sigma = \text{Sp}_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_L$, alors on a une injection A -linéaire

$$(22) \quad \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{Sp}_\alpha \otimes \chi)\right) \\ \hookrightarrow \text{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)}(\chi', \chi \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)).$$

On suppose $A = k_E$ et on prouve la version modulo p de la proposition. En utilisant [10, proposition 5.1.4 (i)], on obtient les cas d'annulation du point (i) modulo p . Les cas de non annulation résultent des autres points modulo p . On pose

$$\Delta' \stackrel{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\omega^{-1} \circ \alpha)\}, \\ \Delta'' \stackrel{\text{déf}}{=} \{\alpha \in \Delta' \mid \chi \circ \alpha^\vee = \omega^{-1}\}.$$

Pour tout $\alpha \in \Delta_L$, on a une suite exacte de k_E -espaces vectoriels

$$(23) \quad \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(I_\alpha \otimes \chi)\right) \\ \rightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right) \\ \rightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{Sp}_\alpha \otimes \chi)\right)$$

avec I_α le noyau de la projection $\text{Ind}_{Q_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \underline{1} \twoheadrightarrow \text{Sp}_\alpha$. D'une part les constituants irréductibles de I_α sont les représentations $(\text{Sp}_Q)_{Q_\alpha \subsetneq Q \subset L}$ avec Q parmi les sous-groupes paraboliques de L (voir la remarque 2.3.2), donc on déduit de l'égalité (20) avec $\sigma = \text{Sp}_Q$ pour tout sous-groupe parabolique $Q \subset L$ tel que $Q_\alpha \subsetneq Q$ que le premier terme de la suite exacte (23) est nul. D'autre part le foncteur exact $\text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ admet un quasi-inverse à gauche d'après le lemme 2.1.1 pour le triplet (G, P_α, G_α) , donc il induit une injection k_E -linéaire

$$\text{Ext}_{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \chi', \chi\right) \hookrightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi\right)$$

et en utilisant l'inégalité (14) on en déduit que le terme du milieu de la suite exacte (23) est non nul lorsque $\alpha \in \Delta'$. On en conclut que le dernier terme de la suite exacte (23) est non nul lorsque $\alpha \in \Delta'$ et en utilisant l'injection (22), on obtient le point (iii) modulo p . En utilisant la suite exacte (21), on voit que le conoyau du premier morphisme non trivial est de dimension au plus $\text{card}(\Delta - \Delta_L) \cap \Delta'$. La représentation $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \cong \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}((\text{Ind}_{B_L^-(\mathbb{Q}_p)}^{L(\mathbb{Q}_p)} \underline{1}) \otimes \chi)$

admet une filtration dont les quotients successifs sont exactement les représentations $(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{Sp}_Q \otimes \chi))_{Q \subset L}$ avec Q parmi les sous-groupes paraboliques standards de L (voir la remarque 2.3.2). En utilisant le point (i) et la minoration du point (ii) de l'analogue modulo p du théorème 3.2.1, on voit que

$$\begin{aligned} \dim_{k_E} \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi', \chi) + \text{card}(\Delta' - \Delta'') \\ \leq \sum_{Q \subset L} \dim_{k_E} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{Sp}_Q \otimes \chi)\right) \end{aligned}$$

avec Q parmi les sous-groupes paraboliques standards de L . En utilisant les cas d'annulation du point (i) modulo p et le point (iii) modulo p , on en déduit que

$$\begin{aligned} \dim_{k_E} \text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi', \chi) + \text{card}((\Delta - \Delta_L) \cap (\Delta' - \Delta'')) \\ \leq \dim_{k_E} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(\text{St} \otimes \chi)\right), \end{aligned}$$

donc le conoyau du premier morphisme non trivial de la suite exacte (21) est de dimension au moins $\text{card}((\Delta - \Delta_L) \cap (\Delta' - \Delta''))$. Si $\chi' \neq \chi$, alors $\Delta'' = \emptyset$ d'après le lemme 3.1.2 et le premier terme non trivial de la suite exacte (21) est nul d'après [10, proposition 5.1.4 (i)], donc on obtient le point (ii) modulop. Si $\chi' = \chi$, alors on obtient les bornes de la remarque 3.3.7 modulo p . En particulier, on en déduit le point (iv) modulo p .

On prouve maintenant la proposition. Soient σ une représentation spéciale de $L(\mathbb{Q}_p)$ sur E et $\chi : L(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires. Pour $k \geq 1$ entier, l'égalité (20), la suite exacte (21) et l'injection (22) avec $A = \mathcal{O}_E/\varpi_E^k \mathcal{O}_E$ et les réductions modulo ϖ_E^k de la représentation spéciale σ et des caractères χ et χ' forment des systèmes projectifs. On passe à la limite projective puis on tensorise par E sur \mathcal{O}_E en utilisant le lemme 3.3.3, [6, lemme 4.1.3] et [10, proposition B.2]. On utilise [10, proposition 5.1.6] au lieu de [10, proposition 5.1.4 (i)]. Le reste de la démonstration est identique à la version modulo p . \square

PROPOSITION 3.3.8. — *On suppose $F \neq \mathbb{Q}_p$. Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur E et $\chi : L(F) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

(i) *Si $\chi' : T(F) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un autre caractère continu unitaire, alors*

$$\text{Ext}_{G(F)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)\right) \neq 0$$

si et seulement si $\sigma = \widehat{\text{St}}$ et $\chi' = \chi$.

(ii) *Le foncteur $\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)}$ et la projection $\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi \rightarrow \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\widehat{\text{St}} \otimes \chi)$ induisent un isomorphisme E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(F)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(F)}^1\left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi, \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\widehat{\text{St}} \otimes \chi)\right).$$

Démonstration. — Soient σ une représentation spéciale de $L(F)$ sur A et $\chi : L(F) \rightarrow A^\times$, $\chi' : T(F) \rightarrow A^\times$ des caractères lisses. En utilisant le corollaire 2.3.8 et le point (ii) du corollaire 2.3.9, on déduit de la suite exacte (1) pour le triplet (G, B, T) avec $U = \chi'$ et $V = \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi)$ que :

– si $\sigma \neq \text{St}$, alors

$$\text{Ext}_{G(F)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\sigma \otimes \chi) \right) = 0 ;$$

– si $\sigma = \text{St}$, alors on a un isomorphisme A -linéaire

$$\text{Ext}_{T(F)}^1(\chi', \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(F)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(F)}^{G(F)} \chi', \text{Ind}_{P^-(F)}^{G(F)}(\text{St} \otimes \chi) \right).$$

Avec $A = k_E$ et en utilisant [10, proposition 5.1.4 (i)] on prouve la version modulo p de la proposition. Par un passage à la limite projective et un produit tensoriel comme dans la preuve de la proposition 3.3.6 et en utilisant [10, proposition 5.1.6] on prouve la proposition. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ABE – “On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p -adic split reductive group”, *Compos. Math.* **149** (2013), p. 2139–2168.
- [2] N. ABE, G. HENNIART, F. HERZIG & M.-F. VIGNÉRAS – “A classification of irreducible admissible mod p representations of p -adic reductive groups”, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), p. 495–559.
- [3] N. ABE, G. HENNIART & M.-F. VIGNÉRAS – “Modulo p representations of reductive p -adic groups : functorial properties”, en préparation.
- [4] L. BARTHEL & R. LIVNÉ – “Irreducible modular representations of GL_2 of a local field”, *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.
- [5] C. BREUIL & F. HERZIG – “Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations”, *Duke Math. J.* **164** (2015), p. 1271–1352.
- [6] M. EMERTON – “Ordinary parts of admissible representations of p -adic reductive groups I. Definition and first properties”, *Astérisque* **331** (2010), p. 355–402.
- [7] _____, “Ordinary parts of admissible representations of p -adic reductive groups II. Derived functors”, *Astérisque* **331** (2010), p. 403–459.
- [8] M. EMERTON & V. PAŠKŪNAS – “On the effaceability of certain δ -functors”, *Astérisque* **331** (2010), p. 461–469.
- [9] E. GROSSE-KLÖNNE – “On special representations of p -adic reductive groups”, *Duke Math. J.* **163** (2014), p. 2179–2216.
- [10] J. HAUSEUX – “Extensions entre séries principales p -adiques et modulo p de $G(F)$ ”, *J. Inst. Math. Jussieu* **15** (2016), p. 225–270.

- [11] F. HERZIG – “The classification of irreducible admissible mod p representations of a p -adic GL_n ”, *Invent. math.* **186** (2011), p. 373–434.
- [12] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [13] V. PAŠKŪNAS – “Extensions for supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, *Astérisque* **331** (2010), p. 317–353.
- [14] _____, “The image of Colmez’s Montréal functor”, *Publ. Math. IHÉS* **118** (2013), p. 1–191.
- [15] M.-F. VIGNÉRAS – “Série principale modulo p de groupes réductifs p -adiques”, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), p. 2090–2112.