Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DELTA-COMPOSANTES DES MODULES DE REVÊTEMENTS : CORPS DE DÉFINITION

Orlando Cau

Tome 144
Fascicule 2

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 145-162

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 144, juin 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
144 (2), 2016, p. 145–162

DELTA-COMPOSANTES DES MODULES DE REVÊTEMENTS : CORPS DE DÉFINITION

PAR ORLANDO CAU

RÉSUMÉ. — Nous nous intéressons au corps de définition des composantes irréductibles des espaces de modules de revêtements (espaces de Hurwitz). Nous poursuivons l'étude des Δ-composantes introduites dans un article précédent. Nous donnons une estimation générale de leur corps de définition. La deuxième partie de cet article concerne les relèvements de ces composantes dans une tour d'espaces de Hurwitz. On obtient des systèmes projectifs de composantes définies sur un corps de nombres de degré explicitement majoré .

ABSTRACT (*Delta-components of Hurwitz spaces: field of definition*)
We focus on the components irrédutibles Hurwitz spaces and their field of definition. For any finite group, we can construct such components defined on $\mathbb{Q}$. Our method allows one more flexibility in the type of ramification of the cover. These components are obtained by deformation of certain covers in the border of the moduli spaces. Finally, these components are also compatible in a tower of Hurwitz spaces, we obtain projective systems of components of the modular tower defined on $\mathbb{Q}$.

Texte reçu le 13 juin 2011, révisé et accepté le 5 juin 2012.

ORLANDO CAU, Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France • *E-mail :* `cau.orlando@hotmail.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 12F12, 14H30, 14H10 ; 14D15.

Mots clefs. — Revêtement algébrique, espace de Hurwitz, composante de Harbater-Mumford, problème inverse de Galois, tour modulaire, déformation.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2016/145/$ 5.00

1. Introduction

Les espaces de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ sont les espaces de modules grossiers pour la catégorie des G-revêtements de groupe G de la droite projective à r points de branchement. Nous allons nous intéresser à leurs composantes irréductibles. L'étude de leur corps de définition est une étape préalable nécessaire de l'approche géométrique du problème inverse de Galois. En effet, celle-ci consiste à trouver des points $\mathbb{Q}$-rationnels sur un espace de Hurwitz (lesquels, si G est de centre trivial, donnent par spécialisation une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe G). Ces points $\mathbb{Q}$-rationnels, s'ils existent, appartiennent à une $\mathbb{Q}$-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ qu'il convient de trouver en premier lieu.

Dans [2], nous avons défini et étudié la notion de Δ-composante des espaces de Hurwitz. L'intérêt de ce type de composantes est double ; d'une part on peut déterminer facilement leur corps de définition et d'autre part on garde une grande souplesse quant au type de ramification des revêtements appartenant à ces composantes. Par exemple, dans [5] Dèbes et Ghazi utilisent les composantes HM définies par Fried pour construire des revêtements p-adiques ayant bonne réduction modulo p pour p suffisamment grand ; néanmoins le type de ramification des revêtements est d'une forme très particulière. L'utilisation des Δ-composantes permet d'atteindre le même objectif mais avec une ramification moins contrainte.

Dans cet article, nous nous proposons de raffiner l'étude combinatoire de [2]. Nous obtenons trois résultats. Le premier (voir le théorème 3.2) est une estimation générale du corps de définition des Δ-composantes ; celle-ci repose sur une estimation de leur nombre. Le deuxième est un raffinement du critère d'irréductibilité de [2] (voir ci-après corollaire 3.4), particulièrement performant lorsque le groupe en question est simple. On obtient par exemple le résultat suivant pour M_{23} le groupe de Mathieu de degré 23 : l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{15}(M_{23})$ contient une composante irréductible définie sur le corps des nombres rationnels. Le troisième résultat consiste en la construction d'une tour de composantes irréductibles dans la tour modulaire de Fried avec contrôle du corps de définition (théorème 4.8).

2. Préliminaires

2.1. Description combinatoire d'un G-revêtement. — Rappelons qu'un *G-revêtement* de groupe G est un revêtement galoisien f de $\mathbb{P}^1$ de groupe G muni d'un isomorphisme γ_f entre G et $\mathrm{Aut}(f)$, et qu'un morphisme entre deux G-revêtements f et g est un morphisme de revêtements compatible avec γ_f et γ_g. Chaque G-revêtement possède trois invariants : le groupe de monodromie G, l'ensemble $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_r\}$ des points de branchement et pour chaque

$t \in \mathbf{t}$, la classe de conjugaison $C_t \subset G$ de l'inertie au-dessus de t. Le r-uplet $\mathbf{C} = (C_{t_1}, \dots, C_{t_r})$ est appelé l'invariant canonique de l'inertie. D'un point de vue topologique, ces invariants ont une description simple. Etant donné $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_r\}$, on a la notion classique de *bouquet topologique* pour $\mathbf{t}$: il s'agit d'un r-uplet de classes d'homotopie $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$ de lacets $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \mathbf{t}$ basés en un point $t_0 \notin \mathbf{t}$ vérifiant certaines conditions techniques (voir par exemple [4] section 1.1) lesquelles entraînent la propriété importante suivante : le r-uplet $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$ engendre le groupe fondamental topologique $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0)$ avec l'unique relation $\Gamma_1 \dots \Gamma_r = 1$. Considérons maintenant un G-revêtement f ramifié seulement au-dessus de $\mathbf{t}$. L'action de monodromie induit une représentation $\Phi_f : \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0) \to \mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$, où le groupe $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$ désigne le groupe des permutations de la fibre du revêtement f au-dessus du point t_0. Le groupe de monodromie G correspond à l'image de ce morphisme. L'invariant canonique de l'inertie est le r-uplet des classes de conjugaison de G des éléments $\Phi_f(\Gamma_i)$, $i = 1 \dots r$. On note aussi $\mathrm{BCD}_\Gamma(f)$ le r-uplet $(\Phi_f(\Gamma_1), \dots, \Phi_f(\Gamma_r))$ d'éléments de G, que l'on appelle *description des cycles de ramification* (*Branch Cycle Description* en anglais) du revêtement f par rapport au bouquet topologique Γ.

2.2. Espace de Hurwitz. — Pour $r \geq 2$, on note classiquement $\mathcal{U}_r$ l'espace de modules grossier du champ des droites projectives munies d'un diviseur de degré r. Etant donné un groupe fini G, on note $\mathrm{H}_r(G)$ l'espace de modules grossier du champ des G-revêtements de groupe G de la droite projective dont le diviseur de branchement est de degré r et $\theta_{r,G} : \mathrm{H}_r(G) \to \mathcal{U}_r$ l'application qui à un G-revêtement fait correspondre l'ensemble $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_r\}$ de ses points de branchement. Notons également, pour chaque r-uplet $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ non ordonné de classes de conjugaison de G, $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ le sous-espace de $\mathrm{H}_r(G)$ correspondant aux G-revêtements d'invariant canonique de l'inertie $\mathbf{C}$. Il est bien connu que $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ est une réunion de composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$. Pour finir, notons $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$ le corps fixé par le sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ des automorphismes τ tel que $\mathbf{C}^{\chi(\tau)} = \mathbf{C}$ où χ est le caractère cyclotomique. Le *Branch Cycle Argument* [10] lemme 2.8 montre que $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ est défini sur le corps cyclotomique $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$.

2.3. Composantes de l'espace de Hurwitz. — L'application $\theta_{r,G} : \mathrm{H}_r(G) \to \mathcal{U}_r$ est un revêtement étale. Sa fibre complexe est donc un revêtement topologique et les composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ correspondent aux orbites de l'action du groupe fondamental de $\mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ sur une fibre géométrique. Pour décrire concrètement cette action, on choisit un point-base $\mathbf{t} \in \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ et un bouquet topologique $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$ pour $\mathbf{t}$. L'application BCD_Γ nous donne une bijection entre la fibre de $\theta_{r,G}$ au-dessus de $\mathbf{t}$ et l'ensemble :

$$\mathrm{ni}_r(G) = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in G^r \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle g_1, \dots, g_r \rangle = G \\ g_1 \dots g_r = 1 \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{conj}$$

où par « conj » nous entendons la conjugaison composante par composante par un même élément de G.

D'autre part, le groupe fondamental de $\mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ est le groupe des tresses de Hurwitz à r brins. On le note H_r, il est engendré par $r-1$ tresses élémentaires que l'on note $Q_1, \dots, Q_{r-1}$. L'action de monodromie peut être décrite, à l'aide de la bijection entre $\mathrm{ni}_r(G)$ et la fibre géométrique de $\theta_{r,G}$, de la manière suivante :

$$Q_i(g_1, \dots, g_r) = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \dots, g_r).$$

Proposition 2.1. — Les composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ sont en bijection avec les orbites de cette action.

Soient $\mathbf{t} \in \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ et Γ un bouquet topologique pour $\mathbf{t}$. On considère l'application qui à un élément $\mathbf{g}$ de $\mathrm{ni}(G)$ fait correspondre la composante irréductible du revêtement déterminé par $(\mathbf{t}, \mathbf{g}, \Gamma)$. On montre que cette application ne dépend ni du choix du bouquet topologique ni de $\mathbf{t}$. Elle nous permet l'identification canonique entre composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ et orbites de l'action du groupe des tresses sur $\mathrm{ni}(G)$. Nous ferons toujours la confusion entre ces deux points de vue. De manière plus précise, deux G-revêtements topologiques f et g de la droite projective complexe sont dans une même composante d'un espace de Hurwitz si et seulement si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(a) Il existe deux bouquets topologiques Γ_f et Γ_g, respectivement pour $\mathbf{t}_f$ et $\mathbf{t}_g$, telle que $\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f)$=$\mathrm{BCD}_{\Gamma_g}(g)$.
(b) Pour tous bouquets topologiques Γ_f et Γ_g, il existe une tresse $\mathcal{Q} \in \mathrm{H}_r$ telle que $\mathcal{Q}(\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f)) = \mathrm{BCD}_{\Gamma_g}(g)$.

Nous dirons qu'un uplet $(g_1, \dots, g_r) \in G^r$ appartient à une composante M de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ lorsqu'il existe un G-revêtement f appartenant à la composante M et un bouquet topologique Γ_f pour $\mathbf{t}_f$ tels que $\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f) = (g_1, \dots, g_r)$. Les propriétés équivalentes (a) et (b) montrent qu'un uplet $(g_1, \dots, g_r)$ appartient à au plus une composante M d'un espace de Hurwitz.

2.4. Δ-composantes de l'espace de Hurwitz. — Soient G un groupe fini et $(G_1, \dots, G_s)$ un s-uplet de sous-groupes de G. Pour chaque sous-groupe G_i, on fixe un entier r_i et une composante irréductible M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$. L'ensemble de ces données sera noté

$$\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$$

et appelé *une structure de dégénérescence.* Notons également $r = r_1 + \cdots + r_s$.

Une structure de dégénérescence permet de créer des composantes particulières de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$, que l'on appelle Δ-composantes.

Définition 2.2. — Soient G un groupe et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. Un Δ-*représentant* est un r-uplet d'éléments de G de la forme :

$$(\underbrace{g_{1,1}, \dots, g_{1,r_1}}_{g_1}, \dots, \underbrace{g_{i,1}, \dots, g_{i,r_i}}_{g_i}, \dots, \underbrace{g_{s,1}, \dots, g_{s,r_s}}_{g_s})$$

vérifiant la condition suivante :

(A) il existe $h_1, \dots, h_s \in G$ tels que, pour $i = 1, \dots, s$, le r_i-uplet $\mathbf{g}_i^{h_i} = (h_i g_{i,1} h_i^{-1}, \dots, h_i g_{i,r_i} h_i^{-1})$ appartient à la composante M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$ (1).

Un point complexe f de $\mathrm{H}_r(G)$ est appelé Δ-*revêtement* lorsqu'il existe un bouquet topologique Γ tel que :

$$\mathrm{BCD}_\Gamma(f) \text{ est un } \Delta\text{-représentant}$$

La composante d'un Δ-revêtement (ou l'orbite d'un Δ-représentant) est appelée une Δ-composante. On note $\mathrm{ni}(\Delta)$ la réunion des Δ-composantes.

Le théorème principal de [2], dont on rappelle l'énoncé ci-après (théorème 2.4), concerne le corps de définition d'une Δ-composante. Pour l'énoncer introduisons une action galoisienne sur l'ensemble des classes d'équivalence de structures de dégénérescence. Rappelons la relation d'équivalence $\equiv$ entre deux structures de dégénérescence Δ et Δ' : $\Delta \equiv \Delta'$ si et seulement si $\mathrm{ni}(\Delta) = \mathrm{ni}(\Delta')$ (*cf.* [2]).

Définition 2.3. — Soient G un groupe et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. On définit une action de $G_\mathbb{Q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ sur l'ensemble des structures de dégénérescences par la formule suivante :

$$\Delta^\sigma := (G, (G_i)_i, (M_i)^\sigma)_i$$

(1) En particulier, le r_i-uplet $\{h_i g_{i,1} h_i^{-1}, \dots, h_i g_{i,1r_i} h_i^{-1}\}$ engendre le sous-groupe G_i avec la relation $\prod_{k=1}^{r_i} g_{i,k} = 1$.

On dit que Δ est définie sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ lorsque :

$$\Delta \equiv \Delta^\sigma$$

pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{K}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{K}}|\mathbb{K})$.

Théorème 2.4. — Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence. Si $\mathbb{K}$ est un corps de nombres et $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$ alors

$$\mathrm{ni}(\Delta)^\sigma = \mathrm{ni}(\Delta^\sigma)$$

En particulier si une structure de dégénérescence est définie sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ alors la sous-variété fermée $\mathrm{ni}(\Delta)$ est stable par l'action de $G_{\mathbb{K}}$.

3. Autour du nombre de Δ-composantes

Dans [2] nous avons donné un critère d'irréductibilité pour l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ (voir corollaire 3.4). Dans cette section, nous allons généraliser ce résultat dans 2 directions :

- le théorème 3.2 est une majoration du nombre de Δ-composantes.
- le théorème 3.8 est un autre critère d'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$ particulièrement performant lorsque le groupe G est simple (corollaire 3.11).

3.1. Majoration du nombre de Δ-composantes. — Nous commençons par une définition technique. Elle met en jeu un groupe fini G, un entier positif s et deux s-uplets de sous-groupes $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_s)$ et $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_s)$ de G.

Définition 3.1. — Nous dirons que $\mathbf{G}$ est $\mathbf{H}$-complet lorsque pour tout $i = 1, \dots, s$ et pour tous $h_1, \dots, h_s \in G$ le groupe H_i est contenu dans le groupe engendré par les sous-groupes $G_1^{h_1}, \dots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \dots, G_s^{h_s}$.

Si $\mathbf{H}$ est simplement le s-uplet de sous-groupes $(G, \dots, G)$ de G, on retrouve la définition de complétude de $\mathbf{H}$ donnée dans [2].

Lorsque $\mathbf{G}$ est attaché à la structure de dégénérescence $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$, nous dirons que Δ est $\mathbf{H}$-complète lorsque $\mathbf{G}$ est $\mathbf{H}$-complet.

Cette définition est motivée par le théorème suivant dont nous présentons une démonstration dans la section 3.2.

Théorème 3.2. — Soient G un groupe, Δ une structure de dégénérescence et $\mathbf{H}$ un s-uplet de sous-groupes. On suppose que la structure de dégénérescence Δ est $\mathbf{H}$-complète. Notons n_Δ le nombre de Δ-composantes dans l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$. On a la majoration suivante :

$$n_\Delta \leq \prod_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|H_i|}.$$

Pour illustrer ce théorème nous donnons deux applications :

APPLICATION 3.3. — Lorsque la structure de dégénérescence est complète (c'est-à-dire, $H_i = G$ pour $i = 1, \dots, s$) la majoration 3.2 nous donne le résultat suivant qui est un des résultats principaux présentés dans [2] :

COROLLAIRE 3.4. — Soient G un groupe fini et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence complète. Alors il existe une unique Δ-composante dans l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$. Autrement dit l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ est irréductible.

REMARQUE 3.5. — Partons d'une structure de dégénérescence $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ quelconque, et pour chaque entier $i = 1, \dots, s$ posons :

$$H_i^0 = \bigcap_{h_1, \dots h_s \in G} \langle G_1^{h_1}, \dots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \dots, G_s^{h_s} \rangle$$

Si on note $\mathbf{H}^0 := (H_1^0, \dots, H_s^0)$, alors, par construction, Δ est une structure de dégénérescence $\mathbf{H}^0$-complète ; et $\mathbf{H}^0$ est le meilleur choix possible de système de sous-groupes $\mathbf{H}$ tel que $\mathbf{G}$ soit $\mathbf{H}$-complet ; c'est-à-dire, pour tout s-uplet de sous-groupes $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_s)$, dire que $\mathbf{G}$ est $\mathbf{H}$-complet équivaut à $H_i \subset H_i^0$, $i = 1, \dots, s$.

Si pour tout $i = 1, \dots, s$ on note $\mathbb{Q}_{M_i}$ le corps de définition de la composante M_i, alors le compositum $k := \mathbb{Q}_{M_1} \dots \mathbb{Q}_{M_s}$ est un corps de définition de la structure de dégénérescence Δ. Les théorèmes 3.2 et 2.4 montrent que toutes les Δ-composantes sont définies sur une extension de k de degré inférieur ou égal à $\prod_{i=1}^{s} |G|/|H_i^0|$.

3.2. Démonstration du théorème 3.2. — Le lemme technique suivant nous permettra d'obtenir plus facilement le théorème 3.2.

LEMME 3.6. — Soient G un groupe, $\mathbf{H}$ un s-uplet de sous-groupes de G, Δ une structure de dégénérescence $\mathbf{H}$-complète, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant. Alors pour tout uplet $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathbf{H}$, il existe une tresse Q telle que

$$Q\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1^{h_1}, \dots, \mathbf{g}_s^{h_s})$$

Ce lemme se montre en utilisant le résultat suivant prouvé dans [2].

LEMME 3.7. — Soient G un groupe fini et $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_r) \in G^r$. Supposons qu'il existe des entiers i et k tels que $g_k \dots g_{k+i} = 1$. Soit t un élément du groupe engendré par $\{g_1, \dots, g_r\} \setminus \{g_k, \dots, g_{k+i}\}$. Alors il existe une tresse Q telle que

$$Q(g_1, \dots, g_r) = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_k^t, \dots, g_{k+i}^t, g_{k+i+1}, \dots, g_r)$$

Démonstration du lemme 3.6. — Il suffit de montrer le résultat pour les s-uplets $\mathbf{h}$ de la forme $(1,\dots,1,h,1,\dots,1)$ où $h \in H_i$ est à la i-ème place.

Le Δ-représentant $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_s)$ vérifie les conditions suivantes :

(i) pour $i = 1,\dots,s$, le produit $g_{i,1}\dots g_{i,r_i}$ est égal à 1.

(ii) si pour $j = 1,\dots,s$, on pose $\beta_j = h_j^{-1}$ où les h_j sont ceux de la définition 2.2 pour $\mathbf{g}$, alors pour tout $j = 1,\dots,s$, le groupe $G_j^{\beta_j}$ est engendré par les éléments $g_{j,1},\dots,g_{j,r_j}$.

Combiné avec l'hypothèse que Δ est une structure de dégénérescence $\mathbf{H}$-complète cela donne que le groupe H_i est contenu dans le groupe engendré par les éléments

$$\{g_{1,1},\dots,g_{1,r_1},\dots,g_{i-1,1},\dots,g_{i-1,r_{i-1}},g_{i+1,1},\dots,g_{i+1,r_{i+1}},\dots,g_{s,1},\dots,g_{s,r_s}\}$$

Comme $h \in H_i$, on en déduit que :

$$h \in \langle\{g_1,\dots,g_r\} \setminus \{g_{i,1},\dots,g_{i,r_i}\}\rangle$$

Il nous suffit d'appliquer le lemme 3.7 avec $t = h$ pour conclure. □

Démonstration du théorème 3.2. — Pour tout $k = 1,\dots,s$, notons I_k l'indice de H_k dans G et $h_{k,1},\dots,h_{k,I_k}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H_k. Soit $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant. Nous allons montrer que pour tout Δ-représentant $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)$ il existe une tresse $\mathscr{Q}$ et des entiers $t_1,\dots,t_s$ avec $t_k \in [1,I_k]$, tels que

$$\mathscr{Q}\mathbf{u} = (\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$$

Cela montrera que tout Δ-représentant est dans l'orbite d'un élément de la forme $(\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$ et permettra de conclure que le nombre de Δ-composantes est inférieur au nombre d'éléments $(\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$, c'est-à-dire $n_\Delta \leq \prod I_k$.

Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)$ un Δ-représentant. Quitte à conjuguer la structure de dégénérescence Δ (voir la proposition 2.7 de [2]), on peut supposer que pour chaque entier $i = 1,\dots,s$, le r_i-uplet $\mathbf{u}_i$ appartient à la composante M_i. Ainsi il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in G$ tels que $\mathbf{u}_k$ et $\mathbf{g}_k^{\alpha_k}$ appartiennent à la composante M_k. Il existe donc s tresses locales [(2)] $\mathscr{Q}_1,\dots,\mathscr{Q}_s$ telles que

$$\mathscr{Q}_1\dots\mathscr{Q}_s(\mathbf{u}) = (\mathbf{g}_1^{\alpha_1},\dots,\mathbf{g}_s^{\alpha_s})$$

Posons $\alpha_k = h_{k,t_k}.h_k$ où $h_k \in H_k$. Le lemme 3.6 appliqué à $(\mathbf{g}_1^{\alpha_1},\dots,\mathbf{g}_s^{\alpha_s})$ et à $\mathbf{h} = (h_1^{-1},\dots,h_s^{-1})$ nous donne l'existence d'une tresse $\mathscr{T}$ telle que

$$\mathscr{T}(\mathbf{g}_1^{\alpha_1},\dots,\mathbf{g}_s^{\alpha_s}) = (\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$$

[(2)] I.e. la tresse $\mathscr{Q}_k$ agit uniquement sur le k-ième paquet (pour tout $i,j = 1\dots s$, les tresses $\mathscr{Q}_i$ et $\mathscr{Q}_j$ ont des supports disjoints).

En multipliant les deux tresses $\mathscr{T}$ et $\mathscr{Q}_1 \dots \mathscr{Q}_s$, on obtient le résultat. □

3.3. Un critère d'irréductibilité

3.3.1. *Enoncés et exemples.* — Soient G un groupe fini, $\Delta = (G, (G_i)_{i=1\dots s}, (M_i)_{i=1\dots s})$ une structure de dégénérescence et $J := \{j_1, \dots, j_{s'}\}$ un sous-ensemble de $\{1, \dots, s\}$. Considérons un Δ-représentant que l'on note[(3)] $\mathbf{g}$. Pour tout entier $i \in \{1, \dots, s\}$ et tout entier $k \in \{1, \dots, r_i\}$ on note $\mathscr{C}_{i,k}$ la classe de conjugaison[(4)] dans G de l'élément $g_{i,k}$. Nous allons utiliser la condition technique (H), conjonction des conditions (group/gen) et (class/gen) suivantes :

- (group/gen) pour tout $j \in J$ et tous $h_1, \dots, h_s \in G$, le groupe G est engendré par ses sous-groupes $(G_i^{h_i})_{i \neq j}$.
- (class/gen) le groupe G est engendré par la réunion des classes de conjugaison $(\mathscr{C}_{j,k})_{j \in J, k \in \{1,\dots,r_j\}}$.

Le théorème suivant donne un critère plus fin que celui de [2] (réobtenu plus haut comme le corollaire 3.4) pour obtenir l'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$.

Théorème 3.8. — Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence telle que $\mathrm{ni}(\Delta) \neq \varnothing$. Sous l'hypothèse (H), il existe une unique Δ-composante dans l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$.

Exemple 3.9. — Pour $J := \{1, \dots, s\}$ on retrouve le corollaire 3.4. En effet, la condition (group/gen) signifie que la structure de dégénérescence est complète et la condition (class/gen) est vérifiée puisque $g_1, \dots, g_r$ engendrent G.

Exemple 3.10. — Soient n un nombre impair, $G = \mathbb{D}_{2n}$ le groupe dihédral de cardinal $2n$. Notons $R = \{r, r^{-1}\}$ la classe de conjugaison d'un élément r d'ordre n, S la classe de conjugaison des involutions et $\mathbf{C} = \{R, R, S, S, S, S\}$. Si l'on pose Δ la structure HM liée à $\mathbf{C}$ (voir exemple 2.6 de [2]) et $J = \{2, 3\}$ (ici $s = 3$), le théorème s'applique et l'espace $\mathrm{H}_6(D_n, \mathbf{C})$ contient une unique composante HM.

Lorsque G est un groupe simple, toute classe de conjugaison engendre G et donc pour tout $J \neq \varnothing$ la condition (class/gen) est immédiate. Dans ce cas on obtient l'amélioration suivante du théorème 3.4 :

(3) Les notations sont celles de la définition 2.2

(4) Cette classe de conjugaison ne dépend pas, à permutation près, du choix du Δ-représentant.

Corollaire 3.11. — Soient G un groupe simple et Δ une structure de dégénérescence. Supposons *qu'il existe* un entier k tel que pour tout $h_1, \ldots, h_s$ le groupe G soit engendré par les sous-groupes

$$\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{k-1}^{h_{k-1}}, G_{k+1}^{h_{k+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$$

Alors il existe une unique Δ-composante dans l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$.

Démonstration. — Il suffit de poser $J = \{k\}$ dans le théorème 3.8. □

Exemple 3.12. — Selon l'$\mathbb{ATLAS}$ le groupe de Mathieu M_{23} contient un sous-groupe maximal isomorphe au groupe M_{22} et un autre sous-groupe maximal isomorphe à M_{11}. Par maximalité, le système de sous-groupes $\mathbf{G} := (M_{22}, M_{22}, M_{11})$ vérifie les conditions du corollaire 3.11 et pour tout choix de structure de dégénérescence Δ, dont le système de sous-groupes sous-jacent est $\mathbf{G}$, il existe une unique Δ-composante. Si l'on souhaite construire une $\mathbb{Q}$-composante irréductible d'un espace de Hurwitz associé au groupe M_{23}, le théorème 2.4 montre qu'il suffit d'en construire pour les groupes M_{22} et M_{11}.

Pour ce faire, on peut par exemple utiliser les réalisations régulières des groupes M_{11} et M_{22} (obtenues par des méthodes utilisant le théorème de rigidité) que l'on trouve dans [8]. Celles-ci nous permettent de construire des composantes irréductibles définies sur $\mathbb{Q}$. Pour le groupe M_{11} il s'agit d'une composante $\mathscr{C}_{11}$ de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_9(M_{11})$ (voir le théorème 6.12 de [8] pour plus de détails) et pour le groupe M_{22} il s'agit d'une composante $\mathscr{C}_{22}$ de $\mathrm{H}_3(M_{22})$ (voir la proposition 9.1 et le théorème 9.9 de [8]). On obtient alors une $\mathbb{Q}$-composante irréductible de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{15}(M_{23})$.

3.3.2. *Démonstrations*

Démonstration du théorème 3.8. — En utilisant la proposition 2.7 de [2], on peut supposer que $J = \{1, \ldots, s'\}$. Nous adoptons les conventions d'écriture suivantes :

- un Δ-représentant $\mathbf{g}$ sera noté
$$\mathbf{g} := (\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b)$$
où $\mathbf{g}_a = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{s'})$ et $\mathbf{g}_b = (\mathbf{g}_{s'+1}, \ldots, \mathbf{g}_s)$.
- étant donnés $\mathbf{h}_a := (h_1, \ldots, h_{s'})$ et $\mathbf{h}_b := (h_{s'+1}, \ldots, h_s)$ des uplets d'éléments de G on notera
$$(\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$$
le r-uplet d'éléments de G défini de la manière suivante :
$$(\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b}) = ((g_{1,1})^{h_1}, \ldots, (g_{1,r_1})^{h_1}, \ldots, (g_{s,1})^{h_s}, \ldots, (g_{s,r_s})^{h_s})$$

Il suffit de montrer que :

(*) pour tout Δ-représentant $(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b)$ et tout $\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b$ comme ci-dessus, il existe une tresse $\mathcal{Q}$ tel que : $\mathcal{Q}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$.

On divise le problème en deux parties :

LEMME 3.13. — Pour tout Δ-représentant $\mathbf{g}$ et pour tout s'-uplet $\mathbf{k}_a$ (resp. $s-s'$-uplet $\mathbf{h}_b$) d'éléments de G :

(i) il existe un s'-uplet $\mathbf{p}_a$ d'éléments de G et une tresse $\mathcal{Q}'$ tels que :

$$\mathcal{Q}'(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$$

(ii) il existe une tresse $\mathcal{Q}$ telle que :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{k}_a}, \mathbf{g}_b).$$

Pour obtenir $(*)$, il suffit alors d'appliquer la partie (i) du lemme 3.13 et d'utiliser ensuite la partie (ii) avec $\mathbf{k}_a = \mathbf{p}_a^{-1}\mathbf{h}_a$, en remplaçant $\mathbf{g}_a$ par $\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}$ et $\mathbf{g}_b$ par $\mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b}$. □

Démonstration du lemme 3.13. — Pour la partie (ii), on peut se restreindre aux uplets $\mathbf{k}_a$ de la forme $(1, \ldots, 1, \kappa, 1, \ldots, 1)$ avec κ dans G. L'hypothèse (group/gen) nous permet d'appliquer le lemme 3.7 avec $t = \kappa$.

Pour la partie (i), on se restreint aussi aux $\mathbf{h}_b$ de la forme $(1, \ldots, h, \ldots, 1)$. L'hypothèse (class/gen) permet de choisir h dans une certaine classe de conjugaison $\mathscr{C}_{j,k}$ avec $j \in J$. On peut donc trouver un s'-uplet $\mathbf{p}_a$ tel que h appartient au sous-groupe de G engendré par $\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}$. En utilisant la partie (ii) du lemme 3.13 on peut trouver une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b)$$

Le lemme 3.7 nous permet de trouver une tresse $\mathcal{R}$ telle que :

$$\mathcal{R}(\mathbf{g}^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, (\mathbf{g}_b)^{\mathbf{h}_b})$$

Il nous suffit de composer les tresses $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ pour obtenir le résultat. □

4. Δ-composantes et tour modulaire

Nous nous sommes intéressés jusque là au nombre de Δ-composantes d'un espace de Hurwitz. Dans cette partie nous allons travailler avec une tour de Hurwitz ; il s'agit d'une collection $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de Hurwitz reliés entre eux par des morphismes $\Phi_n : H_n \to H_{n-1}$. Plus particulièrement, notre objectif est d'étudier les différents relèvements d'une composante $\mathcal{X}_0$ de H_0 le long de la tour $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$; c'est-à-dire trouver les suites de composantes $\mathcal{X}_n$ de H_n vérifiant $\Phi_n(\mathcal{X}_n) = \mathcal{X}_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous commençons par délimiter le problème, en travaillant uniquement sur les Δ-composantes dans la tour modulaire de Fried [1]. Nous allons montrer que sous certaines hypothèses, pour chaque composante $\mathcal{X}_0$, il existe une unique suite $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relevant $\mathcal{X}_0$ (voir le théorème 4.8).

4.1. Δ-revêtement et morphisme de Frattini

4.1.1. *Morphisme de Frattini et lemme de Schur-Zassenhaus.* — Avant d'envisager la tour modulaire de Fried nous allons nous concentrer sur l'ingrédient principal permettant sa construction ; on pourra consulter [6].

Définition 4.1. — Un épimorphisme de groupe $\Phi : G' \to G$ est dit *revêtement de Frattini* lorsque pour tout sous-groupe H' de G' :

$$\Phi(H') = G \Longleftrightarrow H' = G'.$$

De plus, nous dirons que Φ est un p-revêtement de Frattini quand $\ker(\Phi)$ est un p-groupe.

Le lemme suivant est généralement énoncé dans le cas où H est cyclique. Nous aurons besoin de cette version plus générale.

Lemme 4.2. — *Soient p un nombre premier et $\Phi : G' \longrightarrow G$ un p-revêtement de Frattini. Si H est un sous-groupe de G d'ordre ρ premier à p, alors il existe un relèvement H' de H en un sous-groupe de G' d'ordre ρ. De plus si H'_1 est un autre relèvement de H d'ordre ρ, il existe un élément $h' \in \ker(\Phi)$ tel que*

$$H'_1 = (H')^{h'}.$$

Démonstration. — La restriction Ψ du morphisme Φ au sous-groupe $\mathfrak{H} := \Phi^{-1}(H)$ permet de construire la suite exacte :

$$1 \to \ker(\Psi) \to \mathfrak{H} \to H \to 1. \tag{1}$$

Les sections de cette suite correspondent aux relèvements de H de même ordre. D'autre part, les groupes H et $\ker(\Psi)$ sont d'ordres premiers entre eux, ce qui nous permet d'utiliser le lemme de Schur-Zassenhaus : la suite se scinde et les sections sont toutes conjuguées entres elles par un élément de $\ker(\Psi)$ [9]. □

4.1.2. *Relèvement des structures de dégénérescence.* — Soient $\Phi : G' \to G$ un p-revêtement de Frattini entre groupes finis et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)_{i=1,\dots,s}$ une structure de dégénérescence. Supposons que pour chaque entier $i = 1, \dots, s$, le groupe G_i soit un p'-groupe (nous dirons que la structure de dégénérescence Δ est p'). Le lemme 4.2, appliqué aux groupes $G_1, \dots, G_s$, nous permet de créer des relèvements $G'_1, \dots, G'_s$ de $G_1, \dots, G_s$ ainsi que des isomorphismes

$$\psi_i : G_i \longrightarrow G'_i$$

(ce sont les sections des différentes suites exactes (1)). Pour chaque entier $i = 1, \dots, s$, le morphisme ψ_i induit une bijection de l'ensemble des composantes de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$ sur l'ensemble des composantes de $\mathrm{H}_{r_i}(G'_i)$. Ceci nous permet de créer une structure de dégénérescence sur le groupe G' définie par

$$\Delta' := (G', (G'_i)_i, (M'_i)_i)_{i=1,\dots,s}$$

Ici on a noté $M'_i := \psi_i(M_i)$ pour $i = 1, \dots, s$. Plus précisément, la structure de dégénérescence Δ' dépend des sections ψ_i. Cependant le lemme 4.2 nous dit que deux sections sont conjuguées. On en déduit qu'un autre choix de sections revient à conjuguer les structures de dégénérescence. On a donc défini une classe d'équivalence de structure de dégénérescence. Il n'y a pas d'ambiguïté à parler de Δ'-composantes de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G')$.

4.1.3. *Relèvement des Δ-composantes.* — L'objectif est d'étudier le nombre de Δ-composantes de $\mathrm{H}_r(G')$ en fonction du nombre de Δ-composantes de $\mathrm{H}_r(G)$. La proposition suivante nous donne un critère pour que toute Δ-composante se relève de manière unique en une Δ'-composante.

Proposition 4.3. — Soient $\Phi : G' \to G$ un p-revêtement de Frattini et $\Delta = (G, (M_i), (G_i))$ une structure de dégénérescence p'. Si la structure de dégénérescence Δ' est $\mathbf{ker}(\Phi)$-complète[5], alors toute Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ se relève de manière unique en une Δ'-composante de $\mathrm{H}_r(G')$.

Démonstration. — Il faut montrer les deux points suivants :

(i) toute Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ se relève en une Δ'-composante de $\mathrm{H}_r(G')$;

(ii) si deux Δ-composantes M_1 et M_2 de $\mathrm{H}_r(G')$ vérifient $\Phi(M_1) = \Phi(M_2)$ alors $M_1 = M_2$.

Pour le point (i), notons $\psi_i : G_i \longrightarrow G'_i$ pour tout $i = 1, \dots, s$, l'isomorphisme obtenu dans le lemme 4.2. Soit M une Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ et $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant appartenant à M. Par définition, il existe un uplet $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s) \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{g}^{\mathbf{h}}$ appartient à $M_1 \times \cdots \times M_s$. Soit $\mathbf{h}' = ({h'}_1, \dots, {h'}_s) \in \mathbf{G}'$ des relevés de $(h_1, \dots, h_s)$. Les restrictions de Φ induisent des isomorphismes $(G'_i)^{{h'_i}^{-1}} \longrightarrow (G_i)^{h_i^{-1}}$, dont on notera φ_i l'isomorphisme réciproque. Posons $\mathbf{g}'_i = \varphi_i(\mathbf{g}_i)$ et $\mathbf{g}' = (\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_s)$.

Du fait que $\Phi(\mathbf{g}') = \mathbf{g}$ et que $\mathbf{g}$ engendre G, on déduit de la propriété de Frattini que $\mathbf{g}'$ engendre G'. Par ailleurs

$$(\psi_1(\mathbf{g}_1^{h_1}), \dots, \psi_s(\mathbf{g}_s^{h_s})) = (\varphi_1(\mathbf{g}_1)^{h'_1}, \dots, \varphi_s(\mathbf{g}_s)^{h'_s)}) \in M'_1 \times \cdots \times M'_s$$

ce qui prouve que $\mathbf{g}' = (\varphi_1(\mathbf{g}_1), \dots, \varphi_s(\mathbf{g}_s))$ est un Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$.

Pour le point (ii), fixons $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant. Quitte à conjuguer la structure de dégénérescence Δ (voir proposition 2.7 de [2]) on peut supposer que pour tout $i = 1, \dots, s$, le r_i-uplet $\mathbf{g}_i$ appartient à la composante M_i. Soit maintenant $\mathbf{g}' = (\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_s)$ un Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$

[5] Par définition $\mathbf{ker}(\Phi) = (\ker(\Phi), \dots, \ker(\Phi))$.

et pour chaque indice $i = 1, \dots, s$, notons $\mathscr{G}'_i$ le sous-groupe de G engendré par le r_i-uplet $\mathbf{g}'_i$. Le sous-groupe $\mathscr{G}'_i$ de G' est contenu dans un conjugué de G'_i ; par ailleurs la restriction $\Phi : \mathscr{G}'_i \longrightarrow G_i$ du morphisme de Frattini Φ au sous-groupe $\mathscr{G}'_i$ est surjective sur G_i, car elle envoie l'uplet $\mathbf{g}'_i$ sur l'uplet $\mathbf{g}$ qui engendre G_i ; compte tenu des ordres des deux groupes, cela prouve que c'est un isomorphisme et que sa réciproque ψ'_i induit une section de la suite exacte (1) présentée dans la démonstration du lemme 4.2.

Soit maintenant $\mathbf{g}'' = (\mathbf{g}''_1, \dots, \mathbf{g}''_s)$ un autre Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$. Par le même raisonnement on a une autre section ψ''_i de la suite exacte (1) vérifiant $\psi''_i(\mathbf{g}_i) = \mathbf{g}''_i$. La conclusion du lemme 4.2 nous dit que les deux sections sont conjuguées par un élément de $\ker(\Phi)$; c'est-à-dire que pour tout indice $i = 1, \dots, s$, il existe un élément $h_i \in \ker(\Phi)$ tel que :

$$\psi''_i = i_{h_i} \circ \psi'_i$$

où i_{h_i} est l'automorphisme intérieur de G' défini par h_i. On en déduit en particulier que

$$\psi''_i(\mathbf{g}_i) = (i_{h_i} \circ \psi'_i)(\mathbf{g}_i).$$

Ce qui se traduit par la relation

$$(\mathbf{g}''_1, \dots, \mathbf{g}''_s) = ((\mathbf{g}'_1)^{h_1}, \dots, (\mathbf{g}'_s)^{h_s}).$$

Pour conclure, rappelons que $\mathbf{g}'$ et $\mathbf{g}''$ sont deux Δ'-représentants et que par hypothèse la structure de dégénérescence Δ' est $\mathbf{ker}(\Phi)$-complète ; cela nous permet d'appliquer le lemme 3.6. □

4.2. Tour modulaire. — Nous allons définir la tour modulaire de Fried ; les références sont [3], [1] et [6].

4.2.1. *Revêtement universel de Frattini.* — Etant donné un groupe fini G, il existe un *plus grand* objet pour la catégorie des p-revêtements de Frattini de G ; on le note traditionnellement ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \to G$; il s'agit de l'unique revêtement p-Frattini et p-projectif de G. On peut définir la série de Frattini $\mathrm{M}_n(G)$ de G à partir du noyau ker de ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \to G$ par la formule de récurrence

$$\begin{cases} \mathrm{M}_0(G) = \ker \\ \mathrm{M}_n(G) = \mathrm{M}_{n-1}(G)^p[\mathrm{M}_{n-1}(G), \mathrm{M}_{n-1}(G)] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour chaque $n \geq 0$, $\mathrm{M}_n(G)$ est un pro-p groupe libre de rang fini, distingué dans ${}_p\tilde{G}$ et le quotient ${}_p\tilde{G}/\mathrm{M}_n(G)$, noté ${}^n_p\tilde{G}$, est fini. On obtient une suite de morphismes

$${}_p\tilde{G} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}^n_p\tilde{G} \longrightarrow {}^{n-1}_p\tilde{G} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G.$$

Pour tout $n \geq 0$, ${}_p^n\tilde{G}$ est appelé *le n-ième quotient de* ${}_p\tilde{G}$ et ${}_p^n\Phi : {}_p^n\tilde{G} \to G$ *le n-ième morphisme quotient de* ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \to G$. Chacun de ces morphisme est de Frattini et le groupe profini ${}_p\tilde{G}$ s'écrit ${}_p\tilde{G} = \varprojlim {}_p^n\tilde{G}$.

Nous pouvons définir la tour modulaire de Fried.

DÉFINITION 4.4. — Soient G un groupe fini, p un diviseur premier du cardinal de G et $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ un r-uplet de p'-classes de conjugaison de G. D'après le lemme 4.2 il existe un r-uplet $\mathbf{C}^n = (C_1^n, \ldots, C_r^n)$ de p'-classes de conjugaison de ${}_p^n\tilde{G}$ relevant $\mathbf{C}$. Notons $\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_r({}_p^n\tilde{G}, \mathbf{C}^n)$ et $\varphi_n : \mathrm{H}_{n+1} \to \mathrm{H}_n$. La collection des espaces H_n et des morphismes φ_n quand n décrit $\mathbb{N}$ est appelée *tour modulaire* associée au triplet $(G, \mathbf{C}, p)$.

4.2.2. *Résultats.* — Commençons par deux définitions techniques :

DÉFINITION 4.5. — Soient p un nombre premier, G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Nous dirons que G est H-régulier quand :

$$\frac{|{}_n^p G|}{|G|} = \frac{|{}_n^p H|}{|H|}. \tag{2}$$

Pour vérifier la H-régularité nous avons ce lemme pratique :

LEMME 4.6. — Soient G un groupe H un sous-groupe. Pour que G soit H-régulier il faut et il suffit que :

$$\frac{|{}_1^p G|}{|G|} = \frac{|{}_1^p H|}{|H|}. \tag{3}$$

Démonstration. — Les rangs $r_n(G)$ des pro-p groupes libres $\mathrm{M}_n(G)$ vérifient les deux relations suivantes, conséquences de la formule de Nielsen-Schreier et du calcul du sous-groupe de Frattini d'un pro-p-groupe libre (*cf.* proposition 17.6.2 et lemme 22.7.4 de [6]) : pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} r_n(G) & = 1 + \frac{|{}_p^n\tilde{G}|}{|{}_p^{n-1}\tilde{G}|}\left[r_{n-1}(G) - 1\right] \\ \frac{|{}_p^n\tilde{G}|}{|{}_p^{n-1}\tilde{G}|} & = p^{r_{n-1}(G)}. \end{cases}$$

On déduit aisément par récurrence que la quantité $|{}_n^p\tilde{G}|/|G|$ ne dépend que de $|{}_1^p\tilde{G}|/|G|$. $\square$

DÉFINITION 4.7. — Soient G un groupe fini et $\Delta := (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. Nous dirons que Δ est régulière lorsque pour tout $i = 1, \ldots, s$ et pour tous $h_1, \ldots, h_s \in G$, le groupe G est Θ-régulier où Θ est le sous-groupe de G engendré par $G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s}$.

Nous pouvons énoncer le résultat.

Théorème 4.8. — Soient G un groupe fini, p un nombre premier, $\mathbf{C}$ un r-uplet de p'-classes de conjugaison de G et Δ une structure de dégénérescence régulière. Alors toute Δ-composante de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ se relève de manière unique le long de la tour modulaire.

Ce théorème nous dit que modulo une hypothèse technique, le nombre de Δ-composantes dans la tour modulaire est constant. On peut par exemple estimer ce nombre en utilisant les théorèmes 3.2 et 2.4 ; on trouve un entier ℓ tel que toutes les Δ-composantes de la tour modulaire soient définies sur une extension de degré inférieur ou égal à ℓ du compositum des corps de définition des composantes M_i.

4.2.3. *Démonstration du théorème 4.8.* — Notons plus simplement $\Phi : {}_p\tilde{G} \longrightarrow G$ le p-revêtement universel de Frattini de G et, pour tout $n \geq 0$, $\Phi_n : {}_p^n\tilde{G} \to G$ son n-ième morphisme quotient. Nous commençons par un lemme technique.

Lemme 4.9. — Soient $n \geq 0$ un entier et H un sous-groupe de G tel que G soit H-régulier. Alors $\Phi_n^{-1}(H)$ est isomorphe au n-ième quotient du p-revêtement universel de Frattini de H. En conséquence tout relevé de H à ${}_p^n\tilde{G}$ (*i.e.* tout sous-groupe H' de ${}_p^n\tilde{G}$ tel que $\Phi_n(H') = H$) contient le noyau de Φ_n.

Avant de donner une preuve de ce lemme voyons comment il permet, à l'aide de la proposition 4.3, d'obtenir le théorème 4.8.

Démonstration du théorème 4.8. — Fixons un entier $n \geq 0$. Nous allons montrer que le relèvement Δ' *via* Φ_n de la structure de dégénérescence Δ est $\mathbf{ker}(\Phi_n)$-complet pour pouvoir appliquer la proposition 4.3. Fixons-nous un entier $i = 1, \dots, s$ et un s-uplet $h_1, \dots, h_s$ d'éléments de ${}_p^n\tilde{G}$ et montrons que le sous-groupe $\mathfrak{G}'_i$ de ${}_p^n\tilde{G}$ engendré par

$$G_1'^{h_1}, \dots, G_{i-1}'^{h_{i-1}}, G_{i+1}'^{h_{i+1}}, \dots, G_s'^{h_s}$$

contient le noyau de Φ_n.

Clairement le groupe $\Phi_n(\mathfrak{G}'_i)$ est engendré par

$$G_1^{\Phi_n(h_1)}, \dots, G_{i-1}^{\Phi_n(h_{i-1})}, G_{i+1}^{\Phi_n(h_{i+1})}, \dots, G_s^{\Phi_n(h_s)}.$$

La structure Δ étant régulière, le groupe G est $\Phi_n(\mathfrak{G}'_i)$-régulier. Le second point du lemme 4.9, appliqué au relèvement $\mathfrak{G}'_i$ de $\Phi_n(\mathfrak{G}'_i)$, permet alors de conclure que $\mathfrak{G}'_i$ contient le noyau de Φ_n. D'après la proposition 4.3, toute Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ se relève de manière unique en une Δ'-composante de $\mathrm{H}_r({}_p^n\tilde{G})$. □

Démonstration du lemme 4.9. — Le second point découle aisément du premier : si $\Phi_n^{-1}(H)$ est isomorphe au n-ième quotient de ${}_p\tilde{H}$, la propriété de Frattini de $\Phi_n : \Phi_n^{-1}(H) \longrightarrow H$ permet de déduire de la condition $\Phi_n(H') = H$, satisfaite par tout relevé H' de H à ${}^n_p\tilde{G}$, que $H' = \Phi_n^{-1}(H)$, et donc que H' contient le noyau de Φ_n.

Le raisonnement ci-dessous démontre le premier point dont on trouve également une preuve dans [7, §2.A].

Le sous-groupe H de G est fermé (ce sont des groupes finis). Par conséquent $\Phi^{-1}(H)$ est fermé dans ${}_p\tilde{G}$, et donc projectif. On en déduit qu'il existe un relèvement Γ comme dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& {}_p\tilde{H} \arrow[d] \\
\Phi^{-1}(H) \arrow[ur, two heads, "\Gamma"] \arrow[r, two heads] & H.
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le morphisme vertical est le p-revêtement universel de Frattini de H et le morphisme horizontal est la restriction de Φ à $\Phi^{-1}(H)$. De ce diagramme découle que $\Gamma(\mathrm{M}_0(G)) \subset \mathrm{M}_0(H)$, ce qui fournit $\Gamma(\mathrm{M}_n(G)) \subset \mathrm{M}_n(H)$ pour tout $n \geq 0$.

Considérons ensuite les n-ièmes quotients des p-revêtements universels de Frattini de G et de H. Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
& & {}_p\tilde{H} \arrow[d] \\
& & {}^n_p\tilde{H} \arrow[d] \\
\Phi^{-1}(H) \arrow[uurr, two heads, "\Gamma"] \arrow[urr, two heads] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \Phi_n^{-1}(H) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & H \arrow[d, hook] \\
\tilde{G} \arrow[r, two heads] & {}^n_p\tilde{G} \arrow[r, two heads, "\Phi_n"] & G.
\end{tikzcd}$$

Les morphismes horizontaux correspondent à la tour de revêtements de Frattini du groupe G. Dans la troisième ligne on a restreint la dernière ligne au sous-groupe H. Le haut du diagramme correspond au diagramme précédent.

On commence par construire le morphisme $\Phi_n^{-1}(H) \longrightarrow {}^n_p\tilde{H}$ en pointillé sur le diagramme. Il s'agit de vérifier la propriété universelle d'un quotient, c'est-à-dire que

$$\ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow \Phi_n^{-1}(H)) \subset \ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow {}_p^n\tilde{H}) = \Gamma^{-1}(M_n(H)).$$

Comme $\ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow \Phi_n^{-1}(H)) \subset \mathrm{M}_n(G)$, cela résulte de l'inclusion $\Gamma(\mathrm{M}_n(G)) \subset \mathrm{M}_n(H)$ précédemment établie. On obtient ainsi un morphisme surjectif $\Gamma_n : \Phi_n^{-1}(H) \longrightarrow {}_p^n\tilde{H}$. Ce morphisme est en fait une bijection car la propriété de régularité implique que les groupes $\Phi_n^{-1}(H)$ et ${}_p^n\tilde{H}$ ont même cardinal. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Recent developments in the inverse Galois problem* – Contemporary Mathematics, vol. 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[2] O. Cau – « Delta-composantes des espaces de modules de revêtements », *J. Théorie des Nombres de Bordeaux* **24** (2012), p. 557–582.

[3] P. Dèbes – « Arithmétique et espace de modules de revêtements », in *Proceedings of the number theory conference in Zakopane* (K. Gyory, H. Iwaniec & J. Urbanowicz, éds.), de Gruyter, 1999, p. 75–102.

[4] P. Dèbes & M. Emsalem – « Harbater-Mumford components and towers of moduli spaces », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), p. 351–371.

[5] P. Dèbes & N. Ghazi – « Galois covers and the Hilbert-Grunwald property », *Ann. Inst. Fourier* **62** (2012), p. 989–1013.

[6] M. D. Fried & M. Jarden – *Field arithmetic*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 11, Springer, Berlin, 2005.

[7] M. D. Fried & Y. Kopeliovich – « Applying modular towers to the inverse Galois problem », in *Geometric Galois actions, 2*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 243, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 151–175.

[8] G. Malle & B. H. Matzat – *Inverse Galois theory*, Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 1999.

[9] J. J. Rotman – *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Math., vol. 148, Springer, New York, 1995.

[10] H. Völklein – *Groups as Galois groups*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 53, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.