Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DEGRÉ TROIS D'UN PRODUIT

Alena Pirutka

Tome 144
Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 53-75

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
144 (1), 2016, p. 53–75

SUR LA COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE EN DEGRÉ TROIS D'UN PRODUIT

par Alena Pirutka

Résumé. — Soit $\mathbb{F}$ un corps fini et soit C une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}$. On établit la nullité du troisième groupe de cohomologie non ramifiée du produit $X \times C$ pour certaines surfaces projectives et lisses X sur $\mathbb{F}$. Cela s'applique en particulier aux surfaces géométriquement rationnelles.

Abstract (*On the unramified cohomology in degree three of a product*)
Let $\mathbb{F}$ be a finite field and let C be a smooth projective curve over $\mathbb{F}$. We establish that the third unramified cohomology of the product $X \times C$ vanishes for some smooth projective surfaces X over $\mathbb{F}$. This applies in particular to geometrically rational surfaces.

1. Introduction

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $V/\mathbb{F}$ une variété projective et lisse, géométriquement intègre, de dimension 3, munie d'un morphisme $f : V \to C$ vers une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}$. Dans un article récent [9], Colliot-Thélène et Kahn ont établi le résultat suivant qui relie la conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc sur les zéro-cycles de degré 1 sur la fibre générique V_η de f (cf. [8]) et le groupe de cohomologie non ramifiée $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$:

Texte reçu le 21 mai 2012, révisé et accepté le 22 mai 2013.

Alena Pirutka, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France • *E-mail :* `alena.pirutka@polytechnique.edu`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20; 14E22, 14C25.

Mots clefs. — Cohomologie non ramifiée, zéro-cycles, applications résidu, corps finis.

Supposons que la conjecture de Tate vaut pour les diviseurs sur V et que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est divisible. S'il existe sur la surface V_η une famille de zéro-cycles locaux de degré 1, orthogonale au groupe de Brauer de V_η via l'accouplement de Brauer-Manin (cf. [22]), alors il existe sur V_η un zéro-cycle de degré premier à l.

Par conséquent, on s'intéresse à savoir si le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul pour une telle variété V. Plus généralement, on conjecture ([9] Conjecture 5.6), que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée s'annule pour une $\mathbb{F}$-variété projective et lisse, de dimension 3, géométriquement uniréglée. Pour une variété fibrée en coniques au-dessus d'une surface, c'est un théorème de Parimala et Suresh [26]. Pour V comme ci-dessus, le premier cas à examiner est celui d'une fibration triviale $V = X \times C$ où X est une surface géométriquement rationnelle sur $\mathbb{F}$. Dans cette note on établit la conjecture pour de telles variétés V. Cela donne en particulier un nouveau cas où l'on arrive à comprendre le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(V, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ pour une variété projective et lisse V de dimension trois, définie sur $\mathbb{F}$ (cf. [9] Question 5.4).

Pour k un corps on note $\bar{k}$ une clôture séparable de k. Si X est une k-variété, on écrit $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Pour L un corps contenant k, on écrit $X_L = X \times_k L$. L'énoncé principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives 1 et 2. Soit K le corps des fonctions de C. Faisons les hypothèses :*

(H1) $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$;
(H2) $b_2(\bar{X}) - \rho(\bar{X}) = 0$;
(H3) $NS(\bar{X})$ *est sans torsion ;*
(H4) $A_0(X_{\bar{K}}) = 0$.

Alors

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$$

pour tout nombre premier $l \neq p$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées si $\bar{X}$ est une surface rationnelle. Elles sont aussi satisfaites pour les surfaces $K3$ supersingulières au sens de Shioda (cf. [16], ces surfaces n'existent qu'en caractéristique positive).

Pour établir le théorème 1.1, on procède par diverses réductions. On montre d'abord que le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X_K est nul, au moins à la p-torsion près. On en déduit que tout élément ξ du groupe

$$H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \subset H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

provient de $H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. Ceci est fait dans la section 2. Dans la section 3, on vérifie que pour les cas que l'on considère, les applications résidus sont compatibles à des applications bord dans la suite spectrale de Leray. On se ramène ainsi à considérer le groupe $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$, ce qui nous permet de déduire le résultat dans la section 4.

1.1. Rappels et notations. — Si A est un groupe abélien et n est un entier, on note $A[n]$ le sous-groupe de A formé par les éléments annulés par n. Pour l un nombre premier on note $A\{l\}$ le sous-groupe de A formé par les éléments de torsion l-primaire.

Étant donnés un corps k et un entier n inversible sur k, on note μ_n le k-schéma en groupes (étale) des racines n-ièmes de l'unité. Pour j un entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j} = \mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). Lorsque k contient une racine primitive n-ième de l'unité, on a un isomorphisme $\mu_n^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n$ pour tout j.

Pour X un schéma on note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif sur X et le faisceau étale ainsi défini. On écrit $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ pour le groupe de Brauer cohomologique de X.

Pour X une k-variété propre, on note $A_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur X : $A_0(X) = \ker[CH_0(X) \stackrel{\deg}{\to} \mathbb{Z}]$. On note $\rho(\bar{X}) = \operatorname{rk}(\operatorname{NS}(\bar{X}))$ le rang du groupe de Néron-Severi de $\bar{X}$ (cf. [2] XIII 5.1) et $b_i(\bar{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$, $l \neq \operatorname{car} k$, les nombres de Betti.

1.1.0.1. *Cohomologie non ramifiée.—* Pour k un corps, F un corps de fonctions sur k, n un entier inversible sur k, $i \geq 1$ un entier naturel et $j \in \mathbb{Z}$ un entier relatif on définit

$$H^i_{\text{nr}}(F/k, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_A \operatorname{Ker}[H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\partial_A} H^{i-1}(k_A, \mu_n^{\otimes j-1})].$$

Dans cette formule, A parcourt les anneaux de valuation discrète de rang un, de corps des fractions F, contenant le corps k. Le corps résiduel d'un tel anneau A est noté k_A et l'application ∂_A est l'application résidu.

Pour X une k-variété intègre, on note $H^i_{\text{nr}}(X, \mu_n^{\otimes j}) \stackrel{\text{def}}{=} H^i_{\text{nr}}(k(X)/k, \mu_n^{\otimes j})$, où $k(X)$ est le corps des fonctions de X. On utilise aussi les groupes $H^i_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j))$ (resp. $H^i_{\text{nr}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(j))$ pour l un nombre premier) obtenus par passage à la limite inductive.

1.1.0.2. *Rappels de K-théorie.—* Pour X un schéma noethérien et j un entier positif on note $\mathcal{K}_j$ le faisceau de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto K_j(H^0(U, \mathcal{O}_U))$, le groupe $K_j(A)$ étant celui associé par Quillen à l'anneau A. Lorsque X est une variété lisse sur un corps k, la conjecture de Gersten, établie par Quillen, permet de calculer les groupes de cohomologie de Zariski

$H^i(X,\mathcal{K}_j)$ comme les groupes de cohomologie du complexe de Gersten. Pour $j=2$ ce complexe s'écrit

$$K_2k(X) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où l'application d_2 est donnée par le symbole modéré et l'application d_1 est obtenue par la somme des flèches diviseurs après normalisation des variétés considérées ; le groupe $K_2k(X)$ coïncide avec le groupe de K-théorie de Milnor $K_2^M k(X)$, quotient de $k(X)^*\otimes_{\mathbb{Z}} k(X)^*$ par le sous-groupe engendré par les éléments $a\otimes b$ avec $a+b=1$. On en déduit que pour X une variété lisse sur un corps k on a une flèche naturelle $\mathrm{Pic}(X)\otimes k^*\to H^1(X,\mathcal{K}_2)$.

1.1.0.3. *Corps globaux.*— Si K est un corps global, on note Ω l'ensemble des places de K. On note K_v le complété de K en une place v. Pour S un K-tore, on dispose d'une application de restriction $H^i(K,S)\to\prod_{v\in\Omega}H^i(K_v,S)$. On note

$$Ш^i(K,S)=\mathrm{Ker}[H^i(K,S)\to\prod_{v\in\Omega}H^i(K_v,S)].$$

1.2. Conséquences des hypothèses. — Les propriétés suivantes sont utilisées plusieurs fois dans la suite.

Proposition 1.1. — *Soit $\bar X$ une variété projective et lisse, définie sur un corps séparablement clos $\bar k$. Soit $n>0$ un entier, $(n,\mathrm{car}\,\bar k)=1$. Supposons que $\bar X$ vérifie les hypothèses* (H1) – (H3) *du théorème 1.1. Alors*

(i) *le groupe* $\mathrm{Pic}\,\bar X$ *est de type fini sans torsion ;*
(ii) *si $\bar k\subset\bar K$ une extension de corps séparablement clos, la flèche naturelle* $\mathrm{Pic}\,\bar X\to\mathrm{Pic}\,\bar X_{\bar K}$ *est un isomorphisme ;*
(iii) $H^1_{\text{ét}}(\bar X,\mu_n)=0$ *; on a de plus* $H^3_{\text{ét}}(\bar X,\mu_n)=0$ *si $\bar X$ est une surface ;*
(iv) *$Br\,\bar X\{l\}=0$ pour tout $l\neq\mathrm{car}\,\bar k$;*
(v) *on a un isomorphisme* $\mathrm{Pic}\,\bar X/n\xrightarrow{\simeq}H^2_{\text{ét}}(\bar X,\mu_n)$ *;*
(vi) *le noyau et le conoyau de l'application naturelle* $\mathrm{Pic}\,\bar X\otimes\bar k^*\to H^1(\bar X,\mathcal{K}_2)$, *sont des groupes uniquement divisibles par tout entier premier à* $\mathrm{car}.\,\bar k$.

Démonstration. — L'hypothèse (H1) implique qu'on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}\,\bar X\xrightarrow{\sim}NS(\bar X)$ où le groupe $NS(\bar X)$ est un groupe de type fini, et il est sans torsion d'après (H3), d'où l'énoncé (i). Ce groupe est invariant par changement des corps séparablement clos car c'est le groupe des composantes du schéma de Picard de $\bar X$, d'où (ii). La suite exacte de Kummer

$$0\to\mu_n\to\mathbb{G}_m\to\mathbb{G}_m$$

permet d'identifier le groupe $H^1_{\text{ét}}(\bar X,\mu_n)$ avec le groupe $\mathrm{Pic}\,\bar X[n]$ qui est nul d'après (i). Si X est une surface, cela implique que $H^3_{\text{ét}}(\bar X,\mu_n)=0$ par dualité de Poincaré ([24] VI.11.2). L'énoncé (iv) est une conséquence des hypothèses (H2) et (H3) d'après [19] II 3.1 et III. 8.3. On déduit alors (v) de la suite de Kummer. L'énoncé (vi) est plus délicat, il est démontré par Colliot-Thélène et Raskind [10], qui utilisent aussi les conjectures de Weil et les résultats de Merkurjev et Suslin [23], [29]. Soient K le noyau et C le conoyau de l' application $\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{k}^* \to H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$. Sous l'hypothèse (H2), les énoncés 2.12 et 2.14 de [10] impliquent que K est un groupe uniquement divisible par tout entier premier à p et que C est une somme directe d'un groupe uniquement divisible par tout entier premier à p et du groupe $\oplus_l H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))\{l\}$, groupe qui est nul d'après l'hypothèse (H3) ([19] II 3.1 et III 8.3). Notons que si X est une surface géométriquement rationnelle, on peut établir (vi) plus facilement (cf. [3] 1.4). □

2. Zéro-cycles sur X_K et réduction à $H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$

Proposition 2.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives* 1 *et* 2. *Soit K le corps des fonctions de C. Supposons que la surface $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}$ vérifie les hypothèses* (H1) – (H4) *du théorème 1.1. Alors le groupe de Chow $A_0(X_K)$ des zéro-cycles de degré zéro sur X_K est nul, au moins à la p-torsion près.*

Démonstration. — Soit $G = \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{F}$. D'après la proposition 1.1, le G-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est de type fini sans torsion. Soit S le $\mathbb{F}$-tore dual.

D'après les estimations de Lang-Weil [21], la surface géométriquement intègre X possède un zéro-cycle de degré 1. On dispose alors d'un torseur *universel* $\mathcal{T}$ sur X sous S ([13], 2.2.2 et 2.3.4). À un tel torseur on associe un homomorphisme

$$A_0(X_k) \stackrel{\Phi_k^{\mathcal{T}}}{\to} H^1(k, S_k)$$

défini pour toute extension (non nécessairement finie) $k/\mathbb{F}$. Pour x un point fermé de X_k de corps résiduel $k(x)$ on pose $\Phi_k^{\mathcal{T}}(x) = Cor_{k(x)/k}([\mathcal{T}_{k(x)}])$, où $[\mathcal{T}_{k(x)}]$ est la classe du torseur $\mathcal{T} \times_X k(x)$ dans $H^1(k(x), S_{k(x)})$. Le fait que cette application passe au quotient par l'équivalence rationnelle est démontré dans [11] Prop. 12, p. 198. Cette construction est fonctorielle pour les extensions des corps, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_0(X_K) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^{\tau}_K"] \arrow[dr, "\Psi"] & \prod_v A_0(X_{K_v}) \arrow[d, "\prod \Phi^{\tau}_{K_v}"] \\ H^1(K, S_K) \arrow[r] & \prod_v H^1(K_v, S_{K_v}). \end{tikzcd} \tag{2}$$

L'image de l'application verticale de droite du diagramme est nulle. En effet, soit L une extension finie de K_v et soit $i_{x_v} : \operatorname{Spec} L \to X \times_{\mathbb{F}} K_v$ l'inclusion du point fermé x_v de X_{K_v} de corps résiduel L. Soit $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L et soit κ le corps résiduel de $\mathcal{O}_L$. Le morphisme i_{x_v} se prolonge en un morphisme

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to X \times_{\mathbb{F}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L.$$

D'après la construction, $\Phi^{\tau}_{K_v}(x_v)$ provient alors de la classe du torseur $\mathcal{T} \times_{\mathbb{F}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$ dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_L, S \times_{\mathbb{F}} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L) = H^1(\kappa, S_\kappa)$, le groupe qui est nul car κ est un corps fini. Ainsi

$$\Psi(A_0(X_K)) = 0. \tag{3}$$

Comme la surface X_K vérifie encore les hypothèses (H1) – (H4), l'application Φ^{τ}_K coïncide avec l'application $\Phi_B : A_0(X_K) \to H^1(X_K, S_{X_K})$ définie par Bloch [3], au moins à la p-torsion près. Pour les surfaces géométriquement rationnelles sur un corps parfait, c'est le Théorème 3 de [12]. En utilisant les résultats de [10], on montrera dans l'appendice de cette note que ce théorème reste vrai, au moins à la p-torsion près, sous les conditions (H1) – (H4).

Pour la suite de la preuve, on raisonne à la p-torsion près. Soit $\mathfrak{G} = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$. On a une suite exacte ([3], [10] 3.6)

$$H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}})/H^0(X_{\bar{K}}, \mathcal{K}_2)) \to A_0(X_K) \xrightarrow{\Phi_B} H^1(K, S_{X_K}).$$

Sous l'hypothèse que X_K possède un zéro-cycle de degré 1, hypothèse qui est satisfaite ici, le théorème Hilbert 90 pour $\mathcal{K}_2$ implique que le groupe $H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}}))$ est nul ([5], corollaire 1 et remarque 5.2 pour le cas de la caractéristique positive). De plus, sous les hypothèses (H1) et (H3) de la proposition, le groupe $H^0(X_{\bar{K}}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible d'après [10] 1.8. On en déduit que le groupe $H^1(\mathfrak{G}, K_2\bar{K}(X_{\bar{K}})/H^0(X_{\bar{K}}, \mathcal{K}_2))$ est nul. L'application $\Phi_B = \Phi^{\tau}_K$ est donc injective.

Dans le diagramme (2), le noyau $Ш^1(K, S_K)$ de l'application horizontale du bas est nul d'après le lemme ci-dessous. Ainsi l'application Ψ est injective. En comparant avec (3), on obtient le résultat. □

LEMME 2.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, soit $C/\mathbb{F}$ une courbe projective et lisse, géométriquement intègre et soit K son corps des fonctions. Soit S un $\mathbb{F}$-tore. Alors* $Ш^1(K, S_K) = 0$.

Démonstration. — D'après [11] p.199, on dispose d'une résolution flasque de S :

$$0 \to F \to P \to S \to 0 \tag{4}$$

où F est un tore flasque et P est quasi-trivial (i.e. son module des caractères est un module de permutation). Sur un corps dont le groupe de Galois est cyclique, tout module flasque est un facteur direct d'un module de permutation ([15], [11]). Le tore F est donc un facteur direct d'un tore quasi-trivial. La suite (4) donne alors une inclusion $Ш^1(K, S_K) \hookrightarrow Ш^2(K, F_K)$ car $H^1(K, F_K) = 0$ d'après le théorème Hilbert 90. Il suffit donc de montrer que $Ш^2(K, R_{L/K}\mathbb{G}_m) = 0$ pour L/K une extension finie. En utilisant le lemme de Shapiro, il suffit de montrer que $Ш^2(L, \mathbb{G}_m) = 0$, ce qui résulte du principe de Hasse pour les algèbres centrales simples sur L (cf. par exemple [18] 6.5.4). □

REMARQUE 2.2. — L'énoncé de la proposition n'est plus vrai si K est un corps de fonctions de deux variables sur $\mathbb{F}$, même si $X/\mathbb{F}$ est une surface géométriquement rationnelle. En effet, soit $P \in X(\mathbb{F})$, soit η le point générique de X et soit $\eta' \in X_{\mathbb{F}(X)}(\mathbb{F}(X))$ le point rationnel correspondant. On dispose d'un accouplement $Br\, X_{\mathbb{F}(X)} \times A_0(X_{\mathbb{F}(X)}) \to Br\, \mathbb{F}(X)$, qui coïncide avec l'inclusion $Br\, X \hookrightarrow Br\, \mathbb{F}(X)$ sur $Br\, X \times ([\eta'] - [P])$. Si le groupe $Br\, X$ n'est pas trivial, on en déduit que $[\eta'] - [P]$ est un élément non nul de $A_0(X_{\mathbb{F}(X)})$.

COROLLAIRE 2.3. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives* 1 *et* 2. *Soit K le corps des fonctions de C. Supposons que la surface $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}$ vérifie les hypothèses* (H1) – (H4) *du théorème 1.1. Soit l un nombre premier, $l \neq p$ et soit $r \geq 1$ un entier. L'application naturelle*

$$H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

est surjective.

Démonstration. — De la suite spectrale de Bloch-Ogus (cf. [4])

$$E_2^{pq} = H^p(X_K, \mathscr{H}^q_{X_K}(\mu_{l^r}^{\otimes 2})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$$

on déduit la suite exacte

(5)
$$H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to CH^2(X_K)/l^r \xrightarrow{c} H^4_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}).$$

La surface géométriquement intègre X possède un zéro-cycle de degré 1 (cf. [21]), on a donc de même pour X_K. D'après la proposition précédente, $A_0(X_K) = 0$ au moins à la p-torsion près. On a alors que l'application composée

$$CH^2(X_K)/l^r \to H^4_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^4_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2}),$$

qui s'identifie au morphisme $\deg/l^r$, est injective. On en déduit que l'application c du diagramme (5) est injective, d'où le resultat. $\square$

3. Compatibilité des résidus et réduction à $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$

3.1. Notations et énoncés. — Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives 1 et 2. Soit $K = \mathbb{F}(C)$. Supposons que la surface $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}$ vérifie les hypothèses (H1) – (H4) du théorème 1.1. D'après la section précédente, tout élément de $H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ provient d'un élément de $H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. Le but de cette section est d'établir que tout élément du sous-groupe $H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ de $H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ provient d'un élément de $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$.

Avec les notations ci-dessus, on a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(K, H^q_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}). \tag{6}$$

D'après la proposition 1.1, on a $H^1_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) = H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) = 0$ et on a des isomorphismes $\operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}/l^r(1) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. On dispose alors d'une flèche de bord

$$d^{1,2} : H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^1(K, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)), \tag{7}$$

qui est un isomorphisme.

Soit A un anneau de valuation discrète de rang un, de corps des fractions K, contenant le corps $\mathbb{F}$; on note k_A le corps résiduel de A. On a un modèle $X \times_{\mathbb{F}} \operatorname{Spec} A$ de X_K sur A dont on note $X_{k_A} = X \times_{\mathbb{F}} k_A$ la fibre spéciale. Dans cette section on établit le résultat suivant.

Proposition 3.1. — *Avec les notations ci-dessus, il existe une application*

$$d : H^2(X_{k_A}, \mu_{l^r}) \to H^0(k_A, \operatorname{Pic} \bar{\mathrm{X}}/l^r)$$

telle que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "d^{1,2}"] & H^2_{\text{ét}}(X_{k_A}, \mu_{l^r}) \arrow[d, "d"] \\ H^1(K, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)) \arrow[r] & H^0(k_A, \operatorname{Pic} \bar{\mathrm{X}}/l^r) \end{tikzcd} \tag{8}$$

où les flèches horizontales sont des applications résidus, est commutatif.

Remarque 3.2. — (i) On rappelle la construction des résidus dans la section 3.3.

(ii) Plus précisément, l'application d de la proposition est la composée de l'application naturelle

$$H^2_{\text{ét}}(X_{k_A}, \mu_{l^r}) \to H^0(k_A, H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}_A}, \mu_{l^r}))$$

et de l'identification $H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{k}_A}, \mu_{l^r}) = \mathrm{Pic}\,(\bar{X})/l^r$.

3.2. Une application de bord dans la suite spectrale de Leray. — Dans ce paragraphe, on décrit la flèche (7) à l'aide des techniques de [28].

Soit S un schéma et soit V un S-schéma propre. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}/l^r$ où l est inversible sur V et soit $D^+(V,\Lambda)$ (resp. $D^+(S,\Lambda)$) la catégorie dérivée des complexes bornés inférieurement des faisceaux étales de Λ-modules sur V (resp. sur S). Soit $p : V \to S$ le morphisme structural. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de Λ-modules sur V et soit $F = Rp_*\mathcal{F}$. On a une suite spectrale de Leray $E_2^{ab} = H^a_{\text{ét}}(S, R^b p_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{a+b}_{\text{ét}}(V, \mathcal{F})$. Supposons

$$H^0_{\text{ét}}(S, R^3 p_*\mathcal{F}) = 0. \tag{9}$$

Sous cette hypothèse, on dispose d'une flèche de bord

$$\partial : H^3_{\text{ét}}(V, \mathcal{F}) \to H^1_{\text{ét}}(S, R^2 p_*\mathcal{F}), \tag{10}$$

qui s'obtient comme suit.

On dispose d'un triangle exact

$$\tau_{\leq 2}F \to F \to \tau_{\geq 3}F. \tag{11}$$

On a

$$\mathbb{H}^2(S, \tau_{\geq 3}F) = 0 \text{ et } \mathbb{H}^3(S, \tau_{\geq 3}F) = 0. \tag{12}$$

La première égalité résulte du fait que le complexe $\tau_{\geq 3}F$ est concentré en degrés strictement supérieurs à 2. La seconde résulte de l'hypothèse (9) et de l'identification $\mathbb{H}^3(S, \tau_{\geq 3}F) = H^0_{\text{ét}}(S, H^3(F))$ provenant de la suite exacte longue d'hypercohomologie associée au triangle $\tau_{\leq 3}(\tau_{\geq 3}F) \to \tau_{\geq 3}F \to \tau_{\geq 4}F$ où $\mathbb{H}^3(S, \tau_{\geq 4}F) = 0$ et $\tau_{\leq 3}(\tau_{\geq 3}F) = H^3(F)[-3]$.

On obtient alors un isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{H}^3(S, \tau_{\leq 2}F) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^3(S, F)$$

de la suite exacte longue d'hypercohomologie associée au triangle (11).

On a une application naturelle $\psi : \mathbb{H}^3(S, \tau_{\leq 2}F) \to H^1_{\text{ét}}(S, H^2(F))$ provenant du triangle $\tau_{\leq 1}F \to \tau_{\leq 2}F \to H^2(F)[-2]$.

On construit ainsi une application

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{H}^3(S, F) \to H^1_{\text{ét}}(S, H^2(F)) \tag{13}$$

où $\mathbb{H}^3(S, F) = H^3_{\text{ét}}(V, \mathcal{F})$ et $H^1_{\text{ét}}(S, H^2(F)) = H^1_{\text{ét}}(S, R^2 p_*\mathcal{F})$. D'après [28] Appendix B, cette application coïncide avec l'application de bord (10).

3.3. Applications résidu. — Soit S un schéma. Soit V un S-schéma, soit $j : U \hookrightarrow V$ un ouvert de V et soit $i : Z \to V$ le fermé complémentaire. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}/l^r$ où l est inversible sur V et soit $F \in ObD^+(V, \Lambda)$. On a une suite exacte de faisceaux étales sur V

$$0 \to j_!\Lambda \to \Lambda \to i_*\Lambda \to 0,$$

qui donne un triangle exact dans $D^+(V, \Lambda)$

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Lambda, F) \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda, F) \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_!\Lambda, F).$$

En utilisant l'isomorphisme d'adjonction [1] XVIII 3.1.9.10, on obtient

$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Lambda, F) = Ri_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda, Ri^!F) = i_*Ri^!F$, car $Rf_* = Rf_!$ pour f propre et f_* est exact pour f un morphisme fini ;
$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda, F) = F$;
$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_!\Lambda, F) = Rj_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda, Rj^!F) = Rj_*j^*F$ car $j_! = Rj_!$ et $Rj^! = j^*$ pour une immersion ouverte.

On obtient ainsi un triangle exact

$$i_*Ri^!F \to F \to Rj_*j^*F. \tag{14}$$

Soit $F = \mu_{l^r}^{\otimes j}$ où, plus généralement, F un faisceau de Λ-modules qui provient d'un faisceau localement constant sur S. Supposons que V et Z sont lisses et que Z est purement de codimension 1 dans V. Dans ce cas, on dispose d'un morphisme de Gysin $F(-1)[-2] \to Ri^!F$ (cf. [17] 1.2) qui est un quasi-isomorphisme par pureté (cf. [1] XVI.3.7). La flèche $\mathrm{R}\Gamma \circ Rj_*j^*F \to \mathrm{R}\Gamma \circ i_*Ri^!F[1]$ provenant du triangle (14) donne alors des applications *résidus*

$$H^i(U, \mu_{l^r}^{\otimes j}) \to H^{i-1}(Z, \mu_{l^r}^{\otimes (j-1)}).$$

En particulier, cette construction donne les applications résidus du diagramme (8) (voir aussi [7] et [24] III.1.2).

3.4. Preuve de la proposition 3.1. — Avec les notations de la proposition 3.1, soit $S = \operatorname{Spec} A$. On note η son point générique et s le point spécial. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_{k_A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_s"] & X \times_{\mathbb{F}} S \arrow[d, "p"] & X_K \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "p_\eta"] \\ s \arrow[r, "i_S"'] & S & \eta. \arrow[l, "j_S"] \end{tikzcd}$$

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}/l^r$ et soit $\mathscr{F} = \mu_{l^r}^{\otimes 2}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & p^* j_{S!}\Lambda \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & p^* i_{S*}\Lambda \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & j_!\Lambda \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & i_*\Lambda \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{15}$$

obtenu en utilisant l'adjonction de p_* et p^* et les identifications $p_* j_! \Lambda = j_{S!} p_{\eta *}\Lambda = j_{S!}\Lambda$ et $p_* i_* \Lambda = i_{S*} p_{s*}\Lambda = i_{S*}\Lambda$.

On a alors un diagramme commutatif dans $D^+(S, \Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_!\Lambda, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Lambda, \mathscr{F})[1] \arrow[d] \\ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(p^* j_{S!}\Lambda, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(p^* i_{S*}\Lambda, \mathscr{F})[1] \arrow[d, equal] \\ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_{S!}\Lambda, Rp_*\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_{S*}\Lambda, Rp_*\mathscr{F})[1] \\ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_{S!}\Lambda, \tau_{\leq 2} Rp_*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[d] & \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_{S*}\Lambda, \tau_{\leq 2} Rp_*\mathscr{F})[1] \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[d] \\ \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(j_{S!}\Lambda, R^2 p_*\mathscr{F})[-2] \arrow[r] & \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(i_{S*}\Lambda, R^2 p_*\mathscr{F})[-1]. \end{tikzcd} \tag{16}$$

Dans ce diagramme, le premier carré est déduit du diagramme (15), le deuxième carré est obtenu par adjonction et les deux derniers carrés proviennent de la construction du paragraphe 3.2 par fonctorialité.

D'après la proposition 1.1, on a $R^2 p_* \mathscr{F} = \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)$ (voir aussi [24] VI 8.9). D'après la construction des résidus dans le paragraphe précédent, on a alors que l'application

$$H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^2_{\text{ét}}(X_{k_A}, \mu_{l^r})$$

(resp. l'application $H^1(K, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)) \to H^0(k_A, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r))$ du diagramme (8) provient de la ligne du haut (resp. du bas) du diagramme (16), si l'on applique le foncteur $\mathrm{R}\Gamma$ et si l'on prend ensuite l'hypercohomologie en degré trois. Par le même argument que dans le paragraphe 3.2, après cette opération les morphismes ι_1 et ι_2 du diagramme (16) induisent des isomorphismes. En effet, la proposition 1.1 implique que le faisceau $R^3 p_* \mathscr{F}$ est nul ; on dispose alors d'un triangle exact $\tau_{\leq 2} Rp_*\mathscr{F} \to Rp_*\mathscr{F} \to \tau_{\geq 4} Rp_*\mathscr{F}$ où le complexe $\tau_{\geq 4} Rp_*\mathscr{F}$ est concentré en degrés strictement supérieurs à 3.

Le diagramme (8) provient alors de la première et la dernière lignes du diagramme (16). □

3.5. Réduction à $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$

Proposition 3.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives* 1 *et* 2. *Soit l un nombre premier, $l \neq p$. Si la surface $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}$ vérifie les hypothèses* (H1) – (H4) *du théorème 1.1, alors tout élément de $H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ provient d'un élément de $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$.*

Démonstration. — Soit $K = \mathbb{F}(C)$. Soit ξ un élément de $H^3_{\text{nr}}(\mathbb{F}(X \times C)/\mathbb{F}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. Comme ξ est en particulier non ramifié par rapport à K, il provient d'un élément ξ' de $H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ d'après le corollaire 2.3.

On dispose d'un isomorphisme $d^{1,2} : H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^1(K, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$ (cf. (7)). La proposition 3.1 implique que $\xi'' = d^{1,2}(\xi')$ est non ramifié, i.e.

$$\xi'' \in H^1_{nr}(K/\mathbb{F}, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)).$$

Par un argument analogue à [7] 4.2.1, on en déduit que ξ'' provient du groupe $H^1_{\text{ét}}(C, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$. En effet, ξ'' est dans l'image de $H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{C,c}, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$ pour tout point c de C, ce que l'on peut voir de la suite (14). On en déduit que ξ'' provient de $H^1_{\text{ét}}(C, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$ en utilisant la suite de Mayer-Vietoris (cf. [7] 3.8.2).

Notons $\pi : X \times C \to C$ le morphisme de projection. Soit $F = \mu_{l^r}^{\otimes 2}$, vu comme faisceau étale sur $X \times C$. En utilisant la proposition 1.1, on obtient que les faisceaux $R^1\pi_*F$ et $R^3\pi_*F$ sont nuls car c'est le cas pour leurs fibres géométriques. Le faisceau $R^2\pi_*F$ s'identifie à $\operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)$ (cf. [24] VI.8.9). Le groupe $H^4_{\text{ét}}(C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ est nul, car $cd_l\, C \leq 3$ pour C une courbe sur un corps fini. La suite spectrale de Leray $E_2^{pq} = H^p(C, R^q\pi_*F) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ donne alors un morphisme de bord surjectif $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \to H^1_{\text{ét}}(C, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$. Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(X_K, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \arrow[r, "\simeq", "d^{1,2}"'] & H^1(K, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)) \\
H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2}) \arrow[u] \arrow[r, two heads] & H^1_{\text{ét}}(C, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1)). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Puisque $\xi'' = d^{1,2}(\xi')$ provient de $H^1_{\text{ét}}(C, \operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1))$, on en déduit que ξ provient de $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$. □

4. Fin de la preuve du théorème 1.1

Pour établir le théorème 1.1, il suffit de montrer que le groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mu_l^{\otimes 2})$ est nul. En effet, ce groupe s'identifie au sous-groupe de l-torsion du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$, ce qui est une conséquence du théorème de Merkurjev et Suslin (cf. [23] p. 339). Puisque le degré de l'extension de $\mathbb{F}$ obtenue en ajoutant les racines l-ièmes de l'unité est premier à l, on peut de plus supposer que $\mathbb{F}$ contient les racines l-ièmes de l'unité par un argument de corestriction. D'après la proposition 3.1, tout élément du groupe $H^3_{\mathrm{nr}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$ provient d'un élément de $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$. Le théorème 1.1 résulte donc de la proposition suivante.

Proposition 4.1. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Soient C et X des variétés projectives et lisses, géométriquement intègres, définies sur $\mathbb{F}$, de dimensions respectives* 1 *et* 2*. Supposons que la surface $\bar{X}/\bar{\mathbb{F}}$ vérifie les hypothèses* (H1) – (H4) *du théorème 1.1. Soit $l \neq p$ un nombre premier. Supposons que $\mathbb{F}$ contient une racine primitive l-ième de l'unité. Alors l'image de $H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$ dans $H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Z}/l)$ est nulle.*

Démonstration. — Soit $G = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. Pour établir la proposition, on va utiliser deux lemmes suivants.

Lemme 4.1. — *Supposons les hypothèses de la proposition 4.1 vérifiées.*

(i) *On a alors une suite exacte où toutes les flèches sont des flèches évidentes :*

$$0 \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to \\ \to H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G \to 0. \tag{17}$$

(ii) *L'application* $\mathrm{Pic}\, \bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l) \to H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)$ *induite par les cup-produits est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient $K = \mathbb{F}(C) \subset \bar{\mathbb{F}}(C)$ et $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/\bar{\mathbb{F}}(C))$ le groupe de Galois absolu du corps $\bar{\mathbb{F}}(C)$. La proposition 1.1, appliquée à $\bar{X}$ et à $X_{\bar{K}}$, implique que $H^1_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = H^3_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ et que $H^1_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$. On a également $H^3_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = 0$ car $cd_l\, \bar{C} \leq 2$.

En appliquant la suite spectrale de Leray pour $X_{\mathbb{F}(C)} \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}(C)$, on obtient alors une suite exacte

$$0 \to H^1(G, H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \to H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \\ \to H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G \to 0.$$

De même, les suites spectrales de Leray pour $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}$ et pour $X_{\bar{\mathbb{F}}(C)} \to \operatorname{Spec} \bar{\mathbb{F}}(C)$ donnent

$$H^1(G, H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \xrightarrow{\simeq} H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)),$$
$$H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^{\mathfrak{G}}.$$

Pour établir l'énoncé (i) du lemme, il suffit donc de montrer qu'on a un isomorphisme $H^2_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^{\mathfrak{G}}$. Or ces deux G-modules s'identifient à $\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)$. En effet, d'après la propostion 1.1 appliquée à $\bar{X}$ et à $X_{\bar{K}}$, on a $\operatorname{Pic} \bar{X}/l^r(1) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(\bar{X}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ et $\operatorname{Pic} X_{\bar{K}}/l^r(1) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mu_{l^r}^{\otimes 2})$ pour tout $r > 0$, et la flèche naturelle $\operatorname{Pic} \bar{X} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ est un isomorphisme.

Montrons (ii). Comme les groupes de cohomologie $H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l)$ et $H^j_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l)$ sont des $\mathbb{Z}/l$-espaces vectoriels, les groupes $\operatorname{Tor}_r^{\mathbb{Z}/l}(H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l), H^j_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l))$ sont nuls pour $r > 0$. La formule de Künneth fournit alors une décomposition

$$\bigoplus_{i+j=m} H^i_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l) \otimes_{\mathbb{Z}/l} H^j_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l) \xrightarrow{\simeq} H^m_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)$$

où les flèches sont induites par les cup-produits (cf. [1] XVII.5.4.3).

Pour $m = 3$ on obtient $H^2_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l) \otimes_{\mathbb{Z}/l} H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l) \xrightarrow{\simeq} H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)$, puisque les groupes $H^1_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l)$, $H^3_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l)$ et $H^3_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l)$ sont nuls.

D'après la proposition 1.1, $\operatorname{Pic} \bar{X}/l \xrightarrow{\simeq} H^2_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}/l)$, d'où

$$H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l) = \operatorname{Pic} \bar{X}/l \otimes_{\mathbb{Z}/l} H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l) = \operatorname{Pic} \bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l),$$

d'où le deuxième énoncé du lemme. □

Soit ι l'application naturelle

$$\iota : [\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l)]^G \to [\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G \to [\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G.$$

Le lemme suivant montre qu'on a une inclusion

$$\iota[(\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l))^G] \subset [\operatorname{Pic} \bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l. \tag{18}$$

Lemme 4.2. — *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini, soit $G = \operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ et soit l un nombre premier, $l \neq \operatorname{car}.\mathbb{F}$. Soit C une courbe projective et lisse, géométriquement intègre, définie sur $\mathbb{F}$.*

(i) *Pour P un G-module de permutation, le groupe $H^1(G, P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*)$ est nul et l'application naturelle*

$$[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to [P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G$$

est surjective.

(ii) *Pour M un G-module de type fini sans torsion, on a*

$$H^1(G, M \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))) = 0.$$

(iii) *Pour M un G-module de type fini sans torsion, l'image de l'application naturelle*

$$[M \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G \to [M \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G$$

est contenue dans le sous-groupe $[M \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ de $[M \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G$.

Démonstration. — Pour montrer l'énoncé (i), il suffit de considérer le cas où $P = \mathbb{Z}[G/H]$ où $H = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/L)$ est un sous-groupe ouvert de G. Pour tout G-module A et pour tout $i \geq 0$, on a $H^i(G, \mathbb{Z}[G/H] \otimes A) \stackrel{\simeq}{\to} H^i(H, A)$ (cf. [27] I.2.5 ou [25] p.59). On a donc $H^1(G, \mathbb{Z}[G/H] \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*) = H^1(H, \bar{\mathbb{F}}(C)^*)$. D'après le théorème de Hilbert 90, on a $H^1(H, \bar{\mathbb{F}}(C)^*) = H^1(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}(C)/L(C)), \bar{\mathbb{F}}(C)^*) = 0$.

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
{[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G} \arrow[r] \arrow[d, "\times l"] & {[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\bar{\mathbb{F}}(C)^{*l^r}]^G} \arrow[d, "\times l"] \\
{[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G} \arrow[r] & {[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\bar{\mathbb{F}}(C)^{*l^{r+1}}]^G}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En passant à la limite, pour montrer la deuxième partie de l'énoncé (i), il suffit de montrer que pour tout $r > 0$ l'application naturelle $[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \to [P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\bar{\mathbb{F}}(C)^{*l^r}]^G$ est surjective.

On a une suite exacte

$$0 \to \mu_{l^r} \to \bar{\mathbb{F}}(C)^* \to \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\mu_{l^r} \to 0.$$

On déduit que le groupe $H^1(G, P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\mu_{l^r})$ est nul, car $H^1(G, P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*) = 0$ d'après ce qui précède et $H^2(G, P \otimes \mu_{l^r}) = 0$ car $cd_l \mathbb{F} \leq 1$. La suite exacte de G-modules

$$0 \to \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\mu_{l^r} \stackrel{\times l^r}{\to} \bar{\mathbb{F}}(C)^* \to \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\bar{\mathbb{F}}(C)^{*l^r} \to 0$$

donne alors la surjection $[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \to [P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*/\bar{\mathbb{F}}(C)^{*l^r}]^G$.

Montrons l'énoncé (ii). On a une suite exacte

$$0 \to I \to P \to M \to 0,$$

où P est un G-module de permutation. Cette suite est $\mathbb{Z}$-scindée et elle reste donc exacte après tensorisation avec le groupe $H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$. Comme $cd_l \mathbb{F} \leq 1$, le groupe $H^2(G, I \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)))$ est nul, d'où une application surjective $H^1(G, P \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))) \to H^1(G, M \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)))$. Il suffit donc de considérer le cas où M est un module de permutation. Par le même argument que ci-dessus, on se ramène à montrer que $H^1(H, H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))) = 0$ pour $H = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/L)$. Cela résulte du théorème de Lang [20] sur les groupes algébriques connexes sur un corps fini. En effet, on a $H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)) = J(\bar{\mathbb{F}})\{l\}$ où J est la jacobienne de C et $H^1(H, J) = 0$ (*loc. cit.*).

L'énoncé (ii) appliqué à I donne $H^1(G, I \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))) = 0$, d'où une application surjective $[P \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G \to [M \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G$. On déduit alors (iii) du diagramme commutatif suivant, dans lequel l'application $[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to [P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G$ est surjective d'après (i).

$$\begin{tikzcd}
{[P \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & {[M \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))]^G} \arrow[d] \\
{[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G} \arrow[r] & {[M \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G} \\
{[P \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l} \arrow[r] \arrow[u, two heads] & {[M \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l.} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$
□

On passe maintenant à la preuve de la proposition 4.1.

Soient

$$NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Z}/l) = \ker[H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Z}/l) \to H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Z}/l)],$$
$$NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) = \ker[H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))].$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)^G \arrow[d] \\
H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Z}/l) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Z}/l)^G \arrow[d] \\
H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r, two heads] & H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G
\end{tikzcd} \tag{19}$$

où les applications horizontales sont surjectives car $cd\, G \leq 1$.

Soit $d : H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l) \to H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G$ l'application diagonale de ce diagramme. Soit $\alpha \in H^3_{\text{ét}}(X \times C, \mathbb{Z}/l)$. Il suffit de montrer que l'image de α dans $H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Z}/l)$ est incluse dans le groupe $NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Z}/l)$. Le théorème de Merkurjev et Suslin [23] implique que l'application $H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Z}/l) \to H^3(\mathbb{F}(X \times C), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est injective (*loc. cit.* p.339). Il suffit alors de montrer que l'image de α dans le groupe $H^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est incluse dans $NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.

D'après le lemme 4.1, le noyau de l'application horizontale du bas du diagramme (19) s'identifie au groupe $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Ce groupe est inclus dans le groupe $NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ car pour X une surface projective et lisse, géométriquement connexe, définie sur un corps fini, le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ est nul d'après [14], p.790. Pour établir la proposition 4.1, il suffit alors de montrer que l'on peut relever $d(\alpha)$ en un élément δ de $NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. Pour construire cet élément on procède comme suit.

D'après le lemme 4.1, on a un isomorphisme

$$(\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l))^G \simeq H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)^G$$

induit par les cup-produits. L'image de α dans $H^3_{\text{ét}}(\bar{X} \times \bar{C}, \mathbb{Z}/l)^G$ provient alors d'un élément $\beta \in (\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l))^G$. D'après (18), on a que $\iota(\beta)$ est un élément de $(\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*)^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$. Soit γ son image dans $H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2)^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

(20)

$$\begin{tikzcd}
\iota(\beta) \in [\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^*]^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \arrow[r, hook] \arrow[d] & {[\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G} \arrow[d] \\
\gamma \in H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2)^G \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \arrow[r] & {[H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G.}
\end{tikzcd}$$

D'après les résultats de Colliot-Thélène et Raskind [10] 4.3, sous les hypothèses de la proposition 4.1 l'application naturelle $H^1(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathcal{K}_2) \to H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2)^G$ est un isomorphisme à la *car.*$\mathbb{F}$-torsion près. On a donc que γ provient d'un élément $\gamma' \in H^1(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$. On dispose d'une application $H^1(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \to NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ (voir [6] (3.11)). Soit δ l'image de γ' dans ce dernier groupe. On a un diagramme commutatif

(21)

$$\begin{tikzcd}
\gamma' \in H^1(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \arrow[r] \arrow[d] & {[H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G} \arrow[d] \\
\delta \in NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G.
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in \bar{X}^{(1)}$ et soit $[x]$ sa classe dans $\operatorname{Pic}\bar{X}$. L'image de $[x] \otimes H^1(\bar{C}, \mathbb{Z}/l)$ par l'application composée $\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l) \to H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2)/l \to H^3(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Z}/l)$ provient d'un cup-produit avec la classe canonique de x dans $H^2_x(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Z}/l)$ (cf. [6], [4]). Ainsi $d(\alpha)$ est l'image de β par l'application composée

$$[\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes H^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{Z}/l)]^G \xrightarrow{\iota} [\operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{\mathbb{F}}(C)^* \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G \to$$
$$\to [H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l]^G \to H^3_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{F}}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))^G.$$

D'après les diagrammes (20) et (21), $d(\alpha)$ provient alors du fait que δ appartient à $NH^3_{\text{ét}}(X_{\mathbb{F}(C)}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. □

Appendice
Comparaison des applications Φ^τ et Φ_B

Soit k un corps de caractéristique $p \geq 0$. Soit X une k-variété projective et lisse, telle que la variété $\bar{X}/\bar{k}$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H1) $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$;
(H2) $b_2 - \rho = 0$;
(H3) $NS(\bar{X})$ est sans torsion ;
(H4) $A_0(\bar{X}) = 0$;
(H5) X possède un zéro-cycle de degré 1.

Soit $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit S le k-tore dual du G-module $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$ (cf. proposition 1.1). Sous l'hypothèse (H5), on dispose d'un torseur universel $\mathcal{T}$ sur X sous S ([13]) et on construit une application $A_0(X) \xrightarrow{\Phi^\tau} H^1(k, S)$ ([11] p.198).

Dans le cas où X est une surface, on dispose également d'une application $\Phi_B : A_0(X) \to H^1(k, S)$ définie par Bloch [3]. Si de plus X est une surface géométriquement rationnelle définie sur un corps parfait, Colliot-Thélène et Sansuc ont établi que ces deux applications coïncident ([12], Thm. 3). Dans cet appendice, on rappelle leur preuve et on utilise les résultats de Colliot-Thélène et Raskind [10] pour nous convaincre que les hypothèses (H1) – (H5) suffisent, au moins à la p-torsion près. Par un argument de transfert, cette dernière restriction nous permet de ne considérer que des cycles $\xi = \sum n_i x_i$ de $A_0(X)$ où x_i sont des points fermés de X dont les corps résiduels $k(x_i)$ sont des extensions séparables de k.

Application Φ_B.— On suppose que X est une surface. On a une application naturelle $\mathrm{Pic}\,\bar{X} \otimes \bar{k}^* \to H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$, dont le noyau et le conoyau sont des groupes uniquement divisibles par tout entier premier à p ([10], cf. proposition 1.1 ci-dessus). On en déduit que l'application

$$\beta : H^1(G, \mathrm{Pic}\,\bar{X} \otimes \bar{k}^*) \to H^1(G, H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)) \tag{22}$$

est un isomorphisme à la p-torsion près.

Soit $Y \subset X$ un diviseur et soit $U \subset X$ l'ouvert complémentaire. Soit $x \in \bar{X}^{(1)}$ un point qui n'est pas dans $\bar{Y}$, soit D_x l'adhérence de x dans $\bar{X}$ et soit $\pi_x : \tilde{D}_x \to D_x$ la normalisation de D_x. Soit $\bar{k}(x)^*_{\bar{Y}}$ le groupe des fonctions rationnelles sur D_x, qui sont inversibles en tout point de $\pi_x^{-1}(\bar{Y})$. On a un complexe (cf. p. 56)

$$K_2\bar{k}(\bar{X}) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x \in \bar{X}^{(1)}} \bar{k}(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in \bar{X}^{(2)}} \mathbb{Z},$$

d'où une suite exacte

$$0 \to \mathcal{Z}_{\bar{Y}} \to \bigoplus_{x\in\bar{U}^{(1)}} \bar{k}(x)^*_{\bar{Y}} \to (\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}} \to 0, \tag{23}$$

où le terme de gauche (resp. de droite) est défini comme le noyau (resp. l'image) de la restriction de d_1 au groupe du milieu. En particulier, on a une application $\mathcal{Z}_{\bar{Y}} \to H^1(\bar{X}, \mathcal{K}_2)$. En passant à la cohomologie dans la suite (23), on obtient une application $\partial : H^0(G, (\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}}) \to H^1(G, \mathcal{Z}_{\bar{Y}})$. Par composition avec l'inverse de l'application β on obtient alors une application $\Phi_{B,Y} : H^0(G, (\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}}) \to H^1(G, \operatorname{Pic}\bar{X} \otimes \bar{k}^*)$ définie à la p-torsion près.

D'après la construction, le groupe $(\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}}$ est inclus dans le groupe des zéro-cycles de degré zéro sur $\bar{U}$. D'après [12] p. 426, l'hypothèse $A_0(\bar{X}) = 0$ implique que l'élément ξ provient d'un zéro-cycle ξ' sur X tel que le cycle $\bar{\xi}'$ sur $\bar{X}$ appartient au groupe $(\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}}$ construit comme ci-dessus pour certain $Y \subset X$. En effet, on peut écrire $\bar{\xi}' = \operatorname{div}(\sum_{i=1}^r f_i|_{D_i})$ où $D_i \subset \bar{X}$ sont des courbes intègres et $f_i \in \bar{k}(D_i)^*$. Soit $\pi_i : \tilde{D}_i \to D_i$ la normalisation de D_i. On peut alors prendre U un ouvert de X contenant $\pi_i(\operatorname{div}_{\tilde{D}_i}(f_i))$ et Y son complémentaire. Notons que dans cette construction on peut de plus supposer que $\operatorname{Pic}\bar{U} = 0$. On pose alors

$$\Phi_B(\xi) = \Phi_{B,Y}(\xi').$$

Application Φ^τ.— Soit $U \subset X$ un ouvert tel que $\operatorname{Pic}\bar{U} = 0$. On a une suite exacte des G-modules

$$0 \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \to \operatorname{Div}_{\bar{Y}}\bar{X} \to \operatorname{Pic}\bar{X} \to 0. \tag{24}$$

Soit

$$1 \to S \to M \to R_U \to 1 \tag{25}$$

la suite duale.

D'après [13] 2.3.4, la projection $\bar{k}[U]^* \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ admet une section σ (en général, cela est assuré par l'existence d'un torseur universel). La section σ donne une application $\phi_\sigma : U \to R_U$. D'après [13] 2.3.4, la restriction de $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ à U se déduit via ϕ_σ du torseur M défini par la suite (25). Soit x un point fermé de U, tel que son corps résiduel $k(x)$ est une extension séparable de

k. Alors $\Phi^\tau(x) \in H^1(k,S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_k(\hat{S},\bar{k}^*)$ est obtenu de la classe de l'extension (24) via

$$\mathrm{Ext}^1_k(\hat{S},\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Ext}^1_k(\hat{S},\bar{k}[U]^*) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathrm{Ext}^1_k(\hat{S},(k(x)\otimes_k \bar{k})^*) \xrightarrow{N_{k(x)/k}} \mathrm{Ext}^1_k(\hat{S},\bar{k}^*)$$

(cf. [12] p. 425).

Comparaison.— Considérons un accouplement

$$\bigoplus_{x\in \bar{U}^{(1)}} \bar{k}(x)^*_{\bar{Y}} \times \mathrm{Div}_{\bar{Y}}\bar{X} \to \bar{k}$$

défini comme suit. Soit $f \in \bar{k}(x)^*_{\bar{Y}}$, soit D l'adhérence de x dans $\bar{X}$ et soit $\pi : \tilde{D} \to D$ la normalisation. Soit $\Delta \subset \bar{X}$ un diviseur irréductible à support dans $\bar{Y}$ et soit $\pi^{-1}(\Delta) = \sum n_i(y_i)$. On pose $(f,\Delta) = \prod f(y_i)^{n_i}$. D'après [3] A.8, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in \bar{U}^{(1)}} \bar{k}(x)^*_{\bar{Y}} \arrow[d] & \times & \mathrm{Div}_{\bar{Y}}\bar{X} \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[d, equal] \\
(\bigoplus^0_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}} & \times & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \arrow[u, "\mathrm{div}"'] \arrow[r, "ev"] & \bar{k}^*.
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, soit $g \in \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ et soit g' son image dans $\bar{k}(x)^*/\bar{k}^*$. Il s'agit donc de vérifier que $f(\mathrm{div}_D(g')) = g'(\mathrm{div}_D(f))$, ce qui résulte de la loi de réciprocité de Weil.

On obtient ainsi un diagramme commutatif

(26)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}_{\bar{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x\in \bar{U}^{(1)}} \bar{k}(x)^*_{\bar{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & (\bigoplus^0_{x\in\bar{X}} \mathbb{Z})_{\bar{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}\,\bar{X},\bar{k}^*) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Div}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{k}^*) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*,\bar{k}^*) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On a aussi un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_{\bar{Y}} \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(\bar{X},\mathcal{K}_2) & \mathrm{Pic}\,\bar{X}\otimes\bar{k}^* \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}\,\bar{X},\bar{k}^*) &
\end{tikzcd} \tag{27}$$

où l'application de droite est déduite du produit d'intersection sur $\operatorname{Pic}\bar{X}$ ([3] A.11). En effet, on dispose d'un accouplement $H^1(\bar{X},\mathscr{K}_2)\times \operatorname{Div}_{\bar{Y}}\bar{X} \to \bar{k}^*$ compatible avec le produit d'intersection sur $\operatorname{Pic}\bar{X}$. Pour $\Delta \in \operatorname{Div}_{\bar{Y}}\bar{X}$ une courbe irréductible dont on note $\tilde{\Delta}\to X$ la normalisation, l'accouplement est défini par $H^1(\bar{X},\mathscr{K}_2)\to H^1(\tilde{\Delta},\mathscr{K}_2)\to \bar{k}^*$ où l'application $H^1(\tilde{\Delta},\mathscr{K}_2)\to \bar{k}^*$ est induite par la norme (cf. *loc. cit.*).

On déduit de (26) et (27) le diagramme commutatif suivant (défini à la p-torsion près)

$$\begin{tikzcd}
H^0(G,(\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}}\mathbb{Z})_{\bar{Y}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G,\mathcal{Z}_{\bar{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & H^1(G,\operatorname{Pic}\bar{X}\otimes \bar{k}^*) \arrow[dl, "\simeq"] \\
\operatorname{Hom}_G(\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*,\bar{k}^*) \arrow[r] & H^1(G,\operatorname{Hom}(\operatorname{Pic}\bar{X},\bar{k}^*)). &
\end{tikzcd}$$

D'après la construction, pour tout $\xi\in H^0(G,(\bigoplus^{0}_{x\in\bar{X}}\mathbb{Z})_{\bar{Y}})\subset A_0(X)$, on a alors que $\Phi_B(\xi)=\Phi^{\tau}(\xi)$.

Remerciements. — La proposition 3.1 résulte d'une discussion avec O. Wittenberg ; je lui sais gré de m'avoir expliqué les techniques utilisées pour la preuve. Je voudrais aussi remercier J.-L. Colliot-Thélène pour de nombreux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – « Théorie des topos et cohomologie étale des schémas », in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–64*, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer, 1972–1973.

[2] P. Berthelot, A. Grothendieck & L. Illusie – « Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch », in *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6)*, Lecture Notes in Math., vol. 225, Springer, Berlin-New York, 1971, p. 700.

[3] S. Bloch – « On the Chow groups of certain rational surfaces », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **14** (1981), p. 41–59.

[4] S. Bloch & A. Ogus – « Gersten's conjecture and the homology of schemes », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **7** (1974), p. 181–201.

[5] J.-L. Colliot-Thélène – « Hilbert's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces », *Invent. math.* **71** (1983), p. 1–20.

[6] ______, « Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique », in *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, Lecture Notes in Math., vol. 1553, Springer, Berlin, 1993, p. 1–49.

[7] ______, « Birational invariants, purity and the Gersten conjecture », in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 1–64.

[8] ______, « Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale », in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 1–12.

[9] J.-L. Colliot-Thélène & B. Kahn – « Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis », *J. K-Theory* **11** (2013), p. 1–53.

[10] J.-L. Colliot-Thélène & W. Raskind – « $\mathscr{K}_2$-cohomology and the second Chow group », *Math. Ann.* **270** (1985), p. 165–199.

[11] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc – « La R-équivalence sur les tores », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), p. 175–229.

[12] ______, « On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch », *Duke Math. J.* **48** (1981), p. 421–447.

[13] ______, « La descente sur les variétés rationnelles. II », *Duke Math. J.* **54** (1987), p. 375–492.

[14] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc & C. Soulé – « Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux », *Duke Math. J.* **50** (1983), p. 763–801.

[15] S. Endô & T. Miyata – « On a classification of the function fields of algebraic tori », *Nagoya Math. J.* **56** (1975), p. 85–104.

[16] N. Fakhruddin – « On the Chow groups of supersingular varieties », *Canad. Math. Bull.* **45** (2002), p. 204–212.

[17] K. Fujiwara – « A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, p. 153–183.

[18] P. Gille & T. Szamuely – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 101, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[19] A. Grothendieck – *Le groupe de Brauer, I, II, III. Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland / Masson, 1968.

[20] S. Lang – « Algebraic groups over finite fields », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 555–563.

[21] S. LANG & A. WEIL – « Number of points of varieties in finite fields », *Amer. J. Math.* **76** (1954), p. 819–827.

[22] Y. I. MANIN – « Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne », in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 401–411.

[23] A. S. MERKUR′EV & A. A. SUSLIN – « K-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета (K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism) », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), p. 1011–1046, 1135–1136.

[24] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1980.

[25] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT & K. WINGBERG – *Cohomology of number fields*, second éd., Grundl. math. Wiss., vol. 323, Springer, Berlin, 2008.

[26] R. PARIMALA & V. SURESH – « Degree three cohomology of function fields of surfaces », *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), `doi:10.1093/imrn/rnv280`.

[27] J-P. SERRE – *Cohomologie galoisienne*, 5e éd., Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, Berlin, 1994.

[28] A. N. SKOROBOGATOV – « Beyond the Manin obstruction », *Invent. math.* **135** (1999), p. 399–424.

[29] A. A. SUSLIN – « Torsion in K_2 of fields », *K-Theory* **1** (1987), p. 5–29.