Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CORRESPONDANCE DE JACQUET-LANGLANDS ET DISTINCTION

Charlène Coniglio-Guilloton

Tome 144
Fascicule 2

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 163-216

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 144, juin 2016

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
144 (2), 2016, p. 163–216

CORRESPONDANCE DE JACQUET-LANGLANDS ET DISTINCTION : CAS DES REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE NIVEAU 0

PAR CHARLÈNE CONIGLIO-GUILLOTON

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique modérément ramifiée de corps locaux non archimédiens. Soit $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ et $\mathrm{GL}_\mu(\Delta) = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^\times$. Alors $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et les quotients $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sont des espaces symétriques. En utilisant la paramétrisation de Silberger et Zink, nous déterminons des critères de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentations cuspidale de niveau 0 par Jacquet-Langlands, puis nous prouvons qu'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si son image par la correspondance de Jacquet-Langlands est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée.

ABSTRACT (*Jacquet-Langlands correspondence and distinction: the case of cuspidal level 0 representations*)

Let $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ be a tamely ramified quadratic extension of non-archimedean locally compact fields. Let $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ and $\mathrm{GL}_\mu(\Delta) = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^\times$. Then $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ is an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ and the quotients $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ and $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ are symmetric spaces. Using the parametrization of Silberger and Zink, we determine conditions of $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction for level zero cuspidal representations of $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ which are the image of a level zero cuspidal representation of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ by the Jacquet-Langlands correspondence. We also show that a level zero cuspidal representation of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ is $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguished if and only if its image by the Jacquet-Langlands correspondence is $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguished.

Texte reçu le 9 septembre 2013, accepté le 1er mai 2015.

CHARLÈNE CONIGLIO-GUILLOTON, Département de Mathématiques, Téléport 2 - BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France •
E-mail : `Charlene.Coniglio@math.univ-poitiers.fr`

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2016/163/$ 5.00

Introduction

Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, supposée impaire. Nous noterons $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique séparable modérément ramifiée de corps locaux non archimédiens. On fixe un entier naturel n non nul et on note $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ et $G_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On fixe un diviseur d de n ($dm = n$) et $\mathscr{D}$ une $\mathbb{F}$-algèbre à division centrale d'indice d (i.e de dimension d^2 sur son centre $\mathbb{F}$). Enfin, on note $H_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et $H_{\mathbb{K}} = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^{\times}$. Il existe un diviseur μ de n et une $\mathbb{K}$-algèbre à division centrale Δ d'indice $\delta = n/\mu$ tels que $H_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ (on remarque que $G_{\mathbb{K}} = H_{\mathbb{K}}$ et $G_{\mathbb{F}} = H_{\mathbb{F}}$ lorsque $d = 1$). On a le résultat suivant :

Théorème ([12], [18], [5], [1]). — *Il existe une unique bijection, appelée correspondance de Jacquet-Langlands :*

$$JL : \mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}}) \to \mathscr{R}^2(H_{\mathbb{K}})$$

telle que pour tous $(g, \widetilde{g}) \in H_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}}$ elliptiques réguliers de même polynôme minimal, et toute représentation $\pi \in \mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}})$, on a :

$$\Theta_\pi(\widetilde{g}) = (-1)^{\mu \times (\delta - 1)} \Theta_{JL(\pi)}(g)$$

où $\mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}})$ (resp. $\mathscr{R}^2(H_{\mathbb{K}})$) sont les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles membres de la série discrète de $G_{\mathbb{K}}$ (resp. $H_{\mathbb{K}}$) et Θ désigne le caractère d'Harish Chandra.

Lorsque $n = 2$ et $d = 2$ alors $G_{\mathbb{K}} = H_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $H_{\mathbb{F}} = \mathscr{D}^{\times}$ et la correspondance de Jacquet-Langlands est l'application identité. Dans ce cas, les travaux de J. Hakim et de D. Prasad nous montrent qu'une série discrète (en niveau quelconque) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si elle est $\mathscr{D}^{\times}$-distinguée (on pourra se référer dans [9] au Théorème 9.1 page 21 pour les représentations cuspidales de caractère central trivial ainsi qu'au Théorème 7.1 page 16 pour la représentation de Steinberg et ses tordues ou on pourra retrouver ce résultat dans [14] Théorème C).

Plus généralement, les travaux de J. Hakim et F. Murnaghan dans [10] (Théorème 11.1 page 1887) nous donnent des critères de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinction pour les représentations cuspidales modérées de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (là aussi en niveau quelconque).

Dans le travail qui suit, nous généralisons les résultats évoqués précédemment dans le cas des représentations cuspidales de niveau 0. Avec les articles [19] et [20], A. Silberger et E. W. Zink montrent que la correspondance de Jacquet-Langlands se restreint en une bijection :

$$JL : \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}}) \to \mathscr{R}_0^2(H_{\mathbb{K}})$$

où $\mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ (resp. $\mathscr{R}_0^2(H_{\mathbb{K}})$) sont les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles membres de la série discrète de niveau 0. De plus, les articles [19] et [20] nous donnent une paramétrisation de ces séries discrètes de niveau 0 via des paires admissibles modérées et montrent que si $\pi \in \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ est une représentation cuspidale de niveau 0 alors son image par la correspondance de Jacquet-Langlands est aussi une représentation cuspidale de niveau 0. Enfin, [19] et [20] nous donnent une construction explicite (comme induite compacte) de ces représentations à partir de la paire admissible modérée qui leur est associée.

Dans un premier temps, nous déterminons des conditions nécessaires et suffisantes de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par la correspondance de Jacquet-Langlands. Puis, dans un deuxième temps, nous montrons qu'une représentation cuspidale $\pi \in \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ est $G_{\mathbb{F}}$-distinguée si et seulement si son image par la correspondance de Jacquet-Langlands, $JL(\pi)$, est $H_{\mathbb{F}}$-distinguée, généralisant ainsi le résultat d'Hakim (en niveau 0).

Expliquons notre démarche. Dans la suite, G désignera le groupe $G_{\mathbb{K}}$ ou $H_{\mathbb{K}}$, H désignera le sous-groupe fermé $G_{\mathbb{F}}$ (resp. $H_{\mathbb{F}}$) de G, et $\mathscr{K}$ un sous-groupe ouvert compact modulo le centre maximal de G de la forme $\mathscr{K} = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un sous-groupe parahorique de G (par exemple $\mathscr{K} = \mathbb{K}^\times \mathrm{GL}_\mu(\mathscr{O}_\Delta)$ si $G = H_{\mathbb{K}}$). Rappelons qu'une représentation complexe (π, V) du groupe G est distinguée par H s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : V \to \mathbb{C}$ qui est H-invariante, ce qui revient à dire que l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{1})$ est non nul. Nous allons utiliser le fait qu'une représentation cuspidale (de niveau 0) de G est une induite compacte. Soit π_0 une représentation lisse de $\mathscr{K}$. La formule de restriction de Mackey ainsi que la réciprocité de Frobenius pour l'induction compacte montrent que la représentation $\pi = \mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathscr{K}}^G \pi_0$ de G est distinguée par le sous-groupe H si et seulement s'il existe s dans le double quotient $H \backslash G / \mathscr{K}$ tel que l'espace $\mathrm{Hom}_{s^{-1}Hs \cap \mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1})$ soit non nul. Dans notre cas, nous allons restreindre le nombre de doubles classes à étudier en utilisant un résultat de [11] (Proposition 5.20 page 94), que nous appliquons dans notre contexte en 3.3.2. D'après ce résultat, les seuls éléments s de $H \backslash G / \mathscr{K}$ qui contribuent à la distinction vérifient en particulier l'égalité $\sigma(s\mathscr{K}s^{-1}) = s\mathscr{K}s^{-1}$ où σ est l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$. Enfin, si $X_{\mathbb{K}}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits de G sur $\mathbb{K}$, $X_{\mathbb{F}}$ celui de H sur $\mathbb{F}$ et $j : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ l'injection naturelle entre ces immeubles, les travaux de G.Prasad et J.K.Yu dans [16], que nous rappelons en 2.0.3, nous montrent que les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ stables par l'action de $\langle \sigma \rangle$ sont exactement les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont dans l'image de $X_{\mathbb{F}}$ par j. Après avoir appliqué ces deux résultats, il nous reste, la plupart du temps, au plus une double classe à considérer. Lorsque nous recherchons des critères de $H_{\mathbb{F}}$-distinction par exemple, nous sommes ramenés à étudier un espace d'entrelacement de la forme $\mathrm{Hom}_{s^{-1}Hs\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1})$, où π_0 est l'inflation à $\mathscr{K} = \mathbb{K}^\times \mathrm{GL}_\mu(\mathscr{O}_\Delta)$ d'une représentation cuspidale $\overline{\gamma}$ de $\mathrm{GL}_\mu(k_\Delta)$, k_Δ étant le corps résiduel de Δ. Pour cela, nous utiliserons à plusieurs reprises les résultats des travaux de Lusztig dans [13], que nous rappelons en 3.4.5, et qui nous permettent de calculer la dimension de l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_S(\overline{\gamma}, \mathbb{1})$, où $(\mathrm{GL}_\mu(k_\Delta), S, \theta)$ est un espace symétrique (ce qui signifie en particulier que l'application $\theta : \mathrm{GL}_\mu(k_\Delta) \to \mathrm{GL}_\mu(k_\Delta)$ est une involution et que S est contenu dans l'ensemble des points fixes de $\mathrm{GL}_\mu(k_\Delta)$ par θ).

Dans le travail qui suit, nous commençons dans la partie 2 par quelques rappels sur les injections d'immeubles, injections que nous rendons explicites en 3.2.1, 4.2.6 et 4.3.4 (nous distinguons les cas où l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, totalement ramifiée, et où d est pair ou impair). On en déduit dans les parties 3 et 4 des conditions nécessaires et suffisantes de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentation cuspidale par Jacquet-Langlands, conditions que nous pouvons lire sur la paire admissible modérée associée à la représentation. Explicitons ces conditions. Pour cela, fixons $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ et pour tout entier naturel non nul l, notons $\mathbb{K}_l$ l'extension non ramifiée de degré l de $\mathbb{K}$ contenue dans $\overline{\mathbb{K}}$ et $k_{\mathbb{K},l}$ son corps résiduel. On fixe $\varpi_\mathbb{K}$ une uniformisante de $\mathbb{K}$. On note $k_\mathscr{D}$ (resp. k_Δ) le corps résiduel de $\mathscr{D}$ (resp. Δ). On montre le théorème suivant en 3.3.5, 3.4.13 et 4.4.1 :

Théorème. — *Soit $\pi \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$ une représentation cuspidale de niveau 0, image d'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par la correspondance de Jacquet-Langlands, et $(\mathbb{K}_n/\mathbb{K}_\delta, \chi)$ la paire admissible modérée associée à π (en particulier χ est un caractère modéré de $\mathbb{K}_n^\times$). On note $\overline{\chi}$ la restriction de χ à $\mathscr{O}_{\mathbb{K}_n}^\times$ vue comme caractère de $k_{\mathbb{K},n}^\times$.*

- *Si $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, et n est pair, la représentation π n'est pas $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée.*
- *Si $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, et n est impair, la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si $n = 1$ et π est le caractère trivial.*
- *Si $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, et n est impair. Soit τ un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathscr{D})$. Alors, la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et s'il existe α dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\Delta)$ tel que $\overline{\chi}^{-1} \circ \alpha = \overline{\chi} \circ \tau$.*
- *Si $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, et n est pair. Soit l_0 le corps résiduel de $\mathbb{K}_{n/2}$. On fixe $\varpi_\mathbb{K}$ et $\varpi_\mathbb{F}$ telle que $\varpi_\mathbb{K}^2 = \varpi_\mathbb{F}$. Soit η dans $k_{\mathbb{K},n}^\times \backslash l_0^\times$ tel que $\eta^2 \in l_0^\times$. Alors, la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$, $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$ et $\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta) = -1$.*

On pourra remarquer que pour $\mu = m = n$ et $d = 1$, on retrouve les critères de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinction des représentations cuspidales (de niveau 0) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de [10].

Dans les parties 3 et 4, on montre également le résultat de multiplicité 1 suivant :

Théorème. — *Si* $\pi \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$ *est une représentation cuspidale de niveau* 0 *et est l'image d'une représentation cuspidale de niveau* 0 *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *par la correspondance de Jacquet-Langlands, on a :*

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{C})) \leq 1.$$

Remarque. — Notons que de tels résultats de multiplicité 1 sont connus pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on pourra se référer à [7] pour vérifier que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))$ est une paire de Gelfand. La preuve de ce résultat peut s'étendre (en caractéristique nulle) à $(\mathrm{GL}_\mu(\Delta), \mathrm{GL}_m(\mathscr{D}))$. Néanmoins, dans notre travail, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser ces propriétés.

Enfin, dans la partie 5, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. — *Si* $\rho \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ *est une représentation cuspidale (de niveau* 0*), alors* ρ *est* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$*-distinguée si et seulement si* $JL(\rho)$ *est* $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$*-distinguée.*

Remerciements. — Je tiens tout particulièrement à remercier Paul Broussous et Nadir Matringe pour de nombreuses discussions très enrichissantes et instructives ainsi que pour leurs précieux conseils lors de l'élaboration et la rédaction de ce travail.

1. Notations et résultats préliminaires

Notation 1.0.1. — Si $\widetilde{G}$ est un groupe topologique localement profini, $\widetilde{H}$ est un sous-groupe fermé de $\widetilde{G}$ et (σ, W) une représentation lisse complexe de $\widetilde{H}$, on notera $(\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}\sigma, \mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}W)$ la représentation induite compacte de $\widetilde{H}$ à $\widetilde{G}$ de σ où $\mathrm{c}-\mathrm{ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}W$ est l'ensemble des fonctions $f : \widetilde{G} \to W$ telle que :

$$\forall h \in \widetilde{H}, \forall g \in \widetilde{G}, f(hg) = \sigma(h)f(g)$$

il existe K_f sous-groupe ouvert compact tel que :

$$\forall k \in K_f, \forall g \in \widetilde{G}, f(gk) = f(g)$$

et f est à support compact modulo $\widetilde{H}$. L'action de $\widetilde{G}$ est l'action de translation à droite.

Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle un nombre premier p impair. On note $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique séparable modérément ramifiée de corps locaux non archimédiens, σ le générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ et on fixe un entier naturel n non nul. Soit $H_{\mathbb{F}}$ une forme intérieure de $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, alors il existe un diviseur d de n, il existe une $\mathbb{F}$-algèbre à division centrale $\mathscr{D}$ d'indice d, tels que $H_{\mathbb{F}} = A^\times$ avec $A = \mathrm{M}_m(\mathscr{D})$ une $\mathbb{F}$-algèbre centrale simple de degré réduit n. On a donc $n = m \times d$. Soit $\mathrm{inv}_{\mathbb{F}}(\mathscr{D}) = \frac{r}{d} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, où (r,d), le PGCD de r et de d, vaut 1, l'invariant de Hasse de $\mathscr{D}$. Soit $A_{\mathbb{K}} = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$, alors $A_{\mathbb{K}}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre centrale simple. Il existe donc un entier naturel μ non nul et une $\mathbb{K}$-algèbre à division centrale Δ, tels que $A_{\mathbb{K}} \simeq \mathrm{M}_\mu(\Delta)$. Notons $\delta = \sqrt{[\Delta : \mathbb{K}]}$. Alors $n = \mu \times \delta$ et $H_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{K}}^\times \simeq \mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ est une forme intérieure de $G_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. De plus, on peut voir $H_{\mathbb{F}}$ comme sous-groupe de $H_{\mathbb{K}}$ via l'injection suivante :

$$H_{\mathbb{F}} = A^\times \to H_{\mathbb{K}} = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^\times,\ g \mapsto g \otimes 1.$$

On remarque que, si s/δ est l'invariant de Hasse de Δ (avec s et δ premiers entre eux), on a :

$$\begin{aligned}\frac{s}{\delta} &= \mathrm{inv}_{\mathbb{K}}(\Delta) = \mathrm{inv}_{\mathbb{K}}(\mathrm{M}_\mu(\Delta)) = \mathrm{inv}_{\mathbb{K}}(A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}) = [\mathbb{K} : \mathbb{F}] \times \mathrm{inv}_{\mathbb{F}}(A)\\ &= 2 \times \frac{r}{d} = \frac{2r/(d,2)}{d/(d,2)}.\end{aligned}$$

Par suite $\delta = \frac{d}{(d,2)}$.

Notation 1.0.2. — Si $\mathbb{L}$ est un corps local non archimédien et $\overline{\mathbb{L}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{L}$, on note $k_{\mathbb{L}}$ le corps résiduel de $\mathbb{L}$. Pour tout entier naturel non nul r, on note $\mathbb{L}_r$ l'extension non ramifiée de degré r de $\mathbb{L}$ contenue dans $\overline{\mathbb{L}}$ et $k_{\mathbb{L},r}$ son corps résiduel (extension de degré r de $k_{\mathbb{L}}$). On notera $\varpi_{\mathbb{L}}$ une uniformisante de $\mathbb{L}$, $\mathscr{O}_{\mathbb{L}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{L}$, $\mathscr{P}_{\mathbb{L}}$ son idéal de valuation et $v_{\mathbb{L}}$ une valuation normalisée par $v_{\mathbb{L}}(\varpi_{\mathbb{L}}) = 1$. On utilisera le même type de notations si $\mathscr{B}$ est une $\mathbb{L}$-algèbre à division centrale ($\varpi_{\mathscr{B}}$, $v_{\mathscr{B}}$, $\cdots$) et on notera $\mathrm{Nrd}_{\mathscr{B}}$ la norme réduite de $\mathscr{B}$ sur $\mathbb{L}$. Dans toute la suite, on fixe $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. On notera $k_{\mathscr{D}} = k_{\mathbb{F},d}$ (resp. $k_\Delta = k_{\mathbb{K},\delta}$) le corps résiduel de $\mathscr{D}$ (resp. Δ).

D'après les articles [19] et [20], on sait que l'on a une bijection naturelle, appelée la correspondance de Jacquet-Langlands :

$$JL : \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}}) \to \mathscr{R}_0^2(H_{\mathbb{K}}).$$

Dans leurs articles [19] et [20], Silberger et Zink donnent une paramétrisation des représentations de $\mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ via des paires admissibles modérées sur $\mathbb{K}$ dont on rappelle ici la définition :

Définition 1.0.3. — i) *Si χ est un caractère modéré de $\mathbb{K}_n^\times$ (i.e trivial sur $1+\mathscr{P}_{\mathbb{K}_n}$), on notera $\overline{\chi}$ sa restriction à $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_n}^\times$ vue comme caractère de $k_{\mathbb{K},n}^\times$. On dira qu'un tel caractère est $k_{\mathbb{K},l}$-régulier si son orbite sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{K},l})$ est de longueur maximale n/l. On dira de même qu'un caractère de $\mathbb{K}_n^\times$ est $\mathbb{K}_l$-réguliers si son orbite sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{K}_l)$ est de longueur maximale.*

ii) *Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères modérés de $\mathbb{K}_n^\times$, on notera :*

$$\overline{\chi_1} \simeq_{k_{\mathbb{K},l}} \overline{\chi_2}$$

lorsque $\overline{\chi_1}$ et $\overline{\chi_2}$ sont dans la même $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{K},l})$-orbite.

iii) *On appelle paire admissible modérée sur $\mathbb{K}_l$ la donnée d'une extension non ramifiée $\mathbb{K}_n$ de $\mathbb{K}_l$ et d'un caractère modéré χ de $\mathbb{K}_n^\times$ qui soit $\mathbb{K}_l$-régulier.*

Proposition 1.0.4. — *Soit $JL : \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \to \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$ la correspondance de Jacquet-Langlands. Si $\rho \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ est une représentation cuspidale, alors le paramètre de Silberger et Zink associé est une paire admissible modérée sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un caractère modéré $\mathbb{K}$-régulier de $\mathbb{K}_n^\times$ que l'on notera χ. Soit $\pi_\chi = \pi = JL(\rho)$. Alors π est également une représentation cuspidale (dans ce cas $\overline{\chi}$ est également un caractère k_Δ-régulier de $k_{\mathbb{K},n}^\times$).*

Démonstration. — Rappelons le résultat présenté dans l'exemples 0.10 page 184 de [20].

Si $\widetilde{G} = \mathrm{GL}_r(\Lambda)$ où Λ est une $\mathbb{K}$-algèbre à division centrale d'indice λ et $\Gamma \in \mathscr{R}_0^2(\widetilde{G})$. Soit θ la paire admissible modérée sur $\mathbb{K}$ associée à Γ et f le cardinal de sa $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{K})$-orbite. Soit $e = (r \times \lambda)/f$. Alors Γ est une représentation cuspidale si et seulement si $(e, r) = 1$.

Maintenant, considérons $\rho \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ une représentation cuspidale. Notons χ la paire admissible modérée associée à ρ et f le cardinal de sa $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_f/\mathbb{K})$-orbite. Soit $e = n/f$. Alors, puisque ρ est une représentation cuspidale, $(e, n) = 1$. Or e divise n, donc nécessairement, $e = 1$ et $f = n$. Soit $\pi = JL(\rho)$. Alors la paire admissible modérée associée à π est encore χ, et on a $(e, \mu) = (1, \mu) = 1$. Ainsi, π est bien une représentation cuspidale. □

Notre objectif pour la suite est de montrer que la correspondance de Jacquet-Langlands préserve la distinction pour les représentations cuspidales. Nous voulons donc montrer que si $\rho \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ est une représentation cuspidale, alors elle est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si $JL(\rho)$ est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée.

D'après ce qui précède et en remarquant que pour $d = 1$, la correspondance de Jacquet-Langlands est l'application identité, il nous suffit déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de distinction, lisibles sur la paire admissible modérée, pour les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentation cuspidale par Jacquet-Langlands.

Pour expliquer la construction d'une telle représentation à partir de sa paire admissible modérée, nous rappelons ce qu'est la paramétrisation de Green :

Théorème 1.0.5. — *([8]) Soit k un corps fini. Alors, les représentations cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}_f(k)$ sont en bijection avec les caractères k-réguliers de $l^\times$ où l est une extension de degré f de k. Si $\delta : l^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère k-régulier, la représentation cuspidale π_δ correspondant au caractère δ est caractérisée par le fait que pour tout élément elliptique régulier x dans $\mathrm{GL}_f(k)$, on a :*

$$\mathrm{tr}(\pi_\delta(x)) = (-1)^{f-1} \sum_{\beta\in \mathrm{Gal}(l/k)} \delta(x^\beta)$$

avec, pour $\varphi : k[x] \to l$ un isomorphisme de corps, et $\beta \in \mathrm{Gal}(l/k)$, $x^\beta = \beta \circ \varphi(x)$ (et où $\mathrm{tr}(\pi_\delta(x))$ est la trace de $\pi_\delta(x)$).

Notation 1.0.6. — On fixe π dans $\mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$, une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui est l'image d'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par la correspondance de Jacquet-Langlands. Alors le paramètre de Silberger et Zink associé à π est une paire admissible modérée $(\mathbb{K}_n/\mathbb{K}_\delta, \chi)$. En particulier, le caractère $\overline{\chi}$ est un caractère k_Δ-régulier de $k_{\mathbb{K},n}^\times$. Soit $\overline{\gamma}_0$ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_\mu(k_\Delta)$ obtenue par paramétrisation de Green à partir du caractère $\overline{\chi}$. Soit γ_0 la représentation $\overline{\gamma}_0$ vue comme représentation de $\mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)$ de la façon suivante : on a un morphisme surjectif de groupes :

$$p : \mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_\mu(k_\Delta)$$

et on définit alors γ_0 :

$$\forall g \in \mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta), \gamma_0(g) = \overline{\gamma}_0(p(g)).$$

Soit π_0 la représentation de $\mathbb{K}^\times\mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)$ telle que pour tout x dans $\mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)$:

$$\pi_0(x) = \gamma_0(x)$$

et pour tout x dans $\mathbb{K}^\times$:

$$\pi_0(x) = \chi(x)\mathrm{Id}$$

(la représentation π_0 est bien définie car $\overline{\gamma}_0$ a pour caractère central $\overline{\chi}$).
Alors, d'après les articles [19] et [20] :

$$\pi \simeq \mathrm{c}-\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}^\times\mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)}^{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(\pi_0).$$

REMARQUE 1.0.7. — Ici, la paire $(\mathcal{K} = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta), \pi_0)$ est ce que Silberger et Zink appellent un type étendu maximal de niveau 0 associé à π.

Notons également que, si $\pi \in \mathcal{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$ est une représentation cuspidale quelconque, sa construction est différente (et plus compliquée). Si χ est la paire admissible modérée associée à π, alors f, le cardinal de sa $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{K})$-orbite, n'est pas forcément égale à n. Ainsi, si π_0 est, comme précédemment, construite à partir de χ, et qu'on l'induit à partir de $\langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)$, la représentation obtenue n'est pas forcément irréductible. Il faut l'induire à partir d'un sous-groupe plus gros, le stabilisateur de γ_0 dans $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$, dans lequel $\langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_\mu(\mathcal{O}_\Delta)$ est d'indice n/f.

2. Injection des immeubles de Bruhat-Tits

Pour les chaînes et les ordres de chaînes, on se réfère à [4] pages 212 à 224. On introduit pour toute la suite les notations suivantes :

NOTATION 2.0.1. — On notera $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$ sur $\mathbb{F}$ (resp. $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ sur $\mathbb{K}$). On identifiera les sommets de $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) aux $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$-chaînes de réseaux (resp. $\mathcal{O}_\Delta$-chaînes de réseaux) de période 1 d'un $\mathcal{D}$-espace vectoriel (à droite) de dimension m (resp. d'un Δ-espace de dimension μ) (on pourra se référer à [3] §2 et [2] §7). Si L est un $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$-réseau d'un $\mathcal{D}$-espace vectoriel de dimension m, on notera $[L] = \{L\varpi_{\mathcal{D}}^k : k \in \mathbb{Z}\}$ le sommet associé.

Si $\mathcal{L} = (L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une chaîne d'$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$-réseaux d'un $\mathcal{D}$-espace vectoriel V de dimension m, on notera $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{L})$ l'ordre de chaîne associé, $\mathcal{C}(\mathcal{L}) = \{a \in \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(V) : \forall k \in \mathbb{Z}, aL_k \subseteq L_k\}$, et $\mathcal{K}(\mathcal{L}) = \{g \in (\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(V))^\times : g\mathcal{C}(\mathcal{L})g^{-1} = \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ son normalisateur dans $(\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(V))^\times$. On utilisera des notations similaires pour les chaînes d'$\mathcal{O}_\Delta$-réseaux. Enfin, par convention, tous les simplexes de $X_{\mathbb{K}}$ (resp. $X_{\mathbb{F}}$) seront supposés fermés.

On pourra se référer à [21] (2.6 page 47) pour les résultats suivants :

THÉORÈME 2.0.2 ([21]). — *Il existe une injection naturelle $j : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

a) *L'application j est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-équivariante, c'est-à-dire que :*
$$j(g.x) = g.j(x)$$
pour tout g dans $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$ et tout x dans $X_{\mathbb{F}}$.

b) *L'image de j est incluse dans $X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}$, où $X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}$ désigne l'ensemble des éléments de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont fixes sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$.*

c) *L'application* j *est affine, c'est-à-dire que pour tout appartement* $\mathscr{A}$ *de* $X_{\mathbb{F}}$ *(vu comme espace affine), il existe un appartement* $\mathscr{B}$ *de* $X_{\mathbb{K}}$ *tel que* $j(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{B}$ *et* $j_{|\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *est une application affine.*

Nous allons utiliser le théorème suivant démontré dans [16] (Théorème 1.9 page 555) :

THÉORÈME 2.0.3 ([16]). — *Soit* G *un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien* $\mathbb{L}$ *de caractéristique résiduelle* p*. Soit* $F \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}(G)$ *un groupe fini d'ordre non divisible par* p*. On note* G^F *les points fixes de* G *sous l'action de* F *et* $H = (G^F)^{\circ}$ *la composante de l'unité de* G^F*. Soient* X_G *et* X_H *les immeubles de Bruhat-Tits de* G *et de* H *respectivement. Alors, via l'injection naturelle des immeubles* $j : X_H \hookrightarrow X_G$*, on peut identifier* X_H *à* X_G^F*, l'ensemble des points fixes de* X_G *sous l'action de* F*.*

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 2.0.4. — *L'application* j *est unique et* $\mathrm{Im}(j) = X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}$.

Démonstration. — L'égalité $\mathrm{Im}(j) = X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}$ découle directement de 2.0.3 car l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est modérément ramifiée, donc de caractéristique résiduelle distincte de 2. Pour l'unicité, supposons que l'on ait une autre application $l : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ vérifiant les trois conditions a), b) et c). Comme $l(X_{\mathbb{F}}) \subseteq X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})} = j(X_{\mathbb{F}})$, on peut considérer l'application :

$$k = j^{-1} \circ l : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{F}}$$

Alors, par composition, k est également $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariante et est une application affine.

Pour tout sommet s de $X_{\mathbb{F}}$, notons $\mathscr{K}_s$ son stabilisateur. Alors, pour tout $g \in \mathscr{K}_s, g.s = s$, donc $g.k(s) = k(g.s) = k(s)$. Ainsi, $\mathscr{K}_s$ est aussi le stabilisateur de $k(s)$, d'où $k(s) = s$.

Finalement, k est l'identité sur les sommets. Le fait qu'elle soit affine nous permet de conclure que $k = \mathrm{Id}$, et par suite $j = l$. □

PROPOSITION 2.0.5. — *Soit* A *un appartement de* $X_{\mathbb{F}}$*. Soit* T *le tore déployé maximal associé à l'appartement* A *et* $N(T)$ *son normalisateur dans* $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$*. Alors* $N(T)$ *agit transitivement sur les sommets de* A*. De plus l'appartement* A *s'identifie à l'espace affine* $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1,\ldots,1)$*, et l'ensemble de ses sommets s'identifie à* $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1,\ldots,1)$*.*

Démonstration. — Soit A un appartement de $X_{\mathbb{F}}$, immeuble de Bruhat-Tits de $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^{\times}$ où V est un $\mathscr{D}$-espace vectoriel à droite de dimension m. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de V associée à A. Alors, via cette base, $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^{\times} \simeq \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et :

$$\mathscr{S} = \{[e_1 \mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus e_m \mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{\alpha_m}] : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m\}$$

est l'ensemble des sommets de A. Il est clair que l'application suivante est bijective :

$$\mathscr{S} \to \mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1, \dots, 1), \quad [e_1 \mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus e_m \mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{\alpha_m}] \mapsto \overline{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}.$$

De plus, si $x \in A$, il existe $r \in \mathbb{N}^{\times}$, $s_1, \dots, s_r$ des sommets de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s_i$. Ainsi l'application :

$$A \to \mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1, \dots, 1), \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s_i$$

est un isomorphisme d'espaces affines.

Soit T le tore déployé maximal associé à l'appartement A et $N(T)$ son normalisateur dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. Alors $N(T)$ contient l'ensemble suivant (constitué de matrices diagonales) :

$$\mathscr{E} = \{\mathrm{diag}(\varpi_{\mathscr{D}}^{\beta_1}, \dots, \varpi_{\mathscr{D}}^{\beta_m}) : (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}^m\}.$$

Il est clair que $\mathscr{E}$ agit transitivement sur les sommets de A. □

PROPOSITION 2.0.6. — *Soient $A_{\mathbb{F}}$ et $A_{\mathbb{K}}$ des appartements des immeubles de Bruhat Tits $X_{\mathbb{F}}$ et $X_{\mathbb{K}}$ respectivement. Supposons donnée une application affine injective $j : A_{\mathbb{F}} \hookrightarrow A_{\mathbb{K}}$. Soit T le tore déployé maximal associé à l'appartement $A_{\mathbb{F}}$ et $N(T)$ son normalisateur dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. On suppose que j est $N(T)$-équivariante, qu'il existe un sommet s_0 de $A_{\mathbb{F}}$ tel que $j(s_0)$ est fixe par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ et :*

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(s_0)).$$

Pour tout y dans $X_{\mathbb{F}}$, il existe g dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et x dans $A_{\mathbb{F}}$ tels que $y = g.x$. Alors, $g.j(x)$ ne dépend pas du choix de $g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et de $x \in A_{\mathbb{F}}$ tels que $g.x = y$. On définit alors $j : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ par $j(g.x) = g.j(x)$ pour tout g dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et tout x dans $A_{\mathbb{F}}$.

Alors l'application j est l'injection naturelle entre les deux immeubles.

Démonstration. — Nous devons vérifier que j est bien définie sur $X_{\mathbb{F}} = \bigcup_{g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})} g.A_{\mathbb{F}}$ (alors elle sera bien $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariante), que j est affine et que pour tout x dans $X_{\mathbb{F}}$, on a :

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(x) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x)) \text{ et } j(x) \in X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}.$$

- Nous allons commencer par montrer que pour tout x dans $A_{\mathbb{F}}$, $j(x)$ est stable sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ et $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(x) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x))$. Soit x dans $A_{\mathbb{F}}$.

  - Considérons tout d'abord le cas où x est un sommet de $A_{\mathbb{F}}$. D'après 2.0.5, $N(T)$ agit transitivement sur les sommets de $A_{\mathbb{F}}$. Il existe donc n dans $N(T)$ tel que $x = n.s_0$. De plus, comme j est $N(T)$-équivariante sur $A_{\mathbb{F}}$, $j(x) = j(n.s_0) = n.j(s_0)$, ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(x) &= \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(n.s_0)\\ &= n\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(s_0)n^{-1} \subseteq n\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(s_0))n^{-1}\\ &= \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x)).\end{aligned}$$

  De plus, si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$, on a $\gamma(j(x)) = \gamma(n)\gamma(j(s_0))$ or $\gamma(n) = n$ car $n \in \mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$ et par hypothèse $\gamma(j(s_0)) = j(s_0)$, donc $\gamma(j(x)) = j(x)$.

  - Supposons désormais que x est un point quelconque de l'appartement $A_{\mathbb{F}}$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_r$ des sommets de $A_{\mathbb{F}}$ tels que $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ est l'unique simplexe de l'appartement $A_{\mathbb{F}}$ contenant x dans son intérieur. Il existe alors des réels strictement positifs $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ tels que $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=0}^r \lambda_i x_i$.
  Soit g dans $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(x)$.
  Nous allons vérifier que $g \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x))$.
  Remarquons tout d'abord que $g.\tau = \{g.x_0, g.x_1, \ldots, g.x_r\}$ est un simplexe de $A_{\mathbb{F}}$ contenant $x = g.x = \sum_{i=0}^r \lambda_i g.x_i$ dans son intérieur (car tous les λ_i sont non nuls). Par unicité, $g.\tau = \tau$ et g appartient à $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(\tau)$. D'après [4] (partie 1.2 et 1.3), on a $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(\tau) = \langle \Pi_\tau \rangle \mathcal{A}(\tau)^\times$ où $\mathcal{A}(\tau)^\times = \cap_{i=0}^r \mathcal{A}(x_i)^\times$ et Π_τ permute les sommets x_i. De plus, on peut choisir Π_τ dans $N(T)$ ([4] loc.cit.). On en déduit qu'il existe l dans $\mathbb{Z}$ et h dans $\mathcal{A}(\tau)^\times$ tel que $g = \Pi_\tau^l h$. Ainsi :

$$g.x = x = \Pi_\tau^l h.x = \Pi_\tau^l.(\sum_{i=0}^r \lambda_i h.x_i) = \Pi_\tau^l.x.$$

  Par suite, $\Pi_\tau^l.x = x$.
  D'après ce qui précède, $h \in \cap_{i=0}^r \mathcal{A}(x_i)^\times \subseteq \cap_{i=0}^r \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(x_i) \subseteq \cap_{i=0}^r \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x_i))$. En utilisant la $N(T)$-équivariance de j et le fait que $\Pi_\tau^l \in N(T)$, on a :

$$g.j(x) = \Pi_\tau^l h.j(x) = \Pi_\tau^l.(\sum_{i=0}^r \lambda_i h.j(x_i)) = \Pi_\tau^l.j(x) = j(\Pi_\tau^l.x) = j(x).$$

Enfin, étant donné que $j(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i j(x_i)$ et que $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ agit de façon affine en fixant l'image de chaque sommet de $A_{\mathbb{F}}$, il est immédiat que pour tout γ dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$, $\gamma(j(x)) = j(x)$.

* Soit $x \in X_{\mathbb{F}}$. Soient $x_0, y_0 \in A_{\mathbb{F}}$ et $h, g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ tels que $x = g.x_0 = h.y_0$. On a $y_0 = h^{-1}g.x_0$. Comme $N(T)$ agit transitivement sur les sommets de $A_{\mathbb{F}}$, il existe n dans $N(T)$ tel que $y_0 = n.x_0$. On en déduit que $h^{-1}g.x_0 = n.x_0$ donc $n^{-1}h^{-1}g$ appartient à $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(x_0) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}(j(x_0))$. Ainsi, par $N(T)$-équivariance de j sur $A_{\mathbb{F}}$, il est clair que $g.j(x_0) = h.j(y_0)$. Par suite, j est bien définie.
* On vérifie facilement que $\mathrm{Im}(j) \subseteq X_{\mathbb{K}}^{\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})}$. En effet, si $x \in X_{\mathbb{F}}$, $x = g.x_0$ avec $g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ (fixé par $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$) et $x_0 \in A_{\mathbb{F}}$ (lui aussi fixé par $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$).
* En utilisant le fait que l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ est affine, que j est affine sur $A_{\mathbb{F}}$ et $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariante, on montre facilement que l'image par j du barycentre de deux points de $X_{\mathbb{F}}$ est le barycentre de l'image de ces deux points, et donc que j est affine. □

Dans toute la suite du chapitre, on fixe $\pi \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$, *une représentation cuspidale de niveau* 0, *image d'une représentation cuspidale de niveau* 0 *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *par la correspondance de Jacquet-Langlands, et on garde les notations de 1.0.6.*

3. Conditions de distinction lorsque d est impair

Dans cette partie, on suppose que d, l'indice de l'algèbre à division $\mathscr{D}$, est impair.

REMARQUE 3.0.1. — Puisque d est impair, on remarque que $d = \delta$, $m = \mu$ et $\mathscr{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \simeq \Delta$.

NOTATION 3.0.2. — On fixe $\varpi_{\mathbb{F}}$, $\varpi_{\mathbb{K}}$, $\varpi_{\mathscr{D}}$ et ϖ_Δ des uniformisantes de $\mathbb{F}$, $\mathbb{K}$, $\mathscr{D}$ et Δ respectivement telles que $\varpi_{\mathscr{D}}^d = \varpi_{\mathbb{F}}$ et $\varpi_\Delta^d = \varpi_{\mathbb{K}}$.

Si l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, on suppose que $\varpi_{\mathbb{K}} = \varpi_{\mathbb{F}}$. Si l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, on fixe $\varpi_{\mathbb{K}}$ et $\varpi_{\mathbb{F}}$ simultanément de sorte que $\varpi_{\mathbb{K}}^2 = \varpi_{\mathbb{F}}$.

On note $e = e_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ qui vaut 2 si l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, et vaut 1 si l'extension est non ramifiée.

3.1. Sous-groupes ouverts compacts maximaux stables sous l'action du groupe de Galois. — On vérifie facilement la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.1.1. — *Pour tout* $x \in \mathbb{F}^\times$, $v_{\mathbb{K}}(x) = e \times v_{\mathbb{F}}(x)$ *et pour tout* $y \in \mathcal{D}^\times$, $v_\Delta(y) = e \times v_{\mathcal{D}}(y)$.

PROPRIÉTÉ 3.1.2. — *On a* $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{O}_\Delta$ *et le sous-groupe ouvert compact maximal* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$ *est stable sous l'action du groupe de Galois* $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$.

Démonstration. — Nous allons faire la démonstration dans le cas où l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée (la démonstration est similaire dans l'autre cas).

Supposons donc que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée. Il est clair que $k_\Delta/k_{\mathcal{D}}$ est une extension quadratique.

Pour montrer le résultat, commençons par quelques rappels sur la structure de l'algèbre à division $\mathcal{D}$. On peut fixer $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ une extension non ramifiée de degré d contenue dans $\mathcal{D}$ qui soit normalisée par $\varpi_{\mathcal{D}}$, alors $k_{\mathcal{D}} \simeq k_{\mathbb{L}}$. Soit $\varphi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}, l \mapsto \varpi_{\mathcal{D}} l \varpi_{\mathcal{D}}^{-1}$. Alors φ induit un générateur $\overline{\varphi}$ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathcal{D}}/k_{\mathbb{F}})$. Posons $\Lambda = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$, alors Λ est un corps car $\mathbb{L}$ et $\mathbb{K}$ sont linéairement disjoints sur $\mathbb{F}$ (i.e n'ont pas de $\mathbb{F}$-sous-corps (distincts de $\mathbb{F}$) isomorphes puisque d et 2 sont premiers entre eux). De plus Λ est une extension non ramifiée de degré d de $\mathbb{K}$. On pose :

$$\widetilde{\varphi} : \Lambda \to \Lambda,\ l \otimes k \mapsto \varphi(l) \otimes k.$$

On vérifie alors que $\langle\widetilde{\varphi}\rangle = \mathrm{Gal}(\Lambda/\mathbb{K})$ et que $\widetilde{\varphi}$ est induit par la conjugaison par ϖ_Δ. On déduit de tout ceci que $\{1, \varpi_\Delta, \ldots, \varpi_\Delta^{d-1}\}$ est une Λ-base de Δ qui engendre $\mathcal{O}_\Delta$ comme $\mathcal{O}_\Lambda$-module à gauche. De même, on sait que $\{1, \varpi_{\mathcal{D}}, \ldots, \varpi_{\mathcal{D}}^{d-1}\}$ est une $\mathbb{L}$-base de $\mathcal{D}$ qui engendre $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ comme $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$-module à gauche. On vérifie facilement que $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est un sous-anneau de Λ et aussi un réseau (car $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ sont des $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-réseaux). Il s'agit donc d'un sous-anneau compact de Λ. Or Λ possède un unique sous-anneau compact maximal, $\mathcal{O}_\Lambda$, d'où :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathcal{O}_\Lambda \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{L}} \otimes 1 \subseteq \mathcal{O}_\Lambda \subseteq \mathcal{O}_\Delta.$$

Puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ est engendré par $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ et $\varpi_{\mathcal{D}}$, on a bien l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{O}_\Delta$.
De plus, le groupe de Galois $\langle\sigma\rangle$ agit naturellement sur $\Delta = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$, et donc sur $\Lambda = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$ par :

$$\sigma.(l \otimes k) = l \otimes \sigma(k)$$

pour l dans $\mathbb{L}$ et k dans $\mathbb{K}$. Ainsi $\sigma(\Lambda) = \Lambda$ et on peut considérer $\widetilde{\sigma} = \sigma_{|\Lambda}$. On vérifie que $\Lambda/\mathbb{L}$ est une extension galoisienne non ramifiée de degré 2 et $\widetilde{\sigma}$ est un générateur de $\mathrm{Gal}(\Lambda/\mathbb{L})$ (car non trivial sur Λ). On a :

$$\widetilde{\sigma}(\varpi_\Lambda) = \widetilde{\sigma}(\varpi_{\mathbb{L}}) = \varpi_{\mathbb{L}} = \varpi_\Lambda.$$

On en déduit que $\widetilde{\sigma}(\mathcal{O}_\Lambda) = \mathcal{O}_\Lambda$. De plus $\sigma.\varpi_\Delta^j = \varpi_\Delta^j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d-1\}$. Comme $\{1, \varpi_\Delta, \ldots, \varpi_\Delta^{d-1}\}$ est une Λ-base de Δ qui engendre $\mathcal{O}_\Delta$ comme $\mathcal{O}_\Lambda$-module à gauche :

$$\mathcal{O}_\Delta = \mathcal{O}_\Lambda.1 \oplus \mathcal{O}_\Lambda.\varpi_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\Lambda.\varpi_\Delta^{d-1}.$$

On a $\sigma(\mathcal{O}_\Delta) = \mathcal{O}_\Delta$ et pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $\sigma(\mathcal{P}_\Delta^k) = \mathcal{P}_\Delta^k$. Par conséquent σ stabilise le compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$. □

3.2. Explicitation des injections d'immeubles

PROPRIÉTÉ 3.2.1. — *Soit $A_\mathbb{F}$ (resp. $A_\mathbb{K}$) l'appartement standard de $X_\mathbb{F}$ (resp. $X_\mathbb{K}$) que l'on identifie à l'espace affine $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ et dont l'ensemble des sommets s'identifie à $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ (cf. 2.0.5). L'injection naturelle entre les deux immeubles est définie sur $A_\mathbb{F}$ par :*

$$j : A_\mathbb{F} \to A_\mathbb{K},\ \overline{(x_1, \ldots, x_m)} \mapsto \overline{(e \times x_1, \ldots, e \times x_m)}$$

et est étendue sur $X_\mathbb{F}$ en utilisant 2.0.6.

Démonstration. — Nous allons faire la démonstration dans le cas où l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée (la démonstration est similaire dans l'autre cas).

Supposons donc que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée. On définit j, injection de $A_\mathbb{F}$ sur $A_\mathbb{K}$ par :

$$j(\overline{(x_1, \ldots, x_m)}) = \overline{(x_1, \ldots, x_m)}$$

pour tout $\overline{(x_1, \ldots, x_m)}$ dans $A_\mathbb{F}$. Montrons que j est l'injection naturelle des immeubles. On sait que l'on peut supposer que $\mathcal{D} \subseteq \Delta$ et que l'on a, pour tout $x \in \mathcal{D}^\times$, $v_\Delta(x) = v_\mathcal{D}(x)$. Soit T le tore maximal déployé diagonal de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$ (tore associé à l'appartement standard) :

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_m \end{pmatrix} : t_i \in \mathbb{F}^\times \right\}.$$

Alors $N(T) = T_0 \mathcal{S}_m$ où :

$$T_0 = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_m \end{pmatrix} : t_i \in \mathcal{D}^\times \right\}$$

et $\mathscr{S}_m$ désigne l'ensemble des matrices de permutation : si τ est une permutation de $\{1,\dots,m\}$, on lui associe la matrice $P_\tau = [p_{i,j}]$ telle que $p_{i,j} = 1$ si et seulement si $i = \tau(j)$ et $p_{i,j} = 0$ sinon.

Soit $g \in N(T)$ tel que $g = tP_\tau$ où t est une matrice diagonale $\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_m)$ et τ une permutation de $\{1,\dots,m\}$. Alors, pour tout $\overline{(x_1,\dots,x_m)}$ dans $A_{\mathbb{F}}$:

$$g.\overline{(x_1,\dots,x_m)} = \overline{(v_{\mathscr{D}}(t_1) + x_{\tau(1)},\dots,v_{\mathscr{D}}(t_m) + x_{\tau(m)})}$$

et si g est vu comme élément de $\mathrm{GL}_m(\Delta)$, on a, pour tout $\overline{(y_1,\dots,y_m)}$ dans $A_{\mathbb{K}}$:

$$g.\overline{(y_1,\dots,y_m)} = \overline{(v_\Delta(t_1) + y_{\tau(1)},\dots,v_\Delta(t_m) + y_{\tau(m)})}.$$

On en déduit facilement que j est bien $N(T)$-équivariante sur l'appartement $A_{\mathbb{F}}$.

De plus, si l'on fixe $s_0 = [\mathscr{O}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{D}}] = \overline{(0,\dots,0)}$ un sommet de $A_{\mathbb{F}}$. Son image par j est $j(s_0) = \overline{(0,\dots,0)} = [\mathscr{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_\Delta]$.

Ainsi $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) = \langle \varpi_{\mathscr{D}} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ et

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0)) = \langle \varpi_\Delta \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta).$$

On a donc clairement $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0))$. De plus :

$$\sigma(\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)) = \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)$$

donc $\sigma(\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0))) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0))$. On en déduit que le sommet $j(s_0)$ est fixé par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$. On conclut en utilisant la proposition 2.0.6. □

3.3. Conditions de distinction lorsque l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée. — On suppose dans cette partie que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée.

PROPRIÉTÉ 3.3.1. — *Notons C_0 la chambre standard (fermée) de $X_{\mathbb{F}}$ et $\widetilde{C}_0$ la chambre standard (fermée) de $X_{\mathbb{K}}$. Alors $j(C_0) = \widetilde{C}_0$.*

Démonstration. — Notons $\{s_0, s_1, \dots, s_{m-1}\}$ les sommets de C_0, de sorte que pour tout i dans $\{0,\dots,m-1\}$, on a :

$$s_i = [\mathscr{O}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{D}} \oplus \underbrace{\mathscr{P}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}_{\mathscr{D}}}_{i}].$$

De même, on note $\{S_0, S_1, \dots, S_{m-1}\}$ les sommets de $\widetilde{C}_0$, tels que pour tout i dans $\{0,\dots,m-1\}$:

$$S_i = [\mathscr{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_\Delta \oplus \underbrace{\mathscr{P}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}_\Delta}_{i}].$$

L'image de C_0, notée $j(C_0)$, est l'image par j de l'enveloppe convexe des points $\{s_0, s_1, \dots, s_{m-1}\}$. Comme j est affine, il s'agit de l'enveloppe convexe des points $\{j(s_0), j(s_1), \dots, j(s_{m-1})\}$. Pour montrer que $j(C_0) = \widetilde{C}_0$, il suffit donc de vérifier que :

$$\{j(s_0), j(s_1), \dots, j(s_{m-1})\} = \{S_0, S_1, \dots, S_{m-1}\}.$$

Pour tout i dans $\{0, \dots, m-1\}$, on a $s_i = h_i.s_0$ où

$$h_i = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{\varpi_{\mathscr{D}}, \dots, \varpi_{\mathscr{D}}}_{i})$$

est une matrice diagonale de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. Par $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariance de j, on a :

$$j(s_i) = h_i.j(s_0) = S_i. \qquad \square$$

On utilisera dans toute la suite le résultat suivant qui est en fait un cas particulier de la proposition 5.20 page 94 de [11] :

Théorème 3.3.2 ([11]). — *Par formule de restriction de Mackey et Réciprocité de Frobenius pour l'induite compacte, on obtient un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\mathrm{c}-\mathrm{Ind}_{\mathscr{K}}^{\mathrm{GL}_\mu(\Delta)}\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \bigoplus_{g\in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\backslash \mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathscr{K}} \mathrm{Hom}_{g^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})g\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1}),$$

où $\mathscr{K} = \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle \mathrm{GL}_\mu(\mathscr{O}_\Delta)$. Si $g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\backslash\mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathscr{K}$ vérifie :

$$\mathrm{Hom}_{g^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})g\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0,$$

alors nécessairement $\sigma(g\mathscr{K}g^{-1}) = g\mathscr{K}g^{-1}$.

Proposition 3.3.3. — *On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \text{ où } \mathscr{K} = \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta).$$

Par conséquent, la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Démonstration. — Notons $K = \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)$. Alors $j(s_0)$ peut être vu comme une chaîne de réseaux (on fera souvent cette identification par la suite) et $K = \mathfrak{A}(j(s_0))^\times$ est le sous-groupe parahorique fixateur de $j(s_0)$. Le sous-groupe K est stable par l'action du groupe de Galois $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$ sur les coefficients. Ceci signifie que le sommet $j(s_0)$ est fixé par l'action de $\langle\sigma\rangle$ (rappelons que le stabilisateur d'un point de l'immeuble caractérise ce point, on pourra se référer à [4] page 215). D'après 3.3.2, les seuls éléments g dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\backslash\mathrm{GL}_m(\Delta)/\mathscr{K}$ qui contribuent à la distinction sont ceux qui vérifient les conditions suivantes :

$$\sigma(gKg^{-1}) = gKg^{-1} \text{ et } \mathrm{Hom}_{g^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})g\cap\mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

On remarque que $gKg^{-1} = \mathfrak{A}(g.j(s_0))^\times$, ainsi $\sigma(gKg^{-1}) = gKg^{-1}$ si et seulement si le sommet $g.j(s_0)$ est stable sous l'action de $\langle\sigma\rangle$. D'après l'article [16], théorème 1.9 page 555, les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ fixes sous l'action de $\langle\sigma\rangle$ sont exactement les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont dans $j(X_{\mathbb{F}})$. On déduit de tout ceci que π est distinguée si et seulement s'il existe g dans $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\backslash\mathrm{GL}_m(\Delta)/\mathcal{K}$ tel que $g.j(s_0)$ appartient à $j(X_{\mathbb{F}})$ et :

$$\mathrm{Hom}_{g^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g\cap\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Chaque $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-orbite d'un point de $X_{\mathbb{F}}$ a un représentant dans la chambre standard C_0. Donc, puisque l'on cherche g modulo $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$, on se ramène à la recherche des éléments g dans $\mathrm{GL}_m(\Delta)$ tels que $g.j(s_0)$ est un sommet de $j(C_0)$. Or, on a vu que les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont dans l'image de C_0 sont exactement :

$$\{j(s_0), \dots, j(s_{m-1})\}.$$

Par $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-équivariance de j, comme les sommets de C_0 sont dans la même $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-orbite, quitte à multiplier g à gauche par un élément de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$, on peut se ramener au sommet $j(s_0)$. De plus, on a vu précédemment que le sommet $j(s_0)$ est stable sous l'action de σ car l'ordre héréditaire correspondant, $\mathcal{A}(j(s_0))^\times = \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$ est stable sous l'action de σ. On a donc bien le résultat annoncé. $\square$

Proposition 3.3.4. — *La représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement si χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Démonstration. — D'après ce qui précède, on sait que π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Il nous suffit donc de déterminer l'intersection $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D}) \cap \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$.

On fixe $\Lambda/\mathbb{K}$ extension non ramifiée de degré d contenue dans Δ. Il existe alors une injection $\Delta \subseteq \mathrm{M}_d(\Lambda)$ telle que, via cette injection, ϖ_Δ s'identifie à la matrice :

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ \varpi_{\mathbb{K}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(on pourra se référer à la démonstration du théorème 14.6 du chapitre 3 dans [17]). Nous allons travailler dans la $\mathbb{K}$-algèbre $A_0 = \mathrm{M}_m(\Delta) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda$ pour calculer la norme réduite des éléments de $\mathrm{M}_m(\Delta)$. L'élément $\varpi_\Delta I_m \otimes 1 \in A_0$ s'identifie à la matrice diagonale par blocs :

$$W_0 = \mathrm{diag}(\underbrace{w_0, \ldots, w_0}_{m}).$$

Il est clair que $\det(w_0) = (-1)^{d+1}\varpi_{\mathbb{K}} = \varpi_{\mathbb{K}}$ (développement par rapport à la première colonne). On en déduit que $\mathrm{Nrd}(\varpi_\Delta I_m) = \det(W_0) = \varpi_{\mathbb{K}}^m$ et :

$$\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathbb{K}} I_m) = \mathrm{Nrd}((\varpi_\Delta I_m)^d) = \varpi_{\mathbb{K}}^{dm} = \varpi_{\mathbb{K}}^n.$$

Ainsi, $v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathbb{K}} I_m)) = n$, $v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_\Delta I_m)) = m$ et, puisque

$$\mathrm{Nrd}(\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)) \subseteq \mathscr{O}_{\mathbb{K}}^\times,$$

on a :

$$\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) = \{g \in \langle\varpi_\Delta\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) : n \text{ divise } v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(g))\}.$$

On montre de même que :

$$\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) = \{g \in \langle\varpi_{\mathscr{D}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) : n \text{ divise } v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g))\}.$$

On a :

$$\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle\varpi_\Delta\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) = \mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0)) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0).$$

Ainsi $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle\varpi_\Delta\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) = \langle\varpi_{\mathscr{D}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$. On en déduit que $g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)$ si et seulement si $g \in \langle\varpi_{\mathscr{D}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ et $v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g)) = v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(g))$ est divisible par n. Finalement $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) = \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$. Par conséquent, π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Supposons que :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

En écrivant les conditions de distinction sur les éléments du centre, on vérifie que χ, le caractère central de π_0, est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et donc :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

La réciproque est immédiate. □

THÉORÈME 3.3.5. — *La représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si n est impair, χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et :*

$$\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}} \text{ où } \langle\widetilde{\widetilde{\sigma}}\rangle = \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_{\mathscr{D}}).$$

De plus, si π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée, on a :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1})) = 1.$$

Démontrons le théorème 3.3.5 :

Démonstration. — $*$ Supposons que π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée. Alors, d'après la proposition précédente, on sait que χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

L'extension $k_\Delta/k_{\mathscr{D}}$ est une extension quadratique. D'après [15] théorème 2 page 341, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{\gamma}_0^\vee \simeq \overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}$$

où $\langle\widetilde{\sigma}\rangle = \mathrm{Gal}(k_\Delta/k_{\mathscr{D}})$ et $\overline{\gamma}_0^\vee$ est la contragrédiente de $\overline{\gamma}_0$. Les représentations $\overline{\gamma}_0^\vee$ et $\overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même paramètre de Green. Un paramètre de Green associé à $\overline{\gamma}_0^\vee$ est $\overline{\chi}^{-1}$. Il nous reste à déterminer un paramètre de Green de la représentation $\overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}$ en utilisant 1.0.5.

Expliquons tout d'abord l'action de $\mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$ sur les éléments elliptiques réguliers de $\mathrm{GL}_m(k_\Delta)$. Soit $x \in \mathrm{GL}_m(k_\Delta)$ un élément elliptique régulier. Nous allons expliciter un isomorphisme de corps entre $k_\Delta[x]$ et $k_{\Delta,m} = k_{\mathbb{K},n}$. Fixons $v \in k_{\Delta,m}$ ayant même polynôme minimal (sur k_Δ) que x. Notons $\mu^x_{k_\Delta}$ (resp. $\mu^v_{k_\Delta}$) ces polynômes minimaux, alors $\mu^x_{k_\Delta} = \mu^v_{k_\Delta}$ par hypothèse. On fixe $\varphi : k_\Delta[x] \to k_{\Delta,m}$ un k_Δ-isomorphisme de corps en imposant que $\varphi(x) = v$. Alors, si $\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$, l'action de β sur x est définie par $x^\beta = \beta \circ \varphi(x)$. D'après la formule des caractères, on a :

$$\mathrm{tr}(\overline{\gamma}_0(x)) = (-1)^{m-1} \sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)} \overline{\chi}(x^\beta).$$

Fixons $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$ un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_{\mathscr{D}})$. La restriction de $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$ à k_Δ ne peut pas être triviale, donc :

$$\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{|k_\Delta} = \widetilde{\sigma}.$$

Alors le polynôme $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(\mu^x_{k_\Delta})$ est un polynôme irréductible annulateur de $\widetilde{\sigma}(x)$, il s'agit du polynôme minimal de $\widetilde{\sigma}(x)$. On vérifie de même que $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(\mu^v_{k_\Delta})$ est le polynôme minimal de $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(v)$. Par conséquent, $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(v)$ et $\widetilde{\sigma}(x)$ ont même polynôme minimal (sur k_Δ). On fixe $\psi : k_\Delta[\widetilde{\sigma}(x)] \to k_{\Delta,m}$ un k_Δ-isomorphisme de corps en imposant :

$$\psi(\widetilde{\sigma}(x)) = \widetilde{\widetilde{\sigma}}(v).$$

On a donc $\psi \circ \widetilde{\sigma}(x) = \widetilde{\widetilde{\sigma}} \circ \varphi(x)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}(x)) = \mathrm{tr}(\overline{\gamma}_0(\widetilde{\sigma}(x)) &= (-1)^{m-1} \sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)} \overline{\chi}(\beta \circ \psi(\widetilde{\sigma}(x))) \\
&= (-1)^{m-1} \sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)} \overline{\chi}(\beta \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}(\varphi(x))) \\
&= (-1)^{m-1} \sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)} \overline{\chi}(\widetilde{\widetilde{\sigma}} \circ \beta(\varphi(x))) \\
&= (-1)^{m-1} \sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)} \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}(\beta \circ \varphi(x))
\end{aligned}$$

(car $\widetilde{\widetilde{\sigma}} \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_{\mathscr{D}}) \supseteq \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$ donc commute avec tous les éléments de $\mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$). On vérifie facilement que le caractère $\overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}$ est k_Δ-régulier. En effet, si $\alpha \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$ vérifie $\overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}} \circ \alpha = \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}$, comme α et $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$ commutent, la k_Δ-régularité de $\overline{\chi}$ impose que $\alpha = \mathrm{Id}$.

Par conséquent, un paramètre de Green associé à la représentation $\overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}$ est $\overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}$. Par suite, si π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée, on a :

$$\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}.$$

Il existe donc α dans $\mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$ tel que $\overline{\chi}^{-1} \circ \alpha = \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}$. Soit $\delta = \widetilde{\widetilde{\sigma}} \circ \alpha^{-1}$, alors $\overline{\chi} \circ \delta^2 = \overline{\chi}$. De plus, $\delta^2 = \widetilde{\widetilde{\sigma}}^2 \circ \alpha^{-2}$ avec $\langle \widetilde{\widetilde{\sigma}}^2 \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$. On en déduit que $\delta^2 \in \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$. Comme $\overline{\chi}$ est k_Δ-régulier, on a forcément :

$$\delta^2 = \mathrm{Id} \Rightarrow \widetilde{\widetilde{\sigma}}^2 = \alpha^2.$$

Puisque $\alpha \in \langle \widetilde{\widetilde{\sigma}}^2 \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\Delta,m}/k_\Delta)$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha = \widetilde{\widetilde{\sigma}}^{2i} \Rightarrow \widetilde{\widetilde{\sigma}}^2 = \widetilde{\widetilde{\sigma}}^{4i} \Rightarrow (\widetilde{\widetilde{\sigma}}^2)^{2i-1} = \mathrm{Id}.$$

Ainsi, $\widetilde{\widetilde{\sigma}}^2$ est d'ordre impair. Comme $\widetilde{\widetilde{\sigma}}^2$ est d'ordre m, m est nécessairement impair et $n = dm$ est aussi impair (car d est par hypothèse impair). Donc, si π est distinguée, n est impair. De plus, si π est distinguée, on a d'après 3.3.3 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\langle \varpi_{\mathbb{F}} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}).$$

Or, d'après l'article de D.Prasad [15], théorème 3 page 341, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ est de dimension au plus 1, d'où le résultat.

* Supposons à présent que n est impair, χ trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\widetilde{\sigma}}$. Alors les représentations $\overline{\gamma}_0^\vee$ et $\overline{\gamma}_0^{\widetilde{\sigma}}$ sont équivalentes (car ont même paramètre de Green) et d'après [15], théorème 2 page 341, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

La proposition précédente nous permet immédiatement de conclure que π est bien distinguée dans ce cas. □

3.4. Conditions de distinction lorsque l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, modérément ramifiée. — On suppose dans cette partie que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée.

On utilise un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la propriété 3.3.3 pour montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4.1. — *La représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement s'il existe g dans $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\backslash\mathrm{GL}_m(\Delta)/\mathcal{K}$ tel que $g.j(s_0)$ appartient à $j(C_0)$ et :*

$$\mathrm{Hom}_{g^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g\cap\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0$$

où $\mathcal{K} = \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$ et C_0 est la chambre standard dans $A_{\mathbb{F}}$.

PROPOSITION 3.4.2. — *On utilise les mêmes notations que dans 3.3.1 pour la chambre standard C_0. Il y a exactement $\frac{m(m-1)}{2} + m$ sommets de $X_{\mathbb{K}}$ dans $j(C_0)$ qui sont les sommets :*

$$j(s_i) = [\mathcal{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\Delta \oplus \underbrace{\mathcal{P}_\Delta^2 \oplus \cdots \mathcal{P}_\Delta^2}_{i}]$$

pour i dans $\{0, \ldots, m-1\}$ et tous les sommets de la forme suivante :

$$t_{k,l} = [\underbrace{\mathcal{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\Delta}_{m-l} \oplus \underbrace{\mathcal{P}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\Delta}_{l-k} \oplus \underbrace{\mathcal{P}_\Delta^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\Delta^2}_{k}]$$

où $0 \leq k < l \leq m-1$ (il s'agit des milieux des arêtes $[j(s_k), j(s_l)]$).

Démonstration. — Pour tout i dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, on a $s_i = h_i.s_0$ où h_i est la matrice diagonale $h_i = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \underbrace{\varpi_{\mathcal{D}}, \ldots, \varpi_{\mathcal{D}}}_{i})$. Comme j est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-équivariante, on a :

$$j(s_i) = h_i.j(s_0) = [\mathcal{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\Delta \oplus \underbrace{\mathcal{P}_\Delta^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\Delta^2}_{i}] = \overline{(0, \ldots, 0, \underbrace{2, \ldots, 2}_{i})}.$$

Soit $t \in j(C_0)$ tel que t est aussi un sommet de $X_{\mathbb{K}}$. Comme j est une application affine, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})$ dans $(\mathbb{R}^+)^m$ tels que :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i = 1 \text{ et } t = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i j(s_i).$$

On en déduit que :

$$t = \overline{(0, 2\lambda_{m-1}, 2(\lambda_{m-2} + \lambda_{m-1}), \ldots, 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{m-1}))}.$$

Fixons i_0 le plus grand indice k dans $\{0,\ldots,m-1\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors, la première coordonnée non nulle de t est $2(\lambda_{i_0}+\lambda_{i_0+1}+\cdots+\lambda_{m-1}) = 2\lambda_{i_0}$. Comme t est un sommet de $X_{\mathbb{K}}$, toutes ses coordonnées sont entières, donc $\lambda_{i_0} \in \{\frac{1}{2},1\}$. Si $\lambda_{i_0}=1$, on a $t=j(s_{i_0})$. Sinon, $\lambda_{i_0}=\frac{1}{2}$ et il existe au moins un autre coefficient λ_k qui est non nul. Fixons k_0 le plus grand coefficient tel que $\lambda_{k_0}\neq 0$ et $k_0 < i_0$. Alors, la deuxième coordonnée non nulle de t est $2(\lambda_{i_0}+\lambda_{k_0}) = 1+2\lambda_{k_0}$. De même, comme t est un sommet, $1+2\lambda_{k_0}\in\mathbb{Z}$ et donc $\lambda_{k_0}=\frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}j(s_{i_0}) + \frac{1}{2}j(s_{k_0}) = \overline{(0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{i_0})} + \overline{(0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{k_0})} \\ &= \overline{(0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{i_0-k_0},\underbrace{2,\ldots,2}_{k_0})}. \end{aligned}$$

Avec les notations de la proposition, il s'agit du sommet t_{k_0,i_0}, qui est aussi le milieu de l'arête $[j(s_{i_0}),j(s_{k_0})]$. □

PROPOSITION 3.4.3. — * *Si $m=1$, alors π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement si $n=1$ et π est le caractère trivial de $\mathbb{K}^\times$.*

* *Supposons que $m\geq 2$. Pour l dans $\{1,\ldots,m-1\}$, notons*

$$g_l = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-l},\underbrace{\varpi_\Delta,\ldots,\varpi_\Delta}_{l})$$

de sorte que $g_l.j(s_0) = t_{0,l} = [\underbrace{\mathcal{O}_\Delta\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_\Delta}_{m-l}\oplus\underbrace{\mathcal{P}_\Delta\oplus\cdots\oplus\mathcal{P}_\Delta}_{l}]$.

Alors, π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement s'il existe l dans $\{1,\ldots,m-1\}$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{g_l^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_l\cap\mathcal{K}}(\pi_0,\mathbb{1})\neq 0.$$

Démonstration. — On cherche tous les points $g.j(s_0)$ qui sont dans l'image de C_0. Quitte à multiplier à gauche par un élément de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$, on peut s'intéresser uniquement au sommet $j(s_0)$ et, si $m\geq 2$, aux sommets qui sont sur une arête dont l'une des extrémités est $j(s_0)$.

Pour $j(s_0)$ on choisit $g=\mathrm{Id}$. On remarque que $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})\subseteq\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap\mathcal{K}$. Par suite :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap\mathcal{K}}(\pi_0,\mathbb{1})\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})}(\pi_0,\mathbb{1})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0,\mathbb{1}).$$

La représentation $\overline{\gamma}_0$ étant une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = \mathrm{GL}_m(k_\Delta)$, l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0,\mathbb{1})$ est non trivial si et seulement si $\overline{\gamma}_0=\mathbb{1}$. Supposons que $\overline{\gamma}_0=\mathbb{1}$. Puisque $\overline{\gamma}_0$ est une représentation cuspidale, on a forcément $m=1$. Par conséquent, si $m=1$, $\overline{\gamma}_0=\overline{\chi}$ est un caractère $k_{\mathbb{K}}$-régulier de $k_{\mathbb{K},n}^{\times}$. Donc $\overline{\chi}$ est le caractère trivial si et seulement si $n = 1$. On déduit de tout ceci que si $n \geq 2$, pour tout $m \in \mathbb{N}^{\times}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) = 0.$$

Supposons à présent que $m \geq 2$. Il y a donc seulement $m - 1$ sommets à considérer et il s'agit des sommets $g_1.j(s_0), g_2.j(s_0), \ldots, g_{m-1}.j(s_0)$. □

Rappelons un théorème démontré par Lusztig dans [13] (théorème 3.4 page 62). Pour cela, nous allons introduire quelques notations afin de pouvoir énoncer ce résultat.

Notation 3.4.4. — Notons G un groupe réductif connexe défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q impair. Soit $\theta : G \to G$ une involution définie sur $\mathbb{F}_q$. Soit K un sous-groupe fermé de G^{θ}, l'ensemble des points fixes de G sous l'action de θ, tel que K est défini sur $\mathbb{F}_q$ et contient $(G^{\theta})^{\circ}$, la composante de l'unité de G^{θ}. Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{F}_q$ et $\lambda : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_l}^{\times}$ (où l est un nombre premier ne divisant pas q) un caractère. Pour tout h dans G, on définit $\lambda^h : (h^{-1}Th)(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_l}^{\times}, x \mapsto \lambda(hxh^{-1})$. On note $\Xi = \{f \in G : \theta(f^{-1}Tf) = f^{-1}Tf\}$ vu comme un ensemble de $T - K$ doubles classes. Si T' est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{F}_q$ et θ-stable, on note Z le centralisateur de $(T' \cap K)^{\circ}$ et, pour tout t dans $T' \cap K$, $Z_t = Z \cap (Z_G(t))^{\circ}$. On définit alors l'application $\varepsilon_{T'}$ par :

$$\varepsilon_{T'} : T' \cap K \to \{-1, 1\},\ t \mapsto \sigma(Z)\sigma(Z_t)$$

où, pour tout groupe réductif connexe M défini sur $\mathbb{F}_q$, $\sigma(M)$ vaut -1 si le $\mathbb{F}_q$-rang de M est impair et vaut 1 sinon. On définit enfin l'ensemble $\widetilde{\widetilde{\Xi}}$:

$$\widetilde{\widetilde{\Xi}} = \{h \in \Xi : \lambda^h_{|(h^{-1}Th \cap K)(\mathbb{F}_q)} = \varepsilon_{h^{-1}Th}\}.$$

Théorème 3.4.5. — ([13]) *Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q impair. Soit $\theta : G \to G$ une involution définie sur $\mathbb{F}_q$. On fixe K un sous-groupe fermé de G^{θ}, l'ensemble des points fixes de G sous l'action de θ, tel que K est défini sur $\mathbb{F}_q$ et contient $(G^{\theta})^{\circ}$, la composante de l'unité de G^{θ}. Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{F}_q$ et $\lambda : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_l}^{\times}$ un caractère (où l est un nombre premier ne divisant pas q). Enfin, on note R_T^{λ} la représentation virtuelle de $G(\mathbb{F}_q)$ attachée à (T, λ). Alors :*

$$\frac{1}{|K(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in K(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Tr}(g, \mathrm{R}_T^{\lambda}) = \sum_{f \in \Xi} r(f)$$

où $r(f)$ est un entier appartenant à $\{-1, 0, 1\}$ qui est non nul si et seulement si $f \in \widetilde{\widetilde{\Xi}}$. Dans ce cas, on a :

$$r(f) = \sigma(T)\sigma(Z(((f^{-1}Tf) \cap K)^{\circ})).$$

LEMME 3.4.6. — *Si la représentation* $\overline{\gamma}_0$ *est distinguée par un sous-groupe de Lévi* L_l *isomorphe à* $\mathrm{GL}_{m-l}(k_\Delta) \times \mathrm{GL}_l(k_\Delta)$*, alors* m *est pair et* $l = \frac{m}{2}$*.*

Démonstration. — On peut voir $k_{\Delta,m}$ comme un $k_{\Delta,m}$-espace vectoriel de dimension 1 et l'identifier à k_Δ^m. Il existe donc une injection de k_Δ-algèbres :

$$\psi : k_{\Delta,m} \hookrightarrow \mathrm{End}_{k_\Delta}(k_{\Delta,m}) \simeq \mathrm{M}_m(k_\Delta), \quad x \mapsto (m_x : k_{\Delta,m} \to k_{\Delta,m}, y \mapsto xy).$$

On note T l'image de $k_{\Delta,m}^\times$ dans $\mathrm{GL}_m(k_\Delta)$ via l'application ψ. Soit l dans $\{1, \ldots, m-1\}$. Soit L_l le sous-groupe de Lévi :

$$L_l = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_{m-l}(k_\Delta) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_l(k_\Delta) \end{array}\right).$$

On peut voir $(\mathrm{GL}_m(k_\Delta), L_l)$ comme un espace symétrique. En effet, posons :

$$w_l = \left(\begin{array}{c|c} I_{m-l} & 0 \\ \hline 0 & -I_l \end{array}\right)$$

et $\tau : \mathrm{GL}_m(k_\Delta) \to \mathrm{GL}_m(k_\Delta)$, $x \mapsto w_l x w_l^{-1}$. Il est clair que $w_l^{-1} = w_l$, donc τ est une involution. Un calcul rapide nous montre que les points fixes de τ sont exactement les éléments de L_l.

On définit $\Xi = \{g \in \mathrm{GL}_m(k_\Delta) : \tau(g^{-1}Tg) = g^{-1}Tg\}$. Supposons que $\overline{\gamma}_0$ est L_l-distinguée, alors d'après l'article de Lusztig [13] (cf. le théorème 3.4.5, ici $\overline{\gamma}_0$ correspond à $R_T^{\overline{\chi}}$, cf. [10] 6.1 page 1874), l'ensemble Ξ est nécessairement non vide. Il existe donc g dans $\mathrm{GL}_m(k_\Delta)$, tel que $g^{-1}Tg$ est τ-stable. On peut voir l'application $\tau : \mathrm{M}_m(k_\Delta) \to \mathrm{M}_m(k_\Delta)$, $x \mapsto w_l x w_l^{-1}$ comme un automorphisme de k_Δ-algèbres et la restriction de τ à $\mathrm{GL}_m(k_\Delta)$ comme un automorphisme de groupes. Posons $l_1 = g^{-1}Tg \cup \{0\} = g^{-1}k_{\Delta,m}g$. Alors l_1 est une sous-k_Δ-algèbre de $\mathrm{M}_m(k_\Delta)$ isomorphe à $k_{\Delta,m}$, donc est également un corps. Ainsi $\tau_{|l_1} : l_1 \to l_1$ est un automorphisme de corps (k_Δ-linéaire) d'ordre 1 ou 2. Notons l_1^τ les points fixes de $\tau_{|l_1}$. Ou bien $l_1^\tau = l_1$ ou bien il existe l_0 sous-extension quadratique (de corps) de l_1 telle que $l_1^\tau = l_0$ (dans ce cas, puisque $k_\Delta \subseteq l_1$ et que les éléments de k_Δ sont fixés par τ, on a $k_\Delta \subseteq l_0 \subseteq l_1$).

Dans les deux cas, il existe un corps l_0 tel que $k_\Delta \subseteq l_0 \subseteq l_1$, $l_1^\tau = l_0$ et $[l_1 : l_0] \leq 2$. Puisque $\tau(x) = x$ pour tout x dans $l_0^\times$, on a $l_0^\times \subseteq L_l$ et l_0 peut être vu comme un sous-anneau (et même une sous-k_Δ-algèbre) de $\mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta) \times \mathrm{M}_l(k_\Delta)$. Soit $\psi_0 : l_0 \hookrightarrow \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta) \times \mathrm{M}_l(k_\Delta)$ une injection de k_Δ-algèbres (unitaires) (comme pour ψ, on peut définir $\widetilde{\psi} : l_1 \hookrightarrow \mathrm{M}_m(k_\Delta)$ une injection de k_Δ-algèbres ; alors ψ_0 est la restriction de $\widetilde{\psi}$ à l_0).

Posons $p_1 : \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta) \times \mathrm{M}_l(k_\Delta) \to \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta)$, $(X_1, X_2) \mapsto X_1$. De même, on définit l'application $p_2 : \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta) \times \mathrm{M}_l(k_\Delta) \to \mathrm{M}_l(k_\Delta)$, $(X_1, X_2) \mapsto X_2$. Il s'agit de deux morphismes surjectifs de k_Δ-algèbres unitaires. Alors $p_1 \circ \psi_0$:

$l_0 \to \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta)$ est un morphisme de k_Δ-algèbres unitaires, injectif (car l_0 est un corps). Il en est de même pour $p_2 \circ \psi_0$.

Ainsi, on peut supposer que $l_0 \subseteq \mathrm{M}_{m-l}(k_\Delta)$, et donc $[l_0 : k_\Delta] \leq m - l$. On montre de même que $[l_0 : k_\Delta] \leq l$.

Maintenant, si $l_1 = l_0$, on a $[l_0 : k_\Delta] = m \leq l$ et $m \leq m - l$, ce qui est impossible. On en déduit que $l_1 \neq l_0$, donc l_1/l_0 est une extension quadratique et m est pair. De plus, $[l_0 : k_\Delta] = m/2 \leq l$ et $m/2 \leq m - l$ donc $m - l = l = \frac{m}{2}$. □

Proposition 3.4.7. — *Si n est impair et $n \geq 2$, alors π n'est pas $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée.*

Démonstration. — Supposons que n est impair et $n \geq 2$, alors nécessairement m est également impair. Si $m = 1$, on a déjà vu que π n'est pas distinguée.

Supposons à présent que $m \geq 2$. Pour regarder si π est ou non distinguée, il y a $m - 1$ intersections à calculer : $g_l^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})g_l \cap \mathscr{K}$ où $l \in \{1, \ldots, m-1\}$. On sait que $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap g_l(\langle\varpi_\mathbb{K}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta))g_l^{-1}$ est inclus dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap g_l(\langle\varpi_\Delta\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta))g_l^{-1}$, or $\langle\varpi_\Delta\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta) = \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(s_0))$ (on utilise [4] ainsi que les notations 2.0.1), donc :

$$\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap g_l(\langle\varpi_\mathbb{K}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta))g_l^{-1} \subseteq \mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(g_l.j(s_0)).$$

Nous allons commencer par déterminer, pour l dans $\{1, \ldots, m-1\}$, l'intersection suivante :

$$\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(g_l.j(s_0)).$$

Comme $g_l.j(s_0) \in j(X_\mathbb{F})$, il existe $t_l \in X_\mathbb{F}$ tel que $g_l.j(s_0) = j(t_l)$. En utilisant l'injectivité et la $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariance de j, on vérifie facilement que :

$$\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(t_l)) = \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(t_l).$$

Nous avons vu lors de la démonstration de la proposition 3.4.2 que t_l est en fait le milieu de l'arête $[s_0, s_l]$. Nous devons à présent déterminer le stabilisateur de t_l. Comme t_l est le milieu de l'arête $[s_0, s_l]$, on a $\mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(t_l) = \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\mathscr{L})$ où $\mathscr{L}$ est la chaîne de période 2 : $\mathscr{L} = s_0 \cup s_l$ avec :

$$s_0 = [L_0] = [\mathcal{O}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\mathscr{D}]$$

et :

$$s_l = [L_l] = [\underbrace{\mathcal{O}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\mathscr{D}}_{m-l} \oplus \underbrace{\mathscr{P}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}_\mathscr{D}}_{l}].$$

Ainsi, $\mathscr{L} = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où :

$$\begin{aligned} M_0 &= L_0 = \mathcal{O}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\mathscr{D} \\ M_1 &= L_l = \underbrace{\mathcal{O}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_\mathscr{D}}_{m-l} \oplus \underbrace{\mathscr{P}_\mathscr{D} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}_\mathscr{D}}_{l} \end{aligned}$$

et pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $M_{k+2} = \varpi_{\mathscr{D}} M_k$. Soit (d_1, d_2) une partition associée à $\mathscr{L}$, alors :

$$d_1 = \dim_{k_{\mathscr{D}}}(M_1/M_2) = m - l \text{ et } d_2 = \dim_{k_{\mathscr{D}}}(M_0/M_1) = l.$$

On en déduit que :

$$\mathscr{A}(\mathscr{L})^\times = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_{m-l,m-l}(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) & \mathrm{M}_{m-l,l}(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) \\ \hline \mathrm{M}_{l,m-l}(\mathscr{P}_{\mathscr{D}}) & \mathrm{M}_{l,l}(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) \end{array}\right)^\times$$

et $\mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\mathscr{L}) = \langle \Pi_{\mathscr{L}} \rangle \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$ où pour tout i dans $\mathbb{Z}$, $\Pi_{\mathscr{L}} M_i = M_{i+\nu}$ avec $\nu \in \mathbb{N}^\times$ le plus petit possible. Pour tout i dans $\mathbb{Z}$, $\varpi_{\mathscr{D}} M_i = M_{i+2}$ donc $\nu \in \{1, 2\}$. Or, si $\Pi_{\mathscr{L}} M_i = M_{i+\nu}$, on a $d_i = d_{i+\nu}$ ((d_i) est ν-périodique), donc si $\nu = 1$, on a $d_2 = d_1$ et $n = d_1 + d_2 = 2d_1$, ce qui est impossible car on est dans le cas où n est impair. On en déduit que $\nu = 2$ et que l'on peut choisir $\Pi_{\mathscr{L}} = \varpi_{\mathscr{D}}\mathrm{Id}$. Finalement :

$$\mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\mathscr{L}) = \langle \varpi_{\mathscr{D}} \rangle \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$$

On va à présent caractériser $g_l(\langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta))g_l^{-1}$ dans

$$g_l(\langle \varpi_\Delta \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta))g_l^{-1}.$$

On remarque que pour tout x dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta)$, on a :

$$\mathrm{Nrd}(g_l x g_l^{-1}) = \mathrm{Nrd}(x) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}^\times.$$

De plus :

$$g_l(\langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta))g_l^{-1} = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1}$$

et :

$$g_l(\langle \varpi_\Delta \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta))g_l^{-1} = \langle \varpi_\Delta \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1}.$$

Des calculs d'intersections analogues à ceux de la démonstration de la proposition 3.3.4, nous permettent de montrer que :

$$v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_\Delta I_m)) = m = v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathscr{D}} I_m))$$
$$\text{et } v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathbb{K}} I_m)) = n = v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathbb{F}} I_m)).$$

On en déduit que :

$$\langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1} = \{g \in \mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(t_l)) : n \text{ divise } v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(g))\}.$$

Par conséquent, x appartient à $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1}$ si et seulement si x appartient à la fois à $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et $\mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(j(t_l))$ et n divise $v_{\mathbb{K}}(\mathrm{Nrd}(g))$, i.e si x appartient à $\mathscr{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(t_l)$ et n divise $2v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g))$.

Avec le calcul précédent, on a $g \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1}$ si et seulement si g appartient à $\langle \varpi_{\mathscr{D}} \rangle \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$ et n divise $2v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g))$. Si g appartient à $\langle \varpi_{\mathscr{D}} \rangle \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$, $g = \varpi_{\mathscr{D}}^r u$ ($r \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$), alors $v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g)) = v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathscr{D}}^r)) = rm$ et n divise $2v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(g))$ si et seulement si d divise r. On en déduit que $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle g_l \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_\Delta) g_l^{-1} = \langle \varpi_{\mathbb{F}} \rangle \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times$.

Et donc $g_l^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_l \cap \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta) = \langle\varpi_{\mathbb{F}}\rangle g_l^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_l$. Un calcul rapide nous permet de constater que la réduction de $g_l^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_l$ dans $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = \mathrm{GL}_m(k_\Delta)$ peut être vu comme le sous-groupe de Lévi L_l :

$$L_l = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_{m-l}(k_\Delta) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_l(k_\Delta) \end{array}\right).$$

On en déduit que π est distinguée si et seulement s'il existe l dans $\{1,\dots,m-1\}$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{F}}\rangle g_l^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_l}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0$$

i.e. si χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et :

$$\mathrm{Hom}_{g_l^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_l}(\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{L_l}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

Or, comme m est impair, d'après le lemme 3.4.6, $\overline{\gamma}_0$ n'est pas distinguée par le sous-groupe de Lévi L_l. Par conséquent, π n'est pas distinguée. □

Proposition 3.4.8. — *Si n est pair (alors m est pair), on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(\pi, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}} w\rangle\mathcal{L}_{\frac{m}{2}}}(\pi_0, \mathbb{1})$$

avec :

$$w = \left(\begin{array}{c|c} 0_{\frac{m}{2}} & I_{\frac{m}{2}} \\ \hline I_{\frac{m}{2}} & 0_{\frac{m}{2}} \end{array}\right) \ \textit{et}\ \mathcal{L}_{\frac{m}{2}} = g_{m/2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_{m/2}$$

où

$$\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}) & \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}) \\ \hline \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}) & \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}) \end{array}\right)^\times.$$

Par conséquent :

$$\overline{\mathcal{L}_{\frac{m}{2}}} = L_{\frac{m}{2}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{GL}_{m/2}(k_\Delta) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{m/2}(k_\Delta) \end{array}\right)$$

et la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement si la représentation π_0 est $\langle\varpi_{\mathbb{K}} w\rangle\mathcal{L}_{\frac{m}{2}}$-distinguée.

Démonstration. — On suppose que n est pair. Comme $n = md$ avec d impair, m est aussi pair. Comme dans la proposition précédente, il y a $m-1$ intersections à calculer. On remarque de même que si l est dans $\{1,\dots,m-1\}$ avec $l \neq \frac{m}{2}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{g_l^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_l\cap\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) = \mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{F}}\rangle L_l}(\pi_0, \mathbb{1}).$$

Alors, comme précédemment, on montre que nécessairement :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{F}}\rangle L_l}(\pi_0, \mathbb{1}) = 0.$$

On déduit de tout ceci que π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{g_{m/2}^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_{m/2}\cap\mathcal{K}}(\pi_0,\mathbb{1})\neq 0.$$

En utilisant un raisonnement analogue à 3.3.3 (utilisation de la formule de restriction de Mackey, de la réciprocité de Frobenius pour l'induction compacte ainsi que [11], qui est rappelé au théorème 3.3.2) on montre l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(\pi,\mathbb{1})\simeq \mathrm{Hom}_{g_{m/2}^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_{m/2}\cap\mathcal{K}}(\pi_0,\mathbb{1}).$$

On commence par calculer $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap g_{m/2}\mathcal{K}g_{m/2}^{-1}$. On remarque que :

$$\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap g_{m/2}\mathcal{K}g_{m/2}^{-1}\subseteq \mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap\mathcal{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(g_{m/2}.j(s_0))=\mathcal{K}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(t_{m/2}).$$

En raisonnant de façon analogue, on vérifie que :

$$\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap\mathcal{K}_{\mathrm{GL}_m(\Delta)}(g_{m/2}.j(s_0))=\langle\Pi_{\mathcal{L}}\rangle\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times$$

où :

$$\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}) & \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})\\ \hline \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}) & \mathrm{M}_{m/2}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})\end{array}\right)^\times \quad \text{et } \Pi_{\mathcal{L}}=\left(\begin{array}{c|c}0_{\frac{m}{2}} & I_{\frac{m}{2}}\\ \hline \varpi_{\mathcal{D}}I_{\frac{m}{2}} & 0_{\frac{m}{2}}\end{array}\right).$$

De plus, $v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\Pi_{\mathcal{L}}^2))=v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\varpi_{\mathcal{D}}I_m))=m$ donc $v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(\Pi_{\mathcal{L}}))=\frac{m}{2}$. Comme au premier cas, on a $x\in g_{m/2}^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_{m/2}\cap\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)$ si et seulement si x appartient à $\langle\Pi_{\mathcal{L}}\rangle\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times$ et n divise $2v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(x))$. Si $x\in\langle\Pi_{\mathcal{L}}\rangle\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times$, il existe $r\in\mathbb{Z}$ et u dans $\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times$ tels que $x=\Pi_{\mathcal{L}}^r u$. Ainsi $v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(x))=r\times\frac{m}{2}$. Par conséquent, n divise $2v_{\mathbb{F}}(\mathrm{Nrd}(x))$ si et seulement si n divise rm, i.e si $\frac{n}{m}=d$ divise r. On en déduit que :

$$\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})\cap g_{m/2}\mathcal{K}g_{m/2}^{-1}=\langle\Pi_{\mathcal{L}}^d\rangle\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times.$$

On a donc :

$$g_{m/2}^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_{m/2}\cap\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)=(g_{m/2}^{-1}\langle\Pi_{\mathcal{L}}^d\rangle g_{m/2})(g_{m/2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_{m/2}).$$

Un calcul rapide nous montre que :

$$\overline{g_{m/2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_{m/2}}\simeq L_{m/2}=\left(\begin{array}{c|c}\mathrm{GL}_{m/2}(k_\Delta) & 0\\ \hline 0 & \mathrm{GL}_{m/2}(k_\Delta)\end{array}\right).$$

De plus, comme $g_{m/2}^{-1}\Pi_{\mathcal{L}}^d g_{m/2}=(g_{m/2}^{-1}\Pi_{\mathcal{L}}g_{m/2})^d$ et que $g_{m/2}^{-1}\Pi_{\mathcal{L}}g_{m/2}=\varpi_\Delta w$ où :

$$w=\left(\begin{array}{c|c}0_{m/2} & I_{m/2}\\ \hline I_{m/2} & 0_{m/2}\end{array}\right)$$

et $w^2=I_m$, on a $(g_{m/2}^{-1}\Pi_{\mathcal{L}}g_{m/2})^d=\varpi_\Delta^d w^d=\varpi_{\mathbb{K}}(w^2)^{\frac{d-1}{2}}w=\varpi_{\mathbb{K}}w$. Ainsi :

$$g_{m/2}^{-1}\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})g_{m/2}\cap\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\Delta)=\langle\varpi_{\mathbb{K}}w\rangle(g_{m/2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{L})^\times g_{m/2}).$$

Finalement, π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_{\mathbb{K}} w\rangle L_{\frac{m}{2}}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0. \qquad \square$$

NOTATION 3.4.9. — On suppose que n est pair (i.e que m est pair).

On note l le corps résiduel de $\mathbb{K}_n$ (extension de degré m de k_Δ) et l_0 celui de $\mathbb{K}_{n/2}$ (extension de degré $m/2$ de k_Δ). On note $\Lambda = \mathbb{K}_d$ (resp. $\mathbb{L} = \mathbb{F}_d$), alors le corps résiduel k_Λ de Λ (resp. $k_{\mathbb{L}}$) s'identifie à k_Δ (resp. $k_{\mathscr{D}}$). Soit $\varepsilon \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}_n}^\times$ tel que $\overline{\varepsilon} \in l^\times \backslash l_0^\times$ et $\overline{\varepsilon}^2 \in l_0^\times$. Ainsi $l = l_0(\overline{\varepsilon})$ et $(1, \overline{\varepsilon})$ est une l_0-base de l. Comme l_0 est une extension de degré $m/2$ de k_Δ, on peut voir l_0 comme un k_Δ-espace vectoriel de dimension $m/2$. On a donc une injection :

$$i : l_0 \hookrightarrow \mathrm{End}_{k_\Delta}(l_0) \simeq \mathrm{M}_{m/2}(k_\Delta),\ x \mapsto \varphi_x : y \mapsto xy.$$

On en déduit que $l_0^\times$ s'injecte dans le sous groupe de Lévi $L_{\frac{m}{2}}$ via :

$$l_0 \to \mathrm{M}_{m/2}(k_\Delta) \times \mathrm{M}_{m/2}(k_\Delta),\ x \mapsto (i(x), i(x)).$$

Alors $\overline{\varepsilon}$ s'identifie à une matrice $\nu \in \mathrm{GL}_{m/2}(k_\Delta)$ (et $\nu^2 \in i(l_0^\times)$).

De même, on a une injection :

$$i_0 : l \hookrightarrow \mathrm{M}_m(k_\Delta),\ x = x_1 + \overline{\varepsilon} x_2 \mapsto \mathrm{Mat}_{(1,\overline{\varepsilon})}(\varphi_x)$$

où φ_x est la multiplication à gauche par x. On en déduit que le tore $l^\times$ s'identifie à :

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2\nu^2 \\ \hline X_2 & X_1 \end{array} \right) : X_1, X_2 \in i(l_0) \right\}^\times .$$

Posons :

$$\eta = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \nu^2 \\ \hline I_{m/2} & 0 \end{array} \right).$$

On remarque que η correspond à $\overline{\varepsilon}$ et que :

$$\langle w\rangle L_{m/2} = \langle \eta\rangle L_{m/2} \Rightarrow \langle \varpi_{\mathbb{K}} w\rangle \mathscr{L}_{m/2} = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}.$$

On définit $\mathbb{E}$, extension totalement ramifiée de degré 2 de $\mathbb{F}_{n/2}$, engendrée par $\varpi_{\mathbb{K}}\eta$ sur $\mathbb{F}_{n/2}$. On a le diagramme d'extensions de corps suivant :

$$
\begin{tikzcd}
l \arrow[d, dash, "2"'] \\
l_0 \arrow[d, dash, "m/2"'] \\
k_{\mathcal{D}} = k_{\Delta} \arrow[d, dash, "d"'] \\
k = k_{\mathbb{F}} = k_{\mathbb{K}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \Lambda_m = \mathbb{K}_n \arrow[dl, dash, "2"', "\mathrm{n.r}"] \arrow[d, dash, "2"', "\mathrm{t.r}"] \arrow[dr, dash, "\mathrm{n.r}", "2"'] & \\
\Lambda_{m/2} = \mathbb{K}_{n/2} \arrow[d, dash, "n/2"', "\mathrm{n.r}"] \arrow[dr, dash, "\mathrm{t.r}", "2"'] & \mathbb{F}_n \arrow[d, dash, "2"', "\mathrm{n.r}"] & \mathbb{E} \arrow[dl, dash, "2"', "\mathrm{t.r}"] \\
\mathbb{K} \arrow[ddr, dash, "\mathrm{t.r}", "2"'] & \mathbb{F}_{n/2} \arrow[d, dash, "m/2"', "\mathrm{n.r}"] & \\
 & \mathbb{L} \arrow[d, dash, "d"', "\mathrm{n.r}"] & \\
 & \mathbb{F}. &
\end{tikzcd}
$$

On vérifie facilement que $\varpi_{\mathbb{K}}\eta$ est une uniformisante de $\mathbb{E}$. On définit alors υ un caractère de $\langle\varpi_{\mathbb{K}}\eta\rangle\mathscr{L}_{m/2}$ par :

$$\forall x \in \mathscr{L}_{m/2}, \forall s \in \mathbb{Z}, \upsilon((\varpi_{\mathbb{K}}\eta)^s x) = \chi((\varpi_{\mathbb{K}}\eta)^s)\chi_{\Lambda_m/\mathbb{E}}((\varpi_{\mathbb{K}}\eta)^s)$$

où $\chi_{\mathbb{K}_n/\mathbb{E}} = \chi_{\Lambda_m/\mathbb{E}}$ est le caractère quadratique de $\mathbb{K}_n/\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{K}_n/\mathbb{E}$ est non ramifiée, la norme $\mathrm{N}_{\mathbb{K}_n/\mathbb{E}}$ est surjective sur les unités. Puisque $\varpi_{\mathbb{K}}\eta$ est une uniformisante de $\mathbb{E}$, on a :

$$\upsilon(\varpi_{\mathbb{K}}\eta) = -\chi(\varpi_{\mathbb{K}})\overline{\chi}(\eta).$$

Lemme 3.4.10. — *On suppose que m est pair. Alors, la représentation cuspidale $\overline{\gamma}_0$ est $L_{m/2}$-distinguée si et seulement si $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^{\times}$. De plus, si $\overline{\gamma}_0$ est $L_{m/2}$-distinguée on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})) = 1.$$

Démonstration. — Pour la démonstration, on peut se référer à l'article [10], proposition 6.1 page 1874. □

Remarque 3.4.11. — Une conséquence de ce lemme est que si π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée, alors m est pair, χ est trivial sur $\mathbb{F}^{\times}$ et $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^{\times}$.

Lemme 3.4.12. — *L'inclusion canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\eta\rangle\mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \upsilon) \subseteq \mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Démonstration. — Pour la démonstration, on pourra se référer à [10], proposition 6.3 page 1877. □

THÉORÈME 3.4.13. — *Supposons que $n \geq 2$. La représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si m est pair (i.e n est pair), χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$, $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$ et $\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta) = -1$.*

De plus, si π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée, on a :

$$\dim_\mathbb{C}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1})) = 1.$$

Démonstration. — Supposons que $n \geq 2$. Supposons tout d'abord que π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée, alors nécessairement m est pair, χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} w\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0.$$

En particulier $\overline{\gamma}_0$ est $L_{m/2}$-distinguée donc $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$. Rappelons que l'on a l'égalité $\langle \varpi_\mathbb{K} w\rangle \mathscr{L}_{m/2} = \langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}$. Comme :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1}) \subseteq \mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$$

et que l'espace $\mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ est de dimension 1, on a :

$$\mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) = \mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1})$$

donc d'après le lemme 3.4.12 :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1}) = \mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \upsilon).$$

Fixons φ forme linéaire non nulle dans $\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1})$ et notons V l'espace de π_0. Alors, pour tout u dans V, $\varphi(\pi_0(\varpi_\mathbb{K}\eta).u) = \varphi(u)$. Or $\varphi(\pi_0(\varpi_\mathbb{K}\eta).u) = \upsilon(\varpi_\mathbb{K}\eta)\varphi(u) = -\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta)\varphi(u)$. On en déduit que $\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta) = -1$. De plus, si π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée, on a :

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1})) = \dim(\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} w\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1})) = \dim(\mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})) = 1.$$

Supposons à présent que m est pair, χ trivial sur $\mathbb{F}^\times$, $\overline{\chi}$ trivial sur $l_0^\times$ et $\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta) = -1$. Comme m est pair et $\overline{\chi}$ trivial sur $l_0^\times$, d'après le lemme 3.4.10 :

$$\dim(\mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})) = 1.$$

De plus, d'après le lemme 3.4.12, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \upsilon) \simeq \mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}).$$

Puisque $\chi(\varpi_\mathbb{K})\overline{\chi}(\eta) = -1$, υ est le caractère trivial, par suite :

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_\mathbb{K} \eta\rangle \mathscr{L}_{m/2}}(\pi_0, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{L_{m/2}}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) \neq 0$$

et donc π est bien $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée. □

4. Conditions de distinction lorsque d est pair

4.1. Quelques propriétés. — On suppose dans toute cette partie que d est pair.

REMARQUE 4.1.1. — Puisque d est pair, on a $\delta = d/2$ et $\mu = 2m$.
De plus, étant donné que 2 divise d, on peut supposer que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathcal{D}$.

Rappelons le théorème du bicommutant (on pourra se référer à [6], Partie I paragraphe 3) :

THÉORÈME 4.1.2. — *Soit k un corps commutatif, S une k-algèbre centrale simple (de dimension finie) et R une sous-algèbre simple de S. On a les propriétés suivantes :*

i) *$C(R)$, le commutant de R dans S, est une algèbre simple.*
ii) *$[S : k] = [R : k][C(R) : k]$.*
iii) *$C(C(R)) = R$, i.e R est égal à son bicommutant.*

PROPRIÉTÉ 4.1.3. — *On peut identifier Δ au commutant de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{D}$:*

$$\Delta = \{x \in \mathcal{D} : \forall k \in \mathbb{K}, xk = kx\}.$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le théorème 4.1.2 pour montrer que le commutant de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{D}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre à division centrale d'indice $d/2$. De plus, si l'on note Δ' le commutant de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{D}$, on a un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres :

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \to \mathrm{End}_{\Delta'}(\mathcal{D}),\ y \otimes k \mapsto (\mathcal{D} \to \mathcal{D}, x \mapsto yxk). \qquad \square$$

REMARQUE 4.1.4. — On remarque que :

$$[\mathcal{D} : \mathbb{F}] = d^2 = [\mathcal{D} : \Delta][\Delta : \mathbb{K}][\mathbb{K} : \mathbb{F}] = [\mathcal{D} : \Delta] \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times 2.$$

Donc $[\mathcal{D} : \Delta] = 2$ et $\mathcal{D}$ peut être vu comme un Δ-espace vectoriel à droite de dimension 2.

On montre facilement le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 4.1.5. — *Posons :*

$$\Phi : \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \to \mathrm{End}_{\Delta}(\mathcal{D}),\ x \otimes k \mapsto [f_{x\otimes k} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, y \mapsto xyk].$$

Alors Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

PROPRIÉTÉ 4.1.6. — *Il existe d_0 dans $\mathcal{D}^\times$ tel que pour tout x dans $\mathcal{D}$ et tout k dans $\mathbb{K}$:*

$$\Phi(\sigma.(x \otimes k)) : y \mapsto f_{x\otimes k}(yd_0)d_0^{-1}.$$

De plus, d_0 est unique modulo la multiplication par un élément de Δ à droite.

Démonstration. — On remarque que $\mathbb{K}$ est une sous-$\mathbb{F}$-algèbre simple de $\mathcal{D}$, et que $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est un isomorphisme de $\mathbb{F}$-algèbres. Le théorème de Skölem-Noether nous dit que $\sigma : \mathbb{K} \to \mathcal{D}$ peut être étendu en un automorphisme intérieur de $\mathcal{D}$:

$$\exists d_1 \in \mathcal{D}^\times : \forall x \in \mathbb{K}, \sigma(x) = d_1 x d_1^{-1}.$$

Puis supposons que $d_2 \in \mathcal{D}^\times$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \sigma(x) = d_1 x d_1^{-1} = d_2 x d_2^{-1}.$$

Alors $d_2^{-1} d_1$ est dans le commutant de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{D}$, donc appartient à Δ. □

4.2. Cas où l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée. — On suppose dans toute cette partie que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée.

PROPRIÉTÉ 4.2.1. — *Dans l'énoncé de la propriété 4.1.6, on peut choisir* $d_0 = \varpi_{\mathcal{D}}$.

Démonstration. — On suppose que $\mathbb{K}$ est normalisée par $\varpi_{\mathcal{D}}$. On peut choisir $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ une extension non ramifiée de degré d contenue dans $\mathcal{D}$ qui soit normalisée par $\varpi_{\mathcal{D}}$. Puisque 2 divise d et que $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, on peut supposer que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Soit :

$$\tau : \mathbb{L} \to \mathbb{L}, x \mapsto \varpi_{\mathcal{D}} x \varpi_{\mathcal{D}}^{-1}.$$

Alors τ est un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F})$. On en déduit que $\tau_{|\mathbb{K}} = \sigma$ et que l'on peut choisir $d_0 = \varpi_{\mathcal{D}}$. □

REMARQUE 4.2.2. — Comme $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, on peut supposer que $\varpi_{\mathbb{F}} = \varpi_{\mathbb{K}}$. On a donc :

$$\varpi_{\mathcal{D}}^d = \varpi_{\mathbb{F}} = \varpi_{\mathbb{K}} = \varpi_{\Delta}^{\frac{d}{2}}.$$

De plus, pour tout x dans $\Delta^\times$, $v_{\mathcal{D}}(x) = 2 v_\Delta(x)$.

PROPRIÉTÉ 4.2.3. — *On peut choisir* $(1, \varpi_{\mathcal{D}})$ *comme* Δ*-base de* $\mathcal{D}$ *(à droite). On a ainsi un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres :*

$$\Phi : \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \to \mathrm{M}_2(\Delta),\ x \otimes k \mapsto \mathrm{Mat}_{(1,\varpi_{\mathcal{D}})}(f_{x\otimes k}).$$

Via cet isomorphisme , $\varpi_{\mathcal{D}}$ *s'identifie à la matrice :*

$$\Pi_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \varpi_\Delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_\Delta \oplus \varpi_{\mathcal{D}} \mathcal{O}_\Delta$ *et* $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = \mathcal{P}_\Delta \oplus \varpi_{\mathcal{D}} \mathcal{O}_\Delta$.

Démonstration. — Il est clair que $(1,\varpi_{\mathcal{D}})$ est une Δ-base de $\mathcal{D}$. On fixe $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension non ramifiée de degré $d/2$ contenue dans $\mathcal{D}$, alors $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L}$. On en déduit que :

$$\mathcal{O}_\Delta = 1.\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \oplus \varpi_\Delta.\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \oplus\cdots\oplus \varpi_\Delta^{d/2-1}.\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$$

et :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}} = 1.\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \oplus \varpi_{\mathcal{D}}.\mathcal{O}_{\mathbb{L}} \oplus\cdots\oplus \varpi_{\mathcal{D}}^{d-1}.\mathcal{O}_{\mathbb{L}}.$$

Ainsi $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_\Delta \oplus \varpi_{\mathcal{D}}\mathcal{O}_\Delta$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = \mathcal{P}_\Delta \oplus \varpi_{\mathcal{D}}\mathcal{O}_\Delta$. Il est immédiat que $\Phi(\varpi_{\mathcal{D}}) = \Pi_\Delta$. $\square$

NOTATION 4.2.4. — Pour $i\in[\![0,m-1]\!]$, on définit $e_{2i+1}=(u_1,\dots,u_m)\in\mathcal{D}^m$ par :

$$u_i = 1 \quad \text{et} \quad u_j = 0 \quad \text{sinon}$$

et, pour $i\in[\![1,m]\!]$, on définit $e_{2i}=(u_1,\dots,u_m)\in\mathcal{D}^m$ par :

$$u_i = \varpi_{\mathcal{D}} \quad \text{et} \quad u_j = 0 \quad \text{sinon.}$$

Alors $(e_1,\dots,e_{2m})$ est une Δ-base de $\mathcal{D}^m$. En fixant $(e_1,\dots,e_{2m})$ comme Δ-base de $\mathcal{D}^m$, on peut identifier $\mathrm{End}_\Delta(\mathcal{D}^m)$ à $\mathrm{M}_{2m}(\Delta)$. On fixe pour la suite un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres :

$$\widetilde{\Phi} : \mathrm{M}_m(\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{2m}(\Delta) \simeq \mathrm{End}_\Delta(\mathcal{D}^m),\ [a_{i,j}] \mapsto [\Phi(a_{i,j})]$$

(on en déduit une injection de $\mathrm{M}_m(\mathcal{D})$ dans $\mathrm{M}_{2m}(\Delta)$). On notera :

$$\mathcal{L}_1 = (L_i^1)_{i\in\mathbb{Z}},\ L_i^1 = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2i}\oplus\cdots\oplus\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2i} \subseteq \mathcal{D}^m$$

et :

$$\mathcal{L}_2 = (L_i^2)_{i\in\mathbb{Z}},\ L_i^2 = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2i+1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2i+1}.$$

Pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{2i}$ est un $\mathcal{O}_\Delta$-réseau de $\mathcal{D}$. Donc L_i^1 est un $\mathcal{O}_\Delta$-réseau de $\mathcal{D}^m$. De même, L_i^2 est un $\mathcal{O}_\Delta$-réseau de $\mathcal{D}^m$. On vérifie facilement que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des chaînes de période 1, ce sont donc des sommets de l'immeuble $X_{\mathbb{K}}$.

Pour i dans $\{1,2\}$, on note $\mathcal{A}_i$ les ordres héréditaires associés à $\mathcal{L}_i$, alors :

$$\mathcal{A}_i = \{a\in\mathrm{M}_{2m}(\Delta) : \forall k\in\mathbb{Z}, aL_k^i\subseteq L_k^i\}$$

et :

$$\mathcal{K}_i = \mathcal{K}(\mathcal{L}_i) = \{g\in\mathrm{GL}_{2m}(\Delta) : g\mathcal{A}_i g^{-1} = \mathcal{A}_i\}.$$

D'après [4] (théorème 1.3.2 page 217), $\mathcal{K}_i = \{g\in\mathrm{GL}_{2m}(\Delta) : \exists n_g\in\mathbb{Z} : \forall k\in\mathbb{Z}, g.L_k^i = L_{k+n_g}^i\}$ est un sous-groupe ouvert compact modulo le centre maximal.

PROPRIÉTÉ 4.2.5. — *L'action de $\langle\sigma\rangle$ échange les deux sommets $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, i.e $\sigma(\mathcal{K}_1)=\mathcal{K}_2$.*

Démonstration. — Soit $g \in \mathscr{K}_1$. Soit $n_g \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $l \in \mathbb{Z}, g.L^1_l = L^1_{l+n_g}$. Identifions $\mathscr{P}^{2i}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}^{2i}_{\mathscr{D}}$ avec $\mathscr{P}^{2i}_{\mathscr{D}} \times \cdots \times \mathscr{P}^{2i}_{\mathscr{D}}$. Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a :

$$g(\mathscr{P}^{2l}_{\mathscr{D}} \times \cdots \times \mathscr{P}^{2l}_{\mathscr{D}}) = \mathscr{P}^{2(l+n_g)}_{\mathscr{D}} \times \cdots \times \mathscr{P}^{2(l+n_g)}_{\mathscr{D}}.$$

Puisque $g \in \mathrm{End}_\Delta(\mathscr{D}^m)$, on peut supposer que :

$$g = \widetilde{\Phi}[a_{i,j}], a_{i,j} = \sum_{q=1}^{r_{i,j}} d^q_{i,j} \otimes k^q_{i,j}$$

où $d^q_{i,j} \in \mathscr{D}$ et $k^q_{i,j} \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathscr{D}^m$, on a :

$$g(x_1, \ldots, x_m) = [\Phi(a_{i,j})][x_1, \ldots, x_m] = (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{1,j})(x_j), \ldots, \sum_{j=1}^m \Phi(a_{m,j})(x_j))$$

où, pour tout i dans $\{1, \ldots, m\}$, on a $\Phi(a_{i,j})(x_j) = \sum_{q=1}^{r_{i,j}} d^q_{i,j} x_j k^q_{i,j}$ et :

$$\begin{aligned} g^\sigma(x_1, \ldots, x_m) &= [\Phi^\sigma(a_{i,j})][x_1, \ldots, x_m] \\ &= ((\sum_{j=1}^m \Phi(a_{1,j})(x_j \varpi_{\mathscr{D}}))\varpi_{\mathscr{D}}^{-1}, \ldots, (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{m,j})(x_j \varpi_{\mathscr{D}}))\varpi_{\mathscr{D}}^{-1}) \end{aligned}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathscr{P}^{2i+1}_{\mathscr{D}} \times \cdots \times \mathscr{P}^{2i+1}_{\mathscr{D}} = L^2_i$. Alors $(x_1\varpi_{\mathscr{D}}, \ldots, x_m\varpi_{\mathscr{D}}) \in L^1_{i+1}$. Puisque $g \in \mathscr{K}_1$, on a :

$$\begin{aligned} & g(x_1\varpi_{\mathscr{D}}, \ldots, x_m\varpi_{\mathscr{D}}) \in L^1_{i+1+n_g} \\ & \qquad \Rightarrow \forall l \in \{1, \ldots, m\}, \sum_{j=1}^m \Phi(a_{l,j})(x_j\varpi_{\mathscr{D}}) \in \mathscr{P}^{2(i+1+n_g)}_{\mathscr{D}} \\ & \qquad \Rightarrow \forall l \in \{1, \ldots, m\}, (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{l,j})(x_j\varpi_{\mathscr{D}}))\varpi_{\mathscr{D}}^{-1} \in \mathscr{P}^{2(i+n_g)+1}_{\mathscr{D}} \\ & \qquad \Rightarrow g^\sigma(x_1, \ldots, x_m) \in L^2_{i+n_g}. \end{aligned}$$

On en déduit que $g^\sigma \in \mathscr{K}_2$.

Par suite, $\sigma(\mathscr{K}_1) \subseteq \mathscr{K}_2$, et par maximalité, $\sigma(\mathscr{K}_1) = \mathscr{K}_2$. □

PROPRIÉTÉ 4.2.6. — *Soit $A_{\mathbb{F}}$ (resp. $A_{\mathbb{K}}$) l'appartement standard de $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) que l'on identifie (en utilisant 2.0.5) à l'espace affine $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ (resp. $\mathbb{R}^{2m}/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$) et dont l'ensemble des sommets s'identifie à $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ (resp. $\mathbb{Z}^{2m}/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$). Soit $j : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ l'injection naturelle entre les immeubles. Pour tout sommet $x = \overline{(x_1, \ldots, x_m)}$ de $X_{\mathbb{F}}$, où pour tout i dans $[\![1, m]\!]$, $x_i \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$j(x) = \overline{(y_1, y_2, \ldots, y_{2m-1}, y_{2m})}$$

où, pour tout i dans $[\![1, m]\!]$, $y_{2i-1} = (x_i + 1)/2$ et $y_{2i} = x_i/2$.

REMARQUE 4.2.7. — Pour définir j, il nous faut trouver un sommet s de $X_{\mathbb{F}}$ tel que $j(s)$ soit fixe par l'action de σ. On remarque que, puisque $\mathscr{K}_1^\sigma = \mathscr{K}_2$, σ échange les deux sommets $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, donc fixe leur milieu.

Démonstration. — On fixe V un $\mathscr{D}$-espace vectoriel (à droite) de dimension m et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une $\mathscr{D}$-base de V. Alors $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^\times$ s'identifie à $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. On a vu que $(1, \varpi_{\mathscr{D}})$ est une Δ-base (à droite) de $\mathscr{D}$. Posons $\widetilde{\mathscr{B}} = (e_1.1, e_1.\varpi_{\mathscr{D}}, \dots, e_m.1, e_m.\varpi_{\mathscr{D}})$, ainsi $\widetilde{\mathscr{B}}$ est une Δ-base de V qui nous permet d'identifier $(\mathrm{End}_\Delta(V))^\times$ à $\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$. Soit $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) l'immeuble de Bruhat-Tits de $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^\times \simeq \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ (resp. l'immeuble de $(\mathrm{End}_\Delta(V))^\times \simeq \mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$). Soit $A_{\mathbb{F}}$ (resp. $A_{\mathbb{K}}$) l'appartement de $X_{\mathbb{F}}$ associé à la base $\mathscr{B}$ (resp. associé à la base $\widetilde{\mathscr{B}}$) que l'on identifie à l'espace affine $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$ (resp. $\mathbb{R}^{2m}/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$) et dont l'ensemble des sommets s'identifie à $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ (resp. $\mathbb{Z}^{2m}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$). On définit s_0, un sommet de $A_{\mathbb{F}}$ par :

$$s_0 = (e_1.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^i \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^i)_{i\in\mathbb{Z}} = \overline{(0, \dots, 0)}.$$

On a déjà vu que l'action du groupe de Galois $\langle\sigma\rangle$ échange les stabilisateurs des deux sommets de $A_{\mathbb{K}}$, $\mathscr{L}_1 = (e_1.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{2i} \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{2i})_{i\in\mathbb{Z}}$ et $\mathscr{L}_2 = (e_1.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{2i+1} \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}^{2i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. On en déduit que σ échange les deux sommets $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, et donc fixe leur milieu. On définit $j(s_0)$ comme étant le milieu du segment $[\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2]$. Comme $\mathscr{O}_{\mathscr{D}} = \mathscr{O}_\Delta \oplus \varpi_{\mathscr{D}}\mathscr{O}_\Delta$, on a :

$$\mathscr{L}_1 = [e_1.\mathscr{O}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{O}_{\mathscr{D}}] = [e_1.\mathscr{O}_\Delta \oplus e_1\varpi_{\mathscr{D}}.\mathscr{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{O}_\Delta \oplus e_m\varpi_{\mathscr{D}}.\mathscr{O}_\Delta].$$

Donc $\mathscr{L}_1 = \overline{(\underbrace{0, \dots, 0}_{2m})}$. De même, puisque $\mathscr{P}_{\mathscr{D}} = \mathscr{P}_\Delta \oplus \varpi_{\mathscr{D}}\mathscr{O}_\Delta$, on a :

$$\mathscr{L}_2 = [e_1.\mathscr{P}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{P}_{\mathscr{D}}] = [e_1.\mathscr{P}_\Delta \oplus e_1\varpi_{\mathscr{D}}.\mathscr{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus e_m.\mathscr{P}_\Delta \oplus e_m\varpi_{\mathscr{D}}.\mathscr{O}_\Delta].$$

Et $\mathscr{L}_2 = \overline{(\underbrace{1, 0, \dots, 1, 0}_{2m})}$. Enfin :

$$\begin{aligned} j(s_0) &= \mathrm{milieu}([\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2]) = \frac{1}{2}\mathscr{L}_1 + \frac{1}{2}\mathscr{L}_2 \\ &= \overline{(\underbrace{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots, \frac{1}{2}, 0}_{2m})}. \end{aligned}$$

D'après la remarque précédente, on a $\sigma(j(s_0)) = j(s_0)$, de plus :

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) \simeq \langle\varpi_{\mathscr{D}}\rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}).$$

Or $\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ stabilise les chaînes ($\mathscr{O}_{\mathscr{D}}$-chaînes de période 2) $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ et $\varpi_{\mathscr{D}}$ échange ces deux chaînes. On en déduit que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0)$ stabilise bien le milieu de $[\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2]$, d'où l'inclusion $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)}(j(s_0))$.

On va définir j sur les sommets de $A_{\mathbb{F}}$. On fixe $x = \overline{(x_1, \dots, x_m)}$ un sommet de $A_{\mathbb{F}}$ ($x_i \in \mathbb{Z}$). Alors $x = g_x.s_0$ où $g_x = \mathrm{diag}(\varpi_{\mathscr{D}}^{x_1}, \dots, \varpi_{\mathscr{D}}^{x_m}) \in \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. On pose $j(x) = \widetilde{\Phi}(g_x).j(s_0)$. On a :

$$\widetilde{\Phi}(g_x) = \begin{pmatrix} \Pi_\Delta^{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \Pi_\Delta^{x_m} \end{pmatrix}$$

(où Π_Δ a été définie en 4.2.3). Comme $x_i \in \mathbb{Z}$, on fixe $k_i, r_i \in \mathbb{Z}$ tels que $x_i = 2k_i + r_i$, $r_i \in \{0, 1\}$.

Alors $\Pi_\Delta^{x_i} = \Pi_\Delta^{r_i}(\Pi_\Delta^2)^{k_i} = \Pi_\Delta^{r_i}\varpi_\Delta^{k_i} I_{2m}$. On remarque que, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$:

$$\Pi_\Delta \begin{pmatrix} \mathscr{P}_\Delta^\alpha \\ \mathscr{P}_\Delta^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_\Delta^{\beta+1} \\ \mathscr{P}_\Delta^\alpha \end{pmatrix}.$$

On a alors $j(x) = \overline{(y_1, y_2, \dots, y_{2m-1}, y_{2m})}$ où, pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$:

$$(y_{2i-1}, y_{2i}) = \left(\frac{1}{2} + k_i, 0 + k_i\right) = \left(\frac{1}{2} + k_i, k_i\right)$$

si x_i est pair ($r_i = 0$) et :

$$(y_{2i-1}, y_{2i}) = \left(0 + k_i + 1, \frac{1}{2} + k_i\right) = \left(k_i + 1, \frac{1}{2} + k_i\right)$$

si x_i est impair ($r_i = 1$). On a donc bien défini j sur les sommets de $A_{\mathbb{F}}$. On définit j sur l'appartement tout entier par affinité.

Soit T le tore maximal déployé associé à l'appartement $A_{\mathbb{F}}$, et $N(T)$ son normalisateur. Alors, avec le même raisonnement que dans la démonstration de la propriété **??**, on vérifie que j est $N(T)$-équivariante sur les sommets en remarquant que si $x = \overline{(x_1, \dots, x_m)}$ est un sommet de $A_{\mathbb{F}}$ et si $g \in N(T)$ est de la forme $g = tP_\tau$ avec $t = \mathrm{diag}(\varpi_{\mathscr{D}}^{\alpha_1}, \dots, \varpi_{\mathscr{D}}^{\alpha_m})$, τ une permutation de $\{1, \dots, m\}$ et P_τ la matrice de la permutation τ, alors $j(tP_\tau.x) = \widetilde{\Phi}(t)\widetilde{\Phi}(P_\tau).j(x)$. Les calculs montrent que $\widetilde{\Phi}(P_\tau) = P_{\widetilde{\tau}}$ où $\widetilde{\tau}$ est une permutation de $\{1, \dots, 2m-1, 2m\}$ définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \widetilde{\tau}(2k-1) = 2\tau(k) - 1, \widetilde{\tau}(2k) = 2\tau(k).$$

On en déduit que j est $N(T)$-équivariante sur les sommets, et donc sur l'appartement $A_{\mathbb{F}}$. Par conséquent, j est bien l'injection naturelle entre les deux immeubles. $\square$

Proposition 4.2.8. — *Notons C_0 la chambre standard de $X_{\mathbb{F}}$. Alors il n'y a aucun sommet de $X_{\mathbb{K}}$ dans l'image de la chambre standard, $j(C_0)$.*

Démonstration. — Notons $\{s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ les sommets de la chambre standard C_0, c'est-à-dire que pour tout i dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, on a :

$$s_i = [\mathcal{O}_{\mathcal{D}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \oplus \underbrace{\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_{\mathcal{D}}}_{i}].$$

Or $s_i = h_i.s_0$ où $h_i = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \underbrace{\varpi_{\mathcal{D}}, \ldots, \varpi_{\mathcal{D}}}_{i})$. En utilisant les mêmes notations que dans la démonstration précédente, on a $\Phi(1) = I_2$, et $\Phi(\varpi_{\mathcal{D}}) = \Pi_\Delta$. La $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-équivariance de j nous permet de vérifier que $j(s_i) = \widetilde{\Phi}(h_i).j(s_0)$ où $\widetilde{\Phi}(h_i)$ est la matrice diagonale par blocs $\widetilde{\Phi}(h_i) = \mathrm{diag}(I_2, \ldots, I_2, \underbrace{\Pi_\Delta, \ldots, \Pi_\Delta}_{i})$.

On en déduit que :

$$j(s_i) = \overline{(\underbrace{\frac{1}{2}, 0, \ldots, \frac{1}{2}, 0}_{2(m-i)}, \underbrace{1, \frac{1}{2}, \ldots, 1, \frac{1}{2}}_{2i})}.$$

Soit $t \in j(C_0)$. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in (\mathbb{R}^+)^m$ tels que :

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i j(s_i) \text{ et } \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i = 1.$$

Ainsi, on peut calculer les deux premières coordonnées de t :

$$t = \overline{((\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i) \times \frac{1}{2}, 0, \ldots)} = \overline{(\frac{1}{2}, 0, \ldots)}.$$

Par conséquent, t ne peut pas être à coordonnées entières dans $\mathbb{R}^{2m}/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$, donc ne peut en aucun cas être un sommet de $X_{\mathbb{K}}$. □

4.3. Cas où l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, modérément ramifiée. — On suppose dans toute cette partie que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, modérément ramifiée. On fixe les uniformisantes telles que $\varpi_{\mathbb{K}}^2 = \varpi_{\mathbb{F}}$.

REMARQUE 4.3.1. — On a $\varpi_{\mathcal{D}}^d = \varpi_{\mathbb{F}} = \varpi_{\mathbb{K}}^2 = \varpi_\Delta^d$. Ainsi, pour tout x dans $\Delta^\times$, on a $v_{\mathcal{D}}(x) = v_\Delta(x)$. Comme dans la partie précédente, on déduit de Φ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres, $\widetilde{\Phi}$, entre $\mathrm{M}_m(\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})$ et $\mathrm{End}_\Delta(\mathcal{D}^m)$.

PROPRIÉTÉ 4.3.2. — *Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^k \times \cdots \times \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Alors $\mathcal{L}$ est une $\mathcal{O}_\Delta$-chaîne de réseaux de $\mathcal{D}^m$ de période 1, donc s'identifie à un sommet de l'immeuble de Bruhat-Tits $X_{\mathbb{K}}$.*

Notons, comme dans les notations 2.0.1, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{L})$ (sous-groupe ouvert compact modulo le centre maximal), alors σ stabilise $\mathcal{K}$ donc fixe le sommet $\mathcal{L}$ dans l'immeuble de $\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ est un $\mathcal{O}_\Delta$-réseau de $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ est une chaîne de période 1. Vérifions que $\mathcal{K}$ est stable sous l'action du groupe de Galois $\langle\sigma\rangle$. Soient $g \in \mathcal{K}$ et $n_g \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout l dans $\mathbb{Z}$:

$$g(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^l \times \cdots \times \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^l) = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+n_g} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+n_g}$$

On peut supposer que $g = \widetilde{\Phi}([a_{i,j}])$ où $a_{i,j} = \sum_{q=1}^{r_{i,j}} d_{i,j}^q \otimes k_{i,j}^q$ avec $d_{i,j}^q \in \mathcal{D}$ et $k_{i,j}^q \in \mathbb{K}$. Ainsi, pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}^m$, on a :

$$g(x_1, \ldots, x_m) = (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{1,j})(x_j), \ldots, \sum_{j=1}^m \Phi(a_{m,j})(x_j))$$

avec $\Phi(a_{i,j})(x_j) = \sum_{q=1}^{r_{i,j}} d_{i,j}^q x_j k_{i,j}^q$ et :

$$g^\sigma(x_1, \ldots, x_m) = ((\sum_{j=1}^m \Phi(a_{1,j})(x_j d_0))d_0^{-1}, \ldots, (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{m,j})(x_j d_0))d_0^{-1})$$

Soient $l \in \mathbb{Z}$ et $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^l \times \cdots \times \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^l$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \{1, \ldots, m\}, x_j d_0 \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+v_{\mathcal{D}}(d_0)} \\
&\qquad\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \sum_{j=1}^m \Phi(a_{i,j})(x_j d_0) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+v_{\mathcal{D}}(d_0)+n_g} \\
&\qquad\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, m\}, (\sum_{j=1}^m \Phi(a_{i,j})(x_j d_0))d_0^{-1} \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+n_g} \\
&\qquad\Rightarrow g^\sigma(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+n_g} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{l+n_g}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $g^\sigma \in \mathcal{K}$, d'où $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, et par maximalité, $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. $\square$

PROPRIÉTÉ 4.3.3. — *On peut fixer* $(1, \zeta)$ *une* Δ*-base de* $\mathcal{D}$ *telle que* $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} = 1.\mathcal{O}_\Delta + \zeta.\mathcal{O}_\Delta$, *ce qui nous permet d'identifier* $\mathrm{End}_\Delta(\mathcal{D})$ *(resp.* $\mathrm{End}_\Delta(\mathcal{D}^m)$*) à* $\mathrm{M}_2(\Delta)$ *(resp.* $\mathrm{M}_{2m}(\Delta)$*). L'uniformisante* $\varpi_{\mathcal{D}}$ *s'identifie alors à une matrice* Π_Δ *qui vérifie, pour tout* i *dans* $\mathbb{Z}$ *:*

$$\Pi_\Delta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\Delta^i \\ \mathcal{P}_\Delta^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_\Delta^{i+1} \\ \mathcal{P}_\Delta^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — On définit $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ une extension non ramifiée de degré d contenue dans $\mathcal{D}$ normalisée par $\varpi_{\mathcal{D}}$ et $\tau : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ la conjugaison par $\varpi_{\mathcal{D}}$. On définit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}^{\tau^{\frac{d}{2}}} &= \{l \in \mathbb{L} : \tau^{\frac{d}{2}}(l) = \varpi_{\mathcal{D}}^{\frac{d}{2}} l \varpi_{\mathcal{D}}^{-\frac{d}{2}} = l\} \\
&= \{l \in \mathbb{L} : \varpi_{\mathbb{K}} l \varpi_{\mathbb{K}}^{-1} = l\}.
\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{L}/\mathbb{L}_0$ est une extension quadratique non ramifiée. Comme Δ est le commutant de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{D}$, que $\mathbb{K} = \mathbb{F}[\varpi_{\mathbb{K}}]$ et que $\mathbb{F}$ est le centre de $\mathcal{D}$, Δ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{D} = \langle \mathbb{L}, \varpi_{\mathcal{D}} \rangle$ ($\mathbb{F}$-algèbre engendrée) qui commutent avec $\varpi_{\mathbb{K}}$. Il est clair que $\varpi_{\mathcal{D}}$ commute avec $\varpi_{\mathbb{K}}$. Si $l \in \mathbb{L}$, alors l commute avec $\varpi_{\mathbb{K}}$ si et seulement si $l \in \mathbb{L}_0$. Donc $\Delta = \langle \mathbb{L}_0, \varpi_{\mathcal{D}} \rangle$ ($\mathbb{K}$-algèbre engendrée). Nous allons fixer ζ un générateur de $\mathbb{L}/\mathbb{L}_0$. Puisque l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{L}_0$ est quadratique non ramifiée, on peut fixer $a \in k_{\mathbb{L}} \backslash k_{\mathbb{L}_0}$ tel que $a^2 \in k_{\mathbb{L}_0}$ et fixer $\zeta \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}^{\times}$ tel que $\overline{\zeta} = a$. Ainsi $\zeta^2 = u \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}_0}^{\times}$, $k_{\mathbb{L}} = k_{\mathbb{L}_0}[a]$, et $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0[\zeta]$. Il est clair que $(1, \zeta)$ est une Δ-base de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = 1.\Delta + \zeta.\Delta$. De plus, on vérifie facilement que $\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathcal{O}_{\mathbb{L}_0}[\zeta]$. Puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ est le $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$-module engendré par $\{1, \ldots, \varpi_{\mathcal{D}}^{d-1}\}$, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{D}} = 1.\mathcal{O}_{\Delta} + \zeta.\mathcal{O}_{\Delta}$. Comme dans 4.2.3 et 4.2.4, on définit les isomorphismes de $\mathbb{K}$-algèbre Φ et $\widetilde{\Phi}$ qui permettent d'identifier $\mathrm{End}_{\Delta}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathrm{End}_{\Delta}(\mathcal{D}^m)$) à $\mathrm{M}_2(\Delta)$ (resp. $\mathrm{M}_{2m}(\Delta)$). On remarque que $\varpi_{\mathcal{D}} = \varpi_{\Delta} u$, avec $u \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}^{\times}$. On a $f_{\varpi_{\Delta} \otimes 1}(1) = \varpi_{\Delta} \in \Delta$ et :

$$f_{\varpi_{\Delta} \otimes 1}(\zeta) = \varpi_{\Delta} \zeta = (\varpi_{\Delta} \zeta \varpi_{\Delta}^{-1}) \varpi_{\Delta}.$$

Puisque $\zeta \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}^{\times}$ et que ϖ_{Δ} normalise $\mathbb{L}$, on a :

$$\varpi_{\Delta} \zeta \varpi_{\Delta}^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathcal{O}_{\mathbb{L}_0}[\zeta].$$

Fixons $l_0, l_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}_0}$ tels que $\varpi_{\Delta} \zeta \varpi_{\Delta}^{-1} = l_0 + \zeta l_1$. Puisque $\varpi_{\mathbb{F}}$ est une uniformisante de $\mathbb{L}_0$ et que $\varpi_{\Delta}^d = \varpi_{\mathbb{F}}$, il existe $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$v_{\Delta}(l_i) = d \times m_i,\ i \in \{1, 2\}.$$

On a donc $f_{\varpi_{\Delta} \otimes 1}(\zeta) = l_0 \varpi_{\Delta} + \zeta(l_1 \varpi_{\Delta})$ et :

$$\varpi_{\Delta} \simeq \widetilde{\Pi}_{\Delta} = \mathrm{Mat}_{(1,\zeta)}(f_{\varpi_{\Delta} \otimes 1}) = \begin{pmatrix} \varpi_{\Delta} & l_0 \varpi_{\Delta} \\ 0 & l_1 \varpi_{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\widetilde{\Pi}_{\Delta}$ vérifie la propriété annoncée. De plus, puisque $\varpi_{\mathcal{D}} = \varpi_{\Delta} u$, avec u dans $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}^{\times}$, l'uniformisante $\varpi_{\mathcal{D}}$ s'identifie à une matrice Π_{Δ}, qui vérifie la même propriété que $\widetilde{\Pi}_{\Delta}$. □

4.3.1. *Explicitation des injections d'immeubles*

Propriété 4.3.4. — *Soit $A_{\mathbb{F}}$ (resp. $A_{\mathbb{K}}$) l'appartement standard de $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) que l'on identifie à l'espace affine $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$ (resp. $\mathbb{R}^{2m}/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$) et dont l'ensemble des sommets s'identifie à $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$ (resp. $\mathbb{Z}^{2m}/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$). L'injection naturelle entre les immeubles est donnée sur $A_{\mathbb{F}}$ par :*

$$j : A_{\mathbb{F}} \to A_{\mathbb{K}},\ \overline{(x_1, \ldots, x_m)} \mapsto \overline{(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_m, x_m)}$$

et est prolongée à $X_{\mathbb{F}}$ en utilisant 2.0.6.

Remarque 4.3.5. — Plus précisément, on fixe V un $\mathscr{D}$-espace vectoriel de dimension m et une $\mathscr{D}$-base de V, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$. Alors $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^\times$ s'identifie à $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$. On a vu que $(1, \zeta)$ est une Δ-base (à droite) de $\mathscr{D}$. Posons alors :

$$\widetilde{\mathscr{B}} = (e_1.1, e_1.\zeta, \ldots, e_m.1, e_m.\zeta).$$

Alors $\widetilde{\mathscr{B}}$ est une Δ-base de V qui nous permet d'identifier $(\mathrm{End}_\Delta(V))^\times$ à $\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$. Les ensembles $X_{\mathbb{F}}$ (resp. $X_{\mathbb{K}}$) sont en fait les immeubles de Bruhat-Tits de $(\mathrm{End}_{\mathscr{D}}(V))^\times \simeq \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ (resp. $(\mathrm{End}_\Delta(V))^\times \simeq \mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$) et $A_{\mathbb{F}}$ (resp. $A_{\mathbb{K}}$) l'appartement de $X_{\mathbb{F}}$ associé à la base $\mathscr{B}$ (resp. associé à la base $\widetilde{\mathscr{B}}$).

Démonstration. — On définit j sur $A_{\mathbb{F}}$ par :

$$j(\overline{(x_1, \ldots, x_m)}) = \overline{(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_m, x_m)}$$

pour tout $\overline{(x_1, \ldots, x_m)}$ dans $A_{\mathbb{F}}$. Soit T le tore maximal déployé associé à l'appartement $A_{\mathbb{F}}$. Alors, T s'identifie au tore diagonal dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$, $T = \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_m) : t_i \in \mathbb{F}^\times\}$. Comme dans la démonstration de la propriété 4.2.6, on note $N(T)$ son normalisateur, alors $N(T) = T_0 \mathscr{S}_m$. Rappelons qu'en fixant $(1, \zeta)$ comme Δ-base de $\mathscr{D}$, on a une injection $\mathscr{D} \subseteq \mathrm{M}_2(\Delta)$ qui nous permet d'identifier $\varpi_{\mathscr{D}}$ à une matrice $\Pi_\Delta \in \mathrm{M}_2(\Delta)$. De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\mathscr{P}^i_{\mathscr{D}} \simeq \mathscr{P}^i_\Delta \oplus \mathscr{P}^i_\Delta \text{ et } \Pi_\Delta \begin{pmatrix} \mathscr{P}^i_\Delta \\ \mathscr{P}^i_\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{P}^{i+1}_\Delta \\ \mathscr{P}^{i+1}_\Delta \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe ouvert compact maximal $\mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)$ est stable sous l'action du groupe de Galois $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$. Fixons $s_0 = [\mathscr{O}_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{D}}] = \overline{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m})}$ un sommet de $A_{\mathbb{F}}$. Alors $j(s_0) = [\mathscr{O}_\Delta \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_\Delta] = \overline{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2m})}$ et $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)}(j(s_0)) = \langle\varpi_\Delta\rangle \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)$ est stable sous l'action de $\langle\sigma\rangle$. On en déduit que $j(s_0)$ est un point de l'immeuble fixé par l'action du groupe de Galois. De plus :

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(s_0) = \langle\varpi_{\mathscr{D}}\rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)}(j(s_0)) = \langle\varpi_\Delta\rangle \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta).$$

Il nous reste à vérifier que j est bien $N(T)$-équivariante. Si $x = \overline{(x_1, \ldots, x_m)} \in A_{\mathbb{F}}$ et $g \in N(T)$, alors on peut supposer que g s'écrit sous la forme $g = tP_\tau$ où τ est une permutation de $\{1, \ldots, m\}$, P_τ la matrice de la permutation τ et t est une matrice diagonale de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_{\mathscr{D}}^{\delta_1}, \ldots, \varpi_{\mathscr{D}}^{\delta_m})$ où chaque δ_i appartient à $\mathbb{Z}$. On vérifie alors que $j(tP_\tau.x) = \widetilde{\Phi}(t)\widetilde{\Phi}(P_\tau).j(x)$ en remarquant que $\widetilde{\Phi}(P_\tau) = P_{\widetilde{\tau}}$ où $\widetilde{\tau}$ est une permutation de $\{1, \ldots, 2m-1, 2m\}$ définie par :

$$\widetilde{\tau}(2k-1) = 2\tau(k) - 1, \widetilde{\tau}(2k) = 2\tau(k)$$

pour tout k dans $\{1, \ldots, m\}$. □

Proposition 4.3.6. — *Il y a exactement m sommets de $X_{\mathbb{K}}$ dans l'image de la chambre standard, $j(C_0)$, qui sont $S_0, S_2, \dots, S_{2m-2}$.*

Démonstration. — Pour tout i dans $\{0, 1, \dots, m-1\}$, on a $s_i = h_i.s_0$ où :

$$h_i = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{\varpi_{\mathscr{D}}, \dots, \varpi_{\mathscr{D}}}_{i}).$$

Par $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-équivariance de j, on a $j(s_i) = \widetilde{\Phi}(h_i).j(s_0) = \widetilde{\Phi}(h_i).S_0$ avec $\widetilde{\Phi}(h_i)$ la matrice diagonale par blocs de $\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$:

$$\widetilde{\Phi}(h_i) = \mathrm{diag}(I_2, \dots, I_2, \underbrace{\Pi_\Delta, \dots, \Pi_\Delta}_{i}).$$

Il est alors immédiat que $j(s_i) = S_{2i}$ car $\Pi_\Delta.\mathscr{O}_{\mathscr{D}} = \mathscr{P}_{\mathscr{D}}$. Réciproquement, si t dans $j(C_0)$ est aussi un sommet de $X_{\mathbb{K}}$, alors t est à coordonnées entières et il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$ dans $(\mathbb{R}^+)^m$ tels que :

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i S_{2i} \text{ et } \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i = 1.$$

Soit i_0 dans $\{0, \dots, m-1\}$ le plus grand indice k tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors, la première coordonnée non nulle de t est :

$$\sum_{i=i_0}^{m-1} \lambda_i = \lambda_{i_0}.$$

Comme t est à coordonnées entières, on a forcément $\lambda_{i_0} = 1$ et $t = S_{2i_0}$. Par conséquent, les seuls sommets de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont aussi dans $j(C_0)$ sont :

$$\{j(s_0), j(s_1), \dots, j(s_{m-1})\} = \{S_0, S_2, S_4, \dots, S_{2m-2}\}. \qquad \square$$

4.3.2. *Recherche de conditions de distinction.*— Avec des calculs analogues à la démonstration de 3.3.4, on montre le résultat suivant :

Lemme 4.3.7. — *On a :*

$$\mathrm{GL}_m(\mathscr{D}) \cap \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta) = \langle \varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}).$$

Proposition 4.3.8. — *On un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\langle \varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \mathbb{1}).$$

Ainsi, la représentation π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si la représentation π_0 est $\langle \varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$-distinguée.

Démonstration. — On pose $\mathscr{K} = \langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)$ et $K = \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)$. On remarque que K est le sous-groupe parahorique $\mathscr{A}(j(s_0))^\times$, donc pour tout g dans $\mathrm{GL}_{2m}(\Delta)$, $gKg^{-1} = \mathscr{A}(g.j(s_0))^\times$. En raisonnant à nouveau comme en 3.3.3 et en utilisant la proposition 4.3.6, on vérifie que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})}(\pi, \mathbb{1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})\cap\langle\varpi_{\mathbb{K}}\rangle\mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)}(\pi_0, \mathbb{1}).$$

Le lemme précédent nous permet de conclure directement. □

Remarque 4.3.9. — En remarquant que $(\varpi_{\mathscr{D}}^{d/2})^2 = \varpi_{\mathbb{F}}$ et que $\mathscr{O}_{\mathbb{F}}^\times \subseteq \mathscr{O}_{\mathscr{D}}^\times \subseteq \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$, on vérifie facilement que si π est $\mathrm{Gl}_m(\mathscr{D})$-distinguée alors son caractère central $\chi_{|\mathbb{K}^\times}$ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$.

Notation 4.3.10. — On note $l = k_{\mathbb{K},n}$ et l_0 une extension de degré m de k_Δ telle que $l_0 \subseteq l$. On a alors le diagramme d'extensions de corps finis suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & l = k_{\mathbb{K},n} = k_{\mathscr{D},m} = k_{\Delta,2m} \arrow[dl, dash, "m"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
k_{\mathscr{D}} \arrow[dr, dash, "2"'] & & l_0 \arrow[dl, dash, "m"] \\
 & k_\Delta. &
\end{tikzcd}$$

On a $k_{\mathscr{D}} = k_\Delta[\alpha]$, avec $\alpha^2 \in k_\Delta$. On peut voir $k_{\mathscr{D}}$ comme une sous-k_Δ-algèbre de $\mathrm{M}_2(k_\Delta)$:

$$k_{\mathscr{D}} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} x & y\alpha^2 \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k_\Delta \right\}.$$

On peut donc injecter $\mathrm{M}_m(k_{\mathscr{D}})$ dans $\mathrm{M}_{2m}(k_\Delta)$ par blocs. On notera :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } w = \mathrm{diag}(\beta, \dots, \beta) \in \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta).$$

On vérifie facilement que le commutant de β dans $\mathrm{M}_2(k_\Delta)$ est $k_{\mathscr{D}}$.
On note $\tau : \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta) \to \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$, $x \mapsto wxw^{-1}$. Alors τ, la restriction de $\mathrm{Ad}(w)$ (la conjugaison par w) à $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$, est une involution dont l'ensemble des points fixes est $\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})$.

Enfin, on notera T l'image de $l^\times$ dans $\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}}) \subseteq \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)}(T)$ le normalisateur de T dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$.

Lemme 4.3.11. — *La représentation $\overline{\gamma}_0$ de $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ est $\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})$-distinguée si et seulement si $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$. Dans ce cas,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ *est de dimension* 1.

Démonstration. — On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{\gamma}_0$ soit $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$-distinguée. Pour cela, d'après l'article [13], il faut déterminer l'ensemble suivant :

$$\Xi = \{g \in \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta) : \tau(g^{-1}Tg) = g^{-1}Tg\}$$

lorsque Ξ est vu comme partie du double quotient $T\backslash\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)/\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. Puisque $w \in T$, on a, pour tout x dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$, $x \in \Xi$ si et seulement si $xwx^{-1} \in \mathrm{N}_{\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)}(T)$. En utilisant Skölem-Noether, on vérifie qu'il existe $g_0 \in \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que la restriction de $\mathrm{Ad}(g_0)$ à T soit d'ordre $2m$ et égale au Frobenius de l sur k_Δ ($\mathrm{Ad}(g_0)_{|T} = \mathrm{Frob}_{l/k_\Delta}$) de sorte que $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)}(T)$ soit de la forme suivante :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)}(T) = T.\langle g_0\rangle.$$

Soit $x \in \Xi$, alors il existe t dans T et k dans $\mathbb{Z}$ tels que $xwx^{-1} = tg_0^k$. Ainsi :

$$(xwx^{-1})^2 = w^2 = \alpha^2 I_{2m} = tg_0^k t g_0^{-k} g_0^{2k} = \underbrace{(t\mathrm{Frob}^k_{l/k_\Delta}(t))}_{t' \in T} g_0^{2k} = t' g_0^{2k}.$$

On en déduit que $g_0^{2k} = (t')^{-1}w^2 \in T$. Puisque T est commutatif, pour tout t dans T :

$$\mathrm{Ad}(g_0^{2k})(t) = t = (\mathrm{Ad}(g_0)_{|T})^{2k}(t).$$

Or $\mathrm{Ad}(g_0)_{|T}$ est d'ordre $2m$, donc nécessairement m divise k. On peut ainsi supposer que $k = 0$ ou $k = m$.

* Supposons que $k = 0$. Dans ce cas, $xwx^{-1} = t \in T$ donc commute avec w. Or, $t^2 = w^2$ donc $(w^{-1}t)^2 = I_{2m}$. Ainsi, $w^{-1}t$ est un élément d'ordre 1 ou 2 de $T = l^\times$ qui est un groupe cyclique. Il y a seulement deux possibilités : ou bien $t = w$ ou bien $t = -w$.

  Si $t = w$, alors $xwx^{-1} = w$, donc $wxw^{-1} = \tau(x) = x$ et $x \in \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. Comme on cherche x modulo un élément de $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ à droite, on peut se restreindre au cas où $x = I_{2m}$.

  Sinon, $t = -w$, alors $xwx^{-1} = -w$ et $\tau(x^{-1}) = -x^{-1}$.

  On définit par blocs $x^{-1} = [X_{i,j}]_{1\le i,j\le m}$, $X_{i,j} \in \mathrm{M}_2(k_\Delta)$. Après calcul, on constate que $xwx^{-1} = -w$ si et seulement si $x^{-1} = [X_{i,j}]$ avec $X_{i,j} = (s_{i,j} + z_{i,j}\beta)\alpha_0$ (où $s_{i,j}, z_{i,j}$ appartiennent à k_Δ) si et seulement s'il existe t dans $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ tel que :

  $$x^{-1} = t.\Lambda_0, \text{ où } \Lambda_0 = \mathrm{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_0)$$

  (car $(1, \beta)$ est une k_Δ-base de $k_{\mathcal{D}}$). Ainsi, en remarquant que $\Lambda_0^{-1} = \Lambda_0$:

  $$\{x \in \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta) : xwx^{-1} = -w\} = \{\Lambda_0 t : t \in \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})\}.$$

  Comme on cherche x modulo la multiplication par un élément de $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ à droite, on peut se restreindre au cas $x = \Lambda_0$.

$*$ Supposons maintenant que $k = m$. On a $xwx^{-1} = tg_0^m$ donc :

$$(xwx^{-1})^2 = w^2 = t\mathrm{Frob}_{l/k_\Delta}^m(t)g_0^{2m} = t\mathrm{Frob}_{l/k_\Delta}^m(t) = t\mathrm{Frob}_{l/l_0}(t) = \mathrm{N}_{l/l_0}(t).$$

Fixons $t_0 \in T$ tel que $\mathrm{N}_{l/l_0}(t_0) = w^2$, alors $\mathrm{N}_{l/l_0}(tt_0^{-1}) = 1$, par théorème 90 de Hilbert, il existe y dans $l^\times$ tel que :

$$tt_0^{-1} = \frac{y}{\mathrm{Frob}_{l/l_0}(y)} = yg_0^m y^{-1} g_0^{-m}.$$

Par conséquent, comme T est commutatif, y et t_0 commutent :

$$xwx^{-1} = t_0 y g_0^m y^{-1} = y t_0 g_0^m y^{-1} \Rightarrow (y^{-1}x)w(y^{-1}x)^{-1} = t_0 g_0^m.$$

Comme $y^{-1} \in T$ et que l'on cherche x modulo la multiplication par un élément de T à gauche, il y a un seul cas à considérer : le cas où $xwx^{-1} = t_0 g_0^m$.

Déterminons combien il y a d'éléments x dans le double quotient $T\backslash\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)/\mathrm{GL}_m(k_{\not D})$ tels que $xwx^{-1} = t_0 g_0^m$. Soient x_1 et x_2 dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tels que $x_1 w x_1^{-1} = t_0 g_0^m = x_2 w x_2^{-1}$, alors, puisque $k_{\not D} = k_\Delta(w)$:

$$x_1 k_{\not D} x_1^{-1} = k_\Delta(x_1 w x_1^{-1}) = k_\Delta(x_2 w x_2^{-1}) = x_2 k_{\not D} x_2^{-1}.$$

On en déduit que $\mathrm{Ad}(x_2^{-1}x_1)$, la conjugaison par $x_2^{-1}x_1$, fixe point par point les éléments de k_Δ. Par théorème de Skölem-Noether, on sait qu'il existe γ dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que $\mathrm{Frob}_{k_{\not D}/k_\Delta}$ soit la restriction de $\mathrm{Ad}(\gamma)$ à $k_{\not D}$. On peut également supposer que $\mathrm{Frob}_{k_{\not D}/k_\Delta}(w) = -w$.

Si $\mathrm{Ad}(x_2^{-1}x_1)$ fixe tous les éléments de $k_{\not D}$ alors $x_2^{-1}x_1 \in \mathrm{GL}_m(k_{\not D})$ et dans ce cas x_1 et x_2 sont dans la même double classe dans $T\backslash\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)/\mathrm{GL}_m(k_{\not D})$.

Sinon, $\mathrm{Ad}(x_2^{-1}x_1)_{|k_{\not D}} = \mathrm{Ad}(\gamma)_{|k_{\not D}}$ et donc $x_1 \in x_2\gamma\mathrm{GL}_m(k_{\not D})$. Or :

$$(x_2\gamma)w(x_2\gamma)^{-1} = -x_2 w x_2^{-1} \neq t_0 g_0^m.$$

On déduit de tout ceci qu'on peut se restreindre au cas $x = x_0$ avec $x_0 w x_0^{-1} = t_0 g_0^m$.

Ensuite, on vérifie facilement qu'un tel élément x tel que $xwx^{-1} = t_0 g_0^m$ existe bien. En effet, posons $\delta = t_0 g_0^m$, alors $\delta^2 = w^2 \in k_\Delta$ et n'est pas un carré dans k_Δ, donc engendre une extension (de corps) de degré 2 de k_Δ et :

$$k_\Delta[\delta] = k_\Delta[w] = k_{\not D}.$$

Les éléments δ et w ont même polynôme minimal sur k_Δ, à savoir $X^2 - w^2$. On en déduit un morphisme de k_Δ-algèbres (bien défini) :

$$\psi : k_\Delta[w] \to k_\Delta[\delta], P(w) \mapsto P(\delta)$$

et donc un morphisme injectif $\psi : k_\Delta[w] \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ où $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ est une k_Δ-algèbre centrale simple. Par théorème de Skölem-Noether, il existe x dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que :

$$\forall z \in k_\Delta[w], \psi(z) = xzx^{-1}.$$

En particulier, $\psi(w) = \delta = xwx^{-1} = t_0 g_0^m$.

Nous allons en déduire $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}))$. D'après l'article de Lusztig, on sait que :

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})) = \sum_{x \in \Xi} r(x)$$

où $r(x) \in \{-1, 0, 1\}$. D'après ce qui précède, il y a seulement 3 élements de Ξ à considérer.

Si $x = \mathrm{Id}$, on sait que $r(x) \neq 0$ si et seulement si la restriction de $\overline{\chi}$ à $T \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ et la fonction ε_T de Lusztig coïncident. Comme T est connexe, ε_T est la fonction constante égale à 1 sur $T \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = T$, or le caractère $\overline{\chi}$ ne peut pas être trivial sur T. Finalement, $r(\mathrm{Id}) = 0$.

De même, on vérifie que si $x = \Lambda_0$, on a $\Lambda_0^{-1} T \Lambda_0 \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = \Lambda_0^{-1} T \Lambda_0$ donc est connexe. Par suite, $r(\Lambda_0) = 0$.

Finalement, il y a un seul élément qui intervient dans le calcul de $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{C}))$. Fixons x_0 dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que $x_0 w x_0^{-1} = t_0 g_0^m$. Soit $t \in T$, alors, en utilisant la commutativité de T, on montre que :

$$\begin{aligned} x_0^{-1} t x_0 \in x_0^{-1} T x_0 \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) &\Leftrightarrow (x_0 w x_0^{-1}) t = t (x_0 w x_0^{-1}) \Leftrightarrow t_0 g_0^m t = t t_0 g_0^m \\ &\Leftrightarrow t_0 \mathrm{Frob}_{l/l_0}(t) = t t_0 = t_0 t \Leftrightarrow t \in l_0^\times. \end{aligned}$$

On en déduit que $x_0^{-1} T x_0 \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = x_0^{-1} l_0^\times x_0$. Comme $l_0^\times$ est connexe, la fonction $\varepsilon_{x_0^{-1} T x_0}$ est triviale sur $x_0^{-1} T x_0 \cap \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}}) = x_0^{-1} l_0^\times x_0$. On en déduit que $r(x_0) \neq 0$ si et seulement si $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$, et dans ce cas :

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})) = r(\mathrm{Id}) + r(\Lambda_0) + r(x_0) = r(x_0) = 1. \qquad \square$$

Notation 4.3.12. — On notera l le corps résiduel de $\mathbb{K}_n$ (extension de degré $2m$ de k_Δ) et l_0 celui de $\mathbb{K}_{n/2}$. On fixe η dans $l \backslash l_0$ tel que $\eta^2 \in l_0^\times$. Soit $\mathbb{E}$ l'extension quadratique totalement ramifiée de $\mathbb{F}_{n/2}$ engendrée par $\varpi_{\mathbb{K}} \eta$ sur $\mathbb{F}_{n/2}$.

Alors on a le diagramme d'extensions de corps suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda_{2m} = \mathbb{K}_n \arrow[dl, dash, "2"', "\text{n.r}"] \arrow[d, dash, "2"', "\text{t.r}"] \arrow[dr, dash, "\text{n.r}", "2"'] & \\
\Lambda_m = \mathbb{K}_{n/2} \arrow[d, dash, "n/2"', "\text{n.r}"] \arrow[dr, dash, "\text{t.r}", "2"'] & \mathbb{F}_n \arrow[d, dash, "2"', "\text{n.r}"] & \mathbb{E} \arrow[dl, dash, "2"', "\text{t.r}"] \\
\mathbb{K} \arrow[dr, dash, "\text{t.r}", "2"'] & \mathbb{F}_{n/2} \arrow[d, dash, "n/2"', "\text{n.r}"] & \\
 & \mathbb{F}. &
\end{tikzcd}$$

Par le théorème de Skölem-Noether, on sait que l'on peut fixer γ dans $\mathrm{GL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que la restriction de $\mathrm{Ad}(\gamma)$, la conjugaison par γ, à $k_{\mathscr{D}}$ soit le Frobenius $\mathrm{Frob}_{k_{\mathscr{D}}/k_\Delta}$. En particulier, la conjugaison par γ^2 fixe point par point les éléments de $k_{\mathscr{D}}$, donc $\gamma^2 \in \mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})$ et, puisque $k_{\mathscr{D}} = k_\Delta[w]$, on peut supposer que $\gamma w \gamma^{-1} = -w$.

Soit $\mathscr{L} = (L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la chaîne d'$\mathscr{O}_\Delta$-réseaux de $\mathscr{D}^m$ définie par $L_i = \mathscr{P}^i_{\mathscr{D}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}^i_{\mathscr{D}}$. Avec l'identification $\mathscr{P}_{\mathscr{D}} \simeq \mathscr{O}_\Delta \oplus \mathscr{O}_\Delta$, on remarque que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \varpi_{\mathbb{K}}^{-1}\varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} L_i = L_i \Rightarrow \varpi_{\mathbb{K}}^{-1}\varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} \in \mathscr{A}(\mathscr{L})^\times = \mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta).$$

Soit u dans $\mathrm{GL}_{2m}(\mathscr{O}_\Delta)$, tel que $\varpi_{\mathbb{K}} u = \varpi_{\mathscr{D}}^{d/2}$. On sait que la conjugaison par $\varpi_{\mathscr{D}}^{d/2}$ et donc par $\varpi_{\mathbb{K}} u$ engendre $\mathrm{Frob}_{k_{\mathscr{D}}/k_\Delta}$. Ainsi, pour tout x dans $k_{\mathscr{D}}$, en utilisant que $\varpi_{\mathbb{K}}$ est central, on a :

$$\gamma x \gamma^{-1} = \varpi_{\mathbb{K}} u x u^{-1} \varpi_{\mathbb{K}}^{-1} = u x u^{-1} \Rightarrow (\gamma^{-1}u)x(\gamma^{-1}u)^{-1} = x.$$

On en déduit que $u \in \gamma \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ et donc

$$\langle \varpi_{\mathscr{D}}^{d/2} \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) = \langle \varpi_{\mathbb{K}} u \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}) = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \gamma \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}}).$$

On définit υ un caractère de $\langle \varpi_{\mathbb{K}} \gamma \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ par :

$$\upsilon((\varpi_{\mathbb{K}}\gamma)^s x) = \chi((\varpi_{\mathbb{K}}\eta)^s)\chi_{\Lambda_{2m}/\mathbb{E}}((\varpi_{\mathbb{K}}\eta)^s)$$

pour tout x dans $\mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})$ et tout s dans $\mathbb{Z}$, où $\chi_{\mathbb{K}_n/\mathbb{E}} = \chi_{\Lambda_{2m}/\mathbb{E}}$ est le caractère quadratique de $\mathbb{K}_n/\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{K}_n/\mathbb{E}$ est non ramifiée, la norme $\mathrm{N}_{\mathbb{K}_n/\mathbb{E}}$ est surjective sur les unités. Puisque $\varpi_{\mathbb{K}}\eta$ est une uniformisante de $\mathbb{E}$, on a :

$$\upsilon(\varpi_{\mathbb{K}}\gamma) = -\chi(\varpi_{\mathbb{K}})\overline{\chi}(\eta).$$

Lemme 4.3.13. — *L'inclusion canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\langle \varpi_{\mathbb{K}}\gamma \rangle \mathrm{GL}_m(\mathscr{O}_{\mathscr{D}})}(\pi_0, \upsilon) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathscr{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$$

est en fait un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Démonstration. — Pour montrer l'isomorphisme, nous allons appliquer les arguments de [10], proposition 6.3, à un nouvel espace symétrique. On a clairement l'inclusion canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\gamma\rangle \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})}(\pi_0, \upsilon) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}).$$

Si $\overline{\gamma}_0$ n'est pas $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$-distinguée, alors :

$$\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\gamma\rangle \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})}(\pi_0, \upsilon) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1}) = \{0\}.$$

Sinon, supposons que $\overline{\gamma}_0$ est $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$-distinguée, alors $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^{\times}$. Soit $\varphi : V \to \mathbb{C}$ une forme linéaire non nulle dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ (où V est l'espace de π_0). Posons $\psi = \varphi \circ \pi_0(\gamma)$. L'application ψ est aussi une forme linéaire non nulle. Alors pour tout v dans V, pour tout x dans $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\mathcal{D}})$, on pose $u = \pi_0(\gamma).v \in V$ et on a :

$$\psi(\overline{\gamma}_0(\overline{x}).v) = \psi(\pi_0(x).v) = \varphi(\pi_0(\gamma x \gamma^{-1}).u) = \varphi(u) = \psi(v).$$

On en déduit que $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$, qui est un espace de dimension 1, donc ψ et φ sont colinéaires. Soit $c \in \mathbb{C}^{\times}$ tel que $\psi = c\varphi$. Comme $\gamma^2 \in \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$, on a :

$$\forall v \in V, \varphi(v) = \varphi(\pi_0(\gamma^2).v) = c^2\varphi(v).$$

On en déduit que $c^2 = 1$ et, par suite, $\psi = \varphi$ ou $\psi = -\varphi$. Pour montrer que les deux espaces $\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\gamma\rangle \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\pi_0, \upsilon)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ sont égaux, il suffit de montrer que φ appartient à $\mathrm{Hom}_{\langle\varpi_{\mathbb{K}}\gamma\rangle \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\pi_0, \upsilon)$. Pour cela, il faut vérifier que pour tout x dans $\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ et tout u dans V :

$$\varphi(\pi_0(\varpi_{\mathbb{K}}\gamma)\pi_0(x).u) = \upsilon(\varpi_{\mathbb{K}}\gamma x)\varphi(u) \text{ i.e } \chi(\varpi_{\mathbb{K}})\psi(u) = -\chi(\varpi_{\mathbb{K}})\overline{\chi}(\eta)\varphi(u).$$

Donc cela revient à montrer que $\psi = \varphi$ si et seulement si $\overline{\chi}(\eta) = -1$.

Posons $\mathcal{K} = \langle\gamma\rangle \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. On a $\psi = \varphi$ si et seulement si pour tout v dans V, $\varphi(\pi_0(\gamma).v) = \varphi(v)$ i.e si φ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1})$. Or, il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}(\overline{\gamma}_0, \mathbb{1})$ et comme le dernier espace est de dimension 1, on en déduit immédiatement que $\psi = \varphi$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0$. On remarque que $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^{\times}$, donc sur $k_{\Delta}^{\times}$, qui est le centre de $\mathrm{GL}_{2m}(k_{\Delta})$. On peut donc voir π_0 comme une représentation de $\overline{\mathrm{GL}_{2m}(k_{\Delta})} = \mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})$. On pose $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K}/k_{\Delta}^{\times}$ l'image de $\mathcal{K}$ dans $\mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})$. Notre objectif est donc de montrer que $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{K}}}(\pi_0, \mathbb{1}) \neq 0$ si et seulement si $\overline{\chi}(\eta) = -1$. Notons $\overline{\tau}$ la conjugaison par w dans $\mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})$. Il est clair que $\overline{\tau}$ fixe point par point les éléments de $\overline{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}$. De plus :

$$\gamma w \gamma^{-1} = -w \Rightarrow w\gamma w^{-1} = -\gamma \Rightarrow \overline{\tau}(\overline{\gamma}) = \overline{\gamma}.$$

Par conséquent, $\overline{\mathcal{K}} \subseteq \mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})^{\overline{\tau}}$ (les points fixes de $\overline{\tau}$ dans $\mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})$) et $\overline{\mathcal{K}}$ contient la composante neutre de $\mathrm{PGL}_{2m}(k_{\Delta})^{\overline{\tau}}$. On va donc pouvoir appliquer les résultats de l'article de Lusztig [13] à l'espace symétrique $(\mathrm{PGL}_{2m}(k_\Delta), \overline{\mathcal{K}})$. Notons $\overline{T}$ l'image de $l^\times$ dans $\mathrm{PGL}_{2m}(k_\Delta)$ et :

$$\overline{\Xi} = \{\overline{g} \in \mathrm{PGL}_{2m}(k_\Delta) : \overline{\tau}(\overline{g}^{-1}\overline{T}\overline{g}) = \overline{g}^{-1}\overline{T}\overline{g}\}$$

vue comme partie du double quotient $\overline{T}\backslash\mathrm{PGL}_{2m}(k_\Delta)/\overline{\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})}$. En reprenant les calculs de la démonstration du lemme 4.3.11, on vérifie qu'il n'y a qu'une seule double classe à considérer : on fixe $\overline{x_0} \in \mathrm{PGL}_{2m}(k_\Delta)$ tel que (en reprenant les notations de la démonstration du lemme 4.3.11) $\overline{x_0 w x_0^{-1}} = \overline{t_0 g_0^m}$. Alors, il est clair que pour tout t dans T, si $\overline{x_0^{-1} t x_0} \in \overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0} \cap \overline{\mathcal{K}}$ alors $\overline{\mathrm{Frob}_{l/l_0}(t)} = \overline{t}$ donc il existe c dans $k_\Delta^\times$ tel que $\mathrm{Frob}_{l/l_0}(t) = ct$. En utilisant le fait que $(1, \eta)$ est une l_0-base de l, on montre que les seuls éléments de $l^\times$ vérifiant $\mathrm{Frob}_{l/l_0}(t) = ct$ sont les éléments de $l_0^\times \cup \eta l_0^\times$. Réciproquement, lors de la démonstration de 4.3.11, nous avons vu que $x_0^{-1} l_0^\times x_0 \subseteq \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. Il nous reste donc à vérifier que $x_0^{-1}\eta x_0 \in \langle\gamma\rangle\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. On remarque que :

$$(x_0 w x_0^{-1})\eta(x_0 w x_0^{-1})^{-1} = t_0(g_0^m \eta g_0^{-m})t_0^{-1} = t_0 \mathrm{Frob}_{l/l_0}(\eta) t_0^{-1} = t_0(-\eta)t_0^{-1} = -\eta$$

car T est commutatif. On en déduit que $\tau(x_0^{-1}\eta x_0) = -x_0^{-1}\eta x_0$. Puisque $\tau(\gamma) = -\gamma$, on a :

$$\tau(\gamma(x_0^{-1}\eta x_0)) = \tau(\gamma)\tau(x_0^{-1}\eta x_0) = (-\gamma)(-x_0^{-1}\eta x_0) = \gamma(x_0^{-1}\eta x_0).$$

Par conséquent $\gamma(x_0^{-1}\eta x_0) \in \mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$ et $x_0^{-1}\eta x_0 \in \langle\gamma\rangle\mathrm{GL}_m(k_{\mathcal{D}})$. Finalement :

$$\overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0} \cap \overline{\mathcal{K}} = (\overline{x_0}^{-1} l_0^\times \overline{x_0})/k_\Delta^\times \cup (\overline{x_0}^{-1}\eta l_0^\times \overline{x_0})/k_\Delta^\times.$$

D'après la formule de Lusztig, $\dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{K}}}(\pi_0, \mathbb{1})) \neq 0$ si et seulement si $\overline{\chi}^{\overline{x_0}}$ et la fonction $\varepsilon_{\overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0}}$ coïncident sur $\overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0} \cap \overline{\mathcal{K}}$. Par hypothèse, on sait que $\overline{\chi}$ est trivial sur $l_0^\times$ donc $\overline{\chi}^{\overline{x_0}}$ est trivial sur $(\overline{x_0}^{-1} l_0^\times \overline{x_0})/k_\Delta^\times$ et, comme $(\overline{x_0}^{-1} l_0^\times \overline{x_0})/k_\Delta^\times$ est connexe, la fonction $\varepsilon_{\overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0}}$ est aussi triviale sur $(\overline{x_0}^{-1} l_0^\times \overline{x_0}/k_\Delta^\times)$. En utilisant la définition de la fonction ε, on montre facilement que $\varepsilon_{\overline{x_0}^{-1}\overline{T}\overline{x_0}}(x_0^{-1}\eta x_0) = \varepsilon_{\overline{T}}(\eta)$. Un calcul rapide (cf. [10] démonstration de la proposition 6.3) nous permet de vérifier que $\varepsilon_{\overline{T}}(\eta) = -1$. On en déduit immédiatement que $\dim(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{K}}}(\pi_0, \mathbb{1})) \neq 0$ si et seulement si $\overline{\chi}(\eta) = -1$.

On a bien le résultat annoncé. □

4.4. Conclusion sur les conditions de distinction lorsque d est pair.

— Avec un raisonnement analogue à la démonstration du théorème 3.4.13, le lemme précédent et 4.2.8 nous permettent de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4.1. — i) *Si l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est non ramifiée, alors la représentation π n'est pas $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée.*

ii) *Si l'extension* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est totalement ramifiée, alors la représentation* π *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée si et seulement si* χ *est trivial sur* $\mathbb{F}^\times$, $\overline{\chi}$ *est trivial sur* $l_0^\times$ *et* $\chi(\varpi_{\mathbb{K}})\overline{\chi}(\eta) = -1$.

Dans les deux cas, si π *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée, on a :*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})}(\pi, \mathbb{1})) = 1.$$

5. Conclusion

Grâce aux résultats des théorèmes 3.3.5, 3.4.13 et 4.4.1, on a les conditions nécessaires et suffisantes de $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinction suivantes pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$, images d'une représentation cuspidale par Jacquet-Langlands :

THÉORÈME 5.0.1. — *Soit* $\pi \in \mathcal{R}_0^2(\mathrm{GL}_\mu(\Delta))$ *une représentation cuspidale de niveau* 0*, image d'une représentation cuspidale de niveau* 0 *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *par la correspondance de Jacquet-Langlands, et* $(\mathbb{K}_n/\mathbb{K}_\delta, \chi)$ *la paire admissible modérée associée à* π *(en particulier* χ *est un caractère modéré de* $\mathbb{K}_n^\times$*, et on note* $\overline{\chi}$ *la restriction de* χ *à* $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_n}^\times$ *vue comme caractère de* $k_{\mathbb{K},n}^\times$*).*

- *Si* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est non ramifiée et* n *est pair, la représentation* π *n'est pas* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée.*
- *Si* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est totalement ramifiée et* n *est impair, la représentation* π *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée si et seulement si* $n = 1$ *et* π *est le caractère trivial de* $\mathbb{K}^\times$.
- *Si* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est non ramifiée et* n *est impair. Soit* τ *un générateur du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathcal{D}})$*. Alors, la représentation* π *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée si et seulement si* χ *est trivial sur* $\mathbb{F}^\times$ *et s'il existe* α *dans le groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\Delta)$ *tel que* $\overline{\chi}^{-1} \circ \alpha = \overline{\chi} \circ \tau$.
- *Si* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est totalement ramifiée et* n *est pair. Soit* l_0 *le corps résiduel de* $\mathbb{K}_{n/2}$*. On fixe* $\varpi_{\mathbb{K}}$ *telle que* $\varpi_{\mathbb{K}}^2 = \varpi_{\mathbb{F}}$ *et* η *dans* $k_{\mathbb{K},n}^\times \backslash l_0^\times$ *tel que* $\eta^2 \in l_0^\times$*. Alors, la représentation* π *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée si et seulement si* χ *est trivial sur* $\mathbb{F}^\times$, $\overline{\chi}$ *est trivial sur* $l_0^\times$ *et* $\chi(\varpi_{\mathbb{K}})\overline{\chi}(\eta) = -1$.

En utilisant ces conditions, on montre que la correspondance de Jacquet-Langlands préserve la distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 au sens suivant :

THÉORÈME 5.0.2. — *Si* $\rho \in \mathcal{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ *est une représentation cuspidale (de niveau* 0*), alors* ρ *est* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$*-distinguée si et seulement si* $JL(\rho)$ *est* $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$*-distinguée.*

Démonstration. — Soit $\rho \in \mathscr{R}_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ une représentation cuspidale de niveau 0 de paire admissible modérée associée $(\mathbb{K}_n, \chi)$. Soit $\pi = JL(\rho)$. On a vu en 1.0.4 que π est une représentation cuspidale (de niveau 0) de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ et que la paire admissible modérée associée à π est aussi χ.

$*$ *Supposons que l'extension* $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ *est non ramifiée.* Dans ce cas, on a le diagramme d'extensions de corps fini suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k_{\mathbb{K},n} = k_{\Delta,m} \arrow[d, dash, "m"] & \\
 & k_\Delta \arrow[dl, dash, "d"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
k_{\mathbb{K}} \arrow[dr, dash, "2"'] & & k_{\mathscr{D}} \arrow[dl, dash, "d"] \\
 & k_{\mathbb{F}}. &
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème 3.3.5 (cas $d = 1$), on sait que ρ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si n est impair, χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_{\mathbb{K}}} \overline{\chi} \circ \tau$ où $\langle \tau \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{F}})$. De même, en utilisant les théorèmes 3.3.5 et 4.4.1, on sait que π est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée si et seulement si n est impair (donc d est impair), χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\tau}$ où $\langle \widetilde{\tau} \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathscr{D}})$. Il nous suffit donc de regarder le cas où d et n sont impairs. Rappelons que $\overline{\chi}$ est un caractère $k_{\mathbb{K}}$-régulier.

Supposons tout d'abord que ρ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée, alors n est impair, χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_{\mathbb{K}}} \overline{\chi} \circ \tau$. Montrons que $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\tau}$. On a $\langle \tau \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{F}})$ donc $\langle \tau^2 \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{K}})$. Il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\overline{\chi}^{-1} = \overline{\chi} \circ \tau \circ \tau^{2k} = \overline{\chi} \circ \tau^d \circ \alpha$ avec $\alpha = \tau^{2k+1-d}$ et $\tau^d = \widetilde{\tau}$. La restriction de α à k_Δ, $\alpha_{|k_\Delta}$, appartient au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_\Delta/k_{\mathbb{K}})$ (car $2k+1-d$ est pair). Fixons φ un générateur de $\mathrm{Gal}(k_\Delta/k_{\mathbb{K}})$ et $\widetilde{\varphi}$ un élément de $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{K}})$ qui prolonge φ. Il existe alors $r \in \mathbb{Z}$ et γ dans $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\Delta)$ tel que $\alpha = \widetilde{\varphi}^r \circ \gamma$. Ainsi :

$$\overline{\chi}^{-1} = \overline{\chi} \circ \delta, \; \delta = \widetilde{\tau} \circ \widetilde{\varphi}^r \circ \gamma.$$

On en déduit que $\overline{\chi} \circ \delta^2 = \overline{\chi}$. Comme $\delta^2 = \widetilde{\tau}^2 \circ \widetilde{\varphi}^{2r} \circ \gamma^2 \in \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_{\mathbb{K}})$, la $k_{\mathbb{K}}$-régularité de $\overline{\chi}$ impose que $\delta^2 = \mathrm{Id}$. Par conséquent $\widetilde{\varphi}^{2r} = \widetilde{\tau}^{-2} \circ \gamma^{-2}$. Puisque $\langle \widetilde{\tau}^2 \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\Delta)$, la restriction de $\widetilde{\tau}^{-2} \circ \gamma^{-2}$ à k_Δ est l'identité. On en déduit que $\widetilde{\varphi}^{2r}_{|k_\Delta} = \varphi^{2r} = \mathrm{Id}$. Or φ est d'ordre d donc d divise $2r$, et comme d est impair, d divise r. Ainsi $\varphi^r = \mathrm{Id}$ et on peut choisir $\widetilde{\varphi} = \mathrm{Id}$. On déduit de tout ceci que :

$$\overline{\chi}^{-1} = \overline{\chi} \circ \widetilde{\tau} \circ \gamma \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\tau}.$$

Finalement, si ρ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée alors π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée.

Réciproquement, supposons que π est $\mathrm{GL}_m(\mathcal{D})$-distinguée. Alors n est impair (donc d est impair), χ est trivial sur $\mathbb{F}^\times$ et $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\Delta} \overline{\chi} \circ \widetilde{\tau}$. Montrons que $\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\mathbb{K}} \overline{\chi} \circ \tau$.

Comme précédemment, on remarque que $\widetilde{\tau} = \tau^d$ et que $\langle \tau^{2d} \rangle = \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\Delta)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\overline{\chi}^{-1} = \overline{\chi} \circ \tau^d \circ \tau^{2dk} = \overline{\chi} \circ \tau \circ \tau^{d-1+2dk}.$$

On a $\tau^{2dk} \in \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathbb{K})$ et, puisque $d-1$ est pair, il n'est pas premier avec $2n$, l'ordre de $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathbb{F})$, donc engendre un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathbb{F})$ contenu dans $\mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathbb{K})$. Par suite, $\tau^{d-1+2dk} \in \mathrm{Gal}(k_{\mathbb{K},n}/k_\mathbb{K})$ et :

$$\overline{\chi}^{-1} \simeq_{k_\mathbb{K}} \overline{\chi} \circ \tau.$$

∗ *Supposons que l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est totalement ramifiée, modérément ramifiée.* On a directement le résultat en utilisant les théorèmes 4.4.1 et 3.4.13.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. I. Badulescu – « Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **35** (2002), p. 695–747.

[2] P. Broussous & B. Lemaire – « Building of $\mathrm{GL}(m, D)$ and centralizers », *Transform. Groups* **7** (2002), p. 15–50.

[3] F. Bruhat & J. Tits – « Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local », *Bull. Soc. Math. France* **112** (1984), p. 259–301.

[4] C. J. Bushnell & A. Fröhlich – « Nonabelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras », *Proc. London Math. Soc.* **50** (1985), p. 207–264.

[5] P. Deligne, D. Kazhdan & M.-F. Vignéras – « Représentations des algèbres centrales simples p-adiques », in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, p. 33–117.

[6] B. Farb & R. K. Dennis – *Noncommutative algebra*, Graduate Texts in Math., vol. 144, Springer, New York, 1993.

[7] Y. Z. Flicker – « On distinguished representations », *J. reine angew. Math.* **418** (1991), p. 139–172.

[8] J. A. Green – « The characters of the finite general linear groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.

[9] J. Hakim – « Distinguished p-adic representations », *Duke Math. J.* **62** (1991), p. 1–22.

[10] J. Hakim & F. Murnaghan – « Two types of distinguished supercuspidal representations », *Int. Math. Res. Not.* **2002** (2002), p. 1857–1889.

[11] ———, « Distinguished tame supercuspidal representations », *Int. Math. Res. Pap. IMRP* **2** (2008), Art. ID rpn005, 166.

[12] H. Jacquet & R. P. Langlands – *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer, Berlin-New York, 1970.

[13] G. Lusztig – « Symmetric spaces over a finite field », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser, 1990, p. 57–81.

[14] D. Prasad – « Invariant forms for representations of GL_2 over a local field », *Amer. J. Math.* **114** (1992), p. 1317–1363.

[15] ———, « Distinguished representations for quadratic extensions », *Compositio Math.* **119** (1999), p. 335–345.

[16] G. Prasad & J.-K. Yu – « On finite group actions on reductive groups and buildings », *Invent. math.* **147** (2002), p. 545–560.

[17] I. Reiner – *Maximal orders*, London Mathematical Society Monographs, vol. 5, Academic Press, London-New York, 1975.

[18] J. D. Rogawski – « Representations of $\mathrm{GL}(n)$ and division algebras over a p-adic field », *Duke Math. J.* **50** (1983), p. 161–196.

[19] A. J. Silberger & E.-W. Zink – « Weak explicit matching for level zero discrete series of unit groups of $\mathfrak{p}$-adic simple algebras », *Canad. J. Math.* **55** (2003), p. 353–378.

[20] ———, « An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of $\mathfrak{p}$-adic simple algebras », *J. reine angew. Math.* **585** (2005), p. 173–235.

[21] J. Tits – « Reductive groups over local fields », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 29–69.