Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ANALOGUES ELLIPTIQUES DES NOMBRES MULTIZÉTAS

Benjamin Enriquez

Tome 144
Fascicule 3

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 395-427

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 144, septembre 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. math. France
144 (3), 2016, p. 395–427

ANALOGUES ELLIPTIQUES DES NOMBRES MULTIZÉTAS

PAR BENJAMIN ENRIQUEZ

À la mémoire de ma mère,
Paulette Fortunée Enriquez,
née Bensoussan (1930–2016).

RÉSUMÉ. — Nous étudions des fonctions du paramètre elliptique définies commes intégrales itérées de fonctions elliptiques. Nous établissons leur lien avec les « associateurs elliptiques » de notre précédent travail au moyen de réalisations fonctionnelles d'algèbres de Lie apparaissant dans cette théorie.

ABSTRACT (*Elliptic analogues of multiple zeta values*). — We study functions of an elliptic parameter, which are defined as iterated integrals of elliptic functions. We establish their relation with the "elliptic associators" of our previous work, by means of a functional realization of Lie algebras appearing in that work.

Texte reçu le 28 février 2012, révisé les 28 février 2014 et 9 janvier 2015, accepté le 21 septembre 2015.

BENJAMIN ENRIQUEZ, IRMA (CNRS), Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg, France • *E-mail :* `b.enriquez@math.unistra.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11M32, 34M35.

Mots clefs. — Nombres multizétas, associateurs elliptiques, intégrales itérées, systèmes différentiels.

Introduction

La théorie des nombres multizétas a débuté dans [13] avec la construction de familles de relations entre ces nombres, reposant en partie sur le lien observé par Kontsevich entre multizétas et intégrales itérées sur les espaces de modules de courbes rationnelles avec points marqués. Parallèlement, Drinfeld a établi des relations d'origine géométrique satisfaites par une série non-commutative, l'associateur KZ ([3]) ; Le et Murakami ont identifié l'associateur KZ à une série génératrice des multizétas ([8]), ce qui a permis de considérer les relations de l'associateur KZ comme un deuxième système de relations entre multizétas. Le lien entre les deux systèmes de relations a été étudié par Furusho ([6]).

Un analogue elliptique de la théorie des associateurs a été construit dans [5] à partir d'un analogue elliptique de la connection de Knizhnik-Zamolodchikov ([2], voir aussi [9]). Le rôle de l'associateur KZ y est tenu par un couple de fonctions $(A(\tau), B(\tau))$ d'un paramètre τ dans le demi-plan de Poincaré, à valeurs dans un groupe de séries non-commutatives à deux variables $\exp(\hat{\mathfrak{f}}_2)$. Les résultats principaux de [5] sur le couple $(A(\tau), B(\tau))$ sont : le comportement de ce couple sous les transformations modulaires ; une famille de relations algébriques (d'origine géométrique) satisfaites par $(A(\tau), B(\tau))$; une équation différentielle satisfaite par le même objet ; son comportement en $\tau \to \mathrm{i}\,\infty$. Un corollaire de cette étude est une famille de relations algébriques entre intégrales itérées de séries d'Eisenstein et multizétas. Un rôle important est joué dans cette théorie, et également dans la théorie reliée des motifs elliptiques universels ([7, 11]), par une algèbre de Lie $\langle \delta_{2n}, n \geq -1 \rangle \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{f}_2)$. Nous rappelons ces résultats en section 1.

Le but principal de cet article est l'étude des coefficients des séries $A(\tau), B(\tau)$. Il s'agit de fonctions

$$I_{\underline{d}}(\tau), J_{\underline{d}}(\tau), \quad \underline{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \{-1, 0, 1, \dots\}^n$$

du paramètre elliptique, qui sont des analogues elliptiques des nombres multizétas.

La section 2 est consacrée à la détermination d'expressions intégrales pour ces fonctions. Nous utilisons pour cela le calcul de l'holonomie régularisée des équations différentielles sur $]0,1[$ à valeurs dans une algèbre libre, avec singularités aux extrémités. Ce calcul a été effectué dans [4] à partir d'idées contenues dans [8]. Le résultat de [4] est formulé en sections 2.1 et 2.2, et appliqué en sections 2.3 et 2.4 au calcul d'expressions intégrales pour les $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ (relations (18), (19), (20), (21)). En section 2.5, nous traduisons en termes des $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ certaines identités satisfaites par $(A(\tau), B(\tau))$.

La section 3 est consacrée aux systèmes différentiels satisfaits par les $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$. En section 3.1, on construit des systèmes différentiels satisfaits par des intégrales itérées générales du type de celles introduites en section 2.2. En section 3.2, on applique ce résultat aux fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ et on obtient ainsi un système différentiel satisfait par ces fonctions (théorème 3.10).

En section 4, on montre l'équivalence entre ce système différentiel et le système différentiel satisfait par $(A(\tau), B(\tau))$ explicité dans [5]. Ceci est réalisé au moyen d'une réalisation fonctionnelle de l'algèbre de Lie $\langle\delta_{2n}, n \geq -1\rangle$ (section 4).

Enfin, en section 5, on applique le système différentiel du théorème 3.10 au développement asymptotique des $I_{\underline{d}}(\tau), J_{\underline{d}}(\tau)$ en $\tau \to \mathrm{i}\infty$; on montre que ce développement asymptotique s'exprime à l'aide de nombres multizétas.

Signalons enfin les liens possibles entre le présent travail et [1] : les auteurs de cet article construisent une théorie des polylogarithmes elliptiques multiples, qui sont certaines fonctions multivaluées sur la variété E_τ^n, où $E_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$. Ils projettent d'en déduire, par spécialisation, des fonctions de τ qu'ils appellent « fonctions multizétas elliptiques ». On peut s'attendre à ce que ces fonctions présentent des liens étroits avec les fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ du présent article.

1. Préliminaires : associateurs elliptiques

Dans cette section, nous rappelons la construction et les propriétés de la fonction $\tau \mapsto (A(\tau), B(\tau))$ ([5]).

1.1. Définition de $(A(\tau), B(\tau))$. — Soit pour $n \geq 2$, $\bar{\mathfrak{t}}_{1,n}$ l'algèbre de Lie présentée par les générateurs x_i, y_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ et les relations $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 0$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$, $[x_i, y_j] = [x_j, y_i] =: t_{ij}$ si $i \neq j$, $[x_k, t_{ij}] = [y_k, t_{ij}] = 0$ si i, j, k sont distincts. En particulier, l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{t}}_{1,2}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}_2$ librement engendrée par les deux générateurs $x := x_1$ et $y := y_1$.

Soit $\mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \Im(\tau) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On note $(z, \tau) \mapsto \theta_\tau(z)$ la fonction sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ donnée par[(1)]

$$\theta_\tau(z) := \frac{e^{\pi \mathrm{i} z} - e^{-\pi \mathrm{i} z}}{2\pi \mathrm{i}} \prod_{n>0} \frac{(1 - e^{2\pi \mathrm{i}(z+n\tau)})(1 - e^{2\pi \mathrm{i}(-z+n\tau)})}{(1 - e^{2\pi \mathrm{i} n\tau})^2}.$$

On a $\theta_\tau(z+1) = -\theta_\tau(z) = \theta_\tau(-z)$, $\theta_\tau(z+\tau) = -e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i} z}\theta_\tau(z)$, $\frac{\partial}{\partial z}\theta_\tau(z)_{|z=0} = 1$, et $(\theta_\tau(-))^{-1}(0) = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. La fonction $\theta_\tau(-)$ est reliée à la fonction thêta de Jacobi donnée par

$$\vartheta_1(z, \tau) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} e^{\pi \mathrm{i} n^2 + 2\pi \mathrm{i} n(z+\frac{1}{2})}$$

par l'identité $\vartheta_1(z, \tau) = 2\pi\eta(\tau)^3\theta_\tau(z)$, où $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n>0}(1-q^n)$ et $q = e^{2\pi \mathrm{i}\tau}$.

(1) On note $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$.

On définit $A(\tau), B(\tau)$ comme les holonomies régularisées de l'équation différentielle

$$X'(z) = -\frac{\theta_\tau(z+\mathrm{ad}\,x)\,\mathrm{ad}\,x}{\theta_\tau(z)\theta_\tau(\mathrm{ad}\,x)}(y)\cdot X(z), \tag{1}$$

à valeurs dans le groupe $\exp(\hat{\hat{\mathfrak{t}}}_{1,2})$ le long les chemins $[0,1]$ et $[0,\tau]$ (l'algèbre de Lie est complétée pour le degré en x, y). Dans cette équation, on donne à l'expression $f(z,\mathrm{ad}x)(y)$ la valeur $\sum_{n\geq 0} g_n(z)(\mathrm{ad}x)^n(y)$, où $g_n(z) := \frac{1}{n!}(\frac{\partial}{\partial u})^n f(z,u)_{|u=0}$, et $f(z,u)$ est une fonction analytique en deux variables, régulière en $u=0$ (ici $f(z,u) = -\frac{\theta_\tau(z+u)}{\theta_\tau(z)}\frac{u}{\theta_\tau(u)}$, qui vaut -1 en $u=0$). Cette équation admet une solution $X(z)$ définie sur $\{a+b\tau | (a,b)\in]0,1[^2\}$ telle que $X(z)\simeq(-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^{-[x,y]}$ en $z\to 0$. Alors

$$A(\tau) := X(z)^{-1}X(z+1), \quad B(\tau) := X(z)^{-1}e^{2\pi\,\mathrm{i}\,x}X(z+\tau).$$

Ce sont des éléments du groupe $\exp(\hat{\hat{\mathfrak{t}}}_{1,2})$.

1.2. Propriétés de $A(\tau), B(\tau)$

1.2.1. *Propriétés modulaires.* — On a d'après [5], Proposition 66

$$A(\frac{-1}{\tau}) = \mathrm{Ad}\,\big(\frac{-1}{\tau}\big)^{-t}\circ\alpha_\tau(B(\tau)^{-1}), \quad B(\frac{-1}{\tau}) = \mathrm{Ad}\,\big(\frac{-1}{\tau}\big)^{-1}\circ\alpha_\tau(BAB^{-1}(\tau)), \tag{2}$$

où $\alpha_\tau\in\mathrm{Aut}(\exp(\hat{\mathfrak{f}}_2))$ est donné par $x\mapsto -\tau x$, $y\mapsto -2\pi\,\mathrm{i}\,x-\tau^{-1}y$,

$$t := -[x,y]$$

et $(-\tau^{-1})^{-t} := \exp(-\log(-\tau^{-1})t)$, la détermination du logarithme étant de partie imaginaire comprise entre 0 et π.

Les identités $(-I_2)(A(\tau)) = A(\tau)^{2,1}$, $(-I_2)(B(\tau)) = B(\tau)^{2,1}$, dans lesquelles $(-I_2)$ est l'automorphisme de $\exp(\hat{\mathfrak{f}}_2)$ induit par $x\mapsto -x$, $y\mapsto -y$, et les identités (5) (voir section 1.2.2) impliquent

$$(-I_2)(A(\tau)) = e^{-\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)^{-1}e^{-\mathrm{i}\,\pi t}, \quad (-I_2)(B(\tau)) = e^{\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)^{-1}e^{\mathrm{i}\,\pi t}.$$

Compte tenu des ces identités et de (6), les deux parties de (2) sont équivalentes après application de $\tau\mapsto -\tau^{-1}$ à l'une d'elles.

1.2.2. *Relations algébriques.* — Soit $\Phi(a,b)$ l'associateur KZ, défini par $\Phi(a,b) = Y_1^{-1}Y_0$, où Y_i sont les solutions de $Y'(z) = (a/z+b/(z-1))Y(z)$ sur $]0,1[$ telles que $Y_0(z)\simeq z^a$ en $z\to 0$, $Y_1(z)\simeq(1-z)^b$ en $z\to 1$, et où a,b sont des variables formelles non-commutatives.

On pose

$$\alpha_+ := e^{\mathrm{i}\,\pi(t_{12}+t_{13})}A(\tau)^{1,23}\Phi(t_{12},t_{23}), \quad \alpha_- := e^{-\mathrm{i}\,\pi(t_{12}+t_{13})}B(\tau)^{1,23}\Phi(t_{12},t_{23}),$$

où $a \mapsto a^{1,23}$ est le morphisme d'algèbres de Lie $\bar{\mathfrak{t}}_{1,2} \to \bar{\mathfrak{t}}_{1,3}$ tel que $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto x_2 + x_3$, $y_1 \mapsto y_1$, $y_2 \mapsto y_2 + y_3$.

La première famille de relations satisfaites par $(A(\tau), B(\tau))$ est

$$\alpha_{\pm}^{3,1,2}\alpha_{\pm}^{2,3,1}\alpha_{\pm} = 1 \quad (\text{dans } \exp(\hat{\bar{\mathfrak{t}}}_{1,3})), \tag{3}$$

où $a \mapsto a^{2,3,1}$ est l'automorphisme de $\bar{\mathfrak{t}}_{1,3}$ tel que $x_i \mapsto x_{i+1 \bmod 3}$, $y_i \mapsto y_{i+1 \bmod 3}$, et $a \mapsto a^{3,1,2}$ est le carré de cet automorphisme.

Le couple $(A(\tau), B(\tau))$ satisfait d'autre part la relation

$$(\Phi(t_{12}, t_{23})^{-1} * B(\tau)^{1,23}, (e^{-\mathrm{i}\,\pi t_{12}}\Phi(t_{21}, t_{13})) * (A(\tau)^{2,13})^{-1}) = e^{2\pi\,\mathrm{i}\,t_{12}}, \tag{4}$$

(dans $\exp(\hat{\bar{\mathfrak{t}}}_{1,3})$), où $(x, y) := xyx^{-1}y^{-1}$, $x * y := xyx^{-1}$, $t_{12} := [x_1, y_2]$ et $a \mapsto a^{2,13}$ est le morphisme $\bar{\mathfrak{t}}_{1,2} \to \bar{\mathfrak{t}}_{1,3}$ donné par $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_1 + x_3$, $y_1 \mapsto y_2$, $y_2 \mapsto y_1 + y_3$.

Les relations (3) impliquent alors

$$e^{\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)e^{\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)^{2,1} = e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)^{2,1} = 1 \quad (\text{dans } \exp(\hat{\bar{\mathfrak{t}}}_{1,2})), \tag{5}$$

où $a \mapsto a^{2,1}$ est l'automorphisme involutif de $\bar{\mathfrak{t}}_{1,2}$ donné par $x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$, et la relation (4) implique

$$(A(\tau), B(\tau)) = e^{-2\pi\,\mathrm{i}\,t} \quad (\text{dans } \exp(\hat{\bar{\mathfrak{t}}}_{1,2})). \tag{6}$$

1.2.3. *Equations différentielles.* — Pour chaque $n \geq -1$, il existe une unique dérivation de $\mathfrak{f}_2$, homogène pour le bidegré en (x, y) et telle que $\delta_{2n}(x) = \mathrm{ad}(x)^{2n+2}(y) =: [x^{2n+2}y]$ et $\delta_{2n}([x, y]) = 0$. Les fonctions $A(\tau), B(\tau)$ satisfont alors les équations différentielles

$$\begin{aligned} 2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau A(\tau) &= -(\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n})(A(\tau)), \\ 2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau B(\tau) &= -(\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n})(B(\tau)). \end{aligned} \tag{7}$$

(cf. [5], Proposition 67), où les séries d'Eisenstein sont définies par

$$G_k(\tau) = \sum_{a\in(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})-\{0\}} \frac{1}{a^k} \quad \text{si } k \text{ est pair } \geq 4,$$

$$G_2(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(\sum_n{}' \frac{1}{(n+m\tau)^2}), \quad G_0(\tau) := -1,$$

et $\sum'$ signifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ si $m \neq 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$ si $m = 0$.

1.2.4. *Comportement à l'infini.* — On a

$$A(\tau) = \Phi(\tilde{y}, t)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tilde{y}}\Phi(\tilde{y}, t)^{-1} + O(e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tau}), \tag{8}$$

$$B(\tau) = e^{\mathrm{i}\,\pi t}\Phi(-\tilde{y} - t, t)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,x}e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tilde{y}\tau}\Phi(\tilde{y}, t)^{-1} + O(e^{2\pi\,\mathrm{i}(1-\epsilon)\tau}) \tag{9}$$

pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $\tau \to \mathrm{i}\infty$ ([2], démonstration de Proposition 4.7 puis Lemma 4.14), où

$$\tilde{y} := -\frac{\operatorname{ad} x}{e^{2\pi \mathrm{i} \operatorname{ad} x} - 1}(y)$$

et on rappelle que $t = -[x, y]$ et $\Phi(a, b)$ est l'associateur KZ défini en section 1.2.2.

2. Les analogues elliptiques des nombres multizétas

Dans cette section, nous calculons l'holonomie régularisée de certaines équations différentielles (section 2.1). Nous exprimons cette holonomie en termes d'intégrales itérées régularisées (section 2.2). Nous utilisons ces régularisations en section 2.3 pour définir les fonctions du paramètre elliptique, analogues des nombres multizétas. Nous montrons que les fonctions $A(\tau), B(\tau)$ peuvent s'interpréter comme des séries génératrices pour ces fonctions (section 2.4). Les propriétés de $A(\tau), B(\tau)$ peuvent donc se traduire en termes fonctionnels : c'est ce qui est fait explicitement en section 2.5 pour certaines de ces propriétés.

2.1. Holonomies régularisées. — Soit I un ensemble fini contenant les éléments $0, 1$. Soit $\Omega^1 := \Omega^1(]0,1[, \mathbb{C})$ l'espace des formes différentielles sur $]0,1[$ et soit $i \mapsto \underline{\omega}_i$ une application $I \to \Omega^1$, telle que $\underline{\omega}_0 = d\log(z)$, $\underline{\omega}_1 = d\log(1-z)$, et pour $i \neq 0, 1$, la forme $\underline{\omega}_i$ est régulière en 0 et 1.

Soit $V := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} a_i$ l'espace vectoriel engendré par I. On pose

$$\omega := \sum_{i \in I} \underline{\omega}_i \cdot a_i \in \Omega^1(]0,1[, V).$$

On note $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V, munie du produit de concaténation, et $\hat{T}(V)$ sa complétion pour le degré pour lequel V est de degré 1. L'équation différentielle $df = \omega f$ d'inconnue une fonction $f :]0,1[\to \hat{T}(V)$ admet deux solutions f_0 et f_1, telles que $f_0(z) \sim z^{a_0}$ pour $z \to 0$ et $f_1(z) \sim (1-z)^{a_1}$ pour $z \to 1$. On définit alors l'holonomie régularisée de cette équation différentielle comme

$$\operatorname{Hol}([0,1], \omega) := f_1^{-1} f_0 \in \hat{T}(V). \tag{10}$$

D'après [4], appendice, on a

$$\operatorname{Hol}([0,1], \omega) = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_n) \in I^n, \\ i_1 \neq 0, i_n \neq 1}} \Big(\int_{[0,1]} \underline{\omega}_{i_1} \bullet \cdots \bullet \underline{\omega}_{i_n} \Big)$$
$$\cdot \sum_{\substack{A \subset \{a | i_a = 0\}, \\ B \subset \{b | i_b = 1\}}} (-a_1)^{|B|} (a_{i_n} \cdots a_{i_1})_{A,B} (-a_0)^{|A|},$$

où $(a_{i_n}\cdots a_{i_1})_{A,B}$ est le produit des a_{i_k}, dans lequel k parcourt de facon décroissante l'ensemble $[1,n]-(A\cup B)$, et où on pose $\int_{[0,1]}\alpha_1\bullet\cdots\bullet\alpha_n := \int_{\Delta_n}\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_n$, où Δ_n est le simplexe $\{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n|0\le t_1\le\ldots\le t_n\le 1\}$ pour $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\Omega^1$.

Soit $\mathrm{Hol}_n([0,1],\omega)$ la partie de degré n de cette somme. Alors

$$\mathrm{Hol}([0,1],\omega)=\sum_{n\ge 0}\mathrm{Hol}_n([0,1],\omega).$$

Soit $x\mapsto x^{\mathrm{op}}$ l'involution de $T(V)$ donnée par $(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)^{\mathrm{op}} := v_k\otimes\cdots\otimes v_1$. Soit $m:\mathbb{C}[a_0]\otimes T(V)\otimes\mathbb{C}[a_1]\to T(V)$ l'application composée $\mathbb{C}[a_0]\otimes T(V)\otimes\mathbb{C}[a_1]\hookrightarrow T(V)^{\otimes 3}\to T(V)$, où la première application est un produit tensoriel d'injections canoniques et de l'identité, et où la deuxième application est la multiplication de $T(V)$. Soit Op l'endomorphisme de $T(V)$ donné par

$$\mathrm{Op}=(T(V)\overset{\mathrm{mor}}{\to}\mathbb{C}[a_0]\otimes T(V)\otimes\mathbb{C}[a_1]\overset{m}{\to}T(V)), \tag{11}$$

où mor est le morphisme d'algèbres induit par $a_0\mapsto a_0^{(2)}-a_0^{(1)}$, $a_1\mapsto a_1^{(2)}-a_1^{(3)}$, $a_i\mapsto a_i^{(2)}$, $i\neq 0$ (on note $a_0^{(1)} := a_0\otimes 1\otimes 1$, $a_i^{(2)} := 1\otimes a_i\otimes 1$, $a_1^{(3)} := 1\otimes 1\otimes a_1$).

Posons $\omega_0 := \underline{\omega}_0\otimes a_0$, $\omega_1 := \underline{\omega}_1\otimes a_1$; ce sont des éléments de $\Omega^1\otimes V$. Alors

$$\mathrm{Hol}_0([0,1],\omega)=1,\quad \mathrm{Hol}_1([0,1],\omega)=(\int_{[0,1]}\otimes\mathrm{id})(\omega-\omega_0-\omega_1),$$

et si $n\ge 2$,

$$\mathrm{Hol}_n([0,1],\omega)^{\mathrm{op}}=(\int_{\Delta_n}\otimes\mathrm{Op})((\omega-\omega_0)\circ\omega^{\circ n-2}\circ(\omega-\omega_1))$$

où $\circ$ est le produit de l'algèbre tensorielle $T(\Omega^1\otimes V)$.

Notons $\omega\mapsto\omega^{01},\omega^{02},\omega^{03}$ les applications naturelles de $\Omega^1\otimes\mathbb{C}a_0$, $\Omega^1\otimes V$, $\Omega^1\otimes\mathbb{C}a_1$ vers $T(\Omega^1)\otimes\mathbb{C}[a_0]\otimes T(V)\otimes\mathbb{C}[a_1]$. Alors (11) implique que pour $n\ge 2$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hol}_n([0,1],\omega)^{\mathrm{op}}\\ &=(\int_{\Delta_n}\otimes m)\Big(((\omega-\omega_0)^{02}-\omega_1^{03})\circ(\omega^{02}-\omega_0^{01}-\omega_1^{03})^{\circ n-2}\circ((\omega-\omega_1)^{02}-\omega_0^{01})\Big),\end{aligned} \tag{12}$$

où l'argument du deuxième membre est un élément de $T(\Omega^1)\otimes\mathbb{C}[a_0]\otimes T(V)\otimes\mathbb{C}[a_1]$.

On montre facilement l'énoncé suivant :

Lemme 2.1. — *Soient Ω, V des espaces vectoriels, soit A une algèbre commutative. On note $\omega\mapsto\omega^{12}$, $\alpha\mapsto\alpha^{13}$ les applications naturelles de $\Omega\otimes V$ et $\Omega\otimes A$ vers $T(\Omega)\otimes T(V)\otimes A$. On note ш le produit de battage de $T(\Omega)$, donné par $(x_1\otimes\cdots\otimes x_k)(x_{k+1}\otimes\cdots\otimes x_{k+l}) = \sum x_{f(1)}\otimes\cdots\otimes x_{f(k+l)}$, où la somme parcourt les permutations de $[1,k+l]$ telles que si $f(i)<f(j)\le k$ ou $l+1\le f(i)<f(j)$, alors $i<j$. On note également*

$\text{ш} : (T(\Omega) \otimes T(V)) \otimes (T(\Omega) \otimes A) \to T(\Omega) \otimes T(V) \otimes A$ *le produit tensoriel du produit* $\text{ш} : T(\Omega)^{\otimes 2} \to T(\Omega)$ *avec les endomorphismes identité de* $T(V)$ *et de* A.

Si $\omega \in \Omega \otimes V$, $\alpha \in \Omega \otimes A$, *alors*

$$(\omega^{12} + \alpha^{13})^{\circ n} = \sum_{k=0}^{n} \omega^{\circ n-k} \text{ш} \alpha^{\circ k},$$

où les puissances sont calculées dans les produits tensoriels $T(\Omega) \otimes T(V) \otimes A$, $T(\Omega) \otimes T(V)$ *et* $T(\Omega) \otimes A$, *où* $T(\Omega)$ *est muni du produit de battage et* $T(V)$ *du produit de concaténation.*

En appliquant cette égalité au membre de droite de (12), on trouve

(13)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hol}_n([0,1], \omega)^{\mathrm{op}} \\
&= \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l \leq n-2}} (-a_0)^k \Big(\int_{\Delta_n} (\omega - \omega_0) \circ (\underline{\omega}_0^{\circ k} \text{ш} \underline{\omega}_1^{\circ l} \text{ш} \omega^{\circ n-2-k-l}) \circ (\omega - \omega_1) \Big) (-a_1)^l \\
&\quad + (-a_0)^k \Big(\int_{\Delta_n} \underline{\omega}_1 \circ (\underline{\omega}_0^{\circ k} \text{ш} \underline{\omega}_1^{\circ l} \text{ш} \omega^{\circ n-2-k-l}) \circ (\omega - \omega_1) \Big) (-a_1)^{l+1} \\
&\quad + (-a_0)^{k+1} \Big(\int_{\Delta_n} (\omega - \omega_0) \circ (\underline{\omega}_0^{\circ k} \text{ш} \underline{\omega}_1^{\circ l} \text{ш} \omega^{\circ n-2-k-l}) \circ \underline{\omega}_0) \Big) (-a_1)^l \\
&\quad + (-a_0)^{k+1} \Big(\int_{\Delta_n} \underline{\omega}_1 \circ (\underline{\omega}_0^{\circ k} \text{ш} \underline{\omega}_1^{\circ l} \text{ш} \omega^{\circ n-2-k-l}) \circ \underline{\omega}_0) \Big) (-a_1)^{l+1}
\end{aligned}$$

pour $k \geq 2$, expression dans lequelle $\circ$ est le produit de concaténation dans $T(\Omega^1)$ ou $T(\Omega^1) \otimes T(V)$, l'espace $T(\Omega^1)$ est considéré comme un sous-espace de $T(\Omega^1) \otimes T(V)$ par tensorisation avec 1, le symbole ш désigne le produit sur $T(\Omega^1) \otimes T(V)$, produit tensoriel du produit de battage et du produit de concaténation, et $\int_{\Delta_n} : T(\Omega^1) \otimes T(V) \to T(V)$ désigne le produit tensoriel de $\int_{\Delta_n} : T(\Omega^1) \to \mathbb{C}$ avec l'identité de $T(V)$.

En utilisant l'identité $(a \circ A) \text{ш} (b \circ B) = a \circ (A \text{ш} (b \circ B)) + b \circ (B \text{ш} (a \circ A))$ dans $T(\Omega^1)$, où $a, b \in \Omega^1$, $A, B \in T(\Omega^1)$, on simplifie ainsi cette expression

$$\mathrm{Hol}_n([0,1], \omega)^{\mathrm{op}} = \int_{\Delta_n} \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l \leq n-2}} (-a_0)^k \big(\underline{\omega}_0^{\circ k} \text{ш} \underline{\omega}_1^{\circ l} \text{ш} \omega^{\circ n-2-k-l} \big) (-a_1)^l, \tag{14}$$

dans laquelle les signes somme et intégrale ne peuvent être inversés, les termes individuels de la somme n'étant pas intégrables.

Remarque 2.2. — On peut réduire la dimension du simplexe d'intégration dans les formules (13), (14) en utilisant l'identité

$$\int_{\Delta_n} \alpha \circ ((df)^{\circ a} ш (dg)^{\circ b} ш \beta) \circ \gamma$$
$$= \sum_{a',a''|a'+a''=a} \sum_{b',b''|b'+b''=b} \int_{\Delta_{n-a-b}} \frac{(-f)^{a''}}{a''!} \frac{(-g)^{b''}}{b''!} \alpha \circ \beta \circ \gamma \frac{f^{a'}}{a'!} \frac{g^{b''}}{b''!}$$

dans laquelle α, β, γ sont dans $T(\Omega^1)$ et f, g sont des fonctions sur $[0,1]$.

2.2. Intégrales itérées régularisées. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre, limite projective d'algèbres de dimension finie. Soit $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ des éléments de $\mathscr{A}$, et posons

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1} := \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^1(]0,1[, \mathscr{A}) | \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_0 d\log(z) + O(1) \text{ si } z \to 0, \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_1 d\log(1-z) + O(1) \text{ si } z \to 1\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Pour $\boldsymbol{\omega} \in \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}$, on pose

$$I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\boldsymbol{\omega}) := \int_{[0,1]} (\boldsymbol{\omega} - \mathbf{a}_0 d\log(z) - \mathbf{a}_1 d\log(1-z)).$$

Pour $n \geq 2$ et $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n \in \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}$, on pose

$$I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n) := \sum_{\substack{a,b,\epsilon,\eta | \\ a,b \geq 0, a+b \leq n-2, \\ \epsilon,\eta \in \{0,1\}}} \mathbf{a}_0^{a+\epsilon} \cdot I^{\epsilon\eta}_{a,b} \cdot \mathbf{a}_1^{b+\eta},$$

le produit étant calculé dans $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ (l'algèbre opposée à $\mathscr{A}$), où

$$\begin{aligned} I^{00}_{a,b} = \int_{\Delta_n} & (\boldsymbol{\omega}_{a+1} - \mathbf{a}_0 d\log(z)) \\ & \circ \Big((-d\log(z))^{\circ a} ш (-d\log(1-z))^{\circ b} ш (\boldsymbol{\omega}_{a+2} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\omega}_{n-b-1}) \Big) \\ & \circ (\boldsymbol{\omega}_{n-b} - \mathbf{a}_1 d\log(1-z)), \\ I^{01}_{a,b} = \int_{\Delta_n} & (-d\log(1-z)) \\ & \circ \Big((-d\log(z))^{\circ a} ш (-d\log(1-z))^{\circ b} ш (\boldsymbol{\omega}_{a+1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\omega}_{n-b-2}) \Big) \\ & \circ (\boldsymbol{\omega}_{n-b-1} - \mathbf{a}_1 d\log(1-z)), \\ I^{10}_{a,b} = \int_{\Delta_n} & (\boldsymbol{\omega}_{a+2} - \mathbf{a}_0 d\log(z)) \\ & \circ \Big((-d\log(z))^{\circ a} ш (-d\log(1-z))^{\circ b} ш (\boldsymbol{\omega}_{a+3} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\omega}_{n-b}) \Big) \\ & \circ (-d\log(z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I^{11}_{a,b} = \int_{\Delta_n} &(-d\log(1-z)) \\ &\circ \Big((-d\log(z))^{\circ a} ш (-d\log(1-z))^{\circ b} ш (\boldsymbol{\omega}_{a+2} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\omega}_{n-b-1}) \Big) \\ &\circ (-d\log(z)),\end{aligned}$$

où : $\circ$ est le produit dans $T(\Omega^1) \otimes \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, les formes $d\log(z)$, $d\log(1-z)$ de Ω^1 sont identifiées à des éléments de $T(\Omega^1) \otimes \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ par tensorisation avec 1, on note l'application $\int_{\Delta_k} \otimes \mathrm{id} : (\Omega^1)^{\otimes k} \otimes \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ simplement $\int_{\Delta_k}$.

On a alors :

Proposition 2.3. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre, limite projective d'algèbres de dimension finie. Soit $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ des éléments de $\mathscr{A}$ et soit $\boldsymbol{\omega}$ un élément de $\Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}$. L'holonomie régularisée $\mathrm{Hol}([0,1], \boldsymbol{\omega})$ de l'équation différentielle $df = \boldsymbol{\omega} f$, définie par (10), est donnée par*

(16)
$$\mathrm{Hol}([0,1], \boldsymbol{\omega}) = 1 + \sum_{n \geq 1} I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\underbrace{\boldsymbol{\omega}, \dots, \boldsymbol{\omega}}_{n}).$$

Soit M une variété lisse, $U \subset M$ un ouvert, et $\gamma : [0,1] \to M$ un chemin tel que $\gamma(]0,1[) \subset U$. Pour $\mathscr{A}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ comme ci-dessus, on pose

(17)
$$\Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}(\gamma) := \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega^1(U, \mathscr{A}) | \gamma^*(\boldsymbol{\omega}) \in \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}\};$$

pour $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n \in \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}(\gamma)$, on pose

$$I^{\mathrm{reg}}_{\gamma}(\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n) := I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\gamma^*(\boldsymbol{\omega}_1), \dots, \gamma^*(\boldsymbol{\omega}_n)).$$

Enfin, pour $\boldsymbol{\omega} \in \Omega_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1}(\gamma)$, on pose $\mathrm{Hol}(\gamma, \boldsymbol{\omega}) := \mathrm{Hol}([0,1], \gamma^*(\boldsymbol{\omega}))$. On a alors

$$\mathrm{Hol}(\gamma, \boldsymbol{\omega}) = 1 + \sum_{n \geq 1} I^{\mathrm{reg}}_{\gamma}(\underbrace{\boldsymbol{\omega}, \dots, \boldsymbol{\omega}}_{n}).$$

Exemple 2.4. — Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \int_{\Delta_2} &(\boldsymbol{\omega}_1 - \mathbf{a}_0 d\log(z)) \circ (\boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{a}_1 d\log(1-z)) \\ &+ (-d\log(1-z)) \circ (\boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{a}_1 d\log(z)) \cdot \mathbf{a}_1 \\ &+ \mathbf{a}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \mathbf{a}_0 d\log(z)) \circ (-d\log(z)) \\ &+ \mathbf{a}_0 \cdot (-d\log(1-z)) \circ (-d\log(z)) \cdot \mathbf{a}_1.\end{aligned}$$

2.3. Les analogues elliptiques des nombres multizétas. — Fixons $\tau \in \mathfrak{H}$. Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose

$$\sigma^{\tau}_x(z) := \frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(z)\theta_\tau(x)}.$$

Considérant x comme une variable formelle proche de 0, on voit σ_x^τ comme un élément de $x^{-1}\,\mathrm{Mer}(\mathbb{C})[[x]]$, où $\mathrm{Mer}(\mathbb{C}) = \{$fonctions méromorphes définies sur $\mathbb{C}\}$. Plus précisément :

PROPOSITION 2.5. — *σ_x^τ admet le développement*

$$\sigma_x^\tau(z) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 0} k_n^\tau(z)x^n,$$

avec $k_0^\tau(z) = (\theta'_\tau/\theta_\tau)(z)$ et k_n^τ finie en 0 et 1 si $n > 0$.

Démonstration. Le paramètre τ étant fixé, on considère $\theta_\tau(-)$ comme une fonction de la variable z. On a $x\sigma_x^\tau(z)_{|x=0} = 1$. De plus,

$$(\sigma_x^\tau(z) - \frac{1}{x})_{|x=0} = \frac{1}{x}(\frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(z)}\frac{x}{\theta_\tau(x)} - 1)_{|x=0} = \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(z).$$

Enfin, le développement de $\sigma_x^\tau(z)$ en $z = 0$ est, compte tenu de l'imparité de θ_τ

$$\sigma_x^\tau(z) = \frac{\theta_\tau(x+z)}{\theta_\tau(x)}\frac{1}{\theta_\tau(z)} = (1+z\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x)+O(z^2))(\frac{1}{z}+O(z)) = \frac{1}{z}+\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x)+O(z).$$

Donc

$$\sigma_x^\tau(z) - (\frac{1}{x} + k_0^\tau(z)) = (\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x) - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{z} - \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(z)) + O(z)$$

qui est fini en $z = 0$. Il s'ensuit que les k_n^τ sont finis en 0. Par symétrie, ils sont également finis en 1. □

Posons $\mathscr{C} := \mathbb{C}$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 := 1$. Alors pour $x \in \mathbb{C}$, la forme $\sigma_x^\tau(z)dz$ appartient à l'espace $\Omega_{1,1}$ défini par (15).

De même, la forme $e^{2\pi\mathrm{i}\frac{xz}{\tau}}\sigma_x^\tau(z)dz$ appartient à l'espace $\Omega_{1,1}(\underline{[0,\tau]})$ défini par (17), où $\underline{[0,\tau]}$ est le chemin linéaire $[0,1] \to [0,\tau]$ tracé sur $\mathbb{C}$.

On pose alors :

DÉFINITION 2.6. — *On note $\underline{[0,1]}$ et $\underline{[0,\tau]}$ les chemins linéaires $[0,1] \to [0,1]$ et $[0,1] \to [0,\tau]$ tracés sur $\mathbb{C}$. Pour $\tau \in \mathfrak{H}$, on pose*

$$I_{x_1,\ldots,x_n}(\tau) := I^{\mathrm{reg}}_{\underline{[0,1]}}(\sigma_{x_1}^\tau dz, \ldots, \sigma_{x_n}^\tau dz) \tag{18}$$

$$J_{x_1,\ldots,x_n}(\tau) := I^{\mathrm{reg}}_{\underline{[0,\tau]}}(e^{2\pi\mathrm{i}\frac{x_1 z}{\tau}}\sigma_{x_1}^\tau(z)dz, \ldots, e^{2\pi\mathrm{i}\frac{x_n z}{\tau}}\sigma_{x_n}^\tau(z)dz); \tag{19}$$

ce sont des séries dans $(x_1\cdots x_n)^{-1}\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$.

En utilisant (13), on trouve pour $n \geq 0$

$$I_{x_1,\ldots,x_n}(\tau) = \sum_{\substack{k,l|k,l\geq 0,\\ k+l\leq n-2}} \int_{\Delta_n} (\sigma_{x_{k+1}}^\tau - d\log(z)) \circ \Big((-d\log(z))^{\circ a} ш (-d\log(1-z))^{\circ b} ш (\sigma_{x_{k+2}}^\tau \circ \cdots \circ \sigma_{x_{n-l-1}}^\tau)\Big) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\circ(\sigma^\tau_{x_{n-l}} - d\log(1-z))\\
&+\int_{\Delta_n}(-d\log(1-z))\\
&\circ\Big((-d\log(z))^{\circ a}ш(-d\log(1-z))^{\circ b}ш(\sigma^\tau_{x_{k+1}}\circ\cdots\circ\sigma^\tau_{x_{n-l-2}})\Big)\\
&\circ(\sigma^\tau_{x_{n-l-1}} - d\log(1-z))\\
&+\int_{\Delta_n}(\sigma^\tau_{x_{k+2}} - d\log(z))\\
&\circ\Big((-d\log(z))^{\circ a}ш(-d\log(1-z))^{\circ b}ш(\sigma^\tau_{x_{k+3}}\circ\cdots\circ\sigma^\tau_{x_{n-l}})\Big)\\
&\circ(-d\log(z))\\
&+\int_{\Delta_n}(-d\log(1-z))\\
&\circ\Big((-d\log(z))^{\circ a}ш(-d\log(1-z))^{\circ b}ш(\sigma^\tau_{x_{k+2}}\circ\cdots\circ\sigma^\tau_{x_{n-l-1}})\Big)\\
&\circ(-d\log(z))
\end{aligned}$$

ce qui donne
(21)

$$I_{x_1,\dots,x_n}(\tau)=\int_{\Delta_n}\sum_{\substack{k,l|k,l\geq 0,\\ k+l\leq n-2}}(-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}\circ(\sigma^\tau_{x_{k+1}}\circ\cdots\circ\sigma^\tau_{x_{n-l}})$$

(en notant σ^τ_x à la place de $\sigma^\tau_x(z)dz$). En particulier, on a

$$\begin{aligned}
I_{x,y}(\tau)=\int_{\Delta_2}&(\sigma^\tau_x - d\log(z))\circ(\sigma^\tau_y - d\log(1-z))\\
&- d\log(1-z)\circ(\sigma^\tau_x - d\log(1-z))\\
&- (\sigma^\tau_y - d\log(z))\circ d\log(z) + d\log(1-z)\circ d\log(z).
\end{aligned}$$

On a aussi

$$I_x(\tau)=\int_{[0,1]}(\sigma^\tau_x(z)dz - d\log(z) - d\log(1-z)).$$

La fonction $J_{x_1,\dots,x_n}(\tau)$ est donnée par les formules analogues, obtenues au moyen des substitutions $[0,1]\to[0,\tau]$, $\log(z)\to\log(z/\tau)$, $\log(1-z)\to\log(1-\frac{z}{\tau})$, $\sigma^\tau_x(z)dz\to e^{2\pi\mathrm{i}\frac{xz}{\tau}}\sigma^\tau_x(z)dz$.

Pour $\underline{d}:=(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq -1}$, on note $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ les nombres complexes définis par

$$I_{\underline{x}}(\tau)=\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^n_{\geq -1}}I_{\underline{d}}(\tau)\underline{x}^{\underline{d}},\quad J_{\underline{x}}(\tau)=\sum_{\underline{d}\in\mathbb{Z}^n_{\geq -1}}J_{\underline{d}}(\tau)\underline{x}^{\underline{d}},$$

où $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ et $\underline{x}^{\underline{d}} := x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$. On a en particulier $I_{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n}}(\tau) = 1/n!$, $J_{\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n}}(\tau) = \tau^n/n!$.

On appelle les fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ les *analogues elliptiques des nombres multizétas*; les $I_{x_1,\ldots,x_n}(\tau)$, $J_{x_1,\ldots,x_n}(\tau)$ en sont des séries génératrices. Cette terminologie est justifiée par les résultats de la section suivante.

2.4. Lien avec le développement de $A(\tau)$, $B(\tau)$. — Soit

$$F := \bigoplus_{n \geq 0} F_n := \bigoplus_{n \geq 0} (x_1 \cdots x_n)^{-1} \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]];$$

munie du produit $f * g := h$, avec

$$h(x_1, \ldots, x_{n+m}) := f(x_1, \ldots, x_n) g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \text{ pour } f \in F_n,$$

$g \in F_m$, c'est une algèbre graduée.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{f}_2$ est librement engendrée par les éléments x, y et est bigraduée par le degré en ces générateurs. Par élimination de Lazard, la somme directe $\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x$ de ses composantes de degré > 0 en y est l'algèbre de Lie librement engendrée par les $[x^n y] := (\mathrm{ad} x)^n(y)$, $n \geq 0$. Son algèbre enveloppante est donc l'algèbre associative libre sur ces générateurs. On note $\mathscr{A}$ la complétion de cette algèbre enveloppante pour le degré total en x, y.

On en déduit :

Lemme 2.7. — *On a un isomorphisme entre $\mathscr{A}$ et la complétion $\hat{F} := \prod_{n \geq 0} F_n$ de F via*

$$[x^{d_1} y] \cdots [x^{d_n} y] \leftrightarrow x_1^{d_1 - 1} \cdots x_n^{d_n - 1} \in F_n.$$

On considère l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x$ comme graduée par le degré total en x, y ; son algèbre enveloppante est donc graduée avec composantes homogènes de dimension finie, et $\mathscr{A}$ est donc une limite projective d'algèbres de dimension finie.

Posons $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 := t = -[x, y]$ et

$$\boldsymbol{\omega}(z) dz := -\frac{\theta_\tau(z + \mathrm{ad}(x))}{\theta_\tau(z)} \frac{\mathrm{ad}(x)}{\theta_\tau(\mathrm{ad}(x))}(y) dz \in \Omega^1(]0,1[, \mathscr{A}).$$

Alors $\boldsymbol{\omega}(z) dz \in \Omega_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1}$. On lui associe

$$I(\tau) := \mathrm{Hol}([0,1], \boldsymbol{\omega}) \in \mathscr{A}.$$

On pose $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(z) dz := e^{2\pi \mathrm{i} \frac{z}{\tau}} \boldsymbol{\omega}(z) dz$. Cette forme admet comme pôle t en 0 et τ, donc $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1}(\underline{[0,\tau]})$, où $\underline{[0,\tau]}$ est le chemin linéaire $[0,1] \to [0,\tau]$. On pose alors

$$J(\tau) := \mathrm{Hol}(\underline{[0,\tau]}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in \mathscr{A}.$$

Sous l'isomorphisme du lemme 2.7, on a

$$\mathcal{C} \ni \boldsymbol{\omega} \leftrightarrow -\sigma_x^\tau(z)dz \in F_1,$$

d'où

$$\mathcal{C} \ni I^{\mathrm{reg}}(\underbrace{\boldsymbol{\omega}, \dots, \boldsymbol{\omega}}_{n}) \leftrightarrow (-1)^n I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\sigma^\tau_{x_n}, \dots, \sigma^\tau_{x_1}) = (-1)^n I_{x_n,\dots,x_1}(\tau) \in F_n,$$

d'où

$$\mathcal{C} \ni I(\tau) \leftrightarrow \Big((-1)^n I_{x_n,\dots,x_1}(\tau)\Big)_{n\geq 0} \in \hat{F}. \tag{22}$$

On montre de même la correspondance

$$\mathcal{C} \ni J(\tau) \leftrightarrow \Big((-1)^n J_{x_n,\dots,x_1}(\tau)\Big)_{n\geq 0} \in \hat{F}. \tag{23}$$

Les solutions f_0, f_1 de $df = \boldsymbol{\omega} f$ (voir section 2.1) sont reliées à $X(z)$ (voir section 1.1) par $X(z) = f_0(z)(-2\pi\,\mathrm{i})^t$, $X(z-1) = f_1(z)(2\pi\,\mathrm{i})^t$. On en déduit

$$\mathrm{Ad}((2\pi)^t)(e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t} A(\tau) e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t}) = \mathrm{Hol}([0,1], \Omega). \tag{24}$$

On a $B(\tau) = Z(z)^{-1}Z(z+\tau)$, où $Z(z)$ est la solution dans $\mathbf{D} := \{a+b\tau | (a,b) \in]0,1[^2\}$ de

$$dZ = (\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,x}{\tau}dz + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(z)dz)Z$$

telle que $Z(z) \sim (-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^t$ pour $z \to 0$. Soit $e_+ \in \mathrm{Der}(\mathfrak{f}_2)$ la dérivation $(x,y) \mapsto (0,x)$. En appliquant l'automorphisme $\exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}e_+)$ à l'expression reliant $B(\tau)$ avec $Z(z)$, on obtient :

$$\exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}e_+)(B(\tau)) = T(z)^{-1}T(z+\tau),$$

où $T(z)$ est la solution dans $\mathbf{D}$ de $dT = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(z)dz \cdot T$, telle que $T(z) \sim (-2\pi\,\mathrm{i}\,z)^t$ en $z \to 0$. Un raisonnement analogue au précédent donne alors

$$\mathrm{Ad}((2\pi)^t)(e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t} \cdot \exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}e_+)(B(\tau)) \cdot e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t}) = \mathrm{Hol}([0,\tau], \tilde{\Omega}) \tag{25}$$

(22) et (23) d'une part, (24) et (25) d'autre part impliquent :

Proposition 2.8. — *Sous l'isomorphisme du Lemme 2.7, on a*

$$\mathrm{Ad}((2\pi)^t)\big(e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t} A(\tau) e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t}\big) \leftrightarrow \Big(I_{x_n,\dots,x_1}(\tau)\Big)_{n\geq 0}.$$

$$\mathrm{Ad}((2\pi)^t)\big(e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t} \cdot \exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}e_+)(B(\tau)) \cdot e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}t}\big) \leftrightarrow \Big((-1)^n J_{x_n,\dots,x_1}(\tau)\Big)_{n\geq 0}.$$

Remarque 2.9. — Le formalisme développé par J. Ecalle utilise une variante de l'isomorphime $F \leftrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ du lemme 2.7, donné par $[x^{d_1}y]\cdots[x^{d_n}y] = f \leftrightarrow ma_f := x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

2.5. Propriétés algébriques et modulaires. — Les multizétas elliptiques sont reliés par l'identité modulaire

$$J_{x_1,\dots,x_n}(\tau) = I_{\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}}(\frac{-1}{\tau}), \tag{26}$$

qui repose sur l'identité $\sigma_x^{-1/\tau}(z)dz = e^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\tau z}\sigma^{\tau}_{\tau x}(\tau z)d(\tau z)$. L'identité (26) traduit l'identité (2) reliant $A(\tau)$ et $B(\tau)$.

Le caractère « de type groupe » de $A(\tau), B(\tau)$ se traduit par les identités

$$I_{d_1,\dots,d_n}(\tau)I_{d_{n+1},\dots,d_{n+m}}(\tau) = \sum_{\sigma\in S_{n,m}} I_{d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n+m)}}(\tau), \tag{27}$$

où $S_{n,m} = \{\sigma \in S_{n+m} | \sigma(i) < \sigma(j) \text{ si } i < j \le n \text{ ou } n+1 \le i < j\}$, ainsi que les identités similaires pour les $J_{\underline{d}}(\tau)$ (qui leur sont équivalentes compte tenu de (26)).

Les identités (5) se traduisent par

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{d_1+\cdots+d_k} I_{d_1,\dots,d_k}(\tau)I_{d_{k+1},\dots,d_n}(\tau) = 0 \quad \text{si} \quad n \ge 1,\ d_1,\dots,d_n \ge -1$$

et les identités analogues en remplaçant chaque $I_{\underline{d}}$ par $J_{\underline{d}}$ (qui leur sont également équivalentes).

3. Système différentiel pour les analogues elliptiques des nombres multizétas

Dans cette section, on montre que les intégrales itérées régularisées définies dans la section 2.2 sont, sous certaines hypothèses, solutions de certains systèmes différentiels (section 3.1). En section 3.2, on applique ce résultat aux analogues elliptiques des nombres multizétas définis en section 2.3.

3.1. Systèmes différentiels pour les intégrales itérées régularisées. — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des 1-formes lisses sur $I\times]0,1[$ de la forme $\omega = \omega(u,z)dz$, telles que $\omega - d\log(z)$ admet un prolongement lisse à $I\times[0,1[$ et $\omega - d\log(1-z)$ admet un prolongement lisse à $I\times]0,1]$. On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des 1-formes lisses sur $I\times[0,1]$ de la forme $g = g(t,z)dt$. On suppose donnés :

- des éléments ω_i $(i = 1,\dots,n)$ et $\psi_{i,i+1}$ $(i = 1,\dots,n-1)$ de $\mathscr{F}$;
- des éléments g_i $(i = 1,\dots,n)$ de $\mathscr{G}$, tels que :

(a) pour $i = 1,\dots,n$, la forme $\omega_i(u,z)dz + g_i(u,z)dt$ est fermée, ce qui se traduit par l'identité
$$\frac{\partial\omega_i}{\partial u}(u,z) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(u,z)$$
sur $I\times]0,1[$;

(b) pour $i = 1, \dots, n-1$, on a l'identité

$$g_i(u,z)\omega_{i+1}(u,z) - g_{i+1}(u,z)\omega_i(u,z) = (g_i(u,0) - g_{i+1}(u,0))\psi_{i,i+1}(u,z)$$

sur $I\times]0,1[$;

(c) pour $i = 1, \dots, n$, on a l'identité $g_i(u,0) = g_i(u,1)$ sur I.

On se place dans le cadre de la section 2.2, avec $\mathscr{C} = \mathbb{C}$, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 = 1$, pour définir $\Omega_{1,1}$. Pour tout $\alpha \in \mathscr{F}$ et tout $u \in I$, la restriction α^u de α à $\{u\}\times]0,1[$ appartient à $\Omega_{1,1}$. La définition de $I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}$ en section 2.2 permet alors de définir le nombre $I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\alpha_1^u, \dots, \alpha_n^u)$ pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathscr{F}$ et $u \in I$.

Proposition 3.1. — *Sous les hypothèses du début de la section 3.1 sur $(\omega_i)_{i=1,\dots,n}$, $(\psi_{i,i+1})_{i=1,\dots,n-1}$, et $(g_i)_{i=1,\dots,n}$, on a l'identité suivante sur I*

$$\frac{d}{du}I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\omega_1^u, \dots, \omega_n^u) = -\, g_1^u(0) I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\omega_2^t, \dots, \omega_n^u) + g_n^u(0) I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\omega_1^u, \dots, \omega_{n-1}^u)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}(g_i^u(0) - g_{i+1}^u(0)) I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\omega_1^u, \dots, \psi_{i,i+1}^u, \dots, \omega_{n-1}^u). \tag{28}$$

La fin de cette section est consacré à la démonstration de cette proposition.

Définition 3.2. — *On note Ω l'espace des 1-formes sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de la forme $\omega(z)dz = (\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z-1} + f_0(z))dz$, où $f_0(z)$ est une fonction lisse sur $[0,1]$ et $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. On note $\Omega_{\mathrm{reg}.0}$ et $\Omega_{\mathrm{reg}.1}$ les sous-espaces de Ω définis par les conditions respectives $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$.*

On a une application linéaire $\Omega \to \mathbb{C}^2$ donnée par $\omega(z)dz \mapsto (a_0, a_1)$; $\Omega_{\mathrm{reg}.0}$ et $\Omega_{\mathrm{reg}.1}$ sont alors les préimages de $0 \oplus \mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \oplus 0$.

Définition 3.3. — *Pour $m \geq 1$, on définit le sous-espace $(\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}}$ de $\Omega^{\otimes m}$ ainsi :*

- *si $m = 1$, alors $\Omega_{\mathrm{int}} := \Omega_{\mathrm{reg}.0} \cap \Omega_{\mathrm{reg}.1}$;*
- *si $m \geq 2$, alors $(\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}} := \Omega_{\mathrm{reg}.0} \otimes \Omega^{\otimes m-2} \otimes \Omega_{\mathrm{reg}.1}$.*

On identifie $\Omega^{\otimes m}$ à un sous-espace de $\Omega^m(]0,1[^m, \mathbb{C})$. Alors l'image de chaque élément de $(\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}}$ est absolument intégrable sur le simplexe $\Delta_m \subset]0,1[^m$. L'intégration sur Δ_m donne alors une application linéaire

$$\int_{\Delta_m} : (\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}} \to \mathbb{C}.$$

Définition 3.4. — *Pour $a \geq 0$, on pose $(\Omega^{\otimes a})_{\mathrm{int}.0} := \Omega_{\mathrm{reg}.0} \otimes \Omega^{\otimes a-1}$ si $a > 0$, et $(\Omega^{\otimes a})_{\mathrm{int}.0} := \mathbb{C}$ si $a = 0$. Pour $b \geq 0$, on pose $(\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}.1} := \Omega^{\otimes a-1} \otimes \Omega_{\mathrm{reg}.1}$ si $b > 0$, et $(\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}.1} := \mathbb{C}$ si $b = 0$. Enfin, pour $a, b \geq 0$, on pose $(\Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} := (\Omega^{\otimes a})_{\mathrm{int}.0} \otimes (\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}.1}$.*

Soit g un élément de $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$. Alors $dg \in \Omega$. Pour m entier ≥ 1, on définit l'application linéaire

$$\mathrm{ins}(dg) : \bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \to \Omega^{\otimes m}$$

comme la somme des applications $\Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \to \Omega^{\otimes m}$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \otimes dg \otimes \beta$ d'insertion de dg dans le produit tensoriel.

Pour $c \geq 0$, on définit une application linéaire

$$C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \otimes \Omega^{\otimes c} \to \Omega^{\otimes c}, \quad f \otimes \omega \mapsto f \cdot \omega$$

par $f \cdot (\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_c) := (f\gamma_1) \circ \cdots \circ \gamma_c$ si $c > 0$, et $f \cdot 1 := f(1)1$ pour $c = 0$ ($f\gamma$ est le produit de la fonction f et de la 1-forme γ). On définit de même une application linéaire

$$\Omega^{\otimes c} \otimes C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \to \Omega^{\otimes c}, \quad \omega \otimes f \mapsto \omega \cdot f$$

par $(\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_c) \cdot f := \gamma_1 \circ \cdots \circ (f\gamma_c)$ si $c > 0$, et $1 \cdot f := f(0)1$ pour $c = 0$.

Pour g dans $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$, on définit alors des applications linéaires

$$l(g), r(g) : \bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \to \Omega^{\otimes m-1}$$

comme étant les sommes directes des applications $\Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \to \Omega^{\otimes m-1}$ données par $l(g)(\alpha \otimes \beta) := \alpha \otimes (g \cdot \beta)$, $\quad r(g)(\alpha \otimes \beta) := (\alpha \cdot g) \otimes \beta$.

Comme $dg \in \Omega_{\mathrm{reg}.0} \cap \Omega_{\mathrm{reg}.1} \subset \Omega$, il existe une application $(\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \to (\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}}$, qui sera également notée $\mathrm{ins}(dg)$, telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \arrow[r, "\mathrm{ins}(dg)"] \arrow[d, hook] & (\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}} \arrow[d, hook] \\
\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \arrow[r, "\mathrm{ins}(dg)"] & \Omega^{\otimes m}.
\end{tikzcd}$$

Pour tout $c \geq 0$, les applications $C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \otimes \Omega^{\otimes c} \to \Omega^{\otimes c}$, $f \otimes \omega \mapsto f \cdot \omega$ et $\Omega^{\otimes c} \otimes C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \to \Omega^{\otimes c}$, $\omega \otimes f \mapsto \omega \cdot f$, se restreignent et corestreignent en des applications $C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \otimes (\Omega^{\otimes c})_{\mathrm{int}.1} \to (\Omega^{\otimes c})_{\mathrm{int}.1}$ et $(\Omega^{\otimes c})_{\mathrm{int}.0} \otimes C^\infty([0,1],\mathbb{C}) \to (\Omega^{\otimes c})_{\mathrm{int}.0}$. On en déduit l'existence d'applications $l(g), r(g)$: $(\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \to (\Omega^{\otimes m-1})_{\mathrm{int}}$, telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \arrow[r, "l(g), r(g)"] \arrow[d, hook] & (\Omega^{\otimes m-1})_{\mathrm{int}} \arrow[d, hook] \\
\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \arrow[r, "l(g), r(g)"] & \Omega^{\otimes m-1}
\end{tikzcd}$$

commute. Enfin, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \arrow[r, "\mathrm{ins}(dg)"] \arrow[d, "r(g)-l(g)"'] & (\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}} \arrow[d, "\int_{\Delta_n}"] \\
(\Omega^{\otimes m-1})_{\mathrm{int}} \arrow[r, "\int_{\Delta_{n-1}}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

par le théorème de Fubini. On rassemble ces résultats dans le diagramme suivant

(29)

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \arrow[rr, "\mathrm{ins}(dg)"] \arrow[dd, "r(g)-l(g)"'] & & \Omega^{\otimes m} \\
& (\bigoplus_{a+b=m-1} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}} \arrow[ul, hook, "\mathrm{can}"'] \arrow[r, "\mathrm{ins}(dg)"] \arrow[d, "r(g)-l(g)"'] & (\Omega^{\otimes m})_{\mathrm{int}} \arrow[u, hook, "\mathrm{can}"'] \arrow[d, "\int_{\Delta_n}"] \\
\Omega^{\otimes m-1} & (\Omega^{\otimes m-1})_{\mathrm{int}} \arrow[l, hook', "\mathrm{can}"'] \arrow[r, "\int_{\Delta_{n-1}}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

où chacun des carrés commute, et où can sont des inclusions canoniques.

Posons $T(\Omega) := \bigoplus_{a\geq 0} \Omega^{\otimes a}$. Les sommes sur $m \geq 0$ des applications linéaires

$$l(g), r(g) : \bigoplus_{a,b|a+b=m} \Omega^{\otimes a} \otimes \Omega^{\otimes b} \to \Omega^{\otimes m}$$

sont des applications linéaires $l(g), r(g) : T(\Omega)^{\otimes 2} \to T(\Omega)$.

Muni du produit de battage ш et du coproduit de déconcaténation $\Delta_{\text{ш}}$ donné par $\Delta_{\text{ш}}(\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_n) := \sum_{k=0}^{n} (\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \circ \cdots \circ \alpha_n)$, l'espace $T(\Omega)$ est une bigèbre. Le produit ш étant commutatif, les représentations régulières à gauche et à droite de $T(\Omega)$ sont isomorphes ; ceci donne un $T(\Omega)$-module $T(\Omega)$. En utilisant le coproduit, on munit l'espace $T(\Omega)^{\otimes 2}$ d'une structure de $T(\Omega)$-module. On a alors :

Lemme 3.5. — *L'application linéaire $r(g) - l(g) : T(\Omega)^{\otimes 2} \to T(\Omega)$ est un morphisme de $T(\Omega)$-modules. En d'autres termes, on a*

$$(r(g) - l(g))\big((\alpha^{(1)} \text{ш} \beta) \otimes (\alpha^{(2)} \text{ш} \gamma)\big) = \alpha \text{ш} \big((r(g) - l(g))(\beta \otimes \gamma)\big) \tag{30}$$

(égalité dans $T(\Omega)$) pour tous α, β, γ dans $T(\Omega)$, dans laquelle on note $\Delta_{\text{ш}}(\alpha) = \alpha^{(1)} \otimes \alpha^{(2)}$.

Démonstration. — Notons $a(g) := r(g) - l(g)$. Si $\beta = \gamma = 1$, le membre de gauche est égal à $a(g)(\alpha^{(1)} \otimes \alpha^{(2)})$ qui est égal, après simplifications, à $\alpha \circ (g \cdot 1) - (1 \cdot g) \circ \alpha = (g(1) - g(0))\alpha$. D'autre part, le membre de droite est égal à $\alpha ш\big(a(g)(1\otimes 1)\big) = \alpha ш\big((g\cdot 1)-(1\cdot g)\big) = (g(1)-g(0))\alpha$. *L'identité* (30) *est donc satisfaite si* $\beta=\gamma=1$.

Si $\beta\in\Omega$ et $\gamma=1$, alors le membre de gauche est égal à $a(g)((\alpha^{(1)}ш\beta)\otimes\alpha^{(2)})$, ce qui d'après l'identité

$$\forall\alpha\in T(\Omega),\forall\beta\in\Omega,\quad \alpha ш\beta=\alpha^{(1)}\circ\beta\circ\alpha^{(2)}, \tag{31}$$

est égal à $a(g)((\alpha^{(1)}\circ\beta\circ\alpha^{(2)})\otimes\alpha^{(3)})$. Après simplification, ce dernier terme est égal à $g(1)\alpha^{(1)}\circ\beta\circ\alpha^{(2)}-\alpha^{(1)}\circ(g\beta)\circ\alpha^{(2)}$. D'autre part, le membre de droite est égal à $\alpha ш\big(a(g)(\beta\otimes 1)\big)$. On a $a(g)(\beta\otimes 1)=g(1)\beta-g\beta$, donc compte tenu de (31), le membre de droite est égal à $\alpha^{(1)}\circ(g(1)\beta-g\beta)\circ\alpha^{(2)}$ *L'identité* (30) *est donc satisfaite si* $\beta\in\Omega$ *et* $\gamma=1$. On montre de même que *l'identité* (30) *est satisfaite si* $\beta=1$ *et* $\gamma\in\Omega$.

Si β et γ appartiennent à Ω, le membre de gauche est égal à $a(g)\big((\alpha^{(1)}ш\beta)\otimes(\alpha^{(2)}ш\gamma)\big)$, ce qui d'après (31) est égal à $a(g)\big((\alpha^{(1)}\circ\beta\circ\alpha^{(2)})\otimes(\alpha^{(3)}\circ\gamma\circ\alpha^{(4)})\big)$, terme qui compte tenu de l'égalité suivante (dans laquelle $T(\Omega)_+=\bigoplus_{a>0}\Omega^{\otimes a}$)

$$\forall\alpha,\beta\in T(\Omega),\forall\alpha,\beta\in T(\Omega)_+,\quad a(g)((\alpha\circ\alpha')\otimes(\beta'\circ\beta))=\alpha\circ a(g)(\alpha'\otimes\beta')\circ\beta$$

est égal à $\alpha^{(1)}\circ a(g)\big((\beta\circ\alpha^{(2)})\otimes(\alpha^{(3)}\circ\gamma)\big)\circ\alpha^{(4)}$. L'égalité suivante

$$\forall\beta,\gamma\in\Omega,\forall\alpha\in T(\Omega),\quad a(g)\big((\beta\circ\alpha^{(1)})\otimes(\alpha^{(2)}\circ\gamma)\big)=\beta\circ\alpha\circ(g\gamma)-(g\beta)\circ\alpha\circ\gamma$$

implique alors que ce dernier terme est égal à $\alpha^{(1)}\circ\big(\beta\circ\alpha^{(2)}\circ(g\gamma)-(g\beta)\circ\alpha^{(2)}\circ\gamma\big)\circ\alpha^{(3)}$. On a l'identité suivante

$$\forall\beta,\gamma\in\Omega,\forall\alpha\in T(\Omega),\quad \alpha ш(\beta\circ\gamma)=\alpha^{(1)}\circ\beta\circ\alpha^{(2)}\circ\gamma\circ\alpha^{(3)}, \tag{32}$$

qui permet d'exprimer le dernier terme comme $\alpha ш\big(\beta\circ(g\gamma)-(g\beta)\circ\gamma\big)$, qui est donc $\alpha ш a(g)(\beta\otimes\gamma)$, et donc égal au membre de droite. *L'identité* (30) *est donc satisfaite si* $\beta=1$ *et* $\gamma\in\Omega$.

Les deux membres de l'identité (30) sont les valeurs en $\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ de deux applications linéaires $\mathrm{gau},\mathrm{dro}: T(\Omega)\otimes T(\Omega)^{\otimes 2}\to T(\Omega)$. La décomposition

$$T(\Omega)^{\otimes 2}=T(\Omega)_+^{\otimes 2}\oplus(T(\Omega)_+\otimes\mathbb{C})\oplus(\mathbb{C}\otimes T(\Omega)_+)\oplus\mathbb{C}^{\otimes 2}$$

induit par tensorisation avec $T(\Omega)$ une décomposition de la source des applications gau, dro. On a par ailleurs montré l'égalité des restrictions des applications gau et dro aux produits tensoriels de $T(\Omega)$ avec les sous-espaces $\Omega^{\otimes 2}\subset T(\Omega)_+^{\otimes 2}$, $(\Omega\otimes\mathbb{C})\subset(T(\Omega)\otimes\mathbb{C})$, $(\mathbb{C}\otimes T(\Omega))\subset(\mathbb{C}\otimes T(\Omega))$, et $\mathbb{C}^{\otimes 2}\subset\mathbb{C}^{\otimes 2}$. L'égalité de ces applications linéaires sur les trois premiers espaces est alors une conséquence des identités

$$\forall\tilde\beta\in T(\Omega),\forall\beta_0\in T(\Omega)_+,\quad a(g)\big((\tilde\beta\circ\beta_0)\otimes 1\big)=\tilde\beta\circ a(g)(\beta_0\otimes 1),$$

$$\forall\tilde\gamma\in T(\Omega),\forall\gamma_0\in T(\Omega)_+,\quad a(g)\big(1\otimes(\gamma_0\circ\tilde\gamma)\big)=a(g)(1\otimes\gamma_0)\circ\tilde\gamma,$$

(33)
$$\forall\tilde\beta,\tilde\gamma\in T(\Omega),\forall\beta,\gamma\in T(\Omega)_+,\quad a(g)\big((\tilde\beta\circ\beta_0)\otimes(\gamma_0\circ\tilde\gamma)\big)=\tilde\beta\circ a(g)(\beta_0\otimes\gamma_0)\circ\tilde\gamma,$$

et de l'identité

$$\alpha ш(\beta\circ\gamma)=(\alpha^{(1)}ш\beta)\circ(\alpha^{(2)}ш\gamma) \tag{34}$$

pour $\alpha,\beta,\gamma\in T(\Omega)$.

Montrons par exemple l'identité (30) dans le cas du produit tensoriel de $T(\Omega)$ avec $T(\Omega)_+^{\otimes 2}$. Par linéarité, on suppose $\beta\otimes\gamma\in T(\Omega)_+^{\otimes 2}$ de la forme $(\tilde\beta\circ\beta_0)\otimes(\gamma_0\circ\tilde\gamma)$ où $\tilde\beta,\tilde\gamma\in T(\Omega)$ et $\beta_0,\gamma_0\in\Omega$. Alors, si $\alpha\in T(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&a(g)\big((\alpha^{(1)}ш\beta)\otimes(\alpha^{(2)}ш\gamma)\big)=a(g)\Big(\big(\alpha^{(1)}ш(\tilde\beta\circ\beta_0)\big)\otimes\big(\alpha^{(2)}ш(\gamma_0\circ\tilde\gamma)\big)\Big)\\
&=a(g)\Big(\big((\alpha^{(1)}ш\tilde\beta)\circ(\alpha^{(2)}ш\beta_0)\big)\otimes\big((\alpha^{(3)}ш\gamma_0)\circ(\alpha^{(4)}ш\tilde\gamma)\big)\Big)\quad\text{(par (32))}\\
&=(\alpha^{(1)}ш\tilde\beta)\circ a(g)\big((\alpha^{(2)}ш\beta_0)\otimes(\alpha^{(3)}ш\gamma_0)\big)\circ(\alpha^{(4)}ш\tilde\gamma)\quad\text{(par (33))}\\
&=(\alpha^{(1)}ш\tilde\beta)\circ\Big(\alpha^{(2)}ш a(g)\big(\beta_0\otimes\gamma_0\big)\Big)\circ(\alpha^{(3)}ш\tilde\gamma)\quad\text{(par (30) pour }\beta_0,\gamma_0\in\Omega)\\
&=\alpha ш\Big(\tilde\beta\circ a(g)\big(\beta_0\otimes\gamma_0\big)\circ\tilde\gamma\Big)\quad\text{(par (34))}\\
&=\alpha ш a(g)\big((\tilde\beta\circ\beta_0)\otimes(\gamma_0\circ\tilde\gamma)\big)\quad\text{(par (33))}\\
&=\alpha ш a(g)(\beta\otimes\gamma).
\end{aligned}$$

□

Compte tenu de ce que $(T(\Omega),ш,\Delta_ш)$ est une bigèbre, (30) implique :

$$\begin{aligned}
\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in T(\Omega),\quad &(r(g)-l(g))\big((\alpha^{(1)}ш\beta ш\delta^{(1)})\otimes(\alpha^{(2)}ш\gamma ш\delta^{(2)})\big)\\
&=\alpha ш\big((r(g)-l(g))(\beta\otimes\gamma)\big)ш\delta
\end{aligned}\tag{35}$$

(égalité dans $T(\Omega)$).

Pour $\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n\in\Omega_{1,1}$, on pose

$$\begin{aligned}
&\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)\\
&:=\sum_{a,b|a+b\le n}(-1)^{a+b}(d\ln(z))^{\circ a}ш(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})ш(d\ln(1-z))^{\circ b}\in\Omega^{\otimes n}.
\end{aligned}$$

On a vu en section 2.2 que $\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)=\sum_{\substack{\epsilon,\eta\in\{0,1\}\\ k,l|k+l\le n-2}}\mathrm{int}_{k,l}^{\epsilon,\eta}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)$, où

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_{k,l}^{0,0}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)&=(\breve\omega_{k+1}-d\log(z))\\
&\quad\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)\\
&\quad\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z)),\\
\mathrm{int}_{k,l}^{1,0}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)&=(\breve\omega_{k+2}-d\log(z))\\
&\quad\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+3}\\
&\quad\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l})\Big)\circ(-d\log(z)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{int}^{0,1}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n) = (-d\log(1-z))\\ &\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+1}\\ &\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-2})\Big)\circ(\breve\omega_{n-l-1}-d\log(1-z)),\\ \mathrm{int}^{0,0}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n) = (-d\log(1-z))\\ &\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)\\ &\circ(-d\log(z)).\end{aligned}$$

Chaque $\mathrm{int}^{\epsilon,\eta}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)$ appartient à $(\Omega^{\otimes n})_{\mathrm{int}}$, donc $\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)$ aussi. On a aussi posé

$$I^{\mathrm{reg}}_{[0,1]}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)=\int_{\Delta_n}\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n).$$

Soit $\breve g_1,\dots,\breve g_n\in C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ tels que $\breve g_i(0)=\breve g_i(1)$; pour $n\in\{1,\dots,n\}$, on définit l'élément suivant $\Omega^{\otimes n}$

$$\begin{aligned}&\delta_c\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)\\ &\quad:=\sum_{\substack{a,b\,|\,a+b\le n\\ a+1\le c\le n-b}}(-1)^{a+b}(-1)^{a+b}(d\ln(z))^{\circ a}\\ &\qquad\cdot ш(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ d\breve g_c\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})ш(d\ln(1-z))^{\circ b}.\end{aligned}$$

On définit $\delta_c\mathrm{int}^{\epsilon,\eta}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)$ comme étant 0 si $c\notin\{k+1,\dots,n-l\}$, et comme étant le résultat du remplacement du terme comprenant $\breve\omega_c$ (qui peut être $\breve\omega_c$, $\breve\omega_c-d\log(z)$ ou $\breve\omega_c-d\log(1-z)$) par $d\breve g_c$. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}\delta_c\mathrm{int}^{0,0}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n) &:= \delta_{k+1,c}d\breve g_c\\ &\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)\\ &\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z))\\ &+\delta_{k+2\le c\le n-l-1}(\breve\omega_{k+1}-d\log(z))\circ\\ &\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\\ &\circ\cdots\circ d\breve g_c\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z))\\ &+\delta_{n-l,c}(\breve\omega_{k+1}-d\log(z))\\ &\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)\circ d\breve g_c\end{aligned}$$

(où $\delta_{k+2\le c\le n-l-1}=1$ si $k+2\le c\le n-l-1$, et $=0$ sinon).

Comme $d\breve g_c\in\Omega_{\mathrm{reg}.0}\cap\Omega_{\mathrm{reg}.1}$, on a $\delta_c\mathrm{int}^{0,0}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)\in(\Omega^{\otimes n})_{\mathrm{int}}$ pour tout (k,l). De même, on a pour $(\epsilon,\eta)\in\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ et tout (k,l),

$\delta_c\mathrm{int}^{\epsilon,\eta}_{k,l}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)\in(\Omega^{\otimes n})_{\mathrm{int}}$. On en déduit

$$\delta_c\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_n)\in(\Omega^{\otimes n})_{\mathrm{int}}.$$

On définit l'élément $\mathrm{rel}_c\in\bigoplus_{a,b|a+b=n-1}\Omega^{\otimes a}\otimes\Omega^{\otimes b}$ par

$$\mathrm{rel}_c:=\sum_{\substack{a,b|a+b\le n\\ a+1\le c\le n-b}}\ \sum_{\substack{a=a'+a''\\ b=b'+b''}}(-1)^{a+b}\Big((d\ln(z))^{\circ a'}ш(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{c-1})ш(d\ln(1-z))^{\circ b'}\Big)$$
$$\otimes\Big((d\ln(z))^{\circ a''}ш(\breve\omega_{c+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})ш(d\ln(1-z))^{\circ b''}\Big).$$

On définit $(\mathrm{rel}_c)^{0,0}_{k,l}\in\bigoplus_{a,b|a+b=n-1}(\Omega^{\otimes a}\otimes\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}}$ par

$$(\mathrm{rel}_c)^{0,0}_{k,l}:=\delta_{k+1,c}\cdot 1\otimes\Big(((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}$$
$$\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1}))\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z))\Big)$$
$$+\delta_{k+2\le c\le n-l-1}(\breve\omega_{k+1}-d\log(z))$$
$$\circ\Big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ d\breve g_c\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\Big)$$
$$\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z))$$
$$+\sum_{\substack{k',k''|k=k'+k''\\ l',l''|l=l'+l''}}\delta_{k+2\le c\le n-l-1}\Big((\breve\omega_{k+1}-d\log(z))$$
$$\circ\big((-d\ln(z))^{\circ k'}ш(-d\ln(1-z))^{\circ l'}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{c-1})\big)\Big)$$
$$\otimes\Big(((\breve\omega_{c+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})ш(-d\ln(z))^{\circ k''}ш(-d\ln(1-z))^{\circ l''})$$
$$\circ(\breve\omega_{n-l}-d\log(1-z))\Big)$$
$$+\delta_{n-l,c}\Big((\breve\omega_{k+1}-d\log(z))$$
$$\circ\big((-d\log(z))^{\circ k}ш(-d\log(1-z))^{\circ l}ш(\breve\omega_{k+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-l-1})\big)\Big)\otimes 1$$

et on définit de façon analogue les autres $(\mathrm{rel}_c)^{\epsilon,\eta}_{k,l}$ dans $\bigoplus_{a,b|a+b=n-1}(\Omega^{\otimes a}\otimes\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}}$. Alors $\mathrm{rel}_c=\sum_{\epsilon,\eta\le\in\{0,1\}}\sum_{k,l|k+l\le n-2}(\mathrm{rel}_c)^{\epsilon,\eta}_{k,l}$, donc

$$\mathrm{rel}_c\in\bigoplus_{a,b|a+b=n-1}(\Omega^{\otimes a}\otimes\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}}.$$

Compte tenu de (35), on a

$$(r(\breve g_c)-l(\breve g_c))(\mathrm{rel}_c)=\sum_{\substack{a,b|a+b\le n\\ a+1\le c\le n-b}}(-1)^{a+b}(d\log(z))^{\circ a}ш(d\log(1-z))^{\circ b}ш$$
$$ш(r(\breve g_c)-l(\breve g_c))((\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{c-1})\otimes(\breve\omega_{c+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})).$$

On a donc

$$\sum_{c=1}^{n}(l(\breve g_c)-r(\breve g_c))(\mathrm{rel}_c)=\sum_{a,b|a+b\leq n}(-1)^{a+b}(d\log(z))^{\circ a}ш(d\log(1-z))^{\circ b}ш$$
$$ш\Big(-\breve g_{a+1}(0)(\breve\omega_{a+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})+(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b-1})g_{n-b}(0)$$
$$+\sum_{i=a+1}^{n-b-1}\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ(\breve g_i\breve\omega_{i+1}-\breve g_{i+1}\breve\omega_i)\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b}\Big).$$

Supposons que pour $i=1,\dots,n-1$, on dispose de $\breve\psi_{i,i+1}\in\Omega_{1,1}$ tel que $\breve g_i\breve\omega_{i+1}-\breve g_{i+1}\breve\omega_i=(\breve g_i(0)-\breve g_{i+1}(0))\breve\psi_{i,i+1}$. Alors

$$\sum_{c=1}^{n}(l(\breve g_c)-r(\breve g_c))(\mathrm{rel}_c)=\sum_{a,b|a+b\leq n}(-1)^{a+b}(d\log(z))^{\circ a}ш(d\log(1-z))^{\circ b}ш$$
$$ш\Big(-\breve g_{a+1}(0)(\breve\omega_{a+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})+(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b-1})\breve g_{n-b}(0)$$
$$+\sum_{i=a+1}^{n-b-1}(\breve g_i(0)-\breve g_{i+1}(0))\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\psi_{i,i+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b}\Big) \tag{36}$$

(égalité dans $\Omega^{\otimes n-1}$). D'autre part, en décomposant le développement de $\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\psi_{i,i+1},\dots,\breve\omega_n)$ selon les valeurs de a,b, on a le développement suivant dans $\Omega^{\otimes n-1}$

$$-\breve g_1(0)\mathrm{int}(\breve\omega_2,\dots,\breve\omega_n)+\breve g_n(0)\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\omega_{n-1})$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\breve g_i(0)-\breve g_{i+1}(0))\mathrm{int}(\breve\omega_1,\dots,\breve\psi_{i,i+1},\dots,\breve\omega_n) \tag{37}$$
$$=-\breve g_1(0)\sum_{a,b|a+b\leq n-1}(-d\ln(z))^{\circ a}ш(-d\ln(1-z))^{\circ b}ш(\breve\omega_{a+2}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b})$$
$$+\breve g_n(0)\sum_{a,b|a+b\leq n-1}(-d\ln(z))^{\circ a}ш(-d\ln(1-z))^{\circ b}ш(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b-1})$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\breve g_i(0)-\breve g_{i+1}(0))\sum_{\substack{a,b|a+b\leq n-1\\ a\leq i-1,b\leq n-i-1}}(-d\ln(z))^{\circ a}ш(-d\ln(1-z))^{\circ b}$$
$$ш(\breve\omega_{a+1}\circ\cdots\circ\breve\psi_{i,i+1}\circ\cdots\circ\breve\omega_{n-b}) \tag{38}$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\breve{g}_i(0)-\breve{g}_{i+1}(0))\sum_{\substack{a,b|a+b\le n-1\\ a\ge i-1}}(-d\ln(z))^{\circ a}ш(-d\ln(1-z))^{\circ b}$$

(39)

$$ш(\breve{\omega}_{a+2}\circ\cdots\circ\breve{\omega}_{n-b})$$

(40)

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\breve{g}_i(0)-\breve{g}_{i+1}(0))\sum_{\substack{a,b|a+b\le n-1\\ b\ge n-i}}(-d\ln(z))^{\circ a}ш(-d\ln(1-z))^{\circ b}$$

(41)

$$ш(\breve{\omega}_{a+1}\circ\cdots\circ\breve{\omega}_{n-b-1}).$$

Après inversion des signes somme dans le quatrième terme du membre de droite de (37), on voit que la somme de ce terme et du premier terme de ce membre de droite est égale au premier terme du membre de droite de (36). De même, la somme des deuxième et cinquième termes du membre de droite de (37) est égale au deuxième terme du membre de droite de (36). Enfin, les troisèmes termes des membres de droite de (36) et (37) sont égaux. On a donc l'égalité suivante

(42)

$$\sum_{c=1}^{n}(l(\breve{g}_c)-r(\breve{g}_c))(\mathrm{rel}_c)=-\breve{g}_1(0)\mathrm{int}(\breve{\omega}_2,\dots,\breve{\omega}_n)+\breve{g}_n(0)\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\omega}_{n-1})$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\breve{g}_i(0)-\breve{g}_{i+1}(0))\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\psi}_{i,i+1},\dots,\breve{\omega}_n)$$

dans $\Omega^{\otimes n-1}$, et donc dans $(\Omega^{\otimes n-1})_{\mathrm{int}}$.

Rappelons que pour $c\in\{1,\dots,n\}$, $\mathrm{rel}_c\in(\bigoplus_{a+b=n-1}\Omega^{\otimes a}\otimes\Omega^{\otimes b})_{\mathrm{int}}$ est tel que $\mathrm{ins}(d\breve{g}_c)(\mathrm{rel}_c)=\delta_c\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\omega}_n)$. On en déduit (voir (29)) que $(r(\breve{g}_c)-l(\breve{g}_c))(\mathrm{rel}_c)\in(\Omega^{\otimes n-1})_{\mathrm{int}}$ et $\int_{\Delta_n}\delta_c\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\omega}_n)=\int_{\Delta_{n-1}}(r(\breve{g}_c)-l(\breve{g}_c))(\mathrm{rel}_c)$. En sommant sur $c=1,\dots,n$, et en utilisant (42), on en déduit

$$\int_{\Delta_n}\delta_c\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\omega}_n)=\int_{\Delta_{n-1}}(\text{membre de droite de (42)}). \tag{43}$$

On se place maintenant dans le cadre de l'énoncé de la proposition 3.1. Fixons $t\in I$ et posons $\breve{\omega}_i:=\omega_i^t$, $\breve{g}_i:=g_i^t$, $\breve{\psi}_{i,i+1}:=\psi_{i,i+1}^t$. Alors les hypothèses sur les $\breve{\omega}_i$, $\breve{g}_i$, $\breve{\psi}_{i,i+1}$ sont satisfaites, et $\delta_c\mathrm{int}(\breve{\omega}_1,\dots,\breve{\omega}_n)=(d/dt)\mathrm{int}(\omega_1^t,\dots,\omega_n^t)$, donc le membre de gauche de (43) s'identifie au membre de gauche de (28). De même, le membre de droite de (43) s'identifie au membre de droite de (28). Ceci montre (28) et termine la démonstration de la proposition 3.1.

3.2. Systèmes différentiels pour les analogues elliptiques des nombres multizétas. — Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes (ou des variables formelles proches de 0).

DÉFINITION 3.6. — *Pour* $i \in \{1, \dots, n\}$ *et* $(\tau, z) \in \mathfrak{H} \times]0,1[$, *on pose*

$$\omega_i(\tau, z)dz := \sigma^\tau_{x_i}(z)dz, \quad g_i(\tau, z)d\tau := \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\sigma^\tau_{x_i}(z))d\tau,$$

et pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ *et* $(\tau, z) \in \mathfrak{H} \times]0,1[$,

$$\psi_{i,i+1}(\tau, z)dz := \sigma^\tau_{x_i + x_{i+1}}(z)dz.$$

On a vu que pour chaque couple (τ, x), $\sigma^\tau_x(z)dz$ est dans $\Omega_{1,1}$, ce qui implique que les ω_i $(i = 1, \dots, n)$ et les $\psi_{i,i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ sont dans $\mathscr{F}$. De plus, on a le développement

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{\theta_\tau(z)}\frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(x)} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(\frac{1}{z} + O(z))\frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(x)} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}\theta_\tau(x)}(\frac{\theta_\tau(x)}{z} + \theta'_\tau(x) + O(z)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}(\frac{1}{z} + \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x) + O(z))\end{aligned}$$

d'où le fait que à (τ, x) fixé, $z \mapsto g_x(\tau, z)$ est lisse en 0, avec

$$g_x(\tau, z) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\theta_\tau}{\theta_\tau}(x)) + O(z),$$

d'où l'on déduit

$$g_x(\tau, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\theta_\tau}{\theta_\tau}(x)). \tag{44}$$

L'invariance de $z \mapsto \theta_\tau(z)$ sous $z \mapsto 1 - z$ implique que $g_z(\tau, z)$ est également lisse en 1, avec $g_x(\tau, 0) = g_x(\tau, 1)$.

Dans [2], trois lignes après l'équation (14), on montre l'égalité

$$\partial_\tau(\frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(z)\theta_\tau(x)}) = \frac{1}{2\pi\, \mathrm{i}}\partial_z\partial_x(\frac{\theta_\tau(z+x)}{\theta_\tau(z)\theta_\tau(x)})$$

qui implique immédiatement

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau}(\tau, z) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(\tau, z)$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

La fonction de Weierstrass est définie par $\wp_\tau(z) = \sum'_{a \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}((z+a)^{-2} - a^{-2})$, où $\sum'$ signifie que le terme a^{-2} n'est pas pris en compte lorsque $a = 0$. On pose alors

$$\tilde{\wp}_\tau(z) := \wp_\tau(z) + G_2(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}}(\sum_n{}'(z + n + m\tau)^{-2}).$$

Lemme 3.7. — *On a les développements de Laurent suivants en $x = 0$*

$$\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x) = \frac{1}{x} - G_2(\tau)x - G_4(\tau)x^3 - \cdots, \quad \wp_\tau(x) = \frac{1}{x^2} + 3G_4(\tau)x^2 + 5G_6(\tau)x^4 + \cdots.$$

Démonstration. Le deuxième développement provient de $(x+a)^{-2} = a^{-2} - 2xa^{-3} + \cdots$.

D'après [10], Thm. 3.9, $\wp_\tau = -(\sigma'/\sigma)'$, où on pose $\sigma(z) := e^{\frac{1}{2}G_2(\tau)z^2}\theta_\tau(z)$. Donc $(\theta'_\tau/\theta_\tau)'(z) = -\wp_\tau(z) - G_2(\tau)$, ce qui détermine le développement de θ'_τ/θ_τ à une constante additive près. Cette constante est déterminée par le fait que θ'_τ/θ_τ est une fonction impaire. □

On en déduit

$$\tilde{\wp}_\tau(x) = \sum_{n \geq -1} (2n+1) G_{2n+2}(\tau) x^{2n} = -(\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau})'(x),$$

où on a posé $G_0(\tau) := -1$. L'équation (44) implique alors

$$g_i(0,\tau) = g_i(1,\tau) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\tilde{\wp}_\tau(x_i). \tag{45}$$

Lemme 3.8. — *On a l'identité*

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad (\partial_x \sigma^\tau_x)\sigma^\tau_y - \sigma^\tau_x(\partial_y \sigma^\tau_y) = \sigma^\tau_{x+y}(\wp_\tau(y) - \wp_\tau(x)), \tag{46}$$

Démonstration. Le membre de gauche a le même comportement que le membre de droite sous les transformations de la variable muette $z \mapsto z+1$, $z \mapsto z + \tau$; pour étudier son comportement en $z = 0$, on le transforme ainsi

$$\begin{aligned}(\partial_x \sigma^\tau_x)\sigma^\tau_y(z) - \sigma^\tau_x(\partial_y \sigma^\tau_y)(z) &= \sigma^\tau_x \sigma^\tau_y(\frac{\partial_x \sigma^\tau_x}{\sigma^\tau_x} - \frac{\partial_y \sigma^\tau_y}{\sigma^\tau_y})(z) \\ &= \sigma^\tau_x \sigma^\tau_y(\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(z+x) - \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(x) - \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(z+y) + \frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau}(y))\end{aligned}$$

dont le développement est $\frac{1}{z^2} \times z \times ((\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau})'(x) - (\frac{\theta'_\tau}{\theta_\tau})'(y)) + O(1) = \frac{1}{z}(\wp_\tau(y) - \wp_\tau(x)) + O(1)$. On a donc un pôle simple en 0, ce qui implique que le membre de gauche est proportionnel à σ^τ_{x+y} ; le développement en 0 permet aussi de calculer le coefficient de proportionnalité. □

L'équation (45) et le lemme 3.8 impliquent alors l'égalité

$$(g_i\omega_{i+1} - g_{i+1}\omega_i)(\tau, z) = (g_i(0,\tau) - g_{i+1}(0,\tau))\psi_{i,i+1}(\tau, z).$$

On a alors :

Proposition 3.9. — *Les $(\omega_i)_{i=1,\dots,n}$, $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(\psi_{i,i+1})_{i=1,\dots,n-1}$ de la définition 3.6 satisfont les hypothèses de la proposition 3.1.*

En appliquant la proposition 3.1, on obtient la première partie du résultat suivant :

THÉORÈME 3.10. — *Nous avons*

$$(2\pi\,\mathrm{i})\partial_\tau I_{x_1,\dots,x_n}(\tau) = \tilde{\wp}_\tau(x_1)I_{x_2,\dots,x_n}(\tau) - \tilde{\wp}_\tau(x_n)I_{x_1,\dots,x_{n-1}}(\tau) + \sum_{i=1}^{n-1}(\wp_\tau(x_{i+1}) - \wp_\tau(x_i))I_{x_1,\dots,x_i+x_{i+1},\dots,x_n}(\tau). \tag{47}$$

et

$$\begin{aligned}(2\pi\,\mathrm{i})\partial_\tau J_{x_1,\dots,x_n}(\tau) &= \tilde{\wp}_\tau(x_1)J_{x_2,\dots,x_n}(\tau) - \tilde{\wp}_\tau(x_n)J_{x_1,\dots,x_{n-1}}(\tau)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(\wp_\tau(x_{i+1}) - \wp_\tau(x_i))J_{x_1,\dots,x_i+x_{i+1},\dots,x_n}(\tau)\\ &\quad - \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}(x_1\partial_{x_1} + \cdots + x_n\partial_{x_n})J_{x_1,\dots,x_n}(\tau).\end{aligned}$$

La deuxième identité est une conséquence de la première identité et de l'identité modulaire (26), compte tenu de la relation modulaire $\tilde{\wp}_{-1/\tau}(x) = \tau^2\tilde{\wp}_\tau(\tau x) - 2\pi\,\mathrm{i}\,\tau$, qui provient de $\wp_{-1/\tau}(x) = \tau^2\wp_\tau(\tau x)$ et de $G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi\,\mathrm{i}\,\tau$ ([12], équation (45) p. 156). □

4. Réalisation de $\langle\delta_{2n}, n\geq -1\rangle$ et comparaison de systèmes différentiels

Comme $F = U(\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x) \subset U(\mathfrak{f}_2)$ est un sous-$\mathfrak{f}_2$-module de $U(\mathfrak{f}_2)$, on dispose d'un sous-espace $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F) \subset \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, U(\mathfrak{f}_2)) = \mathrm{Der}_t(U(\mathfrak{f}_2))$, qui est en fait une sous-algèbre de Lie. (Der_t est l'ensemble des dérivations qui envoient $t = -[x,y] \in \mathfrak{f}_2$ sur 0.) D'autre part, le degré en y induit une graduation de ces algèbres de Lie ; on note $\mathrm{Der}(\mathfrak{f}_2)_+ \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{f}_2)$ la partie de y-degré > 0.

On a donc une suite d'inclusions d'algèbres de Lie

$$\langle\delta_{2n}, n\geq -1\rangle \subset \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2)_+ \subset \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F) \subset \mathrm{Der}_t(F).$$

Le but de cette section est d'établir un isomorphisme

$$\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F) \simeq \mathscr{G}_0$$

entre $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)$ et une algèbre de Lie « fonctionnelle » $\mathscr{G}_0$ explicite, puis d'en déduire le lien entre les équations différentielles du théorème 3.10 et celles satisfaites par $A(\tau)$, $B(\tau)$ (équations (7)).

Pour $n \geq 1$, on pose $\mathscr{G}[n] := \mathbb{C}(x_1,\dots,x_{n+1})$, le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ en $n+1$ indéterminées $x_1,\dots,x_{n+1}$. On pose

$$\mathscr{G} := \bigoplus_{n\geq 1}\mathscr{G}[n].$$

L'énoncé suivant est immédiat.

PROPOSITION 4.1. — *$\mathscr{G}$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie graduée donnée par*

$$[\varphi,\psi] := \sum_{i=1}^{m+1} \varphi^{i,i+1,\dots,i+n}\psi^{1,\dots,i-1,ii+1\dots i+n,i+n+1,\dots,n+m+1} - ((\varphi,n)\leftrightarrow(\psi,m)) \in \mathscr{G}[n+m]$$

pour $\varphi \in \mathscr{G}[n]$, $\psi \in \mathscr{G}[m]$; on note $\varphi^{1,\dots,n+1} := \varphi(x_1,\dots,x_{n+1})$, $\varphi^{12,3} := \varphi(x_1+x_2,x_3)$, etc.

L'espace $F_\infty := \mathbb{C}(x_i, i \in \mathbb{Z})$ des fractions rationnelles en une infinité de variables est un $\mathscr{G}$-module via $\varphi * f := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^{i,i+1,\dots,i+n} f^{\dots,i-1,ii+1\dots i+n,i+n+1,\dots}$.

Par l'identification de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ à $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+1}]/(x_1+\cdots+x_{n+1})$, on obtient une action du groupe symétrique S_{n+1} sur cette première algèbre (en d'autres termes, on a affaire à l'algèbre symétrique du quotient $\mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}$ de la représentation naturelle par la triviale). On note $C_{n+1} \subset S_{n+1}$ le sous-groupe cyclique. L'élément $x_1\cdots x_n(x_1+\cdots+x_n)$ de $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ est invariant par l'action de ce groupe.

Pour $n \geq 1$, on pose

$$\mathscr{G}_0[n] := \big((x_1\cdots x_n(x_1+\cdots+x_n))^{-1}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\big)^{C_{n+1}},$$

où l'espace entre parenthèses est celui des fractions rationnelles en $x_1,\dots,x_n$ avec dénominateur $x_1\cdots x_n(x_1+\cdots+x_n)$. On pose alors

$$\mathscr{G}_0 := \bigoplus_{n\geq 1}\mathscr{G}_0[n].$$

PROPOSITION 4.2. — *Une structure d'algèbre de Lie graduée est définie sur $\mathscr{G}_0$ par*

$$\begin{aligned}[\varphi,\psi]_0 := &\sum_{i=1}^{n}(\varphi^{i,i+1,\dots,i+n-1}-\varphi^{i+1,\dots,i+n})\psi^{1,\dots,i-1,ii+1\dots i+n,i+n+1,\dots,n+m}\\ &-\sum_{j=1}^{m}(\psi^{j,j+1,\dots,j+m-1}-\psi^{j+1,\dots,j+m})\varphi^{1,\dots,j-1,jj+1\dots j+m,j+m+1,\dots,n+m}\\ &-\varphi^{1,\dots,n}\psi^{n+1,\dots,n+m}+\varphi^{m+1,\dots,n+m}\psi^{1,\dots,m} \in \mathscr{G}_0[n+m]\end{aligned}$$

pour $\varphi \in \mathscr{G}_0[n]$, $\psi \in \mathscr{G}_0[m]$. L'espace F a une structure de $\mathscr{G}_0$-module gradué par

$$\begin{aligned}\varphi \bullet f := &\sum_{i=1}^{m}(\varphi^{i,i+1,\dots,i+n-1}-\varphi^{i+1,\dots,i+n})f^{1,\dots,i-1,ii+1\dots i+n,i+n+1,\dots,n+m}\\ &-\varphi^{1,\dots,n}f^{n+1,\dots,n+m}+\varphi^{n+1,\dots,n+m}f^{1,\dots,m} \in F_{n+m} \qquad (48)\end{aligned}$$

pour $\varphi \in \mathscr{G}_0[n]$, $f \in F_n$. *Un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées* $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F) \simeq \mathscr{G}_0$ *est donné par*

$$\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)[n] \ni D \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{G}_0[n],$$

où D *est la dérivation donnée par* $x \mapsto u$, $y \mapsto v$, *où* $u \in F_n$, $v \in F_{n+1}$ *sont donnés par*

$$u(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n),$$
$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + \cdots + x_{n+1}})\varphi(x_2, \dots, x_{n+1}) + (\frac{1}{x_1 + \cdots + x_{n+1}} - \frac{1}{x_{n+1}})\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Un morphisme d'algèbres de Lie $\mathscr{G}_0 \to \mathscr{G}$ est par ailleurs donné par

$$\mathscr{G}_0[n] \ni \varphi(x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathscr{G}[n].$$

Démonstration. Soit $D \in \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)[n]$. Cet élément est déterminé par le couple $(u, v) := (D(x), D(y)) \in F_n \times F_{n+1}$. La condition sur (u, v) est

$$(x_1 + \cdots + x_{n+1})v(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^{-1}u(x_2, \dots, x_{n+1}) - x_{n+1}^{-1}u(x_1, \dots, x_n)$$

(identité dans $(x_1 \cdots x_{n+1})^{-1}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$). On dispose d'une application de réduction modulo $x_1 + \cdots + x_{n+1}$ de cet espace vers $(x_1 \cdots x_n(x_1 + \cdots + x_n))^{-1}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. L'image de cette identité exprime alors la C_{n+1}-invariance de $\varphi(x_1, \dots, x_n) := u(x_1, \dots, x_n)/(x_1 + \cdots + x_n)$. On a donc une application linéaire

$$\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)[n] \to (x_1 \cdots x_n(x_1 + \cdots + x_n))^{-1}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{C_{n+1}}, \tag{49}$$

$D \mapsto \varphi$. Cette application est injective car la nullité de u implique celle de v. Les deux dernières formules de la proposition définissent une application

$$(x_1 \cdots x_n(x_1 + \cdots + x_n))^{-1}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{C_{n+1}} \to F_n \times F_{n+1}$$

(le pôle en $x_1 + \cdots + x_{n+1}$ disparaissant par C_{n+1}-invariance), qui est en fait d'image dans $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)[n]$ et inverse à (49). On vérifie alors que le transport à $\mathscr{G}_0$ de la structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)$ et de module de F sur cette algèbre de Lie est donné par les formules de l'énoncé. □

On a

$$\mathscr{G}_0[1] = x_1^{-2}\mathbb{C}[x_1^2].$$

LEMME 4.3. — *L'isomorphisme* $\mathscr{G}_0 \simeq \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)$ *induit la correspondance*

$$\delta_{2n} \in \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2)_+[1] \subset \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)[1] \leftrightarrow \mathscr{G}_0[1] \ni x_1^{2n}.$$

Démonstration. La dérivation correspondant à x_1^{2n} est une dérivation de $\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F)$ telle que $x \mapsto u = x_1^{2n+1} \leftrightarrow [x^{2n+2}y]$. Comme l'application

$\mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2, F) \to F$, $D \mapsto D(x)$ est injective, cette dérivation coincide avec la dérivation δ_{2n} définie en section 1.2.3. $\square$

Rappelons par ailleurs la correspondance

$$e^{\mathrm{i}\,\pi t} A(\tau) \in U(\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x) \leftrightarrow F \ni ((-1)^n I_{x_n,\dots,x_1}(\tau))_{n\geq 0} =: \tilde{I}(\tau).$$

(section 2.4). D'après (7) et l'invariance de t sous les δ_{2n}, $n \geq -1$, $e^{\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)$ satisfait l'équation différentielle

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau(e^{\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)) = -(\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n})(e^{\mathrm{i}\,\pi t}A(\tau)).$$

L'image de cette équation différentielle sous l'isomorphisme $U(\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x) \simeq F$ donne

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau \tilde{I}(\tau) = -(\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)x_1^{2n}) \bullet \tilde{I}(\tau) = -\tilde{\wp}_\tau(x_1) \bullet \tilde{I}(\tau),$$

donc si $I(\tau) := (I_{x_1,\dots,x_n}(\tau))_{n\geq 0}$, alors $2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau I(\tau) = -\tilde{\wp}_\tau(x_1)\bullet I(\tau)$, c'est-à-dire que pour chaque n

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau I_{x_1,\dots,x_n}(\tau) = -\tilde{\wp}_\tau(x_1) \bullet I_{x_1,\dots,x_{n-1}}(\tau).$$

Compte tenu de la formule (48) pour l'action de $\mathscr{G}_0$ sur F, on retrouve ainsi la première équation différentielle du théorème 3.10.

De même, $e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)$ satisfait l'équation différentielle

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau(e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)) = -(\sum_{n\geq 1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n})(e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau)).$$

Soit $\tilde{B}(\tau) := \exp(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}e_+)(e^{-\mathrm{i}\,\pi t}B(\tau))$ (voir section 2.4), on en déduit

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau \tilde{B}(\tau) = -(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}h + \sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n})(\tilde{B}(\tau)),$$

où $h := [e_+, \delta]$ est la dérivation de $\mathfrak{f}_2$ donnée par $(x, y) \mapsto (x, -y)$, compte tenu de $[e_+, \delta_{2n}] = 0$ si $n \geq 0$ et $\frac{1}{2}[e_+, [e_+, \delta_{-2}]] + e_+ = 0$.

On a la correspondance

$$U(\mathfrak{f}_2 \ominus \mathbb{C}x) \ni \tilde{B}(\tau) \leftrightarrow ((-1)^n J_{x_n,\dots,x_1}(\tau)) =: \tilde{J}(\tau) \in F,$$

par ailleurs la dérivation h se transporte sous cette correspondance en la dérivation de $F = \bigoplus_{n\geq 0} F_n$ de degré zéro, opérant sur F_n comme $\xi := \sum_{i=1}^n x_i\partial_{x_i}$. On en déduit

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau \tilde{J}(\tau) = -(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}\xi + \tilde{\wp}_\tau(x_1)\bullet)\tilde{J}(\tau),$$

donc $J(\tau) := (J_{x_1,\dots,x_n}(\tau))_{n\geq 0}$ satisfait la même équation différentielle, donc

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\partial_\tau J_{x_1,\dots,x_n}(\tau) = -\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{\tau}(\sum_{i=1}^n x_i\partial_{x_i})J_{x_1,\dots,x_n}(\tau) - \tilde{\wp}_\tau(x_1) \bullet J_{x_1,\dots,x_{n-1}}(\tau),$$

ce qui permet de retrouver la deuxième équation différentielle du théorème 3.10.

5. Développement asymptotique des analogues elliptiques des nombres multizétas

Dans cette section, nous utilisons les équations différentielles satisfaites par les fonctions $A(\tau)$ et $B(\tau)$ (équations (7)) et leur comportement à l'infini ((8), (9)) pour en obtenir un développement asymptotique en $\tau \to \mathrm{i}\infty$. Nous en déduisons la forme du développement asymptotique des fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ dans cette région.

5.1. Développement de $g(\tau)$. — Soit $\mathfrak{G}$ la complétion de l'algèbre de Lie $\langle\delta_{2n}, n \geq -1\rangle \subset \mathrm{Der}_t(\mathfrak{f}_2)$ pour le bidegré en (x,y) ; on a $|\delta_{2n}| = (2n+1,1)$. Soit $G := \exp(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{Aut}_t(\hat{\mathfrak{f}}_2)$ le groupe de Lie correspondant.

Proposition 5.1. — *Il existe une unique fonction $g(\tau) : \mathfrak{H} \to G$, telle que*

$$2\pi\mathrm{i}\,\partial_\tau g(\tau) = -\Big(\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n}\Big)g(\tau)$$

et $g(\tau) \simeq e^{\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}(\delta_{-2}+\sum_{n\geq 0}(2n+1)\cdot 2\zeta(2n+2)\delta_{2n})\tau} = e^{D_0\tau}$ en $\tau \to \mathrm{i}\infty$. Il existe une collection $(h_k)_{k\geq 0}$, avec $h_0 = 1$, telle que $g(\tau)$ a le développement asymptotique

$$g(\tau) \simeq \sum_{k,n\geq 0}\frac{1}{n!}h_k D_0^n \tau^n e^{2\pi\mathrm{i}\,k\tau}$$

en $\tau \to \mathrm{i}\infty$.

Démonstration. — Posons $D(\tau) := \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n\geq -1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\delta_{2n}$. Posons si $m \geq 1$, $g_{2m}(n) := \frac{2(2\pi\mathrm{i})^{2m}}{(2m-1)!}\sigma_{2m-1}(n)$ (où $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$) si $n > 0$, et $g_{2m}(0) := 2\zeta(2m)$; et posons $g_0(n) = 0$ si $n > 0$, et $g_0(0) = -1$. Alors $G_{2m}(\tau) = \sum_{n\geq 0} g_{2m}(n)e^{2\pi\mathrm{i}\,n\tau}$ et

$$D(\tau) = \sum_{m\geq 0} D_m e^{2\pi\mathrm{i}\,m\tau}, \text{ où } D_m := \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n\geq -1}(2n+1)g_{2n+2}(m)\delta_{2n}.$$

Comme D_0 est de y-degré 1, $2\pi\mathrm{i}\,m - \mathrm{ad}\,D_0$ est inversible dans $\mathrm{End}(U\mathfrak{G})$ si $m > 0$. Définissons $(h_m)_{m\geq 0}$ par $h_0 := 1$,

$$h_m := (2\pi\mathrm{i}\,m - \mathrm{ad}\,D_0)^{-1}\Big(\sum_{\substack{m'+m''=m \\ m'>0}} D_{m'}h_{m''}\Big) \text{ si } m > 0.$$

Alors $h(\tau) := \sum_{m\geq 0} h_m e^{2\pi\mathrm{i}\,m\tau}$ est une solution formelle de $\partial_\tau h(\tau) = D(\tau)h(\tau) - h(\tau)D_0$, qui est l'équation différentielle satisfaite par $g(\tau)e^{-D_0\tau}$; cette fonction admet donc $h(\tau)$ comme développement asymptotique. □

5.2. Développements de $A(\tau)$, $B(\tau)$. — Posons

$$A_\infty := \Phi(\tilde{y}, t) e^{2\pi \mathrm{i}\, \tilde{y}} \Phi(\tilde{y}, t)^{-1},$$
$$\underline{B}(\tau) := e^{\mathrm{i}\,\pi t} \Phi(-\tilde{y} - t, t) e^{2\pi \mathrm{i}\, x} e^{2\pi \mathrm{i}\, \tilde{y}\tau} \Phi(\tilde{y}, t)^{-1},$$
$$B_\infty := B[0].$$

D'après [2], on a

$$A_\infty = e^{\tau D_0}(A_\infty), \quad \underline{B}(\tau) = e^{\tau D_0}(B_\infty).$$

Posons $h(\tau) := g(\tau) e^{-\tau D_0}$, alors d'après la proposition 5.1, $h(\tau)$ admet le développement asymptotique $h(\tau) \simeq 1 + \sum_{m>0} h_m e^{2\pi \mathrm{i}\, m\tau}$.

On a alors $A(\tau) = g(\tau)(A_\infty) = h(\tau)(A_\infty)$ donc $A(\tau)$ admet le développement asymptotique

$$A(\tau) \simeq \sum_{m \geq 0} e^{2\pi \mathrm{i}\, m\tau} h_m(A_\infty),$$

et $B(\tau) = g(\tau)(B_\infty) = h(\tau)(\underline{B}(\tau))$, donc $\tilde{B}(\tau)$ admet le développement asymptotique

$$\tilde{B}(\tau) \simeq \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i}}{\tau} e_+\right) h(\tau)(\underline{B}(\tau)).$$

5.3. Développements de $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$. — Soit $\mathbf{k}_{MZV} \subset \mathbb{C}$ le $\mathbb{Q}$-sous-anneau engendré par les multizétas. L'associateur Φ étant à coefficients dans $\mathbf{k}_{MZV}$, on déduit de (5.2) et (5.2) :

Proposition 5.2. — *Les fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ admettent les développements asymptotiques*

$$I_{\underline{d}}(\tau) \simeq \sum_{n \geq 0} I_{\underline{d},n} e^{2\pi \mathrm{i}\, n\tau}, \quad J_{\underline{d}}(\tau) \simeq \sum_{n \geq 0} \sum_{s \in \mathbb{Z}} J_{\underline{d},n,s} \tau^s e^{2\pi \mathrm{i}\, n\tau},$$

dans lesquels les coefficients sont dans $\mathbf{k}_{MZV}[2\pi \mathrm{i}]$. Dans la deuxième série, la deuxième somme $\sum_s$ est finie pour tout $n \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Brown & A. Levin – « Multiple elliptic polylogarithms », prépublication arXiv:1110:6917.

[2] D. Calaque, B. Enriquez & P. Etingof – « Universal KZB equations : the elliptic case », in *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser, 2009, p. 165–266.

[3] V. G. Drinfel′d – « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ », *Algebra i Analiz* **2** (1990), p. 149–181.

[4] B. Enriquez – « Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators », *Selecta Math.* **13** (2007), p. 391–463.

[5] ———, « Elliptic associators », *Selecta Math.* **20** (2014), p. 491–584.

[6] H. Furusho – « Double shuffle relation for associators », *Ann. of Math.* **174** (2011), p. 341–360.

[7] R. Hain & M. Matsumoto – « Universal mixed elliptic motives », prépublication arXiv:1512.03975.

[8] T. T. Q. Le & J. Murakami – « Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial », *Nagoya Math. J.* **142** (1996), p. 39–65.

[9] A. Levin & G. Racinet – « Towards multiple elliptic polylogarithms », prépublication arXiv:math/0703237.

[10] A. Polishchuk – *Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[11] A. Pollack – « Relations between derivations arising from modular forms », Thèse, Duke University, 2009.

[12] J-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, vol. 2, Presses Universitaires de France, 1970.

[13] D. Zagier – « Values of zeta functions and their applications », in *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, 1994, p. 497–512.