Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPOSANTES PRV GÉNÉRALISÉES ET CHEMINS DE LITTELMANN

Pierre-Louis Montagard

Tome 145
Fascicule 1

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 29-45

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 145, mars 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (1), 2017, p. 29-45

COMPOSANTES PRV GÉNÉRALISÉES ET CHEMINS DE LITTELMANN

PAR PIERRE-LOUIS MONTAGARD

RÉSUMÉ. — Nous énonçons une condition suffisante pour qu'un chemin de Littelmann représente un vecteur de poids extrémal d'une représentation intégrable, irréductible et de plus haut poids d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable. À l'aide de cette condition, nous présentons, dans un contexte plus général, une preuve alternative de résultats de Boris Pasquier, Nicolas Ressayre et l'auteur de cet article sur l'existence de composantes PRV généralisées.

ABSTRACT (*PRV generalized components and Littelmann paths*). — We give a sufficient condition for a Littelmann path to represent a vector of extremal weight of an integrable irreducible highest weight representation of a symmetrizable Kac-Moody algebra. Thanks to this condition we present, in a more general context, an alternative proof of a recent result by Boris Pasquier, Nicolas Ressayre and the author of this article on the existence of generalized PRV components.

0. Introduction

La conjecture PRV a été énoncée dans les années 60 dans [11] par Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan. Cette conjecture concerne le problème de décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'une

Texte reçu le 16 septembre 2014, modifié le 18 décembre 2015, accepté le 18 décembre 2015.

PIERRE-LOUIS MONTAGARD, Université Montpellier II - CC 51-Place Eugène Bataillon - 34095 Montpellier Cedex 5 - France • *E-mail :* `pierre-louis.montagard@math.univ-montp2.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E46, 17B10, 17B65, 05E10.

Mots clefs. — Composantes PRV, produit tensoriel, chemins de Littelmann, algèbre de Kac-Moody symétrisable.

 0037-9484/2017/29/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2730

algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. Son énoncé est très simple : soient μ et ν deux poids dominants de $\mathfrak{g}$ et v, w deux éléments du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$; soient $V(\mu)$ (resp. $V(\nu)$) la représentation irréductible de plus haut poids μ (resp. ν). Alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu$ est dominant la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda = v\mu + w\nu$ est de multiplicité non nulle dans $V(\mu) \otimes V(\nu)$.

On connaît aujourd'hui plusieurs preuves de cette conjecture. Citons d'abord, les preuves (simultanées et indépendantes) à la fin des années 80, de Shrawan Kumar [2] et [3] et Olivier Mathieu [8]. La géométrie, et notamment la géométrie des espaces de drapeaux du groupe G associé à $\mathfrak{g}$ intervient de façon essentielle dans ces deux preuves. Notons que ces deux preuves sont valables dans le contexte plus général des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Plus tard, au milieu des années 90, Peter Littelmann a donné une preuve combinatoire et plus élémentaire de la conjecture PRV. Cette preuve est une application de la théorie des chemins de Littelmann développée dans [5] et [6], théorie qui généralise la règle de Littlewood-Richardson dans le cadre des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

Récemment dans [9] et [10], avec Nicolas Ressayre et Boris Pasquier, nous avons démontré plusieurs généralisations de l'énoncé PRV dans le contexte d'un groupe algébrique réductif G et en utilisant des outils géométriques. Énonçons l'une de ces généralisations.

THÉORÈME 0.1. — *Soit G un groupe algébrique réductif complexe, soient (μ, ν) un couple de poids dominants et (v, w) un couple d'éléments du groupe de Weyl, soit β une racine positive (et $\beta^\vee$ la coracine associée) telle que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

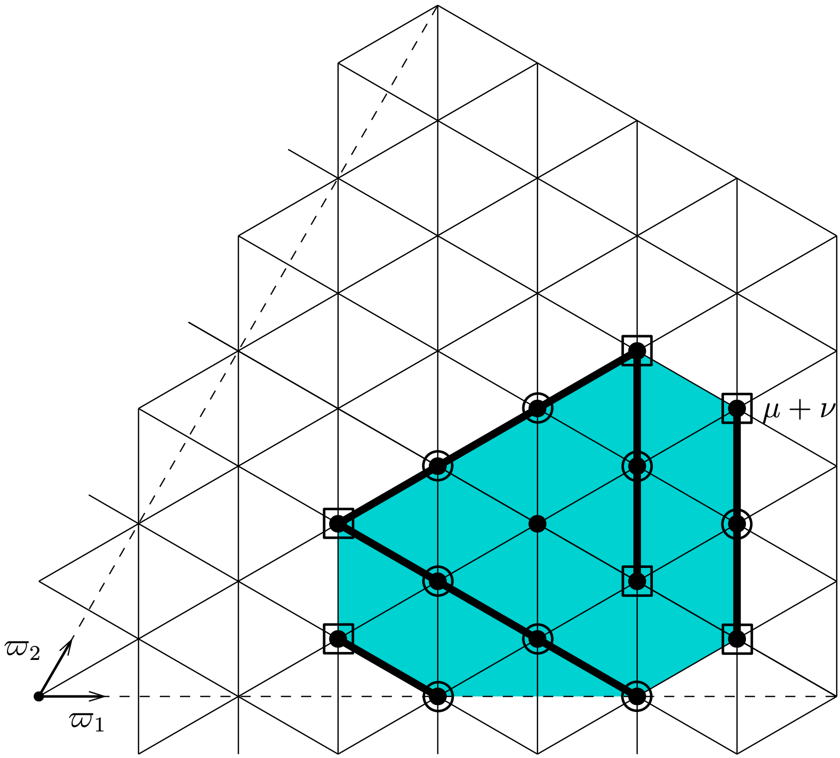
1. *β est une racine simple ;*
2. *$v^{-1}\beta$ est une racine simple ;*
3. *$w^{-1}\beta$ est une racine simple.*

Soit k un entier vérifiant les inégalités :

$$0 \leq k \leq \min\{\langle v\mu, \beta^\vee\rangle, \langle w\nu, \beta^\vee\rangle\},$$

alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu - k\beta$ est dominant la représentation irréductible $V(\lambda)$ est de multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$.

L'ensemble des composantes ainsi obtenues contenant strictement les composantes obtenues par l'énoncé de la conjecture PRV originale, nous les appellerons composantes PRV généralisées. Nous avons représenté dans la figure 0.1, un exemple, montrant les composantes obtenues par ce procédé. Dans cet exemple G est égal au groupe $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{C})$, $\mu = 7\varpi_1 + 2\varpi_2$, $\nu = \varpi_1 + 3\varpi_2$ où ϖ_1, ϖ_2 sont les deux poids fondamentaux de G. Nous avons représenté sur la figure les poids dominants correspondants aux représentations irréductibles de multiplicité non nulle du produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$, les composantes PRV classiques, les composantes PRV généralisées ainsi que les segments de direction β donnés par le



● Composantes du produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$

□ Composantes PRV classiques

○ Composantes PRV généralisées

FIGURE 0.1.

théorème 0.1 et contenant une composante PRV généralisée (et non classique). Le réseau représenté est le réseau engendré par les racines (et non le réseau des poids). En effet, comme dans ce cas le poids $\mu + \nu$ appartient au réseau des racines, tous les plus haut poids des composantes qui apparaissent dans le produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$ appartiennent à ce réseau.

Dans cet article, nous allons donner une preuve de l'existence des composantes PRV généralisées pour les algèbres de Kac-Moody, en utilisant la théorie des chemins de Littelmann. Nous ne retrouvons pas exactement le même énoncé dans le contexte des algèbres de Kac-Moody symétrisables. En effet, dans le cas (i) (β est une racine simple) la preuve du théorème n'est valable que si $\mathfrak{g}$

est de dimension finie et nous ne savons pas si ce cas est vrai pour les algèbres de Kac-Moody symétrisables.

Rappelons brièvement les principaux résultats de la théorie des chemins de Littelmann, résultats qui seront détaillés et précisés dans la partie 1. Si X est le réseau des poids de $\mathfrak{g}$, on considère les chemins tracés dans $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ d'origine 0 et d'extrémité un élément de X. Si μ est un poids dominant, et si π est un chemin d'extrémité μ complètement contenu dans la chambre dominante, la théorie des chemins de Littelmann permet de définir un ensemble de chemins $B(\pi)$ contenant π tels que la multiplicité du poids χ dans $V(\mu)$ est égale au nombre de chemins dans $B(\pi)$ d'extrémité χ (théorème 1.2).

Le modèle des chemins donne également une règle combinatoire pour décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles. En effet, si ν est un poids dominant de $\mathfrak{g}$, si π' est un chemin contenu dans la chambre dominante et d'extrémité ν et si $B(\pi) * B(\pi')$ est l'ensemble des concaténations des chemins de $B(\pi)$ et des chemins de $B(\pi')$, alors la multiplicité de la représentation irréductible $V(\lambda)$ dans $V(\mu) \otimes V(\nu)$ est égale au nombre de chemins dans $B(\pi) * B(\pi')$ contenus dans la chambre dominante et d'extrémité λ (voir le théorème 1.3).

Rappelons que pour tout $w \in W$ le poids $w\lambda$ est de multiplicité un dans $V(\lambda)$; pour tout $w \in W$, il existe donc un unique chemin dans $B(\pi)$ d'extrémité $w\lambda$; ces chemins seront appelés chemins extrémaux. Le chemin extrémal correspondant à w égal à l'identité est caractérisé comme étant l'unique chemin de $B(\pi)$ contenu dans la chambre dominante. Pour w différent de l'identité, on ne connaît pas de caractérisation du même genre pour les chemins extrémaux d'extrémité $w\lambda$. Dans la partie 2, nous énonçons une condition suffisante pour qu'un chemin soit extrémal.

Enfin, dans la partie 3, nous montrons le théorème principal de ce travail : l'existence des composantes PRV généralisées pour les algèbres de Kac-Moody symétrisables. Pour cela, nous utilisons le critère obtenu dans la partie 2 pour montrer qu'un chemin explicite de $B(\pi) * B(\pi')$ est extrémal. Nous énonçons et démontrons ensuite un résultat plus général (le théorème 3.2), où nous exhibons des composantes du même type que les composantes PRV généralisées, mais qui dépendent d'un ensemble de racines deux à deux orthogonales. Ce résultat est également une généralisation d'un résultat de l'article [10].

1. Rappels

Pour fixer les notations nous allons rappeler brièvement les points principaux de la théorie des chemins. Tous ces résultats sont dus à Peter Littelmann et nous renvoyons aux articles originaux de [5] et [6] pour les preuves et les détails. Dans tout cet article $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Kac-Moody symétrisable sur le corps des nombres complexes. Nous utiliserons les notations suivantes concernant $\mathfrak{g}$:

- $\mathfrak{h}$: une sous-algèbre de Cartan ;
- X : le réseau des poids ;
- $X_{\mathbb{Q}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $X_{\mathbb{R}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$;
- S : l'ensemble des racines simples ;
- W : le groupe de Weyl ;
- si β est une racine réelle, nous noterons $\beta^{\vee} \in X_{\mathbb{R}}^{*}$ la coracine associée et si $\chi \in X_{\mathbb{R}}$ nous noterons $\langle \chi, \beta^{\vee} \rangle$ l'évaluation $\beta^{\vee}(\chi)$;
- si $\alpha \in S$, s_{α} désigne la réflexion sur $X_{\mathbb{R}}$ définie par $s_{\alpha}(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^{\vee} \rangle \alpha$;
- D désignera la chambre dominante et si $\lambda \in X \cap D$ nous noterons $V(\lambda)$ la représentation intégrable irréductible et de plus haut poids λ.

DÉFINITION 1.1. — Un chemin π est une application $\pi : [0,1] \to X_{\mathbb{R}}$ rectifiable telle que $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) \in X$. On dit que deux chemins π et π' sont équivalents s'il existe une reparamétrisation $\phi : [0,1] \to [0,1]$ croissante, surjective et continue telle que $\pi = \pi' \circ \phi$. Nous noterons Π l'ensemble des chemins modulo l'équivalence ci-dessus.

EXEMPLES 1. — 1. Soit $\chi \in X$, nous noterons π_{χ} le chemin défini par $\pi_{\chi}(t) = t\chi$.

2. Si π_1 et π_2 sont deux chemins, le chemin $\pi_1 * \pi_2$ est le chemin défini par :

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \pi_1(2t) && \text{pour } t \leq 1/2 \text{ ;} \\ &= \pi_1(1) + \pi_2(2t-1) && \text{pour } t > 1/2. \end{aligned}$$

3. Dans la suite, nous considérerons essentiellement des chemins affines par morceaux et tels que les changements de direction se font en des points rationnels. Un tel chemin π s'écrit $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \cdots * \pi_{\chi_p}$ avec $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p) \in X_{\mathbb{Q}}^{p}$.
4. Si π est un chemin, nous noterons π^{*} le chemin défini par $\pi^{*}(t) = \pi(1-t) - \pi(1)$.

Pour toute racine réelle α nous noterons la fonction : $H_{\alpha}^{\pi}(t) = \langle \pi(t), \alpha^{\vee} \rangle$. Soit m_{α}^{π} le minimum de cette fonction. Nous aurons également besoin des fonctions suivantes :

$$L_{\alpha}^{\pi}(t) = \min\{1, (H_{\alpha}^{\pi}(s) - m_{\alpha}^{\pi})_{t \leq s \leq 1}\}$$

et

$$R_{\alpha}^{\pi}(t) = \max\{0, (m_{\alpha}^{\pi} - H_{\alpha}^{\pi}(s))_{0 \leq s \leq t}\}.$$

DÉFINITION 1.2. — Soit $\pi \in \Pi$ et α une racine simple, alors si $L_{\alpha}^{\pi}(1) < 1$, $f_{\alpha}\pi$ n'est pas défini, sinon $f_{\alpha}\pi(t) := \pi(t) - L_{\alpha}^{\pi}(t)\alpha$.

De même si $R_{\alpha}^{\pi}(1) > 0$ alors $e_{\alpha}\pi$ n'est pas défini, sinon $e_{\alpha}\pi(t) := \pi(t) - R_{\alpha}^{\pi}(t)\alpha$.

Voici les propriétés élémentaires des opérateurs f_{α} et e_{α} :

PROPOSITION 1.1. — *Soit $\pi \in \Pi$ et α une racine simple ;*

1. *Si* $f_\alpha\pi$ *est défini alors* $f_\alpha\pi(1) = \pi(1) - \alpha$. *De même si* $e_\alpha\pi$ *est défini, alors* $e_\alpha\pi(1) = \pi(1) + \alpha$.
2. *Si* $f_\alpha\pi$ *est défini, alors* $e_\alpha f_\alpha\pi$ *est défini et* $e_\alpha f_\alpha\pi = \pi$. *De même, si* $e_\alpha\pi$ *est défini, alors* $f_\alpha e_\alpha\pi$ *est défini et* $f_\alpha e_\alpha\pi = \pi$.
3. *Si* $e_\alpha\pi$ *est défini, alors* $f_\alpha\pi^*$ *est défini et* $f_\alpha\pi^* = (e_\alpha\pi)^*$. *De même, si* $f_\alpha\pi$ *est défini, alors* $e_\alpha\pi^*$ *est défini et* $e_\alpha\pi^* = (f_\alpha\pi)^*$.
4. *Soit* m *(resp.* n*), maximal tel que* $f_\alpha^m\pi$ *(resp.* $e_\alpha^n\pi$*) soit défini, alors* $n - m = \langle\pi(1), \alpha\rangle$,

$$m = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq \langle\pi(1), \alpha^\vee\rangle - m_\alpha^\pi\} \text{ et } n = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq |m_\alpha^\pi|\}.$$

5. *Si* $e_\alpha\pi$ *(resp.* $f_\alpha\pi$*) est défini alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $e_\alpha^n(n\pi)$ *(resp.* $f_\alpha^n(n\pi)$*) est défini et on a :* $e_\alpha^n(n\pi) = ne_\alpha\pi$ *(resp.* $f_\alpha^n(n\pi) = nf_\alpha\pi$*).*

Si $\pi \in \Pi$, nous noterons $B(\pi)$ le plus petit sous-ensemble de Π contenant π et stable par les opérateurs e_α et f_α (pour $\alpha \in S$). Si B est un sous-ensemble de Π, nous définirons $\operatorname{car} B = \sum_{\pi\in B} e^{\pi(1)}$; nous dirons que B est entier si pour tout $\pi \in B$ et pour toute racine $\alpha \in S$, le minimum m_α^π est un entier. Enfin nous dirons qu'un chemin π est dominant si son image est contenue dans la chambre dominante D et nous noterons Π^+ l'ensemble des chemins dominants.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats fondamentaux de P. Littelmann.

Théorème 1.2. — *Soit* $\pi \in \Pi$ *un chemin dominant, on a les résultats suivants :*

- *l'ensemble* $B(\pi)$ *est entier ;*
- π *est l'unique chemin dominant de* $B(\pi)$ *;*
- $\operatorname{car} B(\pi) = \operatorname{car} V(\pi(1))$.

Si B et B' sont deux sous-ensembles de Π nous noterons $B * B'$ l'ensemble des concaténations

$$B * B' := \{\pi * \pi' \mid \pi \in B,\ \pi' \in B'\}.$$

Théorème 1.3. — *Soit* π *et* π' *deux chemins dominants, alors l'ensemble* $B(\pi) * B(\pi')$ *est entier et se décompose en union disjointe :*

$$B(\pi) * B(\pi') = \bigcup_{\eta\in B(\pi'),\ \pi*\eta\in\Pi^+} B(\pi * \eta).$$

Enfin, on a la conséquence suivante qui permet de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$.

Théorème 1.4. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Kac-Moody,* μ *et* ν *deux poids dominants. Soit* π *un chemin dominant (resp.* π'*) tel que* $\pi(1) = \mu$ *(resp.* $\pi'(1) = \nu$*),* *alors on a la décomposition suivante comme $\mathfrak{g}$-module :*

$$V(\mu) \otimes V(\nu) = \bigoplus_{\eta \in B(\pi'),\, \pi * \eta \in \Pi^+} V(\mu + \eta(1)).$$

Pour finir cette partie, rappelons que les opérateurs e_α et f_α permettent de définir une action du groupe de Weyl sur Π.

DÉFINITION 1.3. — Pour tout $\pi \in \Pi$ et pour toute racine simple $\alpha \in S$, définissons :

$$\tilde{s}_\alpha \pi := \begin{cases} f_\alpha^n(\pi); \text{ si } n = \langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle \geq 0 \\ e_\alpha^{-n}(\pi); \text{ sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME 1.5. — *L'application $s_\alpha \mapsto \tilde{s}_\alpha$ définit une action de W sur* Π.

2. Chemins extrémaux

Rappelons que si $V(\lambda)$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, alors pour tout $w \in W$, le poids $w\lambda$ est un poids de multiplicité un de $V(\lambda)$ appelé poids extrémal de $V(\lambda)$. Nous allons maintenant définir la notion de chemin extrémal.

DÉFINITION 2.1. — Soit π un chemin, on dit que π est un chemin extrémal, s'il existe un chemin dominant π' tel que $\pi \in B(\pi')$ et si le poids $\pi(1)$ est un poids extrémal de la représentation irréductible $V(\pi'(1))$.

Si λ est un poids dominant, et si $\pi = \pi_\lambda$ est le chemin direct entre 0 et λ alors l'ensemble des chemins de $B(\pi_\lambda)$ sont appelés chemins de Lakshmibai-Seshadri et admettent une description combinatoire explicitée par Littelmann (voir [5]). Indépendamment de cette description, il est facile de donner les chemins extrémaux de $B(\pi_\lambda)$ dans ce cas.

PROPOSITION 2.1. — *Soit λ un poids dominant et $w \in W$ un élément du groupe de Weyl, alors le chemin $\pi_{w\lambda}$ appartient à $B(\pi_\lambda)$ et l'ensemble*

$$\{\pi_{w\lambda} \mid w \in W\}$$

est l'ensemble des chemins extrémaux de $B(\pi_\lambda)$.

Démonstration. — On vérifie que si $\alpha \in S$ et $w \in W$, alors $\tilde{s}_\alpha \pi_{w\lambda} = \pi_{s_\alpha w\lambda}$. Comme l'ensemble $\{s_\alpha \mid \alpha \in S\}$ engendre W, la proposition s'en déduit immédiatement. □

REMARQUE. — Il existe un autre cas où les chemins extrémaux sont connus : dans le cas A_n, si λ est un poids dominant (et donc une partition), on peut définir une injection de l'ensemble $T(\lambda)$ des tableaux semi-standard de forme λ vers l'ensemble des chemins (voir [7]). Dans ce contexte, les éléments de $T(\lambda)$ de poids extrémal sont les tableaux clefs qui ont été définis et étudiés par Lascoux et Schützenberger, notamment dans [4].

Mais en général, si π est un chemin dominant quelconque on ne sait pas déterminer les chemins extrémaux de $B(\pi)$.

Avant d'énoncer un critère qui assure qu'un chemin est extrémal, rappelons la notion d'ensemble d'inversion d'un élément du groupe de Weyl : soit R^+_{re} l'ensemble des racines réelles positives, et soit $w \in W$ un élément du groupe de Weyl, on note $I(w)$, l'ensemble d'inversion de w :

$$I(w) = \{\beta \in R^+_{re} \mid w\beta \in -R^+_{re}\}.$$

Rappelons également que si β est une racine réelle et π est un chemin, nous avons défini $H^\pi_\beta(t) = \langle \pi(t), \beta^\vee \rangle$.

THÉORÈME 2.2. — *Soit π un chemin tel que pour toute racine réelle positive β :*
- *ou bien pour tout $t \in [0,1]$ $H^\pi_\beta(t) \geq 0$;*
- *ou bien, il existe un réel $t^\pi_\beta \in [0,1[$ tel que la fonction H^π_β soit positive ou nulle pour $t \leq t^\pi_\beta$ et strictement négative et décroissante pour $t > t^\pi_\beta$,*

alors,

1. *π est un chemin extrémal ;*
2. *si w est l'élément de plus petite longueur tel que $w\pi(1)$ est dominant, alors*
$$I(w) = \{\beta \in R^+_{re} \mid H^\pi_\beta(1) < 0\}.$$

Démonstration. — Soit π vérifiant l'hypothèse du théorème. Il existe un unique $w \in W$ de longueur minimale tel que $w\pi(1)$ soit dominant. Nous allons montrer le théorème par récurrence sur la longueur de w.

Si w est de longueur 0, alors w est égal à l'identité, $\pi(1)$ est un poids dominant et donc par hypothèse, pour tout racine réelle positive β et pour tout $t \in [0,1]$, $H^\pi_\beta(t) \geq 0$; π est un chemin dominant, il est donc extrémal et on a bien l'égalité $I(w) = \emptyset$.

Si $l(w) > 0$, alors il existe une racine simple α telle que $H^\pi_\alpha(1) < 0$. On a alors : $I(w) = s_\alpha(I(ws_\alpha)) \cup \{\alpha\}$ et $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$. Nous allons montrer que le chemin $\pi' = \tilde{s}_\alpha\pi$ vérifie les hypothèses du théorème. Ce qui permet de conclure, en effet comme $l(ws_\alpha) < l(w)$, ws_α est de longueur minimale tel que $ws_\alpha\pi'(1)$ est dominant, nous obtenons le point (i) en utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation $\pi' = \tilde{s}_\alpha\pi$. Pour le point (ii), il faut remarquer de plus que :

$$\{\beta \in R^+_{re} \mid H^\pi_\beta(1) < 0\} = s_\alpha(\{\beta \in R^+_{re} \mid H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_\beta(1) < 0\}) \cup \{\alpha\}.$$

Montrons donc que $\pi' = \tilde{s}_\alpha\pi$ vérifie les hypothèses du théorème. Quitte à reparamétriser π, on peut supposer que $t^\pi_\alpha = 1/2$. Définissons $\pi_1(t) = \pi(t/2)$ et $\pi_2(t) = \pi((t+1)/2) - \pi(1/2)$. Par définition on a $\pi = \pi_1 * \pi_2$. Rappelons que si $n = \langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle$, alors d'après la définition 1.3, on a : $\pi' = \tilde{s}_\alpha\pi = e^{-n}_\alpha\pi$;

on en déduit que $\tilde{s}_\alpha\pi = \pi_1 * s_\alpha(\pi_2)$. Si γ est une racine réelle, alors un simple calcul montre que :

$$\begin{aligned} H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) &= H_\gamma^\pi(t) \quad \text{si } t \le 1/2\ ; \\ &= H_{s_\alpha\gamma}^\pi(t) \quad \text{si } t \ge 1/2. \end{aligned}$$

Remarquons que les deux expressions ci-dessus coïncident en $t = 1/2$ puisque $H_\alpha^\pi(1/2) = 0$. Soit γ une racine réelle positive telle que $H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1) \ge 0$, alors ou bien $\gamma = \alpha$ et dans ce cas pour $t \le 1/2$, on a $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\alpha^\pi(t)$ qui est positive et pour $t > 1/2$, on a $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = -H_\alpha^\pi(t)$ qui est également positive. Si $\gamma \ne \alpha$, alors il existe une racine réelle positive β telle que $s_\alpha(\beta) = \gamma$. Remarquons que comme $H_\beta^\pi(1) = H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1)$, la fonction H_β^π est positive sur $[0,1]$. Donc pour $t \ge 1/2$, $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\beta^\pi(t)$ est positif. Si $t \le 1/2$, alors :

$$H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(t) = H_\beta^\pi(t) - H_\alpha^\pi(t)\langle\alpha, \beta^\vee\rangle.$$

Si $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle \le 0$, alors l'expression ci-dessus est bien positive pour $t \le 1/2$. Et si $\langle\alpha, \beta^\vee\rangle > 0$, on vérifie que $\langle\pi(1), s_\alpha\beta^\vee\rangle$ est positif et donc par hypothèse, pour tout $t \in [0,1]$, $H_{s_\alpha\beta}^\pi(t) \ge 0$.

Soit γ une racine réelle et positive telle que $H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1) < 0$. Alors il existe une racine réelle positive β telle que $s_\alpha\beta = \gamma$. Comme $H_\beta^\pi(1) = H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1)$, il existe t_β^π tel que pour $t \ge t_\beta^\pi$, $H_\beta^\pi(t)$ est décroissante et strictement négative. Si $H_{s_\alpha\beta}^\pi(1) \ge 0$, ou si $H_{s_\alpha\beta}^\pi(1) < 0$ et $t_{s_\alpha\beta}^\pi \ge 1/2$, alors $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1/2) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(1/2) = H_\beta^\pi(1/2) \ge 0$ et donc $t_\beta^\pi \ge 1/2$. Comme pour $t \le 1/2$, $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(t)$ et pour $t \ge 1/2$, $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\beta^\pi(t)$, on en déduit que $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t)$ est positive ou nulle pour $t \le t_\beta^\pi$ et décroissante et strictement négative pour $t > t_\beta^\pi$. Si $t_{s_\alpha\beta}^\pi < 1/2$, on a alors : $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1/2) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(1/2) = H_\beta^\pi(1/2) < 0$, et donc $t_\beta^\pi \le 1/2$ et la fonction $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t)$ est positive ou nulle pour $t \le t_{s_\alpha\beta}^\pi$ et strictement négative et décroissante pour $t > t_{s_\alpha\beta}^\pi$. □

Lorsque π est un chemin affine par morceaux, le critère ci-dessus peut s'écrire sous la forme pratique qui suit.

Corollaire 2.3. — *Soit π un chemin tel qu'il existe des poids $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p) \in X_{\mathbb{Q}}^p$ tels que $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \cdots * \pi_{\chi_p}$; si pour toute racine réelle positive β on a :*

$$\forall j \in \{1, \dots, p-1\} \text{ tel que } \langle\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_j, \beta^\vee\rangle < 0 \Rightarrow \langle\chi_{j+1}, \beta^\vee\rangle \le 0,$$

alors π est extrémal.

Remarques. — 1. Il est facile de vérifier que le critère du théorème 2.2 n'est pas une condition nécessaire pour qu'un chemin π soit extrémal. Nous donnons un exemple en type A_2 dans la figure 2.1 : π est extrémal

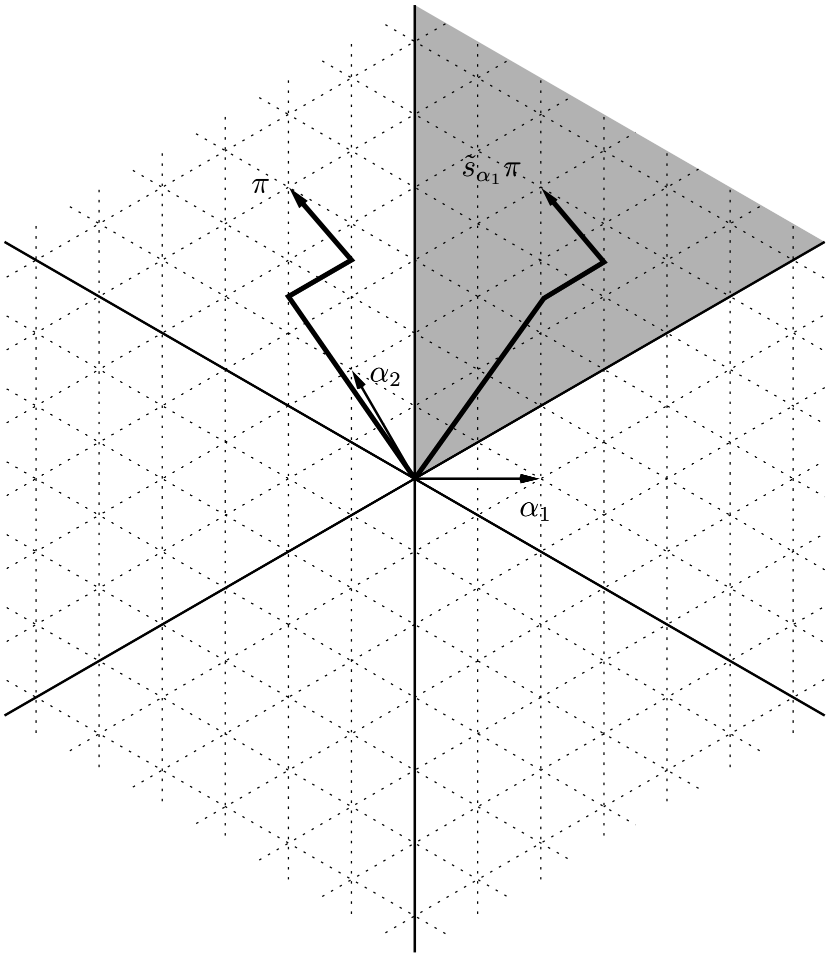


Figure 2.1.

puisque $\tilde{s}_{\alpha_1}\pi$ est un chemin dominant mais ne vérifie pas le critère du théorème 2.2 ; nous utilisons dans cette figure les notations et conventions de [1].

2. Il est également facile de vérifier que si π est extrémal alors π vérifie la condition suivante : pour toute racine réelle positive β,
   (a) si $H^{\pi}_{\beta}(1) \geq 0$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $H^{\pi}_{\beta}(t) \geq 0$;
   (b) si $H^{\pi}_{\beta}(1) < 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $H^{\pi}_{\beta}(t) \geq \langle \pi(1), \beta^{\vee} \rangle$.

   Mais cette condition n'est pas une condition suffisante, comme le montre l'exemple dans la figure 2.2 : π vérifie les conditions ci-dessus, mais n'est

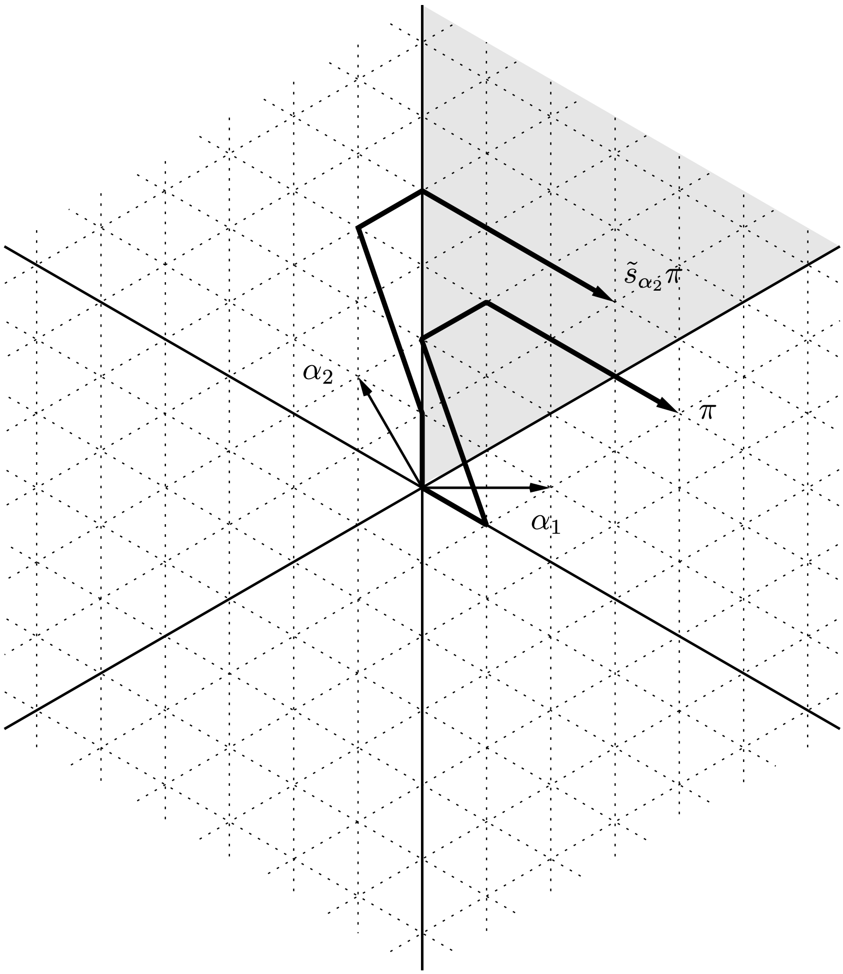


FIGURE 2.2.

pas extrémal puisque $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi$ n'est pas un chemin dominant, bien que le poids $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi(1)$ soit dominant. On peut vérifier qu'il existe un $\pi' \in \Pi^+$ tel que $\pi \in B(\pi')$.

3. Les composantes PRV généralisées

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable, soient (μ,ν) un couple de poids dominants, (v,w) un couple d'éléments du groupe de Weyl, soit β une racine positive telle que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

1. *β est une racine simple et $\mathfrak{g}$ est de dimension finie ;*
2. *$v^{-1}\beta$ est une racine simple ;*
3. *$w^{-1}\beta$ est une racine simple.*

Soit k un entier vérifiant les inégalités :

$$0 \leq k \leq \min\{\langle v\mu, \beta^\vee\rangle, \langle w\nu, \beta^\vee\rangle\},$$

alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu - k\beta$ est dominant la représentation irréductible $V(\lambda)$ est de multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $V(\mu)\otimes V(\nu)$.

Démonstration. — Nous reprenons ici la preuve donnée dans [10] qui montre comment se ramener au cas où $v^{-1}\beta$ est simple. Supposons que le théorème soit vrai dans le cas (ii) et soit μ,ν,λ,v,w,k et β *simple* vérifiant les hypothèses du théorème avec $\mathfrak{g}$ de dimension finie. On a alors :

$$\lambda = v\mu + w\nu - k\beta. \tag{1}$$

On peut transformer cette égalité (où w_0 désigne l'élément de plus grande longueur) :

$$\mu = v^{-1}\lambda + v^{-1}ww_0(-w_0\nu) + kv^{-1}\beta \tag{2}$$
$$= v^{-1}\lambda + s_{v^{-1}\beta}v^{-1}ww_0(-w_0\nu) - (\langle v^{-1}w\nu, v^{-1}\beta^\vee\rangle - k)v^{-1}\beta. \tag{3}$$

Posons $\lambda' = \mu$, $\mu' = \lambda$, $\nu' = -w_0\nu$, $v' = v^{-1}$, $w' = s_\alpha v^{-1}ww_0$, $\beta' = v^{-1}\beta$ et $k' = \langle v^{-1}w\nu, \alpha^\vee\rangle - k$, l'équation (3) devient :

$$\lambda' = v'\mu' + w'\nu' - k'\alpha\,. \tag{4}$$

On vérifie que les hypothèses sur k se traduisent par :

$$\begin{aligned} k' &\geq 0, \\ k' &\leq \langle v'\nu', \beta^\vee\rangle \\ k' &\leq \langle w'\lambda', \beta^\vee\rangle. \end{aligned}$$

Et donc, les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites dans le cas (ii) ($v'^{-1}\beta'$ est une racine simple) et donc $V(\lambda')(\simeq V(\mu))$ est de multiplicité non nulle dans $V(\mu')\otimes V(\nu') \simeq V(\lambda)\otimes V^*(\nu)$, ce qui implique que $V(\lambda)$ est une composante de $V(\mu)\otimes V(\nu)$. L'équivalence entre les cas (ii) et (iii) est immédiate en utilisant la commutativité du produit tensoriel et sans hypothèse restrictive sur $\mathfrak{g}$.

On supposera donc maintenant que $\alpha = v^{-1}\beta$ est une racine simple. Nous allons construire un chemin de $B(\pi_\mu) * B(\pi_\nu)$ de poids

$$v^{-1}\lambda = \mu + v^{-1}w\nu - k\alpha$$

et extrémal ce qui impliquera bien le théorème, d'après 1.4. Soit $l := \langle w\nu, \beta^\vee \rangle = \langle v^{-1}w\nu, \alpha^\vee \rangle$. Comme $0 \leq k \leq l$ et d'après le point 4 de la proposition 1.1 le chemin $f_\alpha^k \pi_{v^{-1}w\nu}$ est défini ; de plus si $a = \frac{k}{l}$, on a alors :

$$f_\alpha^k \pi_{v^{-1}w\nu} = \pi_{as_\alpha v^{-1}w\nu} * \pi_{(1-a)v^{-1}w\nu}.$$

D'après la proposition 2.1, le chemin $\pi_\mu * f_\alpha^k \pi_{v^{-1}w\nu}$ appartient à $B(\pi_\mu) * B(\pi_\nu)$, et pour montrer que ce chemin est extrémal, nous allons utiliser le corollaire 2.3. Les points de changements de direction de $\pi_\mu * f_\alpha^k \pi_{v^{-1}w\nu}$ sont μ et $\mu + as_\alpha v^{-1}w\nu$. Soit γ une racine réelle positive ; remarquons d'abord que comme μ est dominant, on ne peut pas avoir $\langle \mu, \gamma^\vee \rangle < 0$. D'autre part, si $\gamma = \alpha$ alors $\langle \mu + as_\alpha v^{-1}w\nu, \alpha \rangle \geq 0$, en effet :

$$\langle \mu + as_\alpha v^{-1}w\nu, \alpha \rangle = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle - a\langle v^{-1}w\nu, \alpha^\vee \rangle = (\langle \mu, \alpha^\vee \rangle - k).$$

Et le membre de droite est bien positif puisque $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle = \langle v\mu, \beta^\vee \rangle$. Supposons maintenant que $\gamma \neq \alpha$ et $\langle \mu + as_\alpha v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle < 0$, il faut montrer que $a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle \leq 0$. Pour cela remarquons que :

$$\langle \mu + as_\alpha v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle = \langle \mu, \gamma^\vee \rangle - k\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle + a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle$$

Si $\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \leq 0$, alors :

$$\langle \mu, \gamma^\vee \rangle - k\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle \geq 0$$

et donc $a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle \leq 0$. Si $\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle > 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\langle \mu, \gamma^\vee \rangle - k\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle + a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle &\geq \langle \mu, \gamma^\vee \rangle - \langle \mu, \alpha^\vee \rangle\langle \alpha, \gamma^\vee \rangle + a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle \\ &= \langle \mu, s_\alpha\gamma^\vee \rangle + a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle.\end{aligned}$$

Comme $\gamma \neq \alpha$, $s_\alpha\gamma$ est une racine positive, $\langle \mu, s_\alpha\gamma \rangle$ est positif, et l'inégalité $a\langle v^{-1}w\nu, \gamma^\vee \rangle \leq 0$ est vérifiée. □

REMARQUES. — 1. Le cas $k = 0$ correspond à l'énoncé PRV original. Dans ce cas le chemin à considérer est le chemin $\pi_\mu * \pi_{v^{-1}w\nu}$ qui est évidemment extrémal puisqu'il n'admet qu'un seul changement de direction en un poids dominant. C'est ce chemin que considère P. Littelmann dans sa preuve de la conjecture PRV dans [5].

2. Nous illustrons le théorème 3.1 dans un cas ou $\mathfrak{g}$ est de de type G_2. Nous reprenons les notations de [1]. En prenant $\mu = 2\varpi_2$, $\nu = 2(\varpi_1 + \varpi_2)$, v et w de sorte que $v^{-1}w\nu = -8\varpi_1 + 2\varpi_2$, $l = 1$, $\beta = 3\alpha_1 + \alpha_2$ et $k = 1$, on obtient $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ et donc $V(\varpi_1 + \varpi_2)$ est une composante de $V(\mu) \otimes V(\nu)$. Sur la figure 3.1, nous avons représenté le chemin extrémal $\pi = \pi_\mu * f_{\alpha_2}\pi_{v^{-1}w\nu}$ ainsi que les chemins extrémaux intermédiaires entre π et le chemin dominant η (en gras) tel que $\eta(1) = \lambda$.

Nous concluons ce travail en énonçant un résultat plus général, résultat énoncé et démontré dans [10] dans le cas fini.

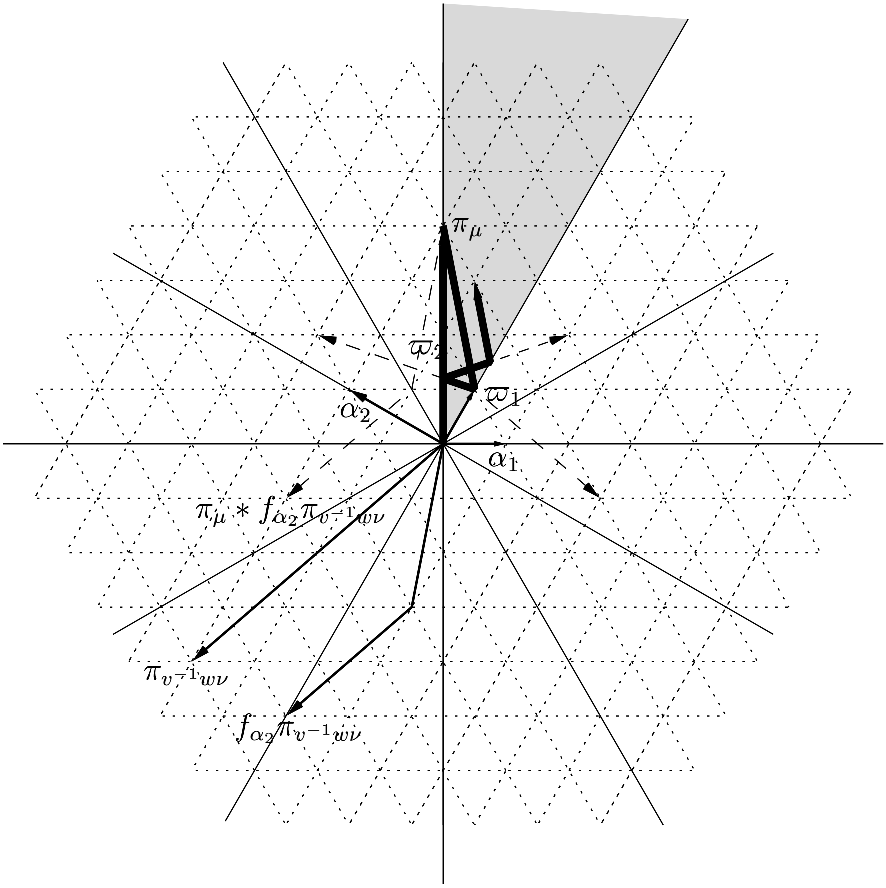


FIGURE 3.1.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable, soient μ, ν deux poids dominants de $\mathfrak{g}$, $(v, w) \in W^2$, et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$, p racines orthogonales deux à deux. Supposons qu'une des trois assertions suivantes soit vraie :*

1. *pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, β_i est une racine simple et $\mathfrak{g}$ est de dimension finie ;*
2. *pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $v^{-1}\beta_i$ est une racine simple ;*
3. *pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $w^{-1}\beta_i$ est une racine simple.*

Soient $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ p entiers et soit λ le poids $\lambda = v\mu + w\nu - \sum_{i=1}^{p} k_i\beta_i$. Supposons que pour pour $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$0 \leq k_i \leq m_i = \min\{\langle v\mu, \beta_i^\vee\rangle, \langle w\nu, \beta_i^\vee\rangle\}$$

alors si λ est dominant, la représentation $V(\lambda)$ est une composante de $V(\mu)\otimes V(\nu)$.

Démonstration. — La preuve de ce théorème étant une adaptation de la preuve du théorème 3.1, nous ne donnerons pas tous les détails. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème précédent, on peut supposer que pour tout $i\in\{1,2,\dots,p\}$, $\alpha_i=v^{-1}\beta_i$ est une racine simple. Pour $i\in\{1,2,\dots,p\}$ posons $l_i:=\langle w\nu,\beta_i^\vee\rangle=\langle v^{-1}w\nu,\alpha_i^\vee\rangle$; comme $0\le k_i\le l_i$, d'après le point 4 de la proposition 1.1 le chemin $f_\alpha^{k_i}\pi_{v^{-1}w\nu}$ est défini et de plus si $a_i=\frac{k_i}{l_i}$, alors on a l'égalité :

$$f_\alpha^{k_i}\pi_{v^{-1}w\nu}=\pi_{a_is_{\alpha_i}v^{-1}w\nu}*\pi_{(1-a_i)v^{-1}w\nu}.$$

Comme les $(\beta_i)_{1\le i\le p}$ sont deux à deux orthogonales, il en est de même des $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$ et les opérateurs f_{α_i} commutent deux à deux. Le chemin

$$\pi:=f_{\alpha_1}^{k_1}f_{\alpha_2}^{k_2}\dots f_{\alpha_p}^{k_s}\pi_{v^{-1}w\nu}$$

est donc défini. Si on suppose que l'on a ordonné les $(\beta_i)_{1\le i\le p}$ de sorte que : $a_1\le a_2\le\dots\le a_p$, alors le chemin π s'écrit :

$$\pi_{a_1s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_1}v^{-1}w\nu}*\pi_{(a_2-a_1)s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_2}v^{-1}w\nu}*\dots*\pi_{(a_p-a_{p-1})s_{\alpha_p}v^{-1}w\nu}*\pi_{(1-a_p)v^{-1}w\nu}$$

avec $a_0=0$ et $a_{p+1}=1$. Les points de changement de direction pour π sont inclus dans l'ensemble $\{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_p\}$ avec

$$\begin{aligned}
\theta_i&=\sum_{j=1}^{i}(a_j-a_{j-1})s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_j}v^{-1}w\nu\\
&=\sum_{j=1}^{i}a_js_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_j}v^{-1}w\nu-\sum_{j=1}^{i}a_{j-1}s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_j}v^{-1}w\nu\\
&=a_is_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_i}v^{-1}w\nu+\sum_{j=1}^{i-1}a_j(s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_j}v^{-1}w\nu-s_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_{j+1}}v^{-1}w\nu)\\
&=a_is_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_i}v^{-1}w\nu-\sum_{j=1}^{i-1}a_j\langle v^{-1}w\nu,\alpha_j^\vee\rangle\alpha_j\\
&=a_is_{\alpha_p}\dots s_{\alpha_i}v^{-1}w\nu-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\alpha_j \qquad (5)\\
&=a_i(v^{-1}w\nu-\sum_{j=i+1}^{p}l_j\alpha_j)-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\alpha_j. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Le chemin $\pi_\mu*\pi$ est de poids $v^{-1}\lambda$ et il suffit de montrer que ce chemin est extrémal ; pour cela nous allons utiliser le corollaire 2.3. Les points de changements de direction de $\pi_\mu*\pi$ sont inclus dans l'ensemble : $\{\mu,\mu+\theta_1,\dots,\mu+\theta_p\}$.

Soit γ une racine réelle positive ; remarquons d'abord que comme μ est dominant, on ne peut pas avoir $\langle\mu,\gamma^\vee\rangle < 0$. D'autre part, s'il existe $m \in \{1,2,\ldots,p\}$ tel que $\gamma = \alpha_m$ alors $\langle\mu+\theta_i,\alpha_m\rangle \geq 0$. En effet, en utilisant l'égalité (6), si $m \leq i-1$ alors :

$$\langle\mu+\theta_i,\alpha_m\rangle = \langle\mu,\alpha_m^\vee\rangle + a_i l_m - 2k_m = (\langle\mu,\alpha_m^\vee\rangle - k_m) + (a_i l_m - k_m).$$

Les deux termes du membre de droite sont positifs, le premier par hypothèse et le deuxième car $a_i \geq a_m$. Si $m > i-1$, alors :

$$\langle\mu+\theta_i,\alpha_m\rangle = \langle\mu,\alpha_m^\vee\rangle + a_i l_m - 2a_i l_m \geq \langle\mu,\alpha_m^\vee\rangle - a_m l_m = \langle\mu,\alpha_m^\vee\rangle - k_m$$

et ce dernier terme est bien positif par hypothèse. Supposons maintenant que $\gamma \notin \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$ et que $\langle\mu+\theta_i,\gamma^\vee\rangle < 0$, soit d'après l'égalité (5)

$$\langle a_i s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_i} v^{-1}w\nu + \mu - \sum_{j=1}^{i-1} k_j\alpha_j, \gamma^\vee\rangle < 0.$$

Il faut montrer que :

$$\langle s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i+1}} v^{-1}w\nu, \beta^\vee\rangle \leq 0. \tag{7}$$

On peut supposer qu'il existe $i' \in \{0,1,\ldots,i\}$ tel que pour $j \leq i'$, $\langle\alpha_j,\gamma^\vee\rangle \leq 0$ et pour $j > i'$, $\langle\alpha_j,\gamma^\vee\rangle > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\langle a_i s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_i} v^{-1}w\nu + \mu - \sum_{j=1}^{i-1} k_j\alpha_j, \gamma^\vee\rangle \\
&= a_i\langle s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i+1}} v^{-1}w\nu, \gamma^\vee\rangle + \langle\mu,\gamma^\vee\rangle - \sum_{j=1}^{i}\langle\alpha_j,\gamma^\vee\rangle \\
&\geq a_i\langle s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i+1}} v^{-1}w\nu, \gamma^\vee\rangle + \langle\mu,\gamma^\vee\rangle - \sum_{j=i'+1}^{i} \langle\mu,\alpha\rangle_j^\vee\langle\alpha_j,\gamma^\vee\rangle \\
&= a_i\langle s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i+1}} v^{-1}w\nu, \gamma^\vee\rangle + \langle\mu, s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i'+1}}\gamma^\vee\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma \notin \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$ et que les racines $\alpha_1,\ldots\alpha_p$ sont orthogonales deux à deux, on a $\langle\mu, s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_{i'+1}}\gamma^\vee\rangle \geq 0$ et l'inéquation 7 est vérifiée. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki – *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer, 2002.

[2] S. Kumar – "Proof of the Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture", *Invent. math.* **93** (1988), p. 117–130.

[3] ———, "Existence of certain components in the tensor product of two integrable highest weight modules for Kac-Moody algebras", in *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 7, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, p. 25–38.

[4] A. Lascoux & M.-P. Schützenberger – "Keys & standard bases", in *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 19, Springer, 1990, p. 125–144.

[5] P. Littelmann – "A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras", *Invent. math.* **116** (1994), p. 329–346.

[6] ———, "Paths and root operators in representation theory", *Ann. of Math.* **142** (1995), p. 499–525.

[7] ———, "The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory", in *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 517, Kluwer Acad. Publ., 1998, p. 175–212.

[8] O. Mathieu – "Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications", *Compositio Math.* **69** (1989), p. 37–60.

[9] P.-L. Montagard, B. Pasquier & N. Ressayre – "Two generalisations of the PRV conjecture", *Compositio Math.* **147** (2011), p. 1321—1336.

[10] ———, "Generalizations of the PRV conjecture, II", *J. Pure Appl. Algebra* **219** (2015), p. 5560–5572.

[11] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao & V. S. Varadarajan – "Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras", *Ann. of Math.* **85** (1967), p. 383–429.